

La Trasposizione Meta-Didattica: evoluzione di un quadro teorico per l'analisi dei processi di collaborazione tra insegnanti di matematica e ricercatori

Ornella Robutti (*Università di Torino*), Annalisa Cusi (*Sapienza Università di Roma*),
Monica Panero (*SUPSI, Locarno, Svizzera*), Eugenia Taranto (*Università di Enna "Kore"*),
Gabriella Pocalana (*Università di Pavia*), Gilles Aldon (*ENS Lyon, Francia*),
Riccardo Minisola (*Università di Torino*)

Indice

| | |
|---|----|
| <i>THE SEMINAR</i> | 3 |
| <i>THE REPORT</i> | 4 |
| <i>1. INTRODUCTION</i> | 4 |
| <i>2. THE MDT.1 FRAMEWORK: MODELLING THE META-DIDACTICAL LEVEL</i> | 6 |
| <i>3. THE MDT.2 FRAMEWORK: LOOKING INSIGHT THE INTERNALISATION PROCESS</i> | 10 |
| 3.1 The <i>how</i> of internalisation..... | 11 |
| 3.2 The <i>why</i> of internalisation..... | 12 |
| 3.3 The <i>where</i> of internalisation..... | 14 |
| <i>4. THE ANALYSIS OF AN EXAMPLE ACCORDING TO THE THEORETICAL ELEMENTS OF THE MDT.2 FRAMEWORK</i> | 16 |
| 4.1 The context of the example: a PLS program for in-service mathematics teachers | 16 |
| 4.2 Data collection | 17 |
| 4.3 The mathematical and the didactical praxeology referred to the data | 17 |
| 4.4 Analysis of the example from the perspective of the <i>how</i> of internalisation | 19 |
| 4.4.1 <i>Zooming in</i> the <i>how</i> of internalisation..... | 20 |
| 4.4.2 <i>Zooming out</i> the <i>how</i> of internalisation..... | 31 |
| 4.4.3 Conclusion of this part | 35 |
| 4.5 The <i>why</i> of internalisation..... | 36 |
| 4.6 The <i>where</i> of internalisation..... | 44 |
| <i>5. NEW THEORETICAL LENSES TO TAKE INTO ACCOUNT: A FURTHER EVOLUTION OF MDT.2</i> | 52 |
| 5.1 MDT.2 and the documentational approach | 52 |
| 5.2 MDT.2 and beliefs | 59 |
| 5.3 MDT and the institutional position of actors in the meta-didactical process..... | 61 |
| <i>6. FINAL DISCUSSION</i> | 65 |
| <i>7. REFERENCES</i> | 68 |

| | |
|---|-----------|
| <i>APPENDIX 1: Analytic Index.....</i> | <i>73</i> |
| <i>APPENDIX 2: Trascrizione del Terzo incontro</i> | <i>74</i> |
| <i>APPENDIX 3: Trascrizione del Quarto incontro</i> | <i>90</i> |

The Meta-Didactical Transposition: evolution of a theoretical frame to analyse collaborative processes between mathematics teachers and researchers

Ornella Robutti (*Università di Torino*), Annalisa Cusi (*Sapienza Università di Roma*),
Monica Panero (*SUPSI, Locarno, Svizzera*), Eugenia Taranto (*Università di Enna "Kore"*),
Gabriella Pocalana (*Università di Pavia*), Gilles Aldon (*ENS Lyon, Francia*),
Riccardo Minisola (*Università di Torino*)

THE SEMINAR

The aim of the seminar is to present the Meta-Didactical Transposition (in the following MDT) framework by introducing its evolution over the years. Moreover, we will reflect on the flexibility of the framework as a theoretical tool to investigate, from different perspectives, the collaborative interactions between teachers and researchers within professional development programs and research projects, and the effects of these interactions.

During the seminar, we will focus on a unique set of data and examine it using the various theoretical lenses provided by the MDT framework as complementary perspectives. Through this analysis, we show the role that these lenses could play in enabling us to investigate the complexity of the phenomena developed within teacher education contexts.

This report follows the structure of the seminar and is made of:

1. An introduction, where we set the scene from a theoretical point of view, giving the explicit reasons for the choice of Chevallard's ATD as a basis of our model (MDT), and discussing other frames in literature, however not chosen.
2. A section on the MDT framework in its first version, MDT.1 (Arzarello et al., 2014), introducing the theoretical lenses established when the framework was originally developed and that are necessary to understand its applicability.
3. The presentation of the evolution of the framework, MDT.2 (Cusi et al., 2022), with the aim of introducing a threesome of new complementary theoretical lenses that were included within the framework to render possible the analysis of the complexity at the base of the phenomena involved in teacher education contexts.
4. The analysis of an example according to the theoretical lenses provided by the MDT framework (we use MDT to include both MDT.1 and MDT.2). This part contains also the presentation of the institutional context where the analysed data were collected and of the research methodology.
5. The introduction of new theoretical lenses as an evolution of the MDT.2 framework, in relation to the teachers' use of resources, their beliefs, and their positions within their institutions.
6. Possible new directions of investigation related to the theme of the collaborative joint work between the communities of actors involved in the phenomena object of our investigation.

A list of references closes the report.

Appendix 1 contains an analytic index of the technical terms used in the report, and Appendices 2 and 3 contain the data set.

THE REPORT

1. INTRODUCTION

Education is a “total fact” in the sense given by the anthropologist Marcel Mauss (1923/2007) that is to say, “a fact that sets in motion the totality of society and its institutions” (p. 102). It is therefore a complex phenomenon that needs to be studied in its entirety, and in particular by considering all those involved in education as voices that need to be taken into account. This epistemological concern leads us to consider teachers, teacher educators, researchers as key actors in educational research. To understand the complexity of the phenomena involved, it is essential to consider the points of view of all these actors, when they are together involved, as part of different institutions, in professional development programs or research projects. The need to investigate such complexity has been particularly emerging in the current century as a field of research (Adler et al., 2005; Sfard, 2005), with a specific focus on the investigation of the processes that characterise the ways in which teachers learn when they are involved in a collaborative work (Robutti et al., 2016; Robutti et al., 2024), where collaboration is used in its etymological meaning from Latin (*cum laborare*).

This investigation requires to study the interactions between all the actors involved in such phenomena in order, on the one hand, to understand and to enhance the mechanisms of professional development, and, on the other hand, to enable every actor to become aware of each other's contributions to academic research. With this goal, we developed a theoretical framework aimed at supporting us in the investigation of these complex processes.

The working hypotheses behind the development of this framework were based on three fundamental ideas. First, the framework should account for the complexity of the phenomena involved by considering different theoretical perspectives to interpret them. Second, the framework should also account that all the actors involved in education have an equal voice to participate in collective reflection since the institutions to which they belong have an equal importance in the educational processes. Third, as these voices are echoes of the institutions to which the actors belong, the framework should consider the institutional positions of the actors, as well as their professional tasks and aims.

Bearing in mind that the field of our research concerns mathematics education, we found that the framework of the Anthropological Theory of the Didactic (Chevallard, 1985) aligns with these fundamental ideas. For this reason, we referred to it with the aim of expanding it to encompass not only didactic, but also meta-didactical considerations, in the sense of *reflecting on* the didactic dimension of the teaching and learning mathematics at school.

The Anthropological Theory of the Didactic (ATD) aims to take into account all the possible factors of learning: it operates at all social levels, paying particular attention to the institutional construction of knowledge (including both the aspects of teaching and learning), and its dissemination (Chevallard, 1992; Chevallard & Bosch, 2020a).

The ATD is a theoretical model that places persons and institutions at the centre of its study. ATD considers every human being to be a person, and everything that is instituted (a class, a school, a family, a university) to be an institution. What is fundamental in this theory is the relationship between persons and institutions: the term that refers to this relation is the *institutional position*, namely a person who is a member of an institution has a position within it (e.g., teacher and students have two different positions in the institution class). The process of teaching and learning also implies the involvement of objects in this process, in the sense that persons can have relations with these objects because they can do things with them. And in these relations, there is the knowledge of a particular object by a person. According to ATD,

“any human activity can be decomposed into a succession of *tasks* of various *types*” (Chevallard & Bosch, 2020a, p. 55).

The term *praxeology* (the term is a neologism from ancient Greek, composed by *praxis* and *logos*) is used in ATD to indicate the type of tasks and the activity to solve it. A praxeology is made of four components:

- a *type of task*;
- a *technique*: a way of solving the type of task;
- a *technology*: a discourse on the technique that legitimizes and justifies it; the word technology is considered in its primary meaning, i.e. *technología* (τεχνολογία) *téchnē* (τέχνη), ‘craft’ and *logos* (λόγος) ‘language’, ability to communicate, discourse about the technique that justifies it;
- a *theory* on which the technology is based: “statements of more general and abstract character, with a generally strong justifying and generating power” (Chevallard & Bosch, 2020a, p. 56).

Praxeologies in the ATD have a fundamental role: they are considered as a model of human activity and as the primary objects of analysis to approach cognition, to understand processes of education, in which persons are involved in institutions with a certain position.

As a team of scholars from Turin and Modena and Reggio Emilia Universities, in the years 2008-12, we felt the need to identify a theoretical framework to study the complexity and the richness of the collaboration between mathematics teachers and researchers, which plays a key role within the Italian paradigm *research for innovation* (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998). We worked in building a theoretical framework, based on ATD, to investigate and to model this collaboration.

This framework was presented at the National Seminar in Didactics of Mathematics of the association AIRDM in 2012 (<http://www.seminariodidama.unito.it/mat12.php>), and then in an international publication (Arzarello et al., 2014). We referred to ATD since our aim was to describe and analyse the educational processes taking place in the institutions, and to consider the institutional position of persons and objects involved in these processes. Therefore, we used the idea of praxeology, adapting it to the institutional context of teachers engaged in professional development courses or in other initiatives with researchers.

In those years, we decided to base our framework on Chevallard’s ATD, and not on other frameworks already present, since ATD supports very well the characteristics of the framework we wanted to develop, being:

- rooted in an institutional viewpoint,
- effective in supporting the study of the processes involved in the interactions between different communities working together,
- useful for describing these processes in a dynamic way, showing the evolution of praxeologies in the different institutions.

Other frameworks were used in those years, as for example those derived by Shulman, a pioneer who introduced Pedagogical Content Knowledge (PCK) to highlight the importance of pedagogy in teacher education, and defined it as “the most powerful analogies, illustrations, examples, explanations, and demonstrations, ... the most useful ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others” (Shulman, 1986, p. 7). The value of his studies was acknowledged by other scholars, who understood the potentiality of PCK, combined with subject knowledge and curriculum knowledge, in forming “critical knowledge bases for understanding and improving subject-specific teaching” (Venkat & Adler, 2020, p.

655). PCK has been combined with Subject Matter Knowledge (SMK) in the Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) framework, specifically used in mathematics education research. Mathematics Subject Matter Knowledge refers to “knowledge of the discipline’s body of concepts, procedures, and processes, of deriving results and warrants for these processes” (Adler & Venkat, 2020, p. 817). Ball and colleagues (Ball et al., 2008), highlighting the fundamental difference between mathematics and mathematics for teaching, used MKT to develop a framework usable from the empirical, analytical, and theoretical point of view, with the scope of understanding how components of teachers’ professional knowledge are associated with student achievement gains. They defined distinct components of knowledge of teachers and corresponding ways to identify them and to classify them: (a) knowledge of content and students; (b) knowledge of content and teaching; (c) knowledge of content and curriculum. Referring to SMK they identify specialized content knowledge (SCK) as an important sub-domain of mathematical knowledge. Bass (2005) stresses that SCK is defined as strictly mathematical knowledge (not about students or about pedagogy) that proficient teachers need and use.

Although the MKT framework and all its developments were interesting for studying teachers’ knowledge, at the time, in order to choose a framework for our study and for the institutional context in which it was situated, we needed a theoretical approach that could be used to trace processes in a dynamic way, rather than in a static one – referring to the knowledge at a certain point in time.

2. THE MDT.1 FRAMEWORK: MODELLING THE META-DIDACTICAL LEVEL

The framework, named Meta-Didactical Transposition (MDT.1), was aimed at investigating over time the processes of teachers and researchers’ interaction, focusing both on the practices developed by mathematics teachers and researchers when they collaborate in various ways and in different contexts and the ways in which they discuss on these practices and justify the choices made when these practices are developed.

The ideas guiding the development of MDT.1 were:

- a) Considering the importance of the institutions in which mathematics teachers collaborate with researchers, by referring to the Anthropological Theory of the Didactic (Chevallard, 1985).
- b) Focusing on the work of teachers in communities of inquiry (Jaworski, 2008) to take into account the organisation of the main professional development programs carried out in Italy (e.g., *m@t.abel*, Piano Lauree Scientifiche, Math MOOC UniTo, ...), in which teachers collaborate with each other in small/large communities.
- c) Focusing on the interaction between communities of teachers and communities of researchers, involved in professional development programs or action-research projects/groups.
- d) Considering the reciprocal influences between the communities of teachers and the communities of researchers, in line with our research context (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998).
- e) Investigating the evolution of the practices developed when the different communities interact in a dynamic way, looking at the processes accompanying their evolution and at the role played by their reciprocal influences.

MDT.1 is based on the Anthropological Theory of the Didactic, which considers that, in the final analysis, all human activity in institutions consists of praxeologies. A praxeology is made

of the four *components* described in the previous section (type of task, technique, technology and theory).

In the context of mathematics education, a praxeology could be:

- *mathematical*, when it aims to characterise the human activity around the accomplishment of a mathematical type of task, for example, drawing the graph of quadratic functions;
- *didactical*, when it aims to characterise the human activity around the accomplishment of a didactical task, i.e. each task that a teacher faces when he/she has to plan her/his teaching with the aim of fostering students' learning.

A didactical praxeology models the practices and knowledge involved in teaching to bring out a mathematical praxeology in the classroom.

If knowledge is seen as a changing reality embodied in human practices that takes place in social institutions, teaching and learning cannot be thought of in individualistic terms. For this reason, Chevallard introduced the notion of *transposition* to emphasise that what is taught in school has its origins in other institutions and is constructed in precise practices under corresponding logos (Chevallard & Bosch, 2020b).

The term *didactical transposition* is used by Chevallard to refer to the “transformations an object or a body of knowledge undergoes from the moment it is produced, put into use, selected, and designed to be taught until it is actually taught in a given educational institution” (Chevallard & Bosch, 2020b, p. 214). This process of transposition starts in academics with the so-called *scholarly knowledge* and is transformed in a *knowledge to be taught*, then in a *taught knowledge*, until the final form of *learned knowledge*.

In MDT.1 the term *Meta-Didactical Transposition* refers to the transposition of *scholarly knowledge* developed by research in mathematics education to *knowledge to be taught* at the meta-didactical level (that is in teacher education or action-research contexts) and included in didactical praxeologies. In this way, we shifted from the didactical level (introduced by Chevallard) to the meta-didactical level, to model the human activities in the institutions when teachers are engaged in working with researchers to reflect on the didactical processes.

The MDT.1 framework (Figure 1) is characterised by five main theoretical ideas (Robutti, 2020).

The first idea, in line with the aim behind the development of MDT.1, is the role played by *institutional aspects* in the processes of interaction between communities of teachers and researchers, as both communities are immersed in an institution, which requires the members of the communities to behave according to specific conditions and constraints. The word ‘institution’ has to be taken in the Chevallard’s meaning: “Behind the persons, and the knowledge, there appeared the institutions, to be regarded on a par with the persons, in the light of a dialectic between persons and institutions. Persons are the makers of institutions which in turn are the makers of persons” (Chevallard, 2007, p. 132).

The second idea is the notion of *meta-didactical praxeologies*, which refers to *meta-didactical tasks* introduced within teacher education programs and action-research projects and to techniques, technologies and theories that refer to the knowledge useful to reflect on the didactic system. The meta-didactical praxeologies can be referred to both teachers and researchers, as actors involved institutionally in the didactic system, who work and reflect on it, *teachers praxeologies* and *researchers praxeologies* are different instances of meta-didactical praxeologies (Minisola et al., 2024). In fact, “Within meta-didactical praxeologies,

what is under scrutiny is not the didactics in the classroom, but the practices and the theoretical reflections developed in teacher education activities” (Aldon et al., 2013, p. 101).

The third idea is constituted by the *dynamics between external and internal components* of a praxeology. Meta-Didactical Transposition introduces a dynamic model which relies heavily on the fact that certain components of the praxeologies of the two communities change status over time. These components could change their status, from external to internal status, according to the community under study. The process by which this change in status is realised is called *internalisation*.

The fourth idea is the notion of *double dialectic*. It considers the fact that the members of the communities of teachers and researchers interacting together have the opportunity to experiment two dialectics. The first dialectic arises at a didactical level, between the personal meaning that students attribute to the teaching situation and its shared scientific meaning. The second dialectic is at a meta-didactical level, between the interpretation given to the didactical dialectic by the various actors involved in the Meta-Didactical Transposition process, based on their respective praxeologies.

Finally, the fifth idea is the role of *brokers* played by specific members of the interacting communities. The driving force behind the dynamics that characterise the Meta-Didactical Transposition processes is, in fact, the opportunity given to the actors to link their respective praxeologies. This opportunity is the result of the actions of specific members of the communities, who act as brokers, fostering a dialogue and the sharing of ideas: “Brokers facilitate the sharing of knowledge and practices from one community to the other [...]” (Aldon et al., 2013, p. 104).

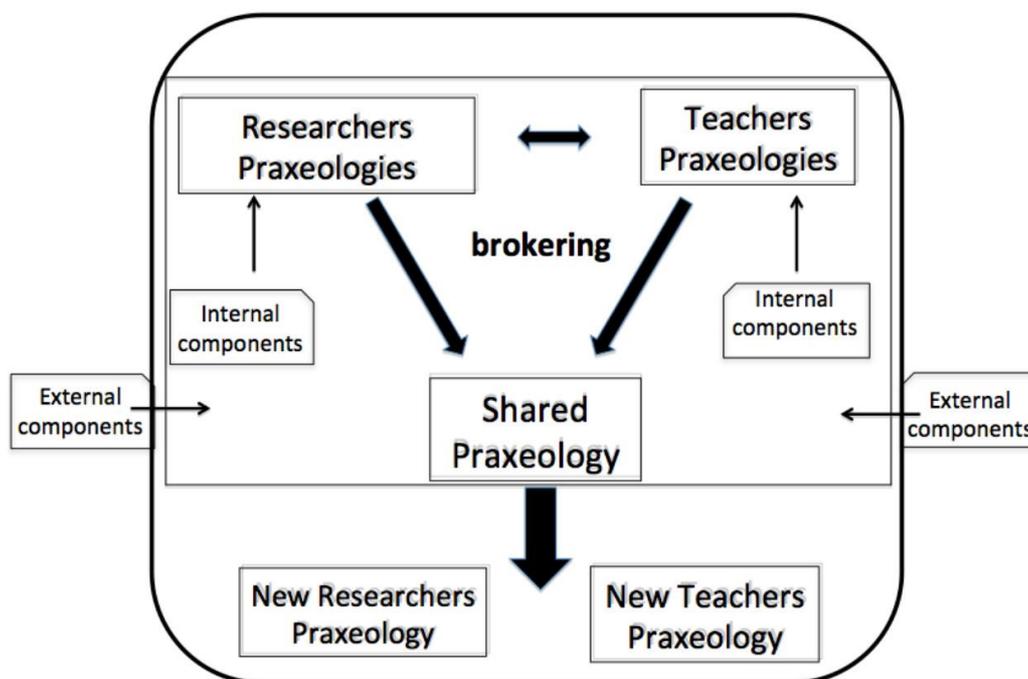


Figure 1: An illustration of MDT.1 (Arzarello et al., 2014, p. 355)

A first example of analysis supported by MDT.1 has been reported in several papers from the European project FaSMEd (Formative Assessment in Sciences and Mathematics Education; The research leading to these results has received funding from the Europe and Community’s Seventh Framework Programme fp7/2007-2013 under grant agreement No[612337]) (Aldon

et al., 2017; Aldon et al., 2022). Through these studies, the MDT.1 has emerged as a relevant framework for analysing and facilitating interactions between researchers and teachers in a design-oriented research setting. In particular, analysing the interactions between the actors involved in research in terms of the double dialectic has made it possible to highlight the professional development of the actors involved in research, since the use of MDT.1 enabled to show “the evolution of beliefs about formative assessment with technology and contribute to the understanding of the meta-level reflection necessary for a daily use of FA [formative assessment] strategies in the classroom” (Aldon et al., 2017, p. 556). One crucial idea within MDT.1 is that, thanks to the internalisation process, the praxeologies of teachers and researchers could hopefully evolve towards new praxeologies that share common components. This evolution leads to what we call *shared praxeologies*, which fosters a change in teachers’ and researchers’ position within their institutions. For this reason, it is important to investigate both the internalisation process and its effects in terms of new and shared praxeologies. Discussions between researchers and teachers, whether in the classroom, remotely or face-to-face, are methodological tools for collaboration. The concept of formative assessment and implementation techniques were shared between the actors, which led to significant advances in our common understanding of the boundary object (FA) and the phenomena involved, as well as in the actual implementation of the formative evaluation process: “At a meta level, this meeting [between researchers and teachers] contributed in the instrumental genesis of the FA instruments and was later considered by the teacher, in his personal journal, as a fundamental moment of awareness of FA as a pedagogical method” (Aldon & Panero, 2020). We can speak here of praxeologies, shared between teachers and researchers.

Pocalana and Robutti (2024a) applied the MDT.1 framework to study the collaborative work of teachers and researchers during a professional development program focused on the inquiry-based learning approach in mathematics, addressed to lower secondary school in-service mathematics teachers. In this context, the two communities work collaboratively on the design of inquiry mathematics tasks. MDT.1 framework was applied to study the evolution of teachers’ and researchers’ meta-didactical praxeologies for designing inquiry mathematics tasks, to understand if and how their collaboration favours their convergence toward shared components of final meta-didactical praxeologies.

As stated above, initially applied to analyse professional development processes, MDT.1 was soon extended to study collaborative research contexts, broadening its application to include members from various fields, such as computer science and design (Cusi et al., 2022). This broader application spurred further reflections on how MDT.1 could be adapted to explore new environments, prompting the integration of additional theoretical elements.

In particular, to better develop the investigation of the internalisation processes realised within these different contexts, MDT.1 needed to be integrated with other important elements that could deepen the study of the process of internalisation from different viewpoints (the *how*, the *why*, and the *where* respectively):

1. The notion of *boundary object* and the framework that characterises the actions that could be carried out on boundary objects, to investigate how internalisation processes are boosted by teachers and researchers’ joint actions on a common object (methodological, epistemological, theoretical, ...);
2. The notion of *agents*, at the micro-level, to identify the driving forces that support the evolution of specific praxeological components at the macro-level;
3. The lens of *connectivism* to describe internalisation as a process that supports the construction and expansions of the actors’ networks of knowledge.

The new framework, integrated with these elements, is called MDT.2 (Cusi et al., 2022).

3. THE MDT.2 FRAMEWORK: LOOKING INSIGHT THE INTERNALISATION PROCESS

In the following, we detail the integration of new theoretical lenses within MDT.1. The presentation of these new lenses will be done by introducing complementary theoretical perspectives for examining interactions among diverse communities of teachers and researchers in various collaborative settings. These perspectives are aimed at enhancing the analysis of the internalisation process within MDT.1, specifying *how*, *why* and *where* it happens (Cusi et al., 2022). This theoretical integration supports a richer interpretation of how, why and where learning could happen within professional development or collaborative research environments, highlighting key aspects of the interaction between the members of the interacting communities. In this way, MDT.1's evolution has led to a framework, MDT.2 (Figure 2), that aims at being more flexible in describing, analysing and interpreting the internalisation processes that are realised within collaborative contexts.

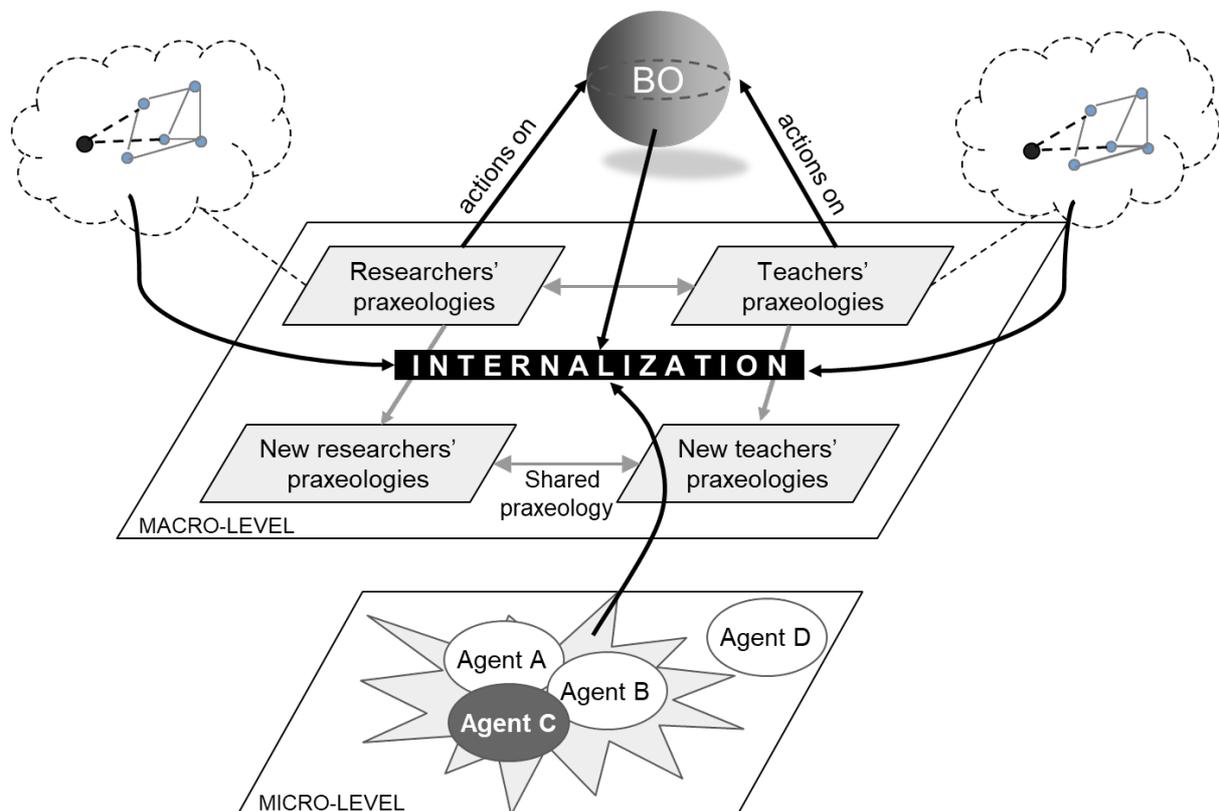


Figure 2: MDT.2 as the result of the integration of MDT.1 with the analysis of actions on a common boundary object, of agents at the micro-level, and of network of knowledge expansion

In the next sections, we present the theoretical frameworks behind the three new lenses integrated within the MDT.1 framework. Then these lenses will be used to analyse the same set of data, according to the three different perspectives of the how, the why and the where (Cusi et al., 2022) to investigate the process of internalisation.

3.1 The *how* of internalisation

To investigate the *how* of internalisation, the notion of *boundary object* (BO) and a framework to interpret the processes that are developed at the boundary were integrated within MDT.1. These new theoretical elements support the analysis of the discourses that the teachers and researchers develop when working on a common object and enable to deepen the interpretation of the evolution of specific praxeological components.

The concept of BO originated in an ethnographic study of the coordination mechanisms of scientific work (Star & Griesemer, 1989). The BO has three essential characteristics: interpretative flexibility, material structure or organisation, and granularity (it can be conceived as made up of different parts). The BO is understood as a device that allows the initiation of joint work between several communities and ensures sufficient flexibility for everyone to find an interest in its study or use. It should be noted that this interpretation, this arrangement, can only concern an object of professional importance in each of the communities.

Including this notion within MDT.1 enabled us to conceive the boundaries of the BO as the collaborative contexts within which the people involved in the work on BO have opportunities to exchange and pursue common aims. In the context of MDT, BOs represent the focus of the interactions between different communities (researchers and teachers) and the work on BO is seen as a driving force that triggers the evolution of the praxeologies of the members of these communities. This evolution takes place when a property, a concept, an experience or a piece of knowledge contributed by one or other of the communities within the joint work on a BO is internalised by the members of the interacting communities. Internalisation is understood as the result of the communities' discussions and reflections on their joint work on the BO, as these processes turn the objects of reflection into internal components of the communities' didactical or meta-didactical praxeologies.

We consider collaboration to exist when at least two actors work together to achieve common goals. This requires the actors involved to share their knowledge or uses through verbal or non-verbal exchanges, generally established around an object related to the goal assigned to the collaboration. We will refer to these exchanges as *interactions*. In these interactions, the participants exert multiple influences on each other, transforming or shaking their systems of thought. Individual actions on the objects of interaction are determined by the goals that each person assigns to the collaborative work in their own institution. For a collaboration to be established over time, the object at the centre of the interactions must be sufficiently common so that successive interactions gradually shed light on it. It must have initial properties that are sufficiently established in the knowledge systems of the various actors so that each of them can engage in purposeful interactions within his/her institution. This flexibility brings us back to the definition of boundary objects proposed by Star and Griesemer (1989, p. 393), in which the property of 'interpretative flexibility' allows the object to be adapted to different institutions. Another fundamental aspect of understanding the boundary object is its necessary internal structure, highlighted by Star and Griesemer (1989) and taken up more recently by Star (2010): "The two other aspects of boundary objects, much more rarely cited or used, are (1) the material/organizational structure of different types of boundary objects and (2) the question of scale/granularity" (Star, 2010, p. 602).

The structure of the boundary object and the granularity through which it is observed lead us to think of it as a container that can be decomposed into sub-objects that inherit its properties, following the object-programming analogy referred to by Star (2010): "In the term 'boundary object', I use the term object in both its computer science and pragmatist senses, as well as in the material sense" (p. 603). A boundary object only exists when actors act on it; it must therefore be part of human activity, which can be described in terms of praxeologies. To

describe *how* this development occurs and to highlight evidence of the internalisation process in the discourses that are carried out within the interacting communities as they collaboratively work on a common BO, we refer to Carlile's (2004) characterisation of the types of actions that can be carried out on BOs and are likely to modify boundaries by expanding the space of shared understanding of the BO by the different communities.

The first action is knowledge *transfer* and refers to communications whose validity is not disputed by the speakers and for which the boundary remains stable. In other words, transfer refers to interactions where disagreement may occur, but where the exchanges concern concrete, syntactic aspects of the boundary object. For this reason, transfer is said to characterise the *syntactic level* of communication between actors working on the same BO.

The second action is *translation* and takes place at the *semantic level*, since the focus of communication between actors is a negotiation of the meaning of certain elements of the BO on which the different actors are working together. The search for a common, shared meaning leads to changes in points of view, with the BO acting as a cognitive mediator between the communities.

The third action is *transformation* and is linked to social mediation, in which the interests of the communities pragmatically construct the boundary space, which is then socially recognised. This action is carried out at a *pragmatic level* and aims to enable actors to integrate specific BO's elements within their practices. The knowledge at stake is then transformed through negotiation between the actors to create a new shared knowledge: "When interests are in conflict, the knowledge developed in one domain generates negative consequences in another. Here the costs for any actor are not just the costs of learning about what is new, but also the costs of transforming 'current' knowledge being used (i.e., common and domain-specific knowledge)" (Carlile, 2004, p. 559).

With reference to Carlile's characterisation of the levels of communication between actors working on a common BO, it is possible to show how the discourses between the communities help to promote the internalisation process. This process modifies the actors' praxeologies and leads to a "shared praxeology" characterised by a mutual understanding of the different components of the actors' praxeologies.

3.2 The *why* of internalisation

The need to explore the *why* of internalisation arose in the context of a professional development course which promoted a specific didactical use of GeoGebra. In the end, as it might happen in any professional development context, the course had very different outcomes on the praxeologies of the participating teachers (Prodromou et al., 2018). Some of them integrated the promoted use of GeoGebra as a component of their didactic praxeologies; other teachers experimented with the proposed activities but decided not to adopt them in their daily praxeologies. It arose therefore the need to highlight the causes that determine a successful or unsuccessful internalisation process.

To this purpose, MDT.1 was integrated with a new theoretical element, which allowed us to study the professional development process and product as it happens for physical phenomena related to gas. In physics, we distinguish between two levels of variables, to model a gas: macro variables (e.g., temperature, pressure or volume of the gas) and micro variables (e.g., mass or velocity of a particle). The interaction of micro variables is observable as the emergence of new macro variables, as evolution of the previous ones. Similar phenomena happen within professional development contexts, where interactions among several smaller and simpler *agents* at the micro-level can influence the internalisation process, at the macro-level

(Goldstein, 1999), determining an evolution in the praxeologies. A micro-level of analysis was then added to MDT.1, where different agents may be active or activated to interact with each other (Prodromou et al., 2018). This interaction may (or not) determine teachers' praxeologies development and evolution, and this is visible as a product at the macro-level.

More specifically, with the term *agent* we intend any human or non-human entity involved in the mathematical activity (de Freitas & Sinclair, 2014). In Prodromou et al. (2018), we identified the following list of agents that should not be considered as a rigid or exhaustive classification, but as a helping guide for detecting agents in the teachers' and researchers' discourse and actions:

- *Methodological* agents include commonly used teaching practices which primarily fall into two extreme categories – teacher-centred (explaining, or lecturing, demonstration and direct instruction), and student-centred (class participation, inquiry-based learning, cooperative learning, discussions, etc.) – between which are more nuanced approaches that make use of the two extremes in different proportions. To make some examples, they can be linked to the way teaching and learning materials are used to solve mathematical activities or to the way a classroom activity or discussion is designed and orchestrated.
- *Institutional* agents include national curriculum, national assessment and syllabuses proposed by mathematics associations (e.g. Italian Unione Matematica Italiana – UMI). They also include congresses, seminars, national or local teachers' programmes of professional development – events organised by the institutions that bring people of different communities of practice together, providing them with opportunities to immerse in another practice. These agents can act at different levels, from the most specific (e.g. student, class, school) to the most generic (e.g. generic student or class, school system), recalling the Chevallard's *levels of didactic co-determinacy* (Chevallard, 2019. See also paragraph 5.3).
- *Technological* agents include software (e.g. dynamic geometry environments, spreadsheets, apps) and hardware (e.g. display technologies, interactive whiteboards, beamer), as well as the use of the web in passive (when one explores websites to find texts, videos, tutorials and so on), or interactive modes (when one participates in chats or forums of virtual communities, posts personal contents and opinions in specific platforms or social networks, etc.). Obviously, the counterpart of technological agents are materials agents (e.g. paper and pencil environments, textbooks, worksheets) which can be considered in mutual dialogue with the use of specific software or hardware in order to improve the potentialities of both kinds of agents.
- *Motivational* agents come from the teachers' or researchers' experience and beliefs and influence action and choices in the different communities. For example, they represent the teachers' motivation to join a programme of professional development or participate in a research project. The motivational agents are influenced by teachers' and researchers' beliefs about the nature of mathematics, the nature of mathematics teaching and learning, themselves as educators, their learners, other colleagues as peers or the headmaster.

To the above list, we added agents not present in our previous work (Prodromou et al., 2018), but that can be identified at the micro-level of professional development, namely in the data analysed in this report:

- *Disciplinary* agents include theoretical or procedural aspects underpinning the didactical choices and actions while designing and carrying out a mathematical activity. They can be specifically linked to the *a priori* or *a posteriori* analysis of the task, to the

mathematical concepts at stake, or more generally to the vision of mathematics and to epistemic considerations.

When a teacher is planning and teaching, the interaction between different agents, at the micro-level, contributes to shaping the teacher's praxeologies or some of their components (technique, technology or theory), at the macro-level. In a similar way, when teachers interact with other teachers or with researchers in designing, analysing or discussing a task, the interaction of different agents – also acting on different members – may trigger the evolution of praxeological components of the different communities involved. Therefore, the introduction of the micro-level of analysis could enable researchers to identify the driving forces that trigger (or sometimes inhibit) the evolution of specific praxeological components characterising the internalisation process.

3.3 The *where* of internalisation

The study on the *where* of internalisation has started from the application of MDT.1 to an online teacher professional development context, specifically the Math MOOC UniTo project (2015-2020) by the University of Turin (Taranto & Arzarello, 2020; Taranto et al., 2020). Here, two communities – educators and a large group of teachers from across Italy – engaged online, allowing teachers to freely share ideas and resources on the platform that hosted the MOOC (Massive Open Online Course). This unstructured interaction enriched the MOOC, fostering teachers' internalisation of praxeological elements (Taranto et al., 2020).

Given the specific environment of MOOCs, with their complex online synchronous and asynchronous interactions, to study the internalisation process within MDT.1 required integrating the theory of *connectivism* (Siemens, 2005).

According to connectivism, knowledge is a particular type of network, whose nodes are “any entity that can be connected with another node” (Siemens, 2005, p. 4), including information, data, images, ideas, and feelings. The network is dynamic and may change over time, so learning is a continuous process of network exploration, involving construction, development, and self-organization of knowledge (as a network). Hence, learning consists not only in adding new nodes, but especially in connecting existing nodes with each other and in making sense of these connections. According to connectivism, learning involves the following:

- a) adding a new node to own network of knowledge;
- b) connecting (in the sense of relating) old nodes of their own network of knowledge in a new way.

The network of knowledge is thus dynamically modified: learning “is not only learning new things” but “rather also means being able to see concepts differently that were already known (reflect, think again, integrate them into a different perspective)” (Taranto, 2018, p. 77).

Connectivism¹ is useful in observing teachers' activity in MOOCs, where they engage alone and at distance, but simultaneously they can be connected with all the other participating

¹ Connectivism is presented by his theorist, Georg Siemens (2005), as “A learning theory for the digital age”. “Behaviorism, cognitivism, and constructivism are the three broad learning theories most often utilized in the creation of instructional environments. These theories, however, were developed in a time when learning was not impacted through technology. Over the last twenty years, technology has reorganized how we live, how we communicate, and how we learn. Learning needs and theories that describe learning principles and processes, should be reflective of underlying social environments” (Siemens 2005, p. 3). Moreover, some components of Connectivism, e.g. the actions of ‘adding a new node’ or ‘establishing new connections’ in the network of

colleagues. Each teacher has his/her own network of knowledge and, entering into the MOOC, this network can evolve: he/she can perceive the materials as new and so expand the network, as new nodes are added; moreover, he/she can interact in the virtual environment with the other participants and create new and/or different connections. Researchers can follow the evolution of teachers' praxeologies in MOOC activities in the following ways (Taranto et al., 2020):

- a) adding a new node to one's own network of knowledge, which means that one or more meta-didactical components of a praxeology shift from external to internal;
- b) connecting old nodes of one's own network of knowledge in a new way, which means that one looks at one's didactical praxeologies in a fresh way and possibly modifies them, thus changing also one's meta-didactical praxeologies.

More generally, the evolution of one's network of knowledge, inherent in the description of these two processes – teachers internalising new elements into their meta-didactical praxeologies, and/or reinterpreting existing ones, which can lead to changes in their didactical praxeologies – can also occur in contexts that are not necessarily MOOCs. Interpreting learning as the evolution of the individual's own network of knowledge enables, in fact, to conceive internalisation as a phenomenon that happens within a wide institutional context, which includes not only the institutions to which the individual belongs, but also those at different levels of co-determinacy, for including the complex networks of their interactions.

The lens of the *where*, linked to connectivism, originated in a specific context – the large-scale environment of MOOCs for mathematics teacher education – yet it remains a flexible construct. However, the concept of *where* requires careful examination. Since it was developed within a massive context, applying it to non-massive ones necessitates specific questions directed at teachers. In diverse contexts, outside of MOOCs, teachers continue to add nodes and build connections in various environments, which are not necessarily limited to formal educational settings.

This raises broader questions about how the *where* of learning might change, depending on context size and type. For instance, which new dynamics arise when teachers engage in smaller, structured environments, and how might their network of knowledge evolve differently? Could informal or collaborative spaces offer unique opportunities for teachers to integrate new insights? In this sense, the *where* should be viewed not merely as a physical or institutional location, but as a flexible network of interactions, potentially redefining how and where professional learning occurs across varied educational settings.

Starting with these assumptions, the subsequent analysis explores how these ideas unfold in practice. Specifically, it examines data from a face-to-face teacher educational context, where the data collection was not originally designed with connectivist principles in mind. This exploratory approach, while limited in its intentional alignment with the theoretical framework, still yields significant insights. It invites speculation about the potential depth of understanding

knowledge, have similarities to the constructs of previous theories: this establishes a sort of meta-network of connections between this new frame and some old ones – e.g., the approaches of Piaget (1970) or Skemp (1976). For example, adding a new node can be done for 'accommodating' some 'imbalance' in one's network of knowledge activated because of the interaction with other people, or connecting old nodes in a new way can be seen as a restructuring action that fosters 'relational understanding' rather than the 'instrumental' one. However, a main difference between the connectivist approach and these is that the authors above consider first individual and then social interactions: here the process is reversed; moreover, in a MOOC, social interaction is instrumented by technology. The asynchronous aspect multiplies time and space enormously. It creates possibilities for peer interaction that are not possible in the face-to-face environment.

that could emerge from a more deliberate data collection strategy, explicitly grounded in the *where* of MDT.2 theory.

4. THE ANALYSIS OF AN EXAMPLE ACCORDING TO THE THEORETICAL ELEMENTS OF THE MDT.2 FRAMEWORK

4.1 The context of the example: a PLS program for in-service mathematics teachers

The data have been collected during an eight month educational program for in-service teachers, focused on teaching methodologies for mathematics education. The program was part of the national plan Piano Lauree Scientifiche (PLS), one of whose actions is teacher education, especially in relation with: new methodologies of teaching, and the introduction of new technologies. In the case here examined, the aim was the first. Mathematics secondary school teachers participate in the program on a voluntary basis, but subscribed by the school, as part of an institutional synergy between school and university.

The participants were five lower and upper secondary school teachers, who volunteered to take part in the PD program: four teachers from upper scientific oriented secondary school (9 and 10 grades) and one teacher from lower secondary school (6-8 grades). All the teachers, with the exception of the middle school teacher, had previously attended PD programs organised by the three researchers and were therefore familiar with PD programs in which researchers and teachers share and discuss didactical ideas together. The average teaching experience of the participating teachers was 25 years. In particular, the analysis presented in the following sections focuses on three teachers. The first two are T1 and T2, two experienced upper secondary school teachers who worked in pairs during the program. T1 and T2 work in the same school, in parallel classes, and are used to co-designing activities to be implemented in their classes. The third teacher is T3, a middle school teacher who had her first experience in a PD programme organised by the three researchers and who preferred to work alone during the PD program.

The program consisted of six 2-hour meetings and took place in the Mathematics Department of Turin University, from October 2018 to June 2019. One of the authors was the teacher educator of the program who interacted with the teachers. Other two researchers took part in the meetings as observing participants.

The first meeting was devoted to presenting a theoretical model to frame mathematics teaching methodologies: the method of *varying inquiry* (MVI) (Swidan et al., 2023).

The second meeting was devoted to a “ready-made activity”, aimed at supporting the teachers’ appropriation of the theoretical aspects shared in the first meeting, involving them in a classroom activity to be solved with the role of students, while the teacher educator played the role of the teacher.

The third meeting was devoted to discussing the work developed by the teachers to face a task given to them at the end of the second meeting. The task was aimed at involving them in the process of *scenario design*, which can be conceived as a way of extending the typical activity of task design. Scenario design is defined as a “process of envisioning possible implementations of mathematical classroom activities in which the interventions of the students and the teachers are made explicit. In particular, this process consists not only in designing the tasks for students and the teaching methodology, but also in hypothesising possible students’ answers to the tasks and hypothetical excerpts of classroom discussion, containing teachers’ interventions. The product of this process is an ordered set of scenes - herein called *scenario* - representing the foreseen development of the classroom activity (i.e.

teachers' interventions aimed at supporting students' learning processes, highlighting and discussing their difficulties, activating students' reflections...)" (Cusi et al., 2020, page 1).

Between the third and the fourth meeting, teachers were requested to re-design their scenarios according to the feedback given during the third meeting.

Also, the fourth and fifth meetings were devoted to a collective discussion on the re-designed scenarios. After the fifth meeting, the activities were implemented by teachers in their classes.

The final meeting (the sixth) was devoted to a discussion of how the final scenario reflected what had happened when the teachers had used it as a scenario for their classroom activities, as well as final reflections on the professional development process.

The task given to the teachers at the end of the second meeting of the program was to work in pairs or groups of three to design a scenario on a given mathematical task for students (see Figure 3). This work has been done using software to create comics (LessonSketch, <https://www.lessonsketch.org>).

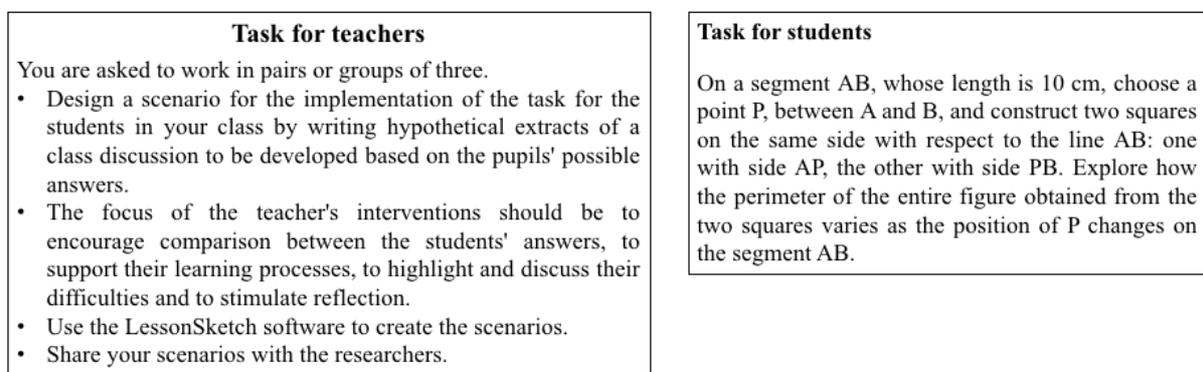


Figure 3: The task for teachers and the task for students

4.2 Data collection

The meetings were video-recorded, and the videos were transcribed. The written scenarios were also collected and analysed. In the last meeting, the teachers were interviewed, and they were asked to reflect on their experience on collaborative scenario design and on the comparison between the scenario design and the actual implementation of the task in their classes. The interviews were also recorded and transcribed later.

4.3 The mathematical and the didactical praxeology referred to the data

One of the problems proposed to the teachers (the one chosen by them among two) was the "Two squares problem", as in the formulation of Figure 3 (Arzarello & Robutti, 2002). This problem gives a segment on which the students have to build two adjacent squares and to investigate the perimeter of the figure obtained (Figure 4). The peculiarity of this problem is that it involves very simple concepts (side, square, perimeter) and their measures, but it demands high competences in reasoning on these concepts, finding the solution, and representing. It is a problem involving functions as models of geometric configurations and the absolute value as measure of a distance. The problem is presented as an open problem (Arsac et al., 1988), with a progression in the tasks, to show how to apply the MVI method.

The teachers were given both the text of the task for students in Figure 3 and a version of the same problem subdivided into three tasks to provide the teachers with an example about how MVI could be applied to a given problem to design a sequence of tasks to support students' inquiry processes. We present in the following only the first two tasks of this sequence.

This problem is followed by the task for the teachers, reported in Figure 3:

Task1: In a segment AB of length 10 cm, take a point P and construct two squares on the same side with respect to line AB : one with side AP , the other with side PB .

How does the perimeter of the entire figure obtained from the two squares change as the position of P on segment AB changes? Describe in your own words.

Task2: Construct the figure of two squares in GeoGebra and build a table to collect the data. Observe and study how the figure varies when you move P over AB .

- Make a conjecture about how the perimeter of the figure changes when P moves and create the graph representing the perimeter based on your conjecture. Verify your conjecture.

Justify the form of the graph which you created, by finding a mathematical expression that represents the perimeter when P varies over AB .

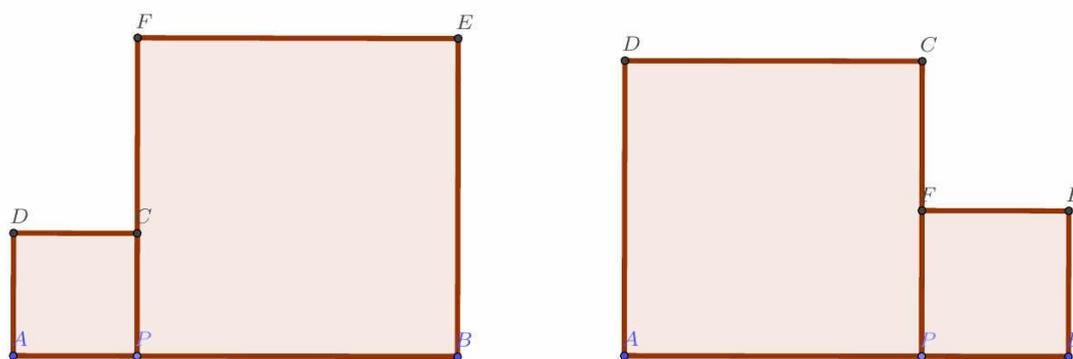


Figure 4: Two configurations of the problem in relation to Tasks 1 and 2

To calculate the perimeter of the figure there are three lengths of each square (PA , AD and DC for the left one, PB , BE and EF for the right one). And we need to add the length of the difference of the sides of the two squares, hence the absolute value of: PA minus PB .

Hence, if we assume $PA=x$, $PB=10-x$, with $0 \leq x \leq 10$, the perimeter of the figure is:

$$p_1(x) = 3x + 3(10 - x) + |10 - x - x| = 30 + |10 - 2x|$$

So, if $x \leq 5$, $p_1(x) = 40 - 2x$ otherwise $p_1(x) = 2x + 20$

The mathematical praxeology is made of:

- a task demanding for a perimeter, in the type of tasks of modelling geometric configurations with linear functions: modelling a geometric situation with a function of a variable that describes the position of a mobile point on a segment;
- a technique based on the calculation of all the sides that concur to the perimeter and adding them, transform a position of a mobile point on a segment into a variable distance to a fixed point and attach a letter to this length, write the variable sought as a function of the variable determined, and study the function thus created;
- a technology that justifies the technique taking into account the two possible symmetric configurations, and asking for two traits of the function, in the left or right half part of

the segment, or for the use of the absolute value, the variations of a function show the relationship between variable quantities;

- a theory in the field of the calculation of perimeters of complex figures, the linear functions, the absolute value, the concept of a real function of one real variable and the basic concepts of calculus.

The didactical praxeologies corresponding to the mathematical one are made of:

- a task demanding to convert a representation of one semiotic system into another one (here natural language into figure and figure into natural language), and to conjecture a variation (roughly). A second task with the different requests to: construct a geometrical figure (square) in a DGE, drag a point (P) on a segment and observe variations in a DGE, measure a perimeter in a DGE, report distances on a system of axes in a DGE, model a geometric situation with a function that represents the algebraic relation between two quantities (perimeter and AP).
- a technique based on drawing a geometrical figure described by a text in natural language and varying the positions of the point P, to measure sides and have the perimeter, to deduce a variation of a quantity (perimeter) in function of a variable (distance of the point P on the segment AB, with respect to A). A second technique based on the use of the commands in GeoGebra to construct a robust figure (that resists to the so-called dragging test) (Arzarello et al., 2002), to drag it in different ways to understand variations and invariants (Arzarello et al., 2002), to measure a distance and manipulate an algebraic expression, to trace a moving point or a geometric locus, to choose the right variable to determine the distances required to solve the problem.
- a technology that justifies the technique taking into account not only the construction of figures, but also the conversion and treatment of different registers of representation², and the variation of an independent variable in relation to the corresponding dependent variable. A second technology based on modelling a geometric situation with a function, and managing treatment and conversion of its expression.
- a theory in the field of semiotic registers of representation of mathematical objects (Duval, 2006), place of experiences in mathematical problem solving (Gardes, 2013), theory of MVI (Cusi et al., 2022), use of dragging modalities in a DGE (Arzarello et al., 2002).

4.4 Analysis of the example from the perspective of the *how* of internalisation

In this section, we analyse the *how* of internalisation, highlighting, through the theoretical lenses introduced in section 3.1, how the internalisation process develops as an effect of the interactions between the actors working on a common BO.

The focus of sections 4.4.1 and 4.4.2 is on the discussions developed by the researchers and the teachers during the third and fourth meetings of the PD program, where the objects of their discourses were mainly the scenarios designed and redesigned by the teachers as a result of their work on the task given by the researchers after the second meeting of the course. The main protagonists of these interactions are, besides the researchers, three teachers.

Generally speaking, the *task* given by the researchers and accepted by the teachers is to develop a scenario design, by constructing the different scenes of a classroom situation. For each of the protagonists, this object is familiar and can be described in terms of praxeologies: the type of

² The first conversion is based on the understanding of geometrical language; the second one (describe in your own words) needs to make an experience (mental experience, or different drawings and measurement) and to convert a geometrical register of representation into a graphical register and into a natural language register.

task for the teachers is to design and implement a classroom situation based on a mathematical problem by designing a scenario of this lesson inventing possible dialogues between the students and the teacher. Finally, the task also includes the use of a software, LessonSketch. For the teachers, the *techniques* for designing and implementing a lesson were available, based on their own experience and their knowledge of institutional requirements (*technologies*). In terms of inventing possible dialogues, the available techniques were probably less present before the PD program. The techniques to be activated and the discourses justifying them (*technologies*) must therefore be sought within the content of the PD program, which allows the actors to justify the interest of putting the pupils in a situation of scientific discussion from both a pragmatic and a theoretical point of view, by referring to the MVI framework (Swidan et al., 2023). Finally, the teachers also developed techniques for using the LessonSketch software, again based on their own knowledge of what a scenario is and of the contribution of digital technology in general. The researchers who had proposed these tasks had designed the educational approach implemented within the PD program on the basis of the techniques explained and methodologically and theoretically justified in the first meetings: designing the scenario and presenting the invented dialogues through the software made it possible to anticipate the students' behaviour and to construct a strong a priori analysis (didactical, not only epistemological) of the situation. These practical justifications were based on the theories of mathematics education and the learning hypotheses underpinning them.

For both meetings, since the task under discussion is to design a scenario, we consider the scenario to be the BO on which most of the actors' work³. The structure of this BO emerges from the dialogues between teachers and researchers. By acting on this BO, the actors model it and define the contours of its structural elements. Here, the dialogues and the use of the software are artifacts through which protagonists act on the BO, gradually developing a shared activity that leads to the identification of a designation (actions at the syntactic level), shared meanings (actions at the semantic level) and a potential use (actions at a pragmatic level).

In the following sections 4.4.1 and 4.4.2, we analyse the actions on the BO by focusing on the discourses developed during the interactions between the actors working on it. In our analysis we adopt two different points of view: first we zoom-in on the discussions between teachers and researchers to characterise the levels at which the communication between actors takes place, the types of actions on the BO associated with different interventions and their effects in terms of the evolution of teachers' praxeologies (section 4.4.1), then we zoom-out to describe, from a global point of view, the series of actions and their effects on the group's activity (section 4.4.2).

The focus of the excerpts analysed in section 4.4.1 is on the parts of the discussions developed during the third and fourth meetings to reflect on the scenario designed by T1 and T2.

The analysis developed in section 4.4.2 will focus on T1 and T2, but also on T3.

4.4.1 Zooming in the how of internalisation

As explained above, the data analysis in this section is carried out as a zoom-in on the discussions that took place during the third and fourth meetings of the PD program.

The excerpts from the discussion developed during the third meeting focus on the first draft of T1 and T2's scenario. During the fourth meeting, the discussion was organised to guide the teachers to reflect on the main differences between the first version of the scenario and the new version, which is the result of a re-design developed in the period between the two meetings.

³ For some teachers it is only an object of work, not a BO, as it will be clear from the analysis in section 4.4.2.

The comparison between the two versions of the scenario allows us to highlight the effects of the reflections developed during the third meeting in terms of the internalisation of new components at the level of the technique of the teachers' praxeology related to the task of developing a scenario design.

The analysis, which aims to zoom-in on these aspects, will focus on:

(1) the excerpts from the discussion held during the third meeting to highlight:

- a) the levels of the discourse (syntactic, semantic, pragmatic) developed by the teachers in their interaction with the researchers;
- b) the types of activities implied in these discourses (transfer, translation, transformation);
- c) the focus of the teachers' discourses in relation to specific components of their praxeologies.

(2) the slides shown during the fourth meeting to compare the draft of the scenario with its new version, to highlight the impact of the reflections developed by teachers and researchers during the third meeting in terms of:

- a) the evolution of the scenarios, focusing on the consolidation of new characteristics of the designed scenarios;
- b) the evolution of the teachers' praxeologies related to the task of scenario design, focusing on the internalisation of new components into them.

Excerpt [17-19] from the third meeting - Negotiating the meaning of “scenario design”

At the beginning of the third meeting, the two teachers T1 and T2, after having explained that they were thinking of proposing the “two squares” activity in a class of 10th graders, share the first draft of their scenario design, stressing that they are aware that it is a kind of a preliminary draft.

The discussion starts with R1 showing the first scene of T1 and T2's scenario (Figure 5). R2 shifts the focus to the use of Lesson Sketch to construct the scenarios.

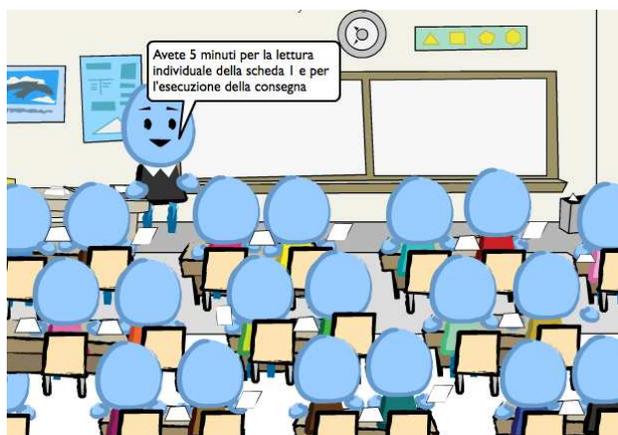


Figure 5: The scene 1 of T1 and T2's scenario

17. **R2:** «Solo una domanda: avete trovato difficoltà a fare questa roba qui con [Lesson Sketch] ...? Cioè mediamente è fattibile, oppure...»
18. **T2:** «Sì, l'unico fastidio è che noi volevamo cercare di condividere il lavoro da subito, quindi abbiamo dedicato un sacco di tempo alla ricerca di come si potesse fare e non ci siamo riuscite. E quindi abbiamo accantonato... poi forse loro sanno...»
19. **R1:** «Sì, il mio suggerimento era: concentriamoci prima sul contenuto e poi su questa parte [Lesson Sketch], perché in realtà questa parte viene dopo, a mio parere. Nel

sensò che prima devo individuare: che cosa può uscire dalla classe e come posso intervenire a seconda degli interventi degli studenti [...]

In this excerpt, some problems related to the process of instrumental genesis in relation to Lesson Sketch emerge: the discussion highlights that the teachers have focused their energies on aspects of software management to build scenarios at the level of the form, not of the content.

The task of “scenario design” is conceived and approached by the teachers and R1 differently:
- the teachers focus their search for a technique in the use of the digital tool through which they act on the scenario;

- the researcher focuses on the need for an a-priori analysis of the task in order to better design the scenario, anticipating the students’ answers and then the teacher’s interventions according to the students’ possible answers and reactions to the teacher’s stimuli.

Here the discussion is at a *semantic level*, as we observe a moment of negotiation of the meaning of the words “scenario design” in terms of the techniques to be used to develop it, that is a *translation* process. In Carlile’s words, “The transition from a syntactic to a semantic boundary occurs when novelty makes some differences and dependencies unclear or some meanings ambiguous. When new requirements and/or new actors are present, interpretive differences in what a word, measurement, or outcome means limits the effective management of knowledge between actors” (Carlile, 2004, p. 558).

Excerpt [25-38] from the third meeting - From the need to make scenarios readable objects to the internalisation of new techniques into teachers’ praxeologies

The following excerpt refers to the moment of the discussion in which scenes 4, 5 and 6 of T1 and T2’s scenario are shown (Figures 6, 7 and 8).

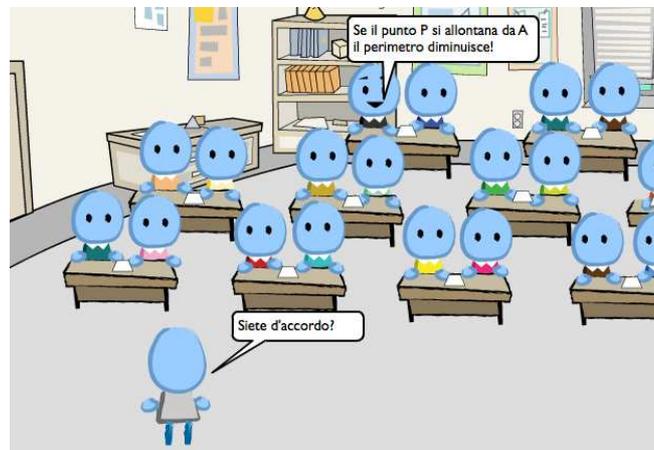


Figure 6: The scene 4 of T1 and T2’s scenario

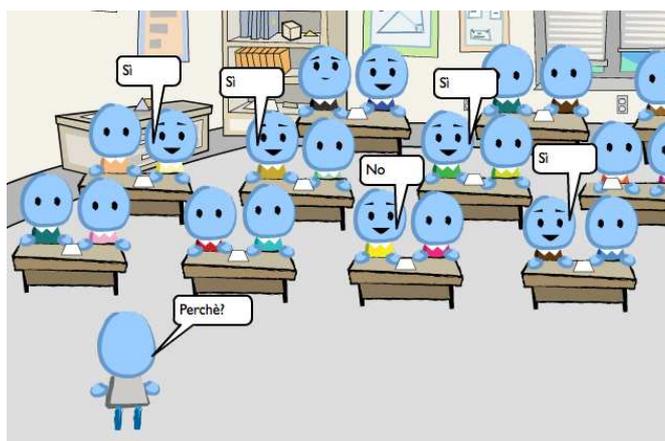


Figure 7: The scene 5 of T1 and T2's scenario

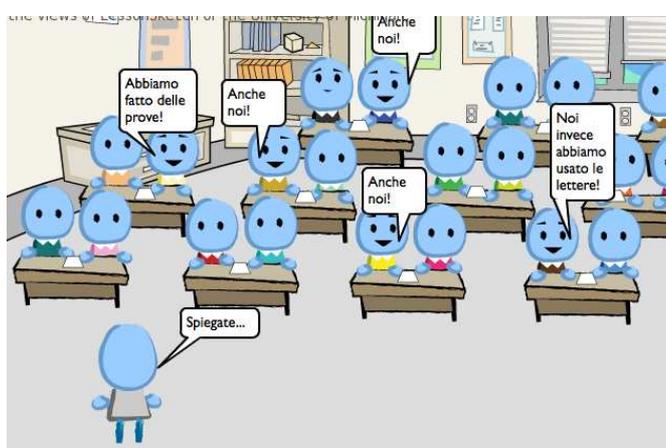


Figure 8: The scene 6 of T1 and T2's scenario

25. **R1** (leggendo i fumetti nella scena 5): «Quindi, c'è la condivisione a coppie di quanto elaborato individualmente... diciamo, per il momento è l'insegnante a vedere quello che potrebbero dirsi le singole coppie. "Come cambia il perimetro della figura ottenuta al variare della posizione del punto P sul segmento AB?", qui si riprende la [...], giusto? E ora comincia la condivisione, quindi uno studente dice: "Se il punto P si allontana da A il perimetro diminuisce!". [Insegnante] "Siete d'accordo?". Qualcuno dice sì, qualcuno dice no. [Insegnante] "Perché?". Allora, intanto volevo vedere i vari pezzetti, dopo guardiamo il "Perché?". Come mai avete scelto questo ["Se il punto P si allontana da A il perimetro diminuisce!"] come primo possibile intervento? Come lo avete catalogato?»
26. **T1**: «Questa risposta...?»
27. **R1**: «Sì, questa risposta: "Se il punto P si allontana da A, il perimetro diminuisce!".»
28. **T1**: «Perché da una lettura superficiale del problema è stata la prima risposta che io avrei dato, a occhio. E quindi ho pensato che forse anche per gli studenti... mettendomi nei loro panni, quello che può succedere concretamente è che loro inizino a fare qualche disegno e a fare qualche calcolo. E se iniziano così, immaginando... siccome il punto si muoverà da A verso B, inizialmente - presumibilmente- molti di loro metteranno il punto P vicino ad A e poi mano a mano lo sposteranno verso destra; siamo un po' abituati ad andare da sinistra verso destra... E se uno fa questi tentativi all'inizio, questo [prima risposta degli studenti] è il risultato che ottiene. Quindi forse se uno ha avuto l'idea di procedere con qualche tentativo, partendo da qualche caso particolare, probabilmente questa è la conclusione... la prima conclusione a cui può essere giunto.»

29. **R1:** «Ecco, quindi, durante la discussione di classe, pensiamo a cosa può succedere, immagino che girerete tra i banchi, vi accorgete che qualcuno ha dato appunto una... ha proposto una osservazione immediata senza meditare troppo, qualcun altro è già arrivato invece a un livello più approfondito nelle osservazioni. In un caso come questo, porreste comunque la domanda generica e aspettereste l'uscita di tutte le osservazioni, o puntereste a chiedere ad esempio allo studente che ha fatto l'osservazione più "superficiale", più immediata...?»
30. **T2:** «Sì, forse è meglio partire da quella, certo, perché se no ci giochiamo tutte le... [possibili risposte]»
31. **R1:** «Quindi nell'ottica di uno scenario, si gira un po' tra i banchi per vedere quali sono le risposte... è chiaro che se tutti sono arrivati già al livello superiore, non c'è bisogno di tirare fuori... a meno che non si sfrutti un po' una tecnica come quella dell'anno scorso: "*In un'altra classe hanno detto così, cosa ne pensate?*", ci può essere sempre questa idea. Altrimenti, effettivamente meglio dire: "Lo studente x... ho visto che il gruppo di studenti x ha scritto questo, chiediamo subito a loro. Come avete risposto voi?". Pensando sempre nell'ottica... perché se poi interviene invece quello che ha già notato tutto, si soffoca la discussione che invece avete poi pensato. Tra l'altro qui avete messo - interessante! - quattro "Sì" e un solo "No", perché pensate alla vostra classe? Cioè nelle vostre classi vi aspettate come risposta...?»
32. **T1:** «E... dopo questa mattina forse toglierei anche quel "No" ...»
33. **R1:** «No, perché anche questo è interessante, sempre nell'ottica dello scenario. Il numero di risposte favorevoli e contrarie è proprio quello che ci aspettiamo dai nostri studenti, quindi la speranza che almeno qualcuno risponda no, per cui dopo "Spiegate..." [insegnante nella slide], qualcuno dice "Anche noi!", ah no parte con "Abbiamo fatto delle prove!". Forse per gli scenari, a livello della lettura, numererei se possibile le vignette, in modo da capire in che ordine... perché finché ci sono "Sì" e "No" ... però qua specialmente per vedere un po' come intervengono...»
34. **T1:** «Sì, infatti ci chiedevamo se bisognava fare una vignetta per ogni risposta, o...»
35. **R1:** «Secondo me così può andare, specialmente se c'è un'interazione di più studenti, però metterei in ordine sequenziale.»
36. **R2:** «E poi "Anche noi!" potrebbe essere ambiguo, perché riferito a "Abbiamo usato le lettere!" o "Abbiamo fatto delle prove!". Quindi, forse un modo per...»
37. **R1:** «...capire la sequenza.»
38. **T1:** «Noi pensavamo: lo leggiamo da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso; però è chiaro che nella pratica non è detto che sia quello in basso a destra che ha risposto...»

Starting from T1's reflection (line 28) on the role played, in the design of the classroom discussion, by their hypothesis about the possible students' approaches to the given problem, R1 stimulates a further reflection (line 29). With her intervention, she aims at making T1 and T2 focus on other possible situations they might face during the classroom discussion if the idea that they want to focus on first does not come spontaneously from the students. In doing so, she recalls two techniques that are already on the teachers' praxeologies related to the task of designing classroom discussions, as this was the content of another PD course, focused on the use of formative assessment strategies to design and implement classroom activities, developed the previous year with a group of teachers in which also T1 and T2 also participated. The first technique is to monitor students' work during group activities in order to identify how to order students' answers, during the discussion, with the aim of stimulating meaningful reflections. The second technique is to present, during the classroom discussion, a hypothetical answer given by a virtual student from another class, with the aim of introducing an approach that the students did not come up with spontaneously.

Since R1 refers to a previous experience, using terms already shared with T1 and T2, the discourse is back to a *syntactic* level, since what is recalled is a praxeological component that has already been internalised by these two teachers. This is in line with Carlile's definition of the syntactic boundary: "When common lexicon sufficiently specifies the differences and dependencies of consequence at the boundary, the boundary proves "unproblematic"; the primary concern is one of "processing" or transferring knowledge across it" (Carlile, 2004, p. 558).

In R1's intervention in line 33, where she suggests numbering the balloons in each scene to clarify the order in which the different interventions were conceived, the focus shifts to the use of the digital tool to construct a scene that is readable by the members of the community, in order to make it become an object of critical scrutiny. It is, therefore, again a reflection that focuses on the technique to be used. T1 (lines 34 and 38) responds by sharing another technique they were thinking about (putting each student's intervention in a separate scene) and the technique that they adopted (reading the balloons from left to right, from top to bottom), making it clear that their aim was to communicate their ideas effectively through their scenario design. This is in line with the researcher's interest, which is also linked to the use of scenarios as tools for reflection.

In particular, it is clear that the *interests* of the participants in this excerpt from the discussion are on different aspects:

- the teachers' aim (i.e. their interest) is to create a discussion that is useful for generating interesting students' reflections (focus on scenario design) and, at the same time, to construct a scenario that can be easily read and understood by the other members of the research team (focus on team communication);
- the aim of R1 (i.e. her interest) is to turn the scenarios into flexible objects to be used as effective tools to promote teachers' reflections and comparison between them (focus on professional development).

This phase of the discussion certainly highlights the need to resolve a situation in which different levels of interest emerge. As the interaction between teachers and researchers leads to the suggesting of a change in the techniques used by the teachers to create each scene, the discourse is placed at a *pragmatic* level. In Carlile's words: "The transition from a semantic to a pragmatic boundary arises when the novelty presents results in different interests among actors that have to be resolved" (Carlile, 2004, p. 559).

The impact of this discourse at the *pragmatic* level in terms of knowledge *transformation* is evident from the comparison between the two versions of T1 and T2's scenario made during the fourth meeting. In fact, the comparison (in Figure 9) between the initial version of scene 6 (in Figure 8) and its new version (scene 9 in the new scenario, Figure 9) highlights the effects of the internalisation of new components in the teachers' praxeologies at:

- the *logos level*, in relation to the task of scenario design, in terms of carefully planning the classroom discussion to allow students to reflect on all the approaches that emerged from their answers to the problem. In fact, the teacher's intervention 4, in the new version of the scene, is proposed in relation to the objective of starting from the less effective approach to the exploration of the problem (*internalisation of the idea of classroom discussion as an opportunity to make the students' thinking emerge and to make them reflect on their different approaches*);
- the *praxis level*, as it is evident that the teachers have taken into account the researcher's idea of numbering the different interventions to make the scenes more readable (*internalisation of a new technique*).

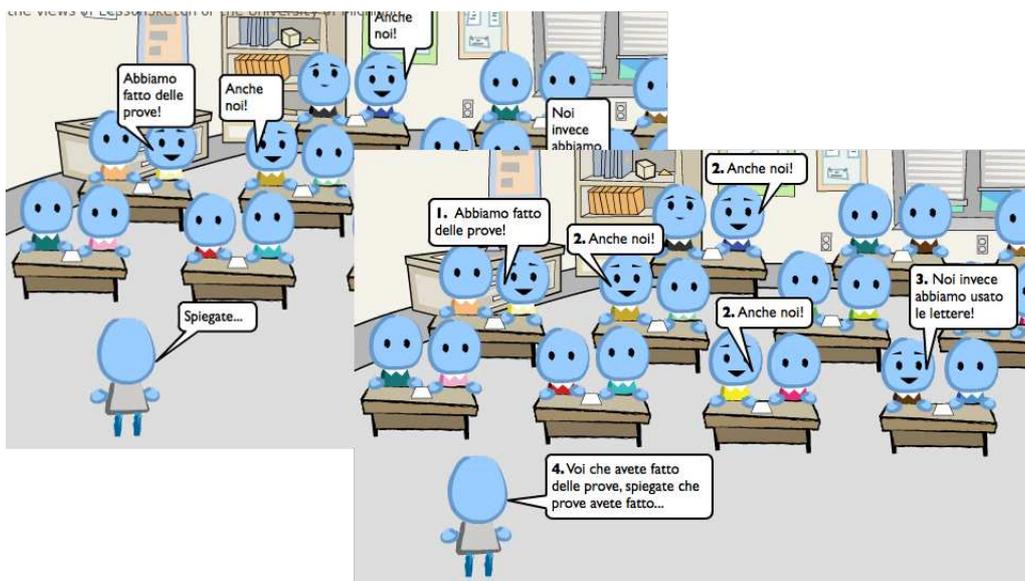


Figure 9: The slide where a comparison is made between the first version of scene 6 in T1 and T2's scenario (Figure 8) and the new version of the same scene in the new scenario (on the right)

Excerpt [42-52] from the third meeting - Internalisation of the new technique "create a tree" in the researchers' and teachers' praxeologies

The following excerpt refers to the point in the discussion after the one in excerpt 2.

42. **R1:** «Ecco, eventualmente nell'ottica della preparazione dello scenario, diciamo, della prossima... quella che sarà la bozza (adesso era l'embrione), la bozza dello scenario... si potrebbe pensare a più opzioni: se non c'è questo "No" cosa si può fare? O se son tutti no?»
43. **T2:** «Forse lavorando con GeoGebra è più facile far emergere...»
44. **R1:** «Pensare in un caso come questo di chiedere di fare una verifica. Al limite c'è sempre l'escamotage: "In un'altra classe qualcuno ha detto no...". Perché poi l'obiettivo è quello di mettere in discussione un'osservazione, o perlomeno farli pensare a cercare un modo di verificare se davvero è così. Okey, quindi poi [slide successiva] comincia... quindi a questo punto dopo il "Noi abbiamo usato le lettere!", voi come rispondereste? Perché in quella [slide] successiva l'insegnante non interviene. Quindi voi vi aspettate che invece di fronte al "Noi abbiamo usato le lettere!" continui la discussione come qua?»
45. **T1:** «Sì, c'è la richiesta di spiegazione... però "Spiegate" secondo me era dopo... Perché prima... la domanda era "Perché?"»
46. **R1** (legge i fumetti nella scena 7): «Okey. Allora, il gruppo che aveva detto "Abbiamo fatto delle prove!" dice "...se AP è 1 cm il perimetro è 38 cm", giusto?»
47. **T2:** «Però parte da sopra...»
48. **R1:** «Okey. Quindi, gli altri erano quelli che avevano detto "Anche noi!": "Noi abbiamo visto che se AP è 2 cm il perimetro viene 36 cm e se AP è 3 cm viene 34 cm, perciò diminuisce...". Danno un esempio... Quindi, dopo parte da qua: "...se AP è 1 cm il perimetro è 38 cm", "...e se AP è 5 cm il perimetro viene 30 cm"; quindi, diciamo, tutti questi interventi erano i "Sì" di prima e confermano la prima osservazione che era stata fatta. Poi questi erano quelli che avevano detto "No"...»
49. **T2:** «Sì, che in realtà è l'ultima però, perché c'è quella prima...»

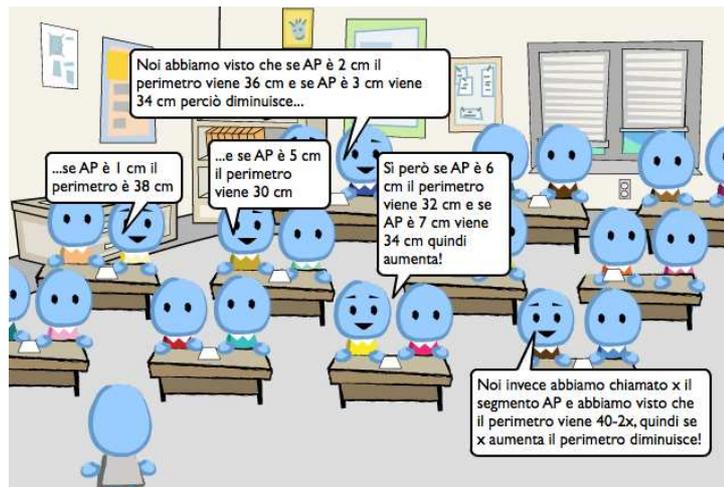


Figure 10: The scene 7 of T1 and T2's scenario

50. **R1:** «Okey, quindi ci sono questi: “Noi invece abbiamo chiamato x il segmento AP e abbiamo visto che il perimetro viene $40-2x$, quindi se x aumenta il perimetro diminuisce!”»
51. **T2:** «Direi in accordo con il primo intervento.»
52. **R1** (legge i fumetti nella scena 7): «Okey, poi intervengono loro che riportano al numerico. È carino perché c'è questa interpretazione algebrica che hanno costruito senza che gli fosse richiesto, quindi autonomamente, ma effettivamente in seconda mi posso aspettare che qualcuno provi direttamente a costruire un'espressione simbolica, perché già ci avrete lavorato prima. Questi dicono: “Sì, però se AP è 6 cm il perimetro viene 12 cm e se AP è 7 cm viene 34 cm, quindi aumenta!”. Quindi contribuiscono con l'esempio che ho qui. Mi ricordo delle attività che ho fatto per la mia tesi di dottorato, in cui c'era prima da lavorare su esplorazioni numeriche e costruzione di congetture, e poi si chiedeva di dimostrare. E c'erano delle studentesse che avevano costruito una congettura molto parziale perché avevano fatto solo l'analisi di dati numerici ben limitati. Per cui era interessante... poi lì era stato interessante perché un'altra studentessa invece aveva costruito l'espressione algebrica senza saperla interpretare, per cui c'era questo botta e risposta: questa provava a interpretare questa espressione e quelli che avevano costruito gli esempi dicevano “No, questa interpretazione non va bene, perché noi abbiamo questa coppia di esempi...”. È carina questa idea, è bella questa idea della... È chiaro che pensiamo: se invece nessuno propone il discorso algebrico, cosa fare? Qui si può scegliere, perché per il fatto che poi nella Task successiva invece si richiede, forse non è necessario anticiparlo. Anche se anch'io mi aspetto che qualcuno possa costruirlo, allora bisogna valutare bene se è il caso di farli parlare, interpretare o no, o se aspettare che tutti arrivino a costruire l'espressione in modo che il confronto sia più semplice per chi non l'ha prodotta. Qui bisogna pensarci, quindi anche in questo caso si potrebbero ipotizzare due strade, insomma un bivio: fare l'albero dello scenario, quindi a seconda delle risposte...»

In this excerpt, the focus of the reflections shifts to the content of the balloons in scene 5 (Figure 7), as the teachers imagined a student answering “no” to the teacher’s question “do you agree?”, expressing his disagreement with a group’s proposal reported in scene 4 (Figure 6).

In line 44, R1 introduces a new element to reflect on the process of scenario design, as she suggests the need to identify possible options in terms of actions that both the students and the teacher could take during the classroom discussion. The aim of this intervention is, on the one hand, to make the teachers reflect on the meaning of scenario design since a key element of scenario design is to foresee a variety of potential contributions that could emerge during the classroom discussion (*semantic level*), and, on the other hand, to reflect on possible techniques to adopt in order to *transform* the scenarios into more flexible objects (*pragmatic level*).

Through R1's intervention in line 52, the new technique for facing the task of scenario design (i.e. creating a tree to represent possible different ways in which the classroom discussion could evolve) is consolidated by giving it a name ("creating a tree"), thus introducing a common language to talk about the new technique to be adopted. This intervention aims to motivate the teachers to use this new technique by having them discuss the effectiveness of the designed scenario as a tool that could support the teacher in facing unforeseen events during the classroom discussion.

This can be interpreted in terms of what Carlile refers to as "a new requirement" (in this case, the use of scenarios to anticipate possible challenging events during the classroom discussion), which prompts the group to negotiate a new language to name the new technique being introduced: "When new requirements and/or new actors are present, interpretive differences in what a word, measurement, or outcome means limits the effective management of knowledge between actors" (Carlile, 2004, p.558).

Also in the last part of the excerpt, the discourse is simultaneously at the *semantic* level, as a name for the new technique is negotiated, and at the *pragmatic* level, as an evolution of the teachers' praxeology related to scenario design is promoted through the internalisation of a new component in the praxeology (at the praxis level).

The effects of this discourse at the *pragmatic* level in terms of knowledge *transformation* can be seen in the slide in Figure 11, which was displayed during the fourth meeting to show the "tree structure" (with branches) of T1 and T2's new scenario, since the two teachers included in their scenario, two different versions of the same scene. The new organisation of the scenario (designed as a tree, with branches) thus highlights the *internalisation* of new components in the teachers' praxeologies at the *praxis level* in relation to the task of using Lessonsketch to develop a scenario design (*internalisation of a new technique*).

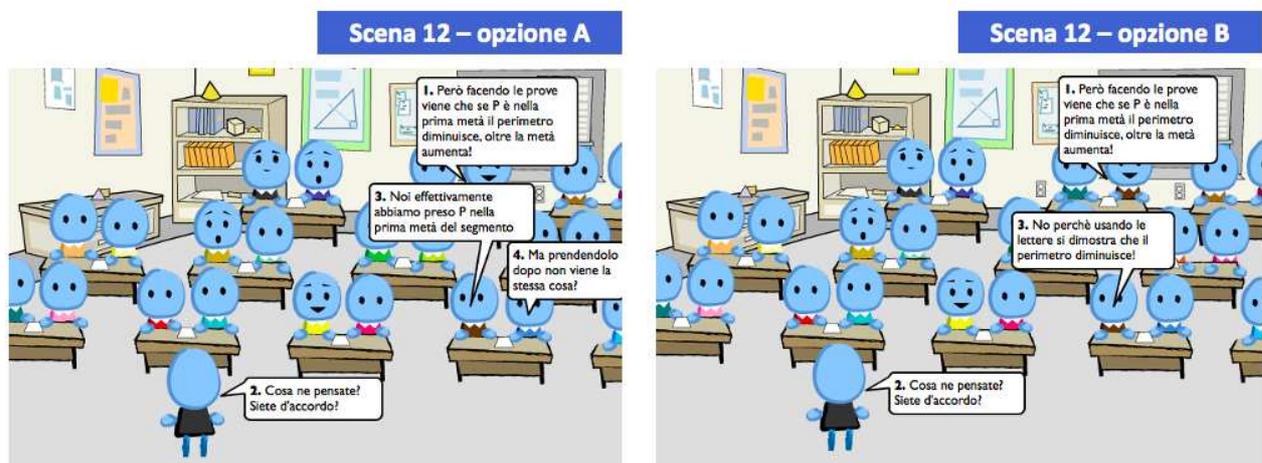


Figure 11: The slide where the "tree structure" of the new version of T1 and T2's scenario emerges, as two options for the same scene (scene 12) are proposed next to each other

Excerpt [54-79] from the third meeting - Internalisation of a new technique (the use of the thought balloons) as a result of the actions carried out on the BO at both the semantic and pragmatic levels

The following excerpt refers to the moment of the discussion in which scenes 8 and 9 of T1 and T2's scenario are shown (Figures 12 and 13).

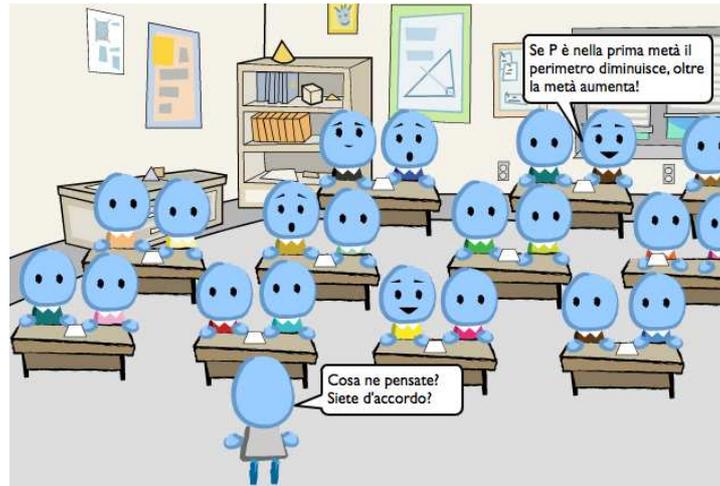


Figure 12: The scene 8 of T1 and T2's scenario

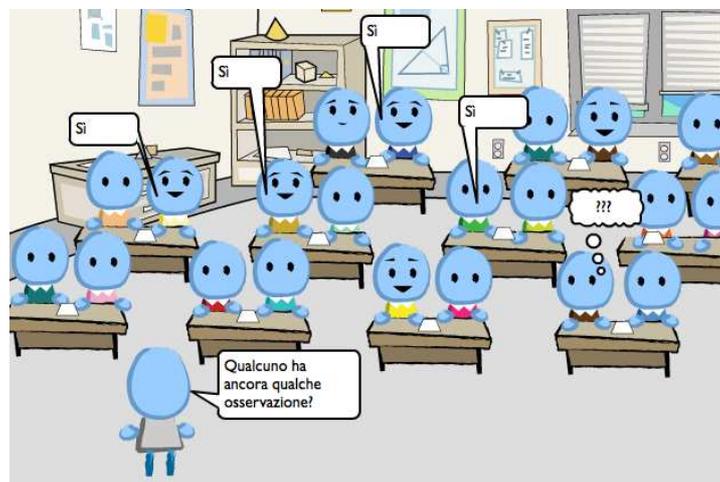


Figure 13: The scene 9 of T1 and T2's scenario

53. **R2:** «I punti interrogativi cosa vogliono dire?»
54. **T1:** «Beh che sono... è la coppia che ha lavorato con le lettere. E lì bisogna capire... sempre conoscendo i nostri studenti, io temo che se hanno posto $AP = x$, come spesso si procede nella risoluzione di problemi del genere (segmento, prendi il punto P all'interno, $AP = x$, $PB = 10-x$), ecco lavorando in questa maniera, se uno pensa... e la figura che viene costruita è nel caso in cui P sia più vicino ad A e probabilmente - poi non è detto, ma secondo me...- il disegno che uno fa forse lo fa così, dalla relazione che emerge sembrerebbe che effettivamente il perimetro debba comportarsi in quella maniera e invece bisogna capire che c'è...»
- [...]
75. **R2:** «No no, ho capito, però attenzione! Altrimenti c'è un gioco linguistico che non funziona, cioè qui si sta immaginando... cioè è un gioco complicato: loro stanno immaginando quello che gli altri possono dire, quindi una cosa... Poi possono anche immaginare anche - loro insegnanti - quello che loro immaginerebbero in quella situazione, e sono i punti interrogativi. Allora nella cosa [progettazione/rappresentazione] occorrerebbe forse un modo per... sono livelli diversi: quello che dicono esplicitamente gli allievi, quello che io dico o penso... cioè io penso che, immagino che: quello che dicono gli allievi, quello che dico io, quello che gli allievi pensano: ma sono io che immagino questo, quindi c'è un terzo livello.»

76. **R1:** «Si potrebbe mettere la nuvoletta -quella con i punti interrogativi- all'insegnante che dice [pensa]: secondo me loro non hanno le idee chiare e allora pongo un'altra domanda.»
77. **R2:** «Potrebbe essere addirittura che la cosa dell'insegnante sia sempre -o a volte- divisa in due parti: quello che io penso (è sempre il penso che, immagino che, prevedo che...) ... quello che io dico e quello che io penso. Quindi, dire e pensare dell'insegnante. Il pensare degli allievi diventa un po'...»
78. **R1:** «Tra l'altro secondo me questo gioco dell'esprimere quello che penso non è male, per la condivisione in particolare, perché in quello che penso giustifico perché dico in un certo modo. Quindi è bello per la condivisione [a livello meta], perché così appunto certe cose implicite sono più esplicite per noi.»

R1's interventions in lines 76 and 78 introduce a new technique for approaching the task of scenario design starting from R2's observations about the problematic nature of a thought balloon that T1 and T2 attribute to a pair of students in scene 9 (Figure 13). The idea that emerges from these shared reflections is to introduce thought balloons for the teacher in the scenario to clarify what the teacher is thinking when she makes a particular intervention during the classroom discussion.

Here again, the discourse is at both:

1) the *semantic* level, as the meaning of a representation (the thought balloon) is discussed because it is interpreted in different ways by the different actors, introducing interpretive differences that need to be clarified. The term "interpretive differences" is used by Carlile to describe specific situations that characterise discourses at the semantic level: "When new requirements and/or new actors are present, interpretive differences in what a word, measurement, or outcome means limits the effective management of knowledge between actors" (Carlile, 2004, p. 558);

2) the *pragmatic* level, as the negotiation of the interpretation of this representation (the thought balloon) also takes into account the different interests of the protagonists. In fact, R1 transforms R2's not to report the students' thoughts into an opportunity to clearly distinguish, within the scenarios, between what the teacher says and what she thinks, in order to make the reasons for certain choices more explicit. This new "rule" of scenario design is introduced in order to promote exchanges and comparisons between teachers and researchers, so the aim is, again, at the meta-didactical level.

The effects of this discourse at the *pragmatic* level in terms of knowledge *transformation* are clearly shown by the comparison between the two versions of T1 and T2's scenario made during the fourth meeting. Indeed, the comparison (in Figure 14) between the initial version of scene 7 (in Figure 10) and its new version highlights the effects of:

- the internalisation of a new component in the teachers' praxeologies at the *praxis level*, namely the technique of using thought balloons to express the teacher's thoughts (*internalisation of a new technique*);
- the consolidation of components already present in the teachers' praxeologies, in relation to the task of scenario design in terms of carefully planning the classroom discussion, both at the praxis level (the content of the balloon expresses a technique related to the design of classroom discussions suggested by R1 during the previous meeting, i.e. to launch a hypothetical answer given by a virtual student) and at the logos level (as the theoretical framework behind the technique also becomes a consolidated component of the teachers' praxeologies).

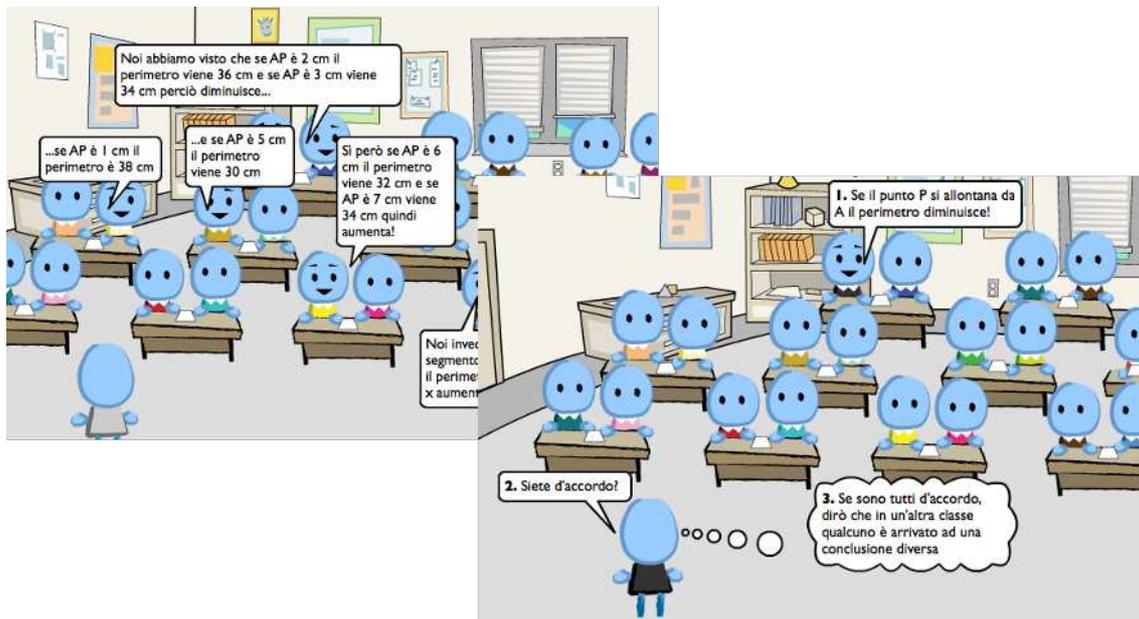


Figure 14: The slide where a comparison is made between the first version of scene 7 in T1 and T2's scenario (Figure 10) and the new version of the same scene in the new scenario (on the right)

4.4.2 Zooming out the *how* of internalisation

We analyse here the third meeting, where the teachers discuss their task.

The analysis, aimed at zooming-out into the discussions when teachers present the work done with Lesson Sketch, will focus on:

1. The structure of the BO,
2. The individual actions and their effect on the shared understanding of the BO,
3. The nature of actions on BO and how they participate in the internalisation process.

In the previous meeting the teachers were asked to design a scenario, made of discussions between the students and with the teacher of a class. The teachers were provided with 'Lesson Sketch' software, which enables them to describe the planned scenario of the lesson in images of class scenes.

In the third meeting, the teachers presented the work they had done and the discussion then began between the researchers and the teachers. It is this discussion that we analyse in this section, looking at the 'objects' present in the dialogues.

The transcripts of the dialogues make it possible to highlight the structure of the boundary object. The methodology used here is to go over the whole of the dialogues by summarizing the interventions of each of the protagonists in order to identify the meaning and significance of the dialogue. In particular, it highlights which element of the boundary object is in play at each stage of the progress of the work. From this enlightenment, we extract the levels of individual actions on the elements of the BO. Each action is associated to a specific level (syntactic, semantic and pragmatic). For example, in the following excerpt (from the beginning of the presentation of T1 and T2's scenario), different elements of the BO are discussed (see Figure 15):

Excerpt [15-33] from the third meeting: The beginning of the scenario presentation by T1 and T2

- 15. T1: intro work in progress
- 16. R1: focus on students and teacher dialogues
- 17. R2: use of the software
- 18. T2: instrumentation
- 19. R1: comes back to the content; focus on the classroom
- 20. T2: instrumentation
- 21. R1: lesson content; question of time of individual research.
- 22-24. T2/T1: justify by their experience
- 25. R1: content: mathematics.
- 28. T1: her own mathematical experience of the problem induces her analysis
- 29. R1: link to the teachers' habits in leading classes: what would you say if...
- 30. T2: agrees
- 31. R1: go on in the description of the scenario.
- 32. T1: she has doubts about what she should put in the scenario.
- 33. R1: organization of the scenario

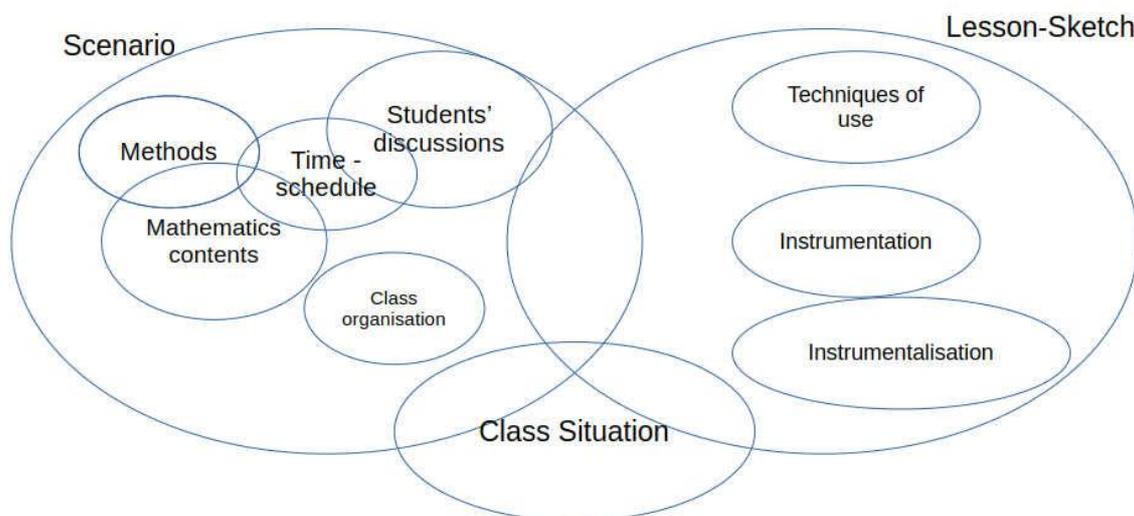


Figure 15: BO structure

In this very small excerpt, the colours show the back and forth from a focus on students' dialogues to the use of the software and its instrumentation, going by the mathematics content of the didactical situation and a definition of the scenario. It highlights the structure of the BO and the individual actions: the researcher tends to focus on the scenario, its content, its general organisation which are elements of the BO, and the teacher on placing this content in their own classroom with their particular students. There is a *translation* action at the *semantic level* on the part of the researcher, and a *transformation* action at the *pragmatic level* on the part of the teacher. At this point, we might ask whether the transformative actions really take into account the semantic clarifications provided by the researcher as well as the possible movements within teachers' praxeologies.

Excerpt [32-52] from the third meeting: A discussion of elements of the BO

- 32. T1: has doubts about the answers to be taken into account.
- 33. R1: organization of the scenario; proposal.
- 34. T1: question about the precision of the scenario.
- 35-37-39. R1: proposal.
- 36. R2: how to interpret the slides?
- 38. T1: explanation.
- 39. R1: agrees.
- 40. R2: ask for precision.
- 41. T1: answer.
- 42-44. R1: gives a clue to manage debates to come back to the content.
- 45. T1: comes back to the task and the order of the scenario.
- 46. R1: relaunch mathematics discussion within the scenario.
- 47. T2: explanation.
- 48. R1: relaunches with examples: what happens if...
- 49. T2: explanation.
- 50. R1: synthesis; redirection on the description of the scenario.
- 51. T2: arguments.
- 52. R1: shows the dynamics of discussions and proposes a tool for scenario description: a tree.

This excerpt is a discussion about the scenario; gradually, the arguments exchanged outline what could be expected from the scenario in relation to the mathematical content of the task. Anticipating what the pupils might say leads the protagonists deeper into a reflection on the task and on the techniques to be developed to describe how the class operates. There are syntactic actions to distinguish the scenario and a representation of the scenario on the software (lines 32-39) allowing to understand the deep meaning of the task “to write a scenario”. It leads to semantic actions to specify the meaning that a scenario should take in order to explain what is expected (lines 36-41); and finally the discussion allows to write possible interpretations that could illustrate the way of directing the discussion in the classroom to take advantage of it to put students in a situation of scientific debate. These interventions concern the teacher’s role in re-launching the discussion; this can happen in several ways: if the students all agree, or if there are disagreements; if the students do or don’t tackle a method (in this case, the algebraization of the problem).

The scenario, as an object, is the subject of the work. However, describing it through the software seems to exceed the software's capabilities, in any case, considering the level of instrumentation of the teachers. In fact, it is the level of precision of the scenario that seems to be at stake, but also the meanings of the speech bubbles; are they the students’ responses foreseen in the scenario and therefore the teacher’s behaviour would be precise or are they what the teacher thinks and then the students might not behave as expected. In terms of the BO, the scenario is questioned as an object: what should it contain? How precise should it be? What is the scenario’s guide? Actions on the BO are semantic in nature, but pragmatic in the sense that they provide possible methods for relaunching the debate. Moreover, they deepen the description of a scenario bringing a new tool to describe what might happen: the tree.

Excerpt [101-136] from the third meeting: The difficult negotiation of a BO

A third excerpt illustrates how internalisation could even not occur. In this excerpt, the two protagonists (R1 and T3) comment on the scenario designed by T3 on LessonSketch.

The object is the classroom situation built around the “Two squares” problem of perimeter variations. The scenario is the work object on which the discussion focuses. But under no circumstances is this working object transformed into a boundary object. The techniques for developing the scenario are not constructed because the task contradicts the teacher's learning hypotheses. The object remains the classroom situation, which allows the teacher to reaffirm her vision of teaching without being able to take into account the environment proposed in the situation given by researchers. This can be described as a nil-didactic situation (Margolinas, 2004), that is to say a situation where the teacher (the learner) continues to apply her knowledge without encountering any new knowledge.

101. R1: sets the scene.
102. T3: justifies her work and gives her context of teaching.
105. R1: an attempt to introduce the idea that research spirit can be used in all contexts.
104. T3: leans on her experience to justify her teaching behavior.
105. R1: an attempt to focus on discussions.
106. T3: continues on her idea.
107. R1: asks for a description of the scenario.
108. T3: explains her teaching methods and the necessity to hold students by the hand to help them move forward.
109. R1: an attempt to come back to the description of the scenario.
- 110-114. T3: explains her vision of moving forward her students step by step.
115. R1: an attempt to explain the objectives of the lesson
116. T3: explanation of her vision: students can work by two but she maintains the class group.
117. R1: starts from T3's idea.
118. T3: insists on her teaching context (or her vision of her teaching context)
119. R1: asks whether there is a place for individual reflection.
120. T3: reaffirms the need to guide students.
121. R1: takes up T3's point of view and tries to introduce the question of variations in perimeter as a function of the position of point P
122. T3: explains that her pupils would certainly not be able to do it on their own.
123. R1: tries to propose a scenario where students can think by themselves.
124. T3: No. She reaffirms the necessity of guiding students step by step.
125. R1: tries to come back to the question that should be asked to students.
126. T3: still affirms her vision.
127. R1: Tries to advance the students' ideas of autonomy by pushing the opinions expressed by T3 a little further.
128. T3: comes back to the difficulties of teaching in secondary school.
129. R1: agrees but explains that it is possible to try. She shows the next slide.
133. R1: mentions the scenario and interrogates T3 on the questions she wants to ask: is the largest perimeter near 40?
134. T3: thinks that this should be a students' question.
135. R1: asks for precision.
136. T3: explains that her students will certainly concentrate themselves on the greatest or the smallest value of the perimeter and not on the variations.

In this dialogue between R1 and T3, the pretext of the scenario is in fact a discussion of a deeper issue, that of the students' responsibility for their own learning. From a didactic point of view, the type of task is the resolution of a complex problem; the technique T3 advocates is a resolution in small steps, with continuous guidance based on putting all the students to work on tasks she knows they will be able to accomplish: making drawings, measuring the perimeter, etc. The justification for this technique may stem from a deep-seated belief in the importance of preventing students from failing a task and of always putting them in a position to succeed, even if it means breaking the task down into micro-tasks (drawing a picture, measuring with instruments, etc.). The justification for this technique may well stem from a behaviourist learning hypothesis. The technology is based on a desire to get all pupils to work, the theory on ideas coming from a behaviourist approach. R1's technique as researcher, on the other hand, seeks to give students responsibility for their own learning through discussion and debate. The technology is based on the idea that discussions will lead students to express, and thus learn, the mathematics underlying the situation. The theory is, of course, based on a socio-constructivist hypothesis of learning.

R1: *“Invece, non so, fare inizialmente un momento insieme, e poi dire: Provate a coppie a costruire altri esempi e provate a rispondere alla domanda.”* (line 123)

T3: *“No no, ma questo ci può... loro ci possono arrivare, però devi guidarli.”* (line 124)

The scenario, object of the discussion, reveals a deeper difference, which does not concern the object itself, but is highlighted by its elaboration. T3 justifies her behaviour by her knowledge of her students:

“L'altro problema è che comunque se io mi sono immaginata questa lezione, sono anche tanto disordinati talvolta, quindi nel momento in cui devono mettersi a disegnare, a volte scrivono anche una cosa per un'altra... non tutti, per carità, però...” (line 126)

And R1 defends her position by tempting to suggest a change in T3's behaviour:

Però io proverei, proverei a lasciare un po'... di spazio anche a loro, in modo da fare una discussione in cui intervengono. (line 127)

and later:

“Lo so... sicuramente. Ma in qualsiasi contesto è difficile. Diciamo, secondo me si può provare e poi vedi: se la classe non risponde come vorremmo, è giusto dare un supporto.”

Under these conditions, the components of T3's praxeologies do not change and the process of internalisation does not occur because individual actions on the BO are not transformed into a common activity of transfer, translation or transformation. In this case, the BO, the scenario, does not destabilise the actors' knowledge because the container object (in reference to the object-programming analogy (Star, 2010, p. 603 already quoted)), in this case the learning hypotheses, is not shared. To modify the actors' praxeologies with regard to the prescribed task, it would first have been necessary to act on this container at a semantic level. But the discussion in this excerpt merely highlights distinct, even incompatible, points of view. The analysis of the actors' actions on the BO, in this case, shows how the internalisation process did not work. They do not gain a shared component.

4.4.3 Conclusion of this part

The data analysis developed by considering the perspective of the *how* of internalisation has shown that the work on the BO represents the core of the collaborative work that triggers and

supports the evolution of the praxeologies of teachers and researchers. To highlight the types of processes involved in this collaborative work and related to the evolution of praxeologies, we referred to the levels of discourse and interaction, distinguishing between syntactic, semantic and pragmatic levels, following Carlile (2004). The development of discourses and actions at the *syntactic level* favours the appropriation of the task by the actors in their interactions. When discourses and actions move to the *semantic level*, new meanings are developed and shared, promoting the internalisation of components belonging to the logos of the praxeologies. When discourses and actions move to the *pragmatic level*, new techniques are internalised within the praxeologies, together with the logos' components needed to justify them.

The data analysed through the lens of interactions on the BO allowed us to delve deeper into the *how* of the internalisation process, showing that this process can be made visible by analysing the joint actions of teachers and researchers on a common object of work that becomes a BO for some of them. This collaborative work on the BO encourages the members of each community to reflect on their initial praxeologies and on what the members of the other community bring to the table, triggering processes of *knowledge transfer*, *translation* and *transformation* that in turn provoke the evolution of their praxeologies in terms of modification and integration of praxeological components. Internalisation can then be achieved through this back-and-forth process that has its origin in the collaborative work on a BO.

4.5 The *why* of internalisation

In this section we focus again on some excerpts taken from the discussion about T1 and T2's scenario in the third and fourth meeting. We analyse them from the perspective of the agents interacting at the micro-level of professional development. In doing so, we intend to investigate *why* T1 and T2 come to internalise new praxeological components, by evolving their initial meta-didactical praxeology related to the task: *to develop a scenario design*.

More precisely, in the excerpts from the third meeting T1 and T2 explain the rationale behind their classroom discussion scenario related to the "two-squares" problem; in the excerpt from the fourth meeting T1 and T2 explain the modification of their scenario according to the issues discussed with the researchers in the previous meeting.

We will use different colours to identify agents in the teachers' and researchers' words:

- orange: disciplinary agents;
- green: institutional agents;
- blue: methodological agents.

Excerpt [25-33] from the third meeting – T1 and T2's initial meta-didactical praxeology (macro-level) and agents (micro-level)

R1 reads the balloons of the teachers' scenes 4 and 5 (Figure 16) and asks for explanation.

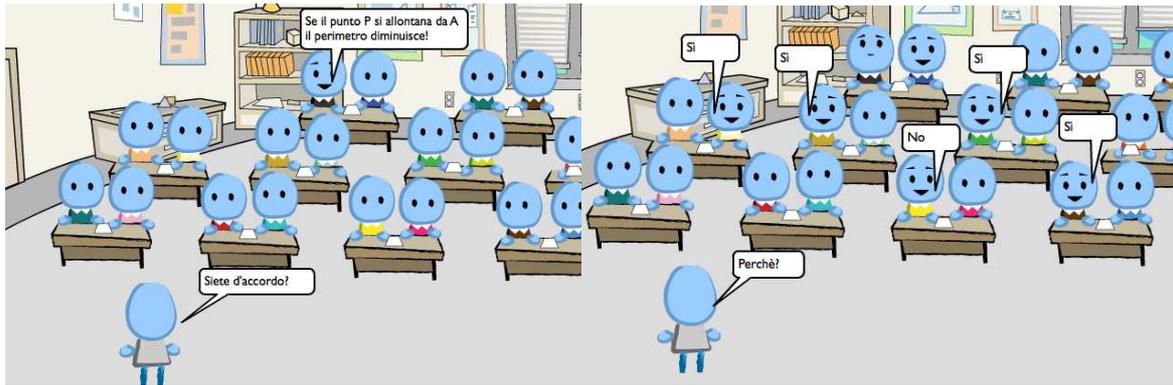


Figure 16: The scenes 4 (left) and 5 (right) of T1 and T2's scenario

25. **R1:** «[...] E ora comincia la condivisione, quindi uno studente dice: “Se il punto P si allontana da A il perimetro diminuisce!”. [Insegnante] “Siete d'accordo?”. Qualcuno dice sì, qualcuno dice no. [Insegnante] “Perché?”. Allora, intanto volevo vedere i vari pezzetti, dopo guardiamo il “Perché?”. **Come mai avete scelto questo [“Se il punto P si allontana da A il perimetro diminuisce!”] come primo possibile intervento? Come lo avete catalogato?» [...]**
28. **T1:** «Perché da una lettura superficiale del problema è stata la prima risposta che io avrei dato, a occhio. E quindi ho pensato che forse anche per gli studenti... mettendomi nei loro panni, quello che può succedere concretamente è che loro inizino a fare qualche disegno e a fare qualche calcolo. E se iniziano così, immaginando... siccome il punto si muoverà da A verso B, inizialmente - presumibilmente- molti di loro metteranno il punto P vicino ad A e poi mano a mano lo sposteranno verso destra; siamo un po' abituati ad andare da sinistra verso destra... E se uno fa questi tentativi all'inizio, questo [prima risposta degli studenti] è il risultato che ottiene. [...]»
29. **R1:** «Ecco, quindi, durante la discussione di classe, pensiamo a cosa può succedere, immagino che girerete tra i banchi, vi accorgete che qualcuno ha dato appunto una... ha proposto una osservazione immediata senza meditare troppo, qualcun altro è già arrivato invece a un livello più approfondito nelle osservazioni. In un caso come questo, porreste comunque la domanda generica e aspettereste l'uscita di tutte le osservazioni, o puntereste a chiedere ad esempio allo studente che ha fatto l'osservazione più “superficiale”, più immediata...?»
30. **T2:** «Sì, forse è meglio partire da quella, certo, perché se no ci giochiamo tutte le... [possibili risposte]»
31. **R1:** «[...] Tra l'altro qui avete messo - interessante! - quattro “Sì” e un solo “No”, perché pensate alla vostra classe? Cioè nelle vostre classi vi aspettate come risposta...?»
32. **T1:** «E... dopo questa mattina forse toglierei anche quel “No”...»
33. **R1:** «No, perché anche questo è interessante, sempre nell'ottica dello scenario. Il numero di risposte favorevoli e contrarie è proprio quello che ci aspettiamo dai nostri studenti, quindi la speranza che almeno qualcuno risponda no [...]»

In this brief excerpt, T1 and T2 justify the technique they adopted to face the given task (*to develop a scenario design* related to the two-square problem). Their technique is to write possible teacher's and students' interventions to be inserted in a class setting in the digital environment of LessonSketch, and build the discussion on them, by activating students' argumentation and comparison. Therefore, speaking in terms of praxeology, their discourse is at the level of technology. Zooming-in on a micro-level of analysis, we can remark that, while explaining why they would start from a certain (wrong) intervention, they disclose the agents which determine their technological discourse. In particular, in this first excerpt, we can detect

a *disciplinary agent* linked to the *a priori* analysis of the task (lines 25, 28, 30) and *institutional agents* linked to the specific class in which T1 has tailored the scenario presented (lines 28, 31, 32) and to a generic 10th grade class in which R1 tries to bring the teachers (lines 29, 30, 33). Such agents interact among them, as it appears clearly in T1's (line 28) and T2's words (line 30).

In particular, in this excerpt R1 joins the teachers identifying their institutional agent, making it explicit, and then bringing it to a generic level: that of a generic 10th grade class. It is as if the researcher, in order to tune in to the teachers, used the example of their class as a generic example (Balacheff, 1990); and this successfully triggers the interaction of agents. Let us move onto the second excerpt from the third meeting, which comes a little bit after what we have just analysed, to see the activation of a new agent for the teachers.

Excerpt [42-52] from the third meeting – R1 interacting with T1 and T2 on a meta-didactical plane (macro-level) and agents (micro-level)

R1 remains at the level of a generic 10th grade class and, by referring to scenes 6 and 7 (Figure 17), she introduces a new methodological issue in the dialogue with the teachers.

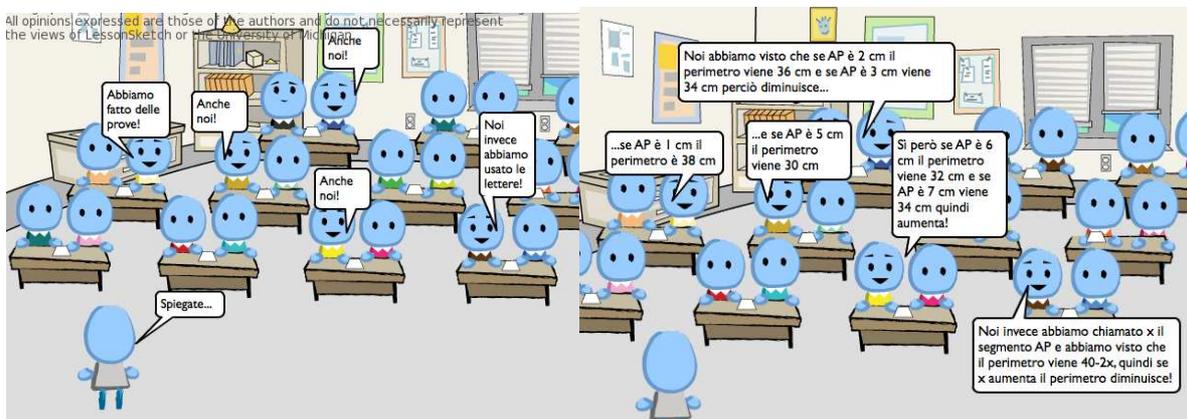


Figure 17: The scenes 6 (left) and 7 (right) of T1 and T2's scenario

42. **R1:** «Ecco, eventualmente nell'ottica della preparazione dello scenario, diciamo, della prossima... quella che sarà la bozza (adesso era l'embrione), la bozza dello scenario... si potrebbe pensare a più opzioni: se non c'è questo "No" cosa si può fare? O se son tutti no?»
43. **T2:** «Forse lavorando con GeoGebra è più facile far emergere...»
44. **R1:** «Pensare in un caso come questo di chiedere di fare una verifica. Al limite c'è sempre l'escamotage: "In un'altra classe qualcuno ha detto no...". Perché poi l'obiettivo è quello di mettere in discussione un'osservazione, o perlomeno farli pensare a cercare un modo di verificare se davvero è così. [...] quindi a questo punto dopo il "Noi abbiamo usato le lettere!", voi come rispondereste? [...]
45. **T1:** «Sì, c'è la richiesta di spiegazione... però "Spiegate" secondo me era dopo... Perché prima... la domanda era "Perché?"»
- [...]
50. **R1:** «Okey, quindi ci sono questi: "Noi invece abbiamo chiamato x il segmento AP e abbiamo visto che il perimetro viene $40-2x$, quindi se x aumenta il perimetro diminuisce!"»
51. **T2:** «Direi in accordo con il primo intervento.»
52. **R1:** «Okey, poi intervengono loro [«Sì però...»] che riportano al numerico. È carino perché c'è questa interpretazione algebrica che hanno costruito senza che gli fosse richiesto, quindi autonomamente, ma effettivamente in seconda mi posso aspettare che qualcuno provi direttamente a costruire un'espressione simbolica, perché già ci

avrete lavorato prima. [...] Se invece nessuno propone il discorso algebrico, cosa fare? Qui si può scegliere, perché per il fatto che poi nella Task successiva invece si richiede, forse non è necessario anticiparlo. Anche se anch'io mi aspetto che qualcuno possa costruirlo, allora bisogna valutare bene se è il caso di farli parlare, interpretare o no, [...] quindi anche in questo caso si potrebbero ipotizzare due strade, insomma un bivio: fare l'albero dello scenario...»

In this second excerpt R1 introduces a *methodological agent* that we can call “and if?”, echoing MVI (Swidan et al., 2023). It was not active among the teachers’ agents and it is activated now by the researcher, who invites the teachers to wonder how they would react if the designed scenario does not actually develop in the expected way: «and if there is not this “no”?» (line 42), «and if instead no one proposes an algebraic discourse?» (line 52). This leads to finding teaching strategies, at a methodological plane, to introduce the expected answer in the classroom discussion (lines 44, 45). This methodological agent interacts with the already active ones: *disciplinary* (lines 50-52) and *institutional* at a generic 10th grade class (lines 50, 52). This interaction appears quite clear in the last intervention of R1 (line 52) who gathers together all the elements evoked. The researcher’s intervention closes with the emergence of a new technique (praxeologically speaking) which consists in creating a scenario tree. To analyse if the new methodological agent becomes active also for the teachers and leads to a possible adoption of the scenario tree technique, let us consider the following excerpt from the third meeting.

Excerpt [84-100] from the third meeting – R3 and R1 interacting with T1 and T2 on a meta-didactical plane (macro-level) and agents (micro-level)

Some minutes later, R3 intervenes in the discussion. With her comments to scene 8 (Figure 18) she supports and seals the interaction between the disciplinary and the methodological agents at stake.

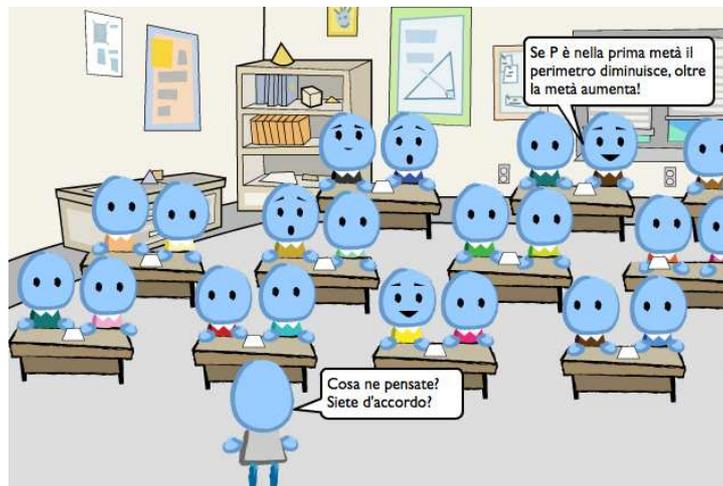


Figure 18: The scene 8 of T1 and T2’s scenario

84. **R3:** «Quello che mi piacerebbe vedere nella scena... in quella di $40-2x$, dov’è? Ecco quella lì! Qui secondo me è molto interessante: “Siete d’accordo?”, perché potrebbe succedere che uno dica “ $40-2x$ ” e ci sia un altro gruppo che invece dica “No, $2x-40$ ”. [...] E quindi “Siete d’accordo?” significa che comunque lì si condivide un conflitto di soluzioni, diciamo, e quindi questo può stimolare a passare al livello successivo e quindi a trovare la soluzione giusta.»

85. **R1**: «[...] Effettivamente però è interessante perché c'è il piano di chi dice “Sì, sono d'accordo” fornendo numeri, però potrebbe esserci chi dice “No, non sono d'accordo con loro, perché ho trovato un'altra espressione”.»
86. **R3**: «Succede che uno faccia il disegno nell'altro modo.»
87. **T5**: «Forse conviene fare una cosa ad albero, in cui ogni volta si aggiunge...»
88. **R1**: «Sì, è quello che dicevo io, l'albero. Nella progettazione è carino: appunto, se arriva questo intervento di questo [gesto per indicare un ramo dell'albero], se non arriva ma mi interesserebbe un intervento del genere, dico una cosa che possa stimolarlo. Quindi se nessuno lo dice, si potrebbe dire “In un'altra classe qualcuno ha detto $40-2x$, come mai? $2x-40$, come mai?”.»
- [...]
99. **R1**: «Le ramificazioni su tutto è impossibile, però almeno due opzioni... perché ci sono certi interventi che sono interventi chiave, se non escono cosa faccio? Oppure, se nessuno lo dice e so che però qualcuno l'ha detto, cosa devo chiedere? Pensare proprio anche a un po' di opzioni...»
100. **R3**: «Qui le cose significative che vengono fuori sono: aumenta/diminuisce e l'avete messo, poi $40-2x/2x-40$, e poi l'aspetto “Ma come, a me viene una funzione sola!” e all'altro vengono due funzioni, “A me viene una funzione così” / “A me viene una funzione cosa” [...] Quindi queste sono le cose... diciamo, i nodi che portano a delle diramazioni dell'insegnante, i nodi dell'albero.»

R3 activates the methodological agent “and if?” through another way: she highlights how the teacher can make other answers (not yet shared) emerge (“Do you agree?” line 84). This identifies a technique/strategy to make the scenario tree develop, thinking of different options. What is interesting in this excerpt is the deep interaction between the methodological agent “and if?” and the disciplinary agent of the *a priori* task analysis, as enhanced by R3's interventions (lines 84, 100) and R1 who recalls the disciplinary agent (line 85) and makes it interact with the methodological one (lines 88). That way, the methodological agent “and if?” is well stressed by the researchers' interventions (lines 84, 88, 99, 100) but especially echoed in T5's words (line 90).

The technique of creating the tree scenario is emerging as a *shared praxeological component*, and this phenomenon finds its roots in the deeply intertwining between the agents at stake: those that were already active for the teachers (disciplinary and institutional agents) and the one activated by the interaction with the researchers (methodological agent). To perceive if the emerging shared technique of creating the tree scenario is actually internalised into T1 and T2' meta-didactical praxeology, we need to analyse the following excerpt from the fourth meeting.

Excerpt [37-63] from the fourth meeting – Interaction between already active and now activated agents (micro-level)

In this excerpt, R1 presents T1 and T2's revised classroom discussion scenario, which includes the emergent technique of creating the tree scenario. The teachers justify the modifications done to their previous proposal, so they are speaking again at the technological level of their meta-didactical praxeology related to the given task. In particular, they discuss with the researchers the new versions of scene 4 (scene 7, Figure 19) and of scene 8 (scenes 12A and 12B, Figure 20), as well as the three options of the new scene 13 (Figure 21).



Figure 19: The scene 7 of T1 and T2's new scenario (ex scene 4).

37. **R1**: «Questa sarebbe la scena 7; dove avete aggiunto il pensiero dell'insegnante, oltre che appunto i numeri della sequenza. Perché c'è: 1. (gruppo di studenti là in fondo) "Se il punto P si allontana da A, il perimetro diminuisce" e l'insegnante chiede a tutti "Siete d'accordo?"; e poi c'è il pensiero dell'insegnante: "Se sono tutti d'accordo, dirò che in un'altra classe qualcuno è arrivato a una conclusione diversa", quindi qua ci sono le opzioni: se dicono tutti di sì dico questo, speriamo che qualcuno dica no. Anche di questa cosa ne avevamo parlato l'altra volta.» [...]

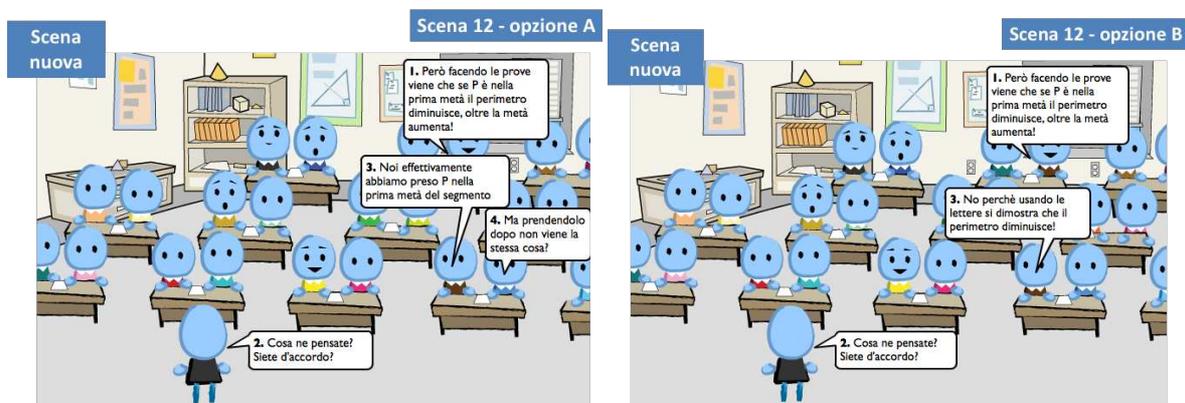


Figure 20: Scenes 12A and 12B of T1 and T2's new scenario (ex scene 8).

45. **R1**: «[...] E poi c'è questo 4 che dice: "Ma prendendolo dopo non viene la stessa cosa?", per voi questo è uno studente che non ha capito quindi? Che è un po' bloccato... Perché c'è quello che dice "Noi abbiamo preso P nella prima metà" quindi sembra consapevole che nella prima metà diminuisce e ha capito che invece nella seconda metà c'è un aumento, giusto?»
46. **T1**: «O forse, non l'ha capito, però dai numeri può averlo capito e loro con le lettere, avendo visualizzato solo la situazione della prima metà, non hanno idea di che cosa possa capitare dopo. Infatti il compagno di gruppo, in realtà è lui che dice "Ma prendendolo dopo, non viene la stessa cosa?". Perché poi qua potrebbero... cioè, non avendoci provato, non so se è così evidente che effettivamente, facendo una scelta diversa, la funzione che viene poi fuori è proprio differente. Se non ci provi, forse non ne hai la percezione. Anche perché molti dei problemi che magari loro risolvono, non essendo di tipo simmetrico, non fanno emergere questa difficoltà. Spesso quando gli viene detto di prendere un punto P su un segmento AB, chiami

AP con x e poi non ha rilevanza esattamente dove vai a mettere il punto, quindi probabilmente un esempio del genere... sinora non l'hanno mai incontrato...»

[...]

51. **R1**: «Dopo c'è l'opzione B... Nell'opzione B abbiamo sempre l'1 che dice la stessa cosa: “Nella prima metà il perimetro diminuisce, oltre la metà aumenta”, l'insegnante dice sempre “Siete d'accordo?” e qui dice “No, perché usando le lettere si dimostra che il perimetro diminuisce!”. Qua cosa...?»
52. **T1**: «Perché non hanno... cioè secondo loro hanno comunque usato le lettere e non si accorgono nemmeno che il punto P nel loro disegno l'hanno preso nella prima metà. E quindi sono convinti che avendo chiamato con x il segmento AP e quindi essendo passati a una rappresentazione simbolica... non si pongono neanche il problema che se avessero preso un punto P nell'altra metà, potevano arrivare a una conclusione diversa.» [...]

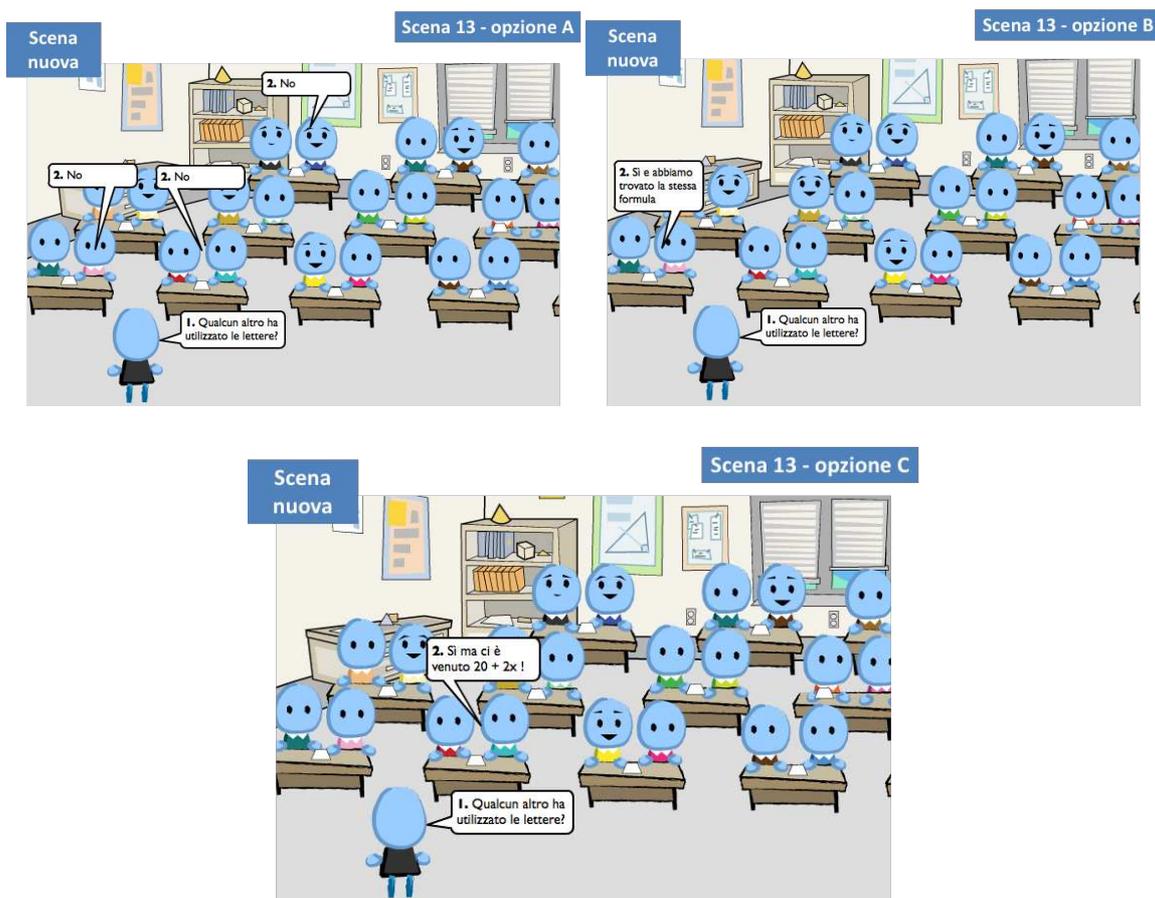


Figure 21: New scenes 13A, 13B and 13C of T1 and T2's new scenario.

63. **R1**: Dopodiché c'è questa che è l'ultima scena, con le tre opzioni. Prima opzione: “Qualcun altro ha utilizzato le lettere?” e tutti dicono “No”; e infatti ho aggiunto io la domanda: quale sarà il successivo intervento dell'insegnante? Se dicono tutti no, cosa succede? Quale sarà l'intervento successivo? Ci sono più opzioni: si potrebbe dire “Proviamo a passare alla task 2”, e a questo punto farli lavorare con una tabella, provare a costruire il grafico... questa è una possibilità. Altrimenti, un'altra possibilità è quella di chiedere a chi ha utilizzato le lettere di venire alla lavagna e far vedere come ha costruito l'espressione, in modo che possano esplicitare anche agli altri come ci sono arrivati: non è frutto di un tirare a caso, comunque hanno lavorato sulla figura, senza tenere conto di tutte le possibilità... per cui può essere che dal resto della classe, di fronte a una costruzione geometrica, possa uscire qualcosa, anche solo una domanda. Questa potrebbe essere un'idea, almeno per

condividere la costruzione dell'espressione, dopodiché io proporrei la task 2, perché una delle domande è la costruzione dell'espressione simbolica. Qui [opzione B] stessa cosa. [...] E invece qua sull'opzione C, abbiamo due espressioni diverse e chiediamo “Ma... qual è quella giusta?”. Cosa ne pensate? Però in ogni caso chiederei ai due gruppi, chi è arrivato a un'espressione, chi è arrivato all'altra, di venire alla lavagna e raccontare come l'hanno trovata. Io mi aspetto che sia più probabile che si arrivi a un aspetto del tipo A o del tipo B, cioè pochi che hanno provato a scrivere l'espressione simbolica e la maggior parte che ha costruito quella con il punto più vicino ad A.»

In this excerpt, we can notice that the agents previously detected are still present and active. In particular, the methodological agent “and if?” is recalled by R1 who reads the teacher's thought balloon in which she is thinking of different possible options (line 37). Then, the disciplinary agent of the task analysis and the institutional agents linked to the students' behaviour and previous experience interact in R1's (lines 45) and T1's discourse (lines 46, 52), while they discuss about the disciplinary and institutional reasons behind the different options chosen (i.e. the nodes of the tree scenario).

Finally, the methodological agent is stressed again in the reading of the teachers' scenario provided by R1 (line 63): “If everyone says no, what happened?”; “Which answer is correct?”. Thanks to the interaction with the disciplinary agent (as happened in the third meeting) the methodological agent has led to the internalisation of the tree scenario technique, effectively used by T1 and T2 in revising and justifying their work.

4.5.1 Conclusion of this part

The data analysis developed by considering the perspective of the *why* of internalisation has shown the key role played by the interaction of the agents affecting teachers' initial praxeology with new agents activated by the researchers. When T1 and T2 initially describe and discuss their scenario, it emerges an initial meta-didactical discourse to justify their technique, grounded mostly on disciplinary and institutional agents: on one side, the *a priori* analysis of the mathematical task and, on the other side, the specific context of their 10th grade classes. These are the predominant agents which contribute to build their initial praxeology. Thanks to the interaction with the researchers, the institutional agent is gradually opened towards a generic 10th grade class, and a new methodological agent becomes active and starts to interact with the existing ones: the idea of wondering “and if it does not happen?” at every crucial node of the classroom discussion. The interaction of these agents (Figure 22) at the micro level triggers the emergence of a new praxeological component: the technique of the tree scenario, which provides teachers with tools and reflection basis that are strong enough for effectively handling the discussion in the classroom.

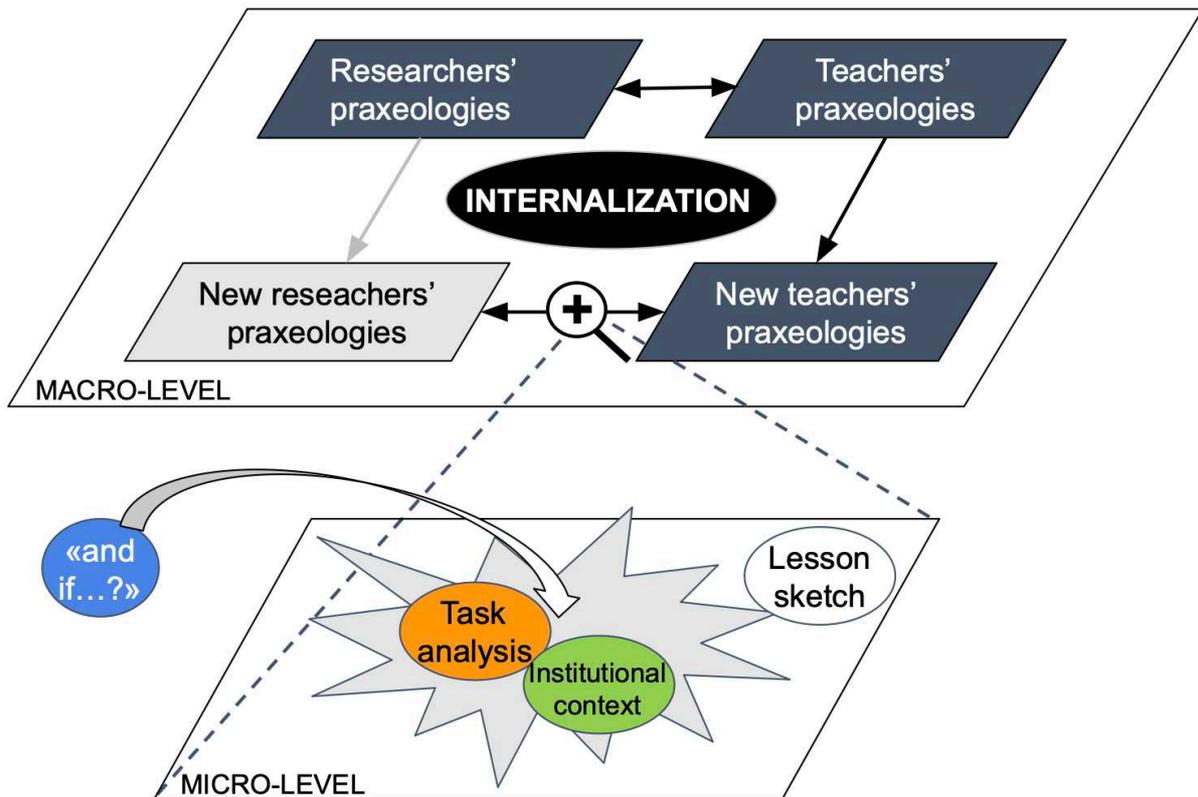


Figure 22: The interaction of agents at the micro level, with the external agent activated by R1.

4.6 The *where* of internalisation

In this section we analyse five excerpts of interactions between participants in the training course (in the third and fourth meeting), adopting connectivism as an interpretative lens in dialogue with Meta-Didactical Transposition, that is, going deeper into the *where* of internalization. The aim is to highlight how teachers' networks of knowledge have evolved and enriched through the integration of new nodes, the restructuring of existing connections and the comparison with external praxeological components. In the dialogue excerpts, the parts of the dialogue that refer to nodes or connections in the network of knowledge are highlighted in purple. The examined excerpts show different ways of building and connecting knowledge nodes, underlining the role of the context, of post-practice reflections and of interactions with colleagues and researchers. Through these processes, the dynamics underlying the internalisation of new praxeological components and the evolution of meta-didactical praxeologies emerge, in line with connectivist principles and with the implications of Meta-Didactical Transposition.

Excerpt [22-24] from the third meeting – The timeframes for the activity

The data concern the reflections that emerged during the presentation of the lesson scenes related to the task on squares, conducted by T1 and T2. R1 asks why in their instructions they always explicitly state the presence of only 5 minutes for the individual part of the activity.

22. T2: «Mah... *l'abbiamo sperimentato anche con il Liceo Potenziato: più di cinque minuti non li reggono, più di cinque minuti individuali...* comunque, si buttano nella

condivisione... e anche la condivisione a coppie, dopo un po'... Sono piccoli anche, quindi può darsi che...»

23. **R1**: «...preferiscono tempi brevi di lavoro.»

24. **T1**: «Poi ovviamente se uno vede che lavorano bene e che hanno ancora bisogno di tempo, possono sfiorare. Però il fatto è di dare un'indicazione precisa, altrimenti: “Leggete la scheda...” e passa l'ora! Quindi, se loro sanno che invece hanno più cose da fare e gli viene dato un limite, riescono a essere più produttivi di solito.»

This brief comparison shows how teachers interpret and apply time management for activities. According to connectivism, nodes and connections within the teachers' network of knowledge are activated rather than newly constructed, as they draw upon past experiences and established practices.

T2 activates connections between:

- Previous experiences: experiments in similar contexts (i.e. Liceo Potenziato), which confirm the need for short timeframes for individual activity;
- Class context: students' level of maturity (i.e. “Sono piccoli anche [...]”);
- Time management to dedicate to the activity.

T2's decision to set a short time for the activity reflects a belief derived from past experiences. The 5-minute timeframe connects directly to insights gained in the “Liceo Potenziato”, where it was observed that students' maximum attention span during individual work is limited. This process shows how T2 mobilizes an internalized node from previous training, leveraging it in her current teaching practice.

T1 similarly draws upon existing nodes in her network, connecting:

- Class context: the need to provide clear time limits to maintain student focus;
- Time management to dedicate to the activity;
- Educational objective: enhancing productivity through precise instructions.

T1's practice demonstrates flexibility, as she dynamically adjusts the time limit to the specific situation. However, this adaptability does not signify the creation of new nodes but rather the reactivation and recombination of existing ones, such as the connection between productivity and time control.

According to the theoretical framework of MDT.2, both teachers' practices reveal where pre-existing meta-didactical components come from and how they are utilised within their praxeologies. T2 internalizes a node derived from her experience in the “Liceo Potenziato”, reactivating it as a belief in the current context. T1, on the other hand, connects and reconfigures existing nodes, such as time control and productivity, to guide her choices dynamically.

Thus, T2 and T1's networks of knowledge are undergoing a reactivation of established nodes and connections in response to the context of the current training. Their “time management” decisions are rooted in prior experiences and practices, demonstrating how their didactical praxeologies are shaped by the interplay between past knowledge, contextual demands, and reflective practice. This activation process aligns with the principles of connectivism, emphasising the dynamic interplay of nodes within a pre-existing network.

Excerpt [46-53] from the third lesson – The use of tree branches in the scenario

On T1 and T2's work, R1 observes that she finds it interesting that there are hypotheses of students working on numerical examples and someone else trying to find a generic algebraic

expression. However, R1 underlines how it is necessary to think about the possibility that not everyone gets there (the algebraic expression) and in that case evaluate how to proceed in the discussion, since task 2 will explicitly require it.

46. **R1:** «Okey. Allora, il gruppo che aveva detto “Abbiamo fatto delle prove!” dice “...se AP è 1 cm il perimetro è 38 cm”, giusto?»
47. **T2:** «Però parte da sopra...»
48. **R1:** «Okey. Quindi, gli altri erano quelli che avevano detto “Anche noi!”: “Noi abbiamo visto che se AP è 2 cm il perimetro viene 36 cm e se AP è 3 cm viene 34 cm, perciò diminuisce...”. Danno un esempio... Quindi, dopo parte da qua: “...se AP è 1 cm il perimetro è 38 cm”, “...e se AP è 5 cm il perimetro viene 30 cm”; quindi, diciamo, tutti questi interventi erano i “Sì” di prima e confermano la prima osservazione che era stata fatta. Poi questi erano quelli che avevano detto “No”...»
50. **T2:** «Sì, che in realtà è l’ultima però, perché c’è quella prima...»
51. **R1:** «Okey, quindi ci sono questi: “Noi invece abbiamo chiamato x il segmento AP e abbiamo visto che il perimetro viene $40-2x$, quindi se x aumenta il perimetro diminuisce!”»
52. **T2:** «Direi in accordo con il primo intervento.»
53. **R1:** «Okey, poi intervengono loro che riportano al numerico. È carino perché c’è questa interpretazione algebrica che hanno costruito senza che gli fosse richiesto, quindi autonomamente, ma effettivamente in seconda mi posso aspettare che qualcuno provi direttamente a costruire un’espressione simbolica, perché già ci avrete lavorato prima. Questi dicono: “Sì, però se AP è 6 cm il perimetro viene 12 cm e se AP è 7 cm viene 34 cm, quindi aumenta!”. Quindi contribuiscono con l’esempio che ho qui. Mi ricordo delle attività che ho fatto per la mia tesi di dottorato, in cui c’era prima da lavorare su esplorazioni numeriche e costruzione di congetture, e poi si chiedeva di dimostrare. E c’erano delle studentesse che avevano costruito una congettura molto parziale perché avevano fatto solo l’analisi di dati numerici ben limitati. Per cui era interessante... poi lì era stato interessante perché un’altra studentessa invece aveva costruito l’espressione algebrica senza saperla interpretare, per cui c’era questo botta e risposta: questa provava a interpretare questa espressione e quelli che avevano costruito gli esempi dicevano “No, questa interpretazione non va bene, perché noi abbiamo questa coppia di esempi...”. È carina questa idea, è bella questa idea della... È chiaro che pensiamo: se invece nessuno propone il discorso algebrico, cosa fare? Qui si può scegliere, perché per il fatto che poi nella Task successiva invece si richiede, forse non è necessario anticiparlo. Anche se anch’io mi aspetto che qualcuno possa costruirlo, allora bisogna valutare bene se è il caso di farli parlare, interpretare o no, o se aspettare che tutti arrivino a costruire l’espressione in modo che il confronto sia più semplice per chi non l’ha prodotta. Qui bisogna pensarci, quindi anche in questo caso si potrebbero ipotizzare due strade, insomma un bivio: fare l’albero dello scenario, quindi a seconda delle risposte... [...]

According to connectivism, the various lesson scenes designed are proposals based on T1 and T2’s hypothesis about the possible configurations of networks of knowledge activated by students engaged in solving Task 1.

At the didactical level, T2 and T1 hypothesise that the network of students working on numerical examples, therefore on variations in the perimeter for specific values of AP, contains the following nodes:

- Empirical data (numerical exploration);
- Formulation of conjectures based on observations;
- Connection between variations of AP and the behaviour of the perimeter.

The possible outgoing learning consists in the creation of new nodes (numerical examples) and connections between them, leading to the formulation of initial conjectures.

While for students who build an algebraic expression, that is, who move from numerical exploration to a symbolic representation ($P = 4 - 2x$), T2 and T1 hypothesise that the network is made up of the following nodes:

- Algebraic generalisation based on data;
- Attempts to interpret the symbolic relationship in numerical terms.

The possible outgoing learning consists in the connection between already existing nodes (numerical and algebraic knowledge), showing a transition from exploration to modelling.

At the meta-didactical level, R1's speeches provide reflections on the management of students' different strategies and on the importance of encouraging the transition between numerical exploration and symbolic interpretation. In fact, R1 recalls previous experiences, including her doctoral thesis, to support the didactic value of the double proposal (numerical vs. symbolic). R1's network of knowledge is structured around:

- Past research experiences of similar activities;
- Management of didactic alternatives (encouraging autonomous explorations or guiding towards a shared synthesis);
- Reflections on didactic progression in relation to the next task.

R1's research experience (i.e. doctoral thesis) acts as a consolidated node, which guides her operational decisions. The reference to the "tree branches" (autonomous explorations vs. guidance towards a common solution) highlights the effort of R1 to share previous knowledge and current observations to reflect on didactic choices. T1's and T2's double proposal (numbers vs. symbols) is then enhanced by R1 because it generates a cross-reference to a similar situation (a node already existing in R1's network of knowledge) that can be re-proposed in the scenario using a specific praxeological technique currently outside the teachers' network of knowledge (the tree branches, which R1 suggests T1 and T2 adopt).

Two aspects emerge here. The first is where the node in the network of knowledge comes from that allows R1 to re-associate the current situation with a previous one (i.e. previous research experiences during the PhD). The second is how the researcher can act as a facilitator in the evolution of networks of knowledge, guiding the entry of a new node that facilitates the transition from empirical explorations to algebraic generalisations. Furthermore, it underlines the need for thoughtful didactic choices (anticipating or not the algebraic comparison) to maximise students' learning potential, respecting the dynamics of their networks of knowledge.

Excerpt [102-150] from the third lesson – Consolidated classroom practices and textbooks

In the examination of the initial settings of the scenario that T3 makes, she insists a lot on saying that middle school students need to channel their desire to do into something practical, that it is necessary to read the assignment for everyone (not like T1 and T2 who had chosen to have the students read it directly individually) and that she must also exemplify it on the blackboard.

102. **T3:** «[...] E **alle medie** si lavora anche... cioè **c'è molta manualità ancora**, perché **sono piccoli, non sono in grado di fare tutte queste congetture** che abbiamo fatto. Poi, voi [T2 e T1] probabilmente lavorate... in che scuola?»
103. **T1:** «Liceo scientifico»
104. **T3:** «Cioè non c'è paragone. Per quanto possano essere magari problematiche, comunque un ragazzo che fa un percorso di liceo scientifico delle piccole congetture riesce ancora a farle. Noi **abbiamo comunque ragazzi che hanno delle grosse difficoltà, della logica** per esempio...»

- [...]
106. **T3**: «**Han bisogno di vedere**. Nel senso che magari in una seconda liceo, per quanto problematica possa essere, possono iniziare a immaginare... non so, dalla mia piccola esperienza, **io adesso è da anni che lavoro alle medie**... penso che si possa immaginare un segmento x di 1 cm, di... si può immaginare. **Alle medie glielo devi fare ancora disegnare.**»
- [...]
108. **T3**: «Comunque, io qui **ho pensato di partire dai disegni e provare a parlare di perimetro, che non è così scontato**... E... quindi niente, questo è l'inizio...»
109. **R1**: «Okey, quindi tu pensavi di farli lavorare, però a partire dal testo della Task 1 così come...?»
110. **T3**: «A partire dal testo spiegato, comunque. Quindi, non ho scritto “Vi consegno le fotocopie”, questo non l’ho scritto, li avrei messi in coppia e poi **avrei dato il testo, ma lo avrei comunque spiegato**. Perché l’altro problema che esiste alle medie... è vero che ci sono dei ragazzi con delle potenzialità, però **devi portare avanti un discorso dove devi far sentire un po’ tutti allo stesso modo**... quindi, non è che puoi dire: “Voi che siete bravi ve lo leggete...”, quindi sicuramente **i problemi un pochino più elaborati io devo leggerli e devo spiegarli**. Poi so benissimo che magari ne avrò due o tre che manco mi ascoltano e partono in quarta e fanno delle congetture anche logiche, ma ne avrò tanti altri che...»
- [...]
114. **T3**: «[...] magari **questa prima attività la farei per una prima** [...] e quindi avrei detto: “Disegniamo un segmento AB di 10 cm e prendiamo questo segmento corto AP di 1 cm, l’altro sarà di 9. E proviamo a disegnare questi quadrati, provate a disegnare il perimetro. Poi avrei preso ancora un’altra coppia e avrei detto: “Questa volta misura 2 cm” e **sarei partita comunque con dei numeri naturali**, con dei calcoli molto semplificati, e **li avrei portati a calcolare il perimetro totale**. E **avrei fatto fare loro tutto il percorso, proprio con tutto il disegno.**»
115. **R1**: «Quindi, non solo spiegazione dell’attività, ma costruzione insieme degli esempi. Quindi non a coppie o individuale, ma collettiva.»
116. **T3**: «**Li avrei messi a coppie, ma li avrei guidati in modo collettivo.**»
117. **R1**: «Guidati molto da te... [...]»
- [...]
127. **R1**: «Però io proverei, proverei a lasciare un po’ di spazio anche a loro, in modo da fare una discussione in cui intervengono. Poi se non esce niente son d’accordo, prendi le fila del discorso e fai l’esplorazione insieme a loro. Però provare a lasciare un po’ di tempo per lavorarci a coppie...»
- [...]
149. **R1**: «[...] dopo vedo che passi già alla terza media, [...]»
150. **T3**: «[...] **Si presume che comunque in terza** un’idea di piano cartesiano, di grafico, di unità di misura, di relazione... **qualche cosa in più si può fare**... Eeeeh... sì, si può prevedere lo stesso anno, si può prevedere anche in prima... E qui [slide] ho visto... **mi è venuto in mente il legame con le equazioni, perché comunque molti libri, molti testi li propongono**: il quadrato, la x , il perimetro... cioè vedo molti problemi dove imposti l’equazione...»

T3 reflects on the initial settings of the task for middle school students, highlighting the need to involve them through practical activities and supporting them in understanding the instructions with collective reading and explanations on the board. In her speeches, T3 externalises connections of her own network of knowledge, built during her teaching experiences and shaped by them. Analysing the data, several nodes and connections emerge within T3’s network of knowledge.

With respect to the need to involve students in practical activities, T3 emphasises the importance of channelling students' enthusiasm towards concrete objectives. This belief is tied to:

- T3's direct teaching experience in class;
- T3's indirect experience in class (e.g., observations of students' behaviour during similar activities).

Regarding the strategy to ensure that students understand the instructions, T3 expresses her beliefs focused on the choice of collectively reading the instructions and exemplifying them on the board, rather than letting students work individually from the beginning. This choice is based on the following nodes:

- Prior knowledge that T3 has on her middle school students' difficulties: observations of challenges students face in independently understanding assignment texts;
- The students' perceived need for T3 to guide them in a structured approach to solve the proposed activities.

These are stable and pre-existing nodes in T3's network of knowledge, deriving from previous teaching experiences that constitute her didactical praxeologies: the importance attributed by T3 to collective reading and explanations on the blackboard underlines the role of the teacher in facilitating understanding, adapting her approach to the specific needs of the students. R1, with her interventions, attempts to restructure the network of knowledge through comparison with new teaching situations. R1 tries to share new teaching praxeologies, so that they can be taken into consideration by T3.

Additionally, T3 associates the task of squares with the concept of equations, recalling that many school textbooks for eighth-grade students introduce variables in the calculation of the perimeter. This reference represents a connection between:

- The concept of variables and algebraic representation: a node that recalls the construction of abstract models;
- The contents proposed in school texts: a node that T3 uses as a reference for the teaching context.

Here, it emerges how the belief that variables should only be used in the eighth grade is reflected in a pre-existing node, namely T3's reliance on textbook content as a basis for her teaching choices.

In summary, T3's decisions are informed by stable nodes in her network of knowledge, activated in response to the specific teaching situation (i.e. complex activities, from T3's point of view, in which students might fail). Her choices reflect well-established practices—such as the use of practical activities and structured guidance—rooted in previous experiences and consistent with her didactical praxeologies. Here resonates what has already been observed in Section 4.4.2 of the “zooming out on the how”: while new contexts (e.g. R1's proposals) may prompt T3 to activate different nodes, the underlying network seems remains unchanged, showing how her teaching is shaped by past experiences and consolidated practices.

Excerpt [84-88] from the third lesson and excerpt [40] from fourth lesson: $40 - 2x$ o $2x - 40$?

Already in lesson 3:

84. **R3**: «Quello che mi piacerebbe vedere nella scena... in quella di 40-2x, dov'è? Ecco quella lì! Qui secondo me è molto interessante: “Siete d'accordo?”, perché potrebbe succedere che uno dica “40-2x” e ci sia un altro gruppo che invece dica “No, 2x-40”. E questo succede normalmente, anche nei gruppi anche di insegnanti. Mi è successo recentemente: l'ho fatto con un gruppo di insegnanti e mi è successa proprio questa cosa. E quindi “Siete d'accordo?” significa che comunque lì si condivide un conflitto di soluzioni, diciamo, e quindi questo può stimolare a passare al livello successivo e quindi a trovare la soluzione giusta.»
85. **R1**: «Ma è quello che hanno messo [slide successiva], però effettivamente si sono fermati qua adesso per l'attività, è ancora da proseguire... Effettivamente però è interessante perché c'è il piano di chi dice “Sì, sono d'accordo” fornendo numeri, però potrebbe esserci chi dice “No, non sono d'accordo con loro, perché ho trovato un'altra espressione”.»
86. **R3**: «Succede che uno faccia il disegno nell'altro modo.»
87. **T5**: «Forse conviene fare una cosa ad albero, in cui ogni volta si aggiunge...»
88. **R1**: «Sì, è quello che dicevo io, l'albero. Nella progettazione è carino: appunto, se arriva questo intervento di questo [gesto per indicare un ramo dell'albero], se non arriva ma mi interesserebbe un intervento del genere, dico una cosa che possa stimolarlo. Quindi se nessuno lo dice, si potrebbe dire “In un'altra classe qualcuno ha detto 40-2x, come mai? 2x-40, come mai?”. Sempre pensando a questo gioco... per progettare a priori quello che succede, ho sempre due opzioni, perché non c'è il percorso certo... poi in realtà non è detto che con l'albero si riempiano tutte le casistiche possibili, però effettivamente...»

And again in lesson 4. First, possible forks or turns that the discussions can take are discussed in terms of possible responses from the students. Then, at a certain point there is a comment from R3:

40. **R3**: «Ora si potrebbe anche pensare che qualcuno... almeno parlo per classi che ho visto finora di sperimentazioni precedenti di questi problemi, perché questo problema l'ho già sperimentato moltissimo con insegnanti e con studenti a vari livelli d'età. Che qualcuno si accorga che c'è la limitazione, quindi questo x viaggia tra un valore minimo e un valore massimo, e che qualcun altro non se ne accorga per nulla. Questo va anche un attimo previsto prima.»

Here R3 is inserting a node, related to what we could call “a conflict between mathematical solutions”, in the network of knowledge of teachers who had not foreseen the possibility that students could or could not ask themselves questions about the range of possible values that x can assume. For R3 this is a consolidated node in her network of knowledge, the result of previous experiments and teacher training. This node can be understood as a praxeological component external to the teachers' network that, at the very moment it is shared, becomes internal, because the teachers become aware of it. R1 then reiterates that she uses a tree design in the lesson scenes, sharing another praxeological component, a technique that allows for the prediction of possible learning paths. Both praxeological components proposed by R3 and R1 aim to highlight the conflicts of mathematical solutions and facilitate the transition to a more structured understanding. A series of considerations between T1, T2 and R1 then follow on how to internalise this possibility in the scenes, therefore on how to welcome the new node in the network of knowledge, by modifying one's own meta-didactical praxeologies (meta because we are at a hypothetical level and nothing has yet materialised in class).

Excerpt [90-101] from lesson 4 – From practical to formal

There is a speech by R2, in which he offers T3 some ideas to generate new connections in her network of knowledge. In fact, T3 is convinced that in middle school you have to go concrete and that it is very difficult to lead students to abstract reasoning (except in isolated cases).

90. **R2:** «Però c'è un altro aspetto che secondo me è importante e che può essere rilevato a tutti i livelli d'età, e cioè il fatto che tu qui hai un aspetto formale, non so: la x , gli intervalli... e tu pensi al Δx , anche se non glielo chiami così. Però loro sostanziano in modo molto concreto, come dicevi tu. Se viene fuori la parola “regolare”, vado a vedere che cosa vuol dire “regolare”: allora quel “regolare” lì diventa qualcosa che non è solo formale, ma vai a sostanziare con qualcosa di concreto quello che loro hanno intuito, detto chissà come, eccetera eccetera... Però basi il tuo intervento su qualcosa che parta da loro, nel senso anche concettuale, nel senso cognitivo, nel fatto che stanno costruendo un modo di pensare che sta diventando matematico. Secondo me è molto importante questa cosa. Poi là c'è “ x aumenta troppo”, anche quello è un qualcosa espresso con un linguaggio... cioè c'è il fatto del negativo, che è il male assoluto... e allora anche quello è bello, perché provvedo in modo formale, se vuoi, introducendo il valore assoluto...»

T3: «Infatti... si può già introdurre il concetto di valore assoluto?»

R2: «Sì, però lo usi sempre a partire dalla loro osservazione e gli dai in qualche modo una base concreta su un processo di modellizzazione matematica.»

R2 is showing the other side of the coin: with an exercise like the squares task, one can work with whole numbers and propose concrete examples. However, one can also have students make “discoveries” if they are asked the appropriate guiding questions.

The nodes, to be understood as praxeological components that he is externalising are these:

- Connections between concrete and formal: R2 suggests intertwining concrete and formal elements in the learning process, to bring out in the students the sense of mathematising;
- Valorisation of students' intuitions: R2 suggests starting from the students' spontaneous observations, using them as a basis to introduce formal concepts such as absolute value;
- Mathematical modelling: R2 insists on the importance of guiding students towards mathematical discoveries through targeted questions, transforming concrete intuitions into rigorous symbolic representations.

At this point T3 declares that she does not have a degree in mathematics and that she found herself reading books, even university books, to prepare a lesson and she understood them better or reviewed with different eyes notions learned during her university days.

93. **T3:** «Ma io... è una mia esperienza personale... io arrivo dal liceo scientifico e vabbè poi sono laureata in scienze della terra, quindi l'esame di matematica, l'esame di fisica c'è... comunque abbiamo fatto un percorso diverso... però io ho sempre avuto la passione di insegnare [...] Però posso dire che nel momento in cui ho iniziato a insegnare alle medie e quindi ho iniziato a leggere molti libri, molti testi, io ho compreso molti concetti matematici che avevo imparato a memoria... io avevo una buona memoria, ho sempre studiato molto velocemente... La comprensione degli intervalli di variazione... io li ho capiti dopo, posso dire che li ho capiti nel momento in cui ho dovuto farmi delle domande, inventarmi delle lezioni. Cioè, io lo trovo bellissimo questo. Tante volte riprendo dei libri dell'università [...], a volte li rileggo e adesso li capisco, forse all'epoca non avevo capito tutto. Quindi la modellizzazione parte dalla realtà, tanti concetti alle medie li puoi passare.»

[...]

99. **R2:** «Che fa parte di una percezione, certamente di un modo di lavorare con le cose in modo razionale...»
100. **T3:** «Io ricordo quando studiavamo, **noi biologi**, il decadimento radioattivo: è una curva esponenziale. Che comunque tu disegni, non ti danno una funzione e poi fai il disegno; prendi i dati e poi li metti insieme e viene fuori una curva. **Noi facevamo al contrario: partiamo dall'esperienza e poi...**»
101. **R2:** «**Questa cosa del fatto di non separare la parte astratta, formale dalla parte più intuitiva, concreta... il problema è di intrecciarle il più possibile.**»

T3 takes R2's suggestion, in saying that if modelling starts from reality, even with middle school kids you can do a lot. And she fully understands it because it resonates with existing connections in her network of knowledge ("*Noi biologi [...] noi facevamo al contrario: partiamo dall'esperienza*"). And probably T3 even shares it (see when she says "*tanti concetti alle medie li puoi passare*") - since until the moment before T3 was wondering whether she could really talk about absolute value in middle school (*Si può già introdurre il concetto di valore assoluto?*).

This exchange, however, allows us to observe that the choices of setting up T3's scenario are rooted in this belief of hers (which can be summarized as "let us start from the practical with the students, and then we will see if we can formalise), the result of previous experiences. Her training in earth sciences and the learning method based on practical experience influence her didactical praxeologies. This is reflected in the choice to start from the concrete to get to formalisation. That is, her scenario design is linked to pre-existing connections, anchored not so much to the experience with the class, but to her *modus operandi* that she confronted in her past as a university student, who studied biology and saw mathematics as an application of her studies. Hence, these are other insights that allow us to understand where T3's methodological choices in setting up her scenario come from. In fact, her methodological choices are strongly anchored to her past, in which mathematics was perceived as a practical application in her biology studies. This leads to a teaching approach that favors concreteness, but which could require greater integration with formal practices.

5. NEW THEORETICAL LENSES TO TAKE INTO ACCOUNT: A FURTHER EVOLUTION OF MDT.2

In the last few years, the MDT.2 framework has further evolved thanks to other studies that suggested taking into account other important aspects to be integrated, such as the role played by beliefs within the processes under investigation, the design of teaching materials that accompany the collaborative work, and the interplay between the different institutional roles played by the different actors.

5.1 MDT.2 and the documental approach

A theoretical framework that appears to be compatible with MDT.2 and that allows us to focus on specific aspects of meta-didactical praxeologies related to the design of teaching materials is the Documental Approach to Didactics (DAD) (Gueudet & Trouche, 2009). The core idea underpinning the DAD framework is the concept of *document*, which is defined as a collection of *resources* and the associated *utilisation schemes*. The relational formula highlighting the constituents of a document (Gueudet & Trouche, 2009) is: "Document = Resources + Utilisation schemes."

The term "resources" refers to the various elements or materials that teachers use, adapt, and interact with as part of their professional practice. These can be physical, digital, or conceptual

tools that support teaching and learning processes. In this approach, resources are not static but evolve as they are used, modified, and combined with teachers' knowledge and goals.

The term “scheme” originates from Vergnaud (2009) and refers to the stable organisation of activity used to address a category of situations with a shared objective. Utilisation schemes for a set of resources consist of: a *class of situations* where the resources are employed, *rules of action* that manifest in the observable ways resources are utilized, and *operational invariants*, which represent the underlying cognitive framework that guides the teacher's actions. These invariants serve as both the driving force and the outcome of the teacher's work. As a result, documents integrate both material and psychological elements.

The process through which documents emerge from a set of resources, thanks to the actions of the subject, is referred to as *documentational genesis* (Gueudet & Trouche, 2009). Documentational genesis involves the interrelated evolution of resources and teachers, who use, organize, modify, and design these resources (Trouche et al., 2023).

Over the years, the DAD framework has been extended to contexts beyond the study of teachers' practices and professional development. For instance, Gueudet et al. (2012) examined the documentational genesis of trainee teacher educators creating documents for one another's training. Similarly, Kieran et al. (2013) investigated the work of researchers developing documents for students. Psycharis and Kalogeria (2018) explored how trainee teacher educators designed documents for teachers in the context of a professional development program. More recently, Pocalana and Robutti (2022, 2023, 2024a) studied the documentational genesis of researchers for the work with in-service mathematics teachers.

In particular, Pocalana and Robutti (2023) proposed an analysis of the work of researchers relying on a combination of the MDT.2 and the DAD frameworks. In their interpretative model, the researchers' generation of documents for a teacher professional development program is conceptualised as part of their meta-didactical praxeologies for the design and implementation of the program itself. The following picture (Figure 23) represents an adaptation of that model in which the utilisation schemes of the documents include elements of both the praxis and the logos components.

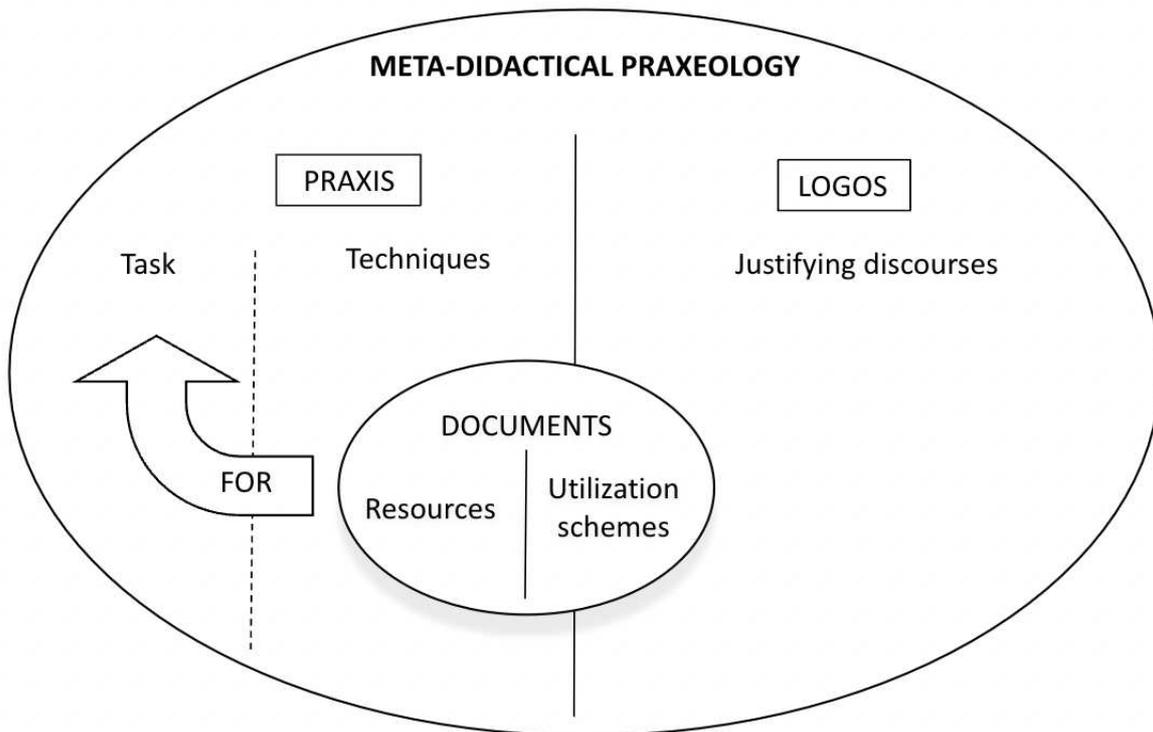


Figure 23: Model for meta-didactical praxeologies combining MDT.2 and DAD frameworks

In this model, the documents generated by the researchers are intended to address the task of their meta-didactical praxeology and reflect the logos component. The utilisation schemes of the documents intersect the logos component to take into account the fact that the operational invariants are part of the justifying discourses for their practices.

This same model has also been applied to the meta-didactical praxeologies and documentation work of teachers participating in a PD program led by researchers (Pocalana et al., 2024).

Coherently with the MDT.2 framework, we conceptualise the evolution of teachers' and researchers' meta-didactical praxeologies during the PLS PD program, including their documentation work, in an intertwined way. The researchers' documents constitute resources for teachers, to be used by the teachers for generating teachers' documents for the utilisation with their students. These teachers' documents can constitute, in turn, new resources for the generation of new researchers' and teachers' documents, which take into account the emerged ideas, needs, and reflections on the design of activities for students.

In the following, we will trace an evolution in the documentation work of both communities of teachers and researchers (Table 1, Table 2, and Table 3) The resources listed in the tables are only the main ones specific to these documents, acknowledging that there are many others coming from teachers' and researchers' previous experience, knowledge and previous work.

In Table 1, we show the main characteristics of the researchers' documentation work at the beginning of the program, which is strictly connected with their meta-didactical praxeologies for the management of the program. In particular, the rules of action are part of their techniques and the operational invariants are part of their logos component.

Table 1: Resources and utilisation schemes of researchers' documents at the beginning of the program.

| <i>Initial researchers' documentation work</i> | | |
|---|--|--|
| Resources | Utilisation scheme | |
| <ul style="list-style-type: none"> - MVI approach - Scenario design approach - Lesson Sketch - Teaching materials on the “two squares” activity | Class of situations: Promoting theoretical based teaching approaches by involving teachers in a practice-based meta-didactical task | |
| | Rules of action Involving teachers in scenario design, asking them to: <ul style="list-style-type: none"> - adapt the mathematical task to their classes; - create possible students' answers to the task and hypothetical excerpts of classroom discussion, containing teachers' interventions; - create both the ideal answers, towards which the discussion should lead, and the problematic ones; - design in LessonSketch various scenes of the scenario | Operational invariants In teacher professional development it is important: <ul style="list-style-type: none"> - enhancing teachers' awareness on the class processes; - intertwining theory with practice; - involving teachers in the design and implementation of classroom activities and in collective reflections on both these processes; - proposing a-priori analysis of classroom activities. |

Table 2 and Table 3 testify to the evolution of the documentation work of two teachers, T1 and T2, as a result of the evolution of their meta-didactical praxeologies.

The initial teachers' documentation work is mainly rooted in their past classroom experiences and the scenario design is conducted referring to familiar situations.

Table 2: Resources and utilisation schemes of teachers' documents at the beginning of the program

| <i>Initial teachers' documentation work</i> | |
|---|--------------------|
| Resources | Utilisation scheme |
| | |

| | | |
|---|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> - Task proposed by the researchers - Scenario design approach - Lesson Sketch - Teaching materials on the “two squares” activity | <p>Class of situations: addressing a practice-based meta-didactical task involving the design of a classroom situation</p> | |
| | <p>Rules of action:</p> <ul style="list-style-type: none"> - In the scenario design, propose only one linear development of the classroom activity, without imagining different possibilities; - insert in the scenario design the more frequent students’ answer, to which they are most accustomed. <p>In particular:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Indicate the expected students’ answers in the scenario from left to right, from top to bottom (Line 38) (Figure 24); - Insert question marks in bubbles indicating students’ thoughts where the students seem to have doubts or questioning expressions (Lines 57-62) (Figure 25). | <p>Operational invariants:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Scenario design should be based on past classroom experience and represent one familiar and usual development of a classroom activity. <p>In particular:</p> <ul style="list-style-type: none"> - The students do not share their doubts with the class and the teacher has to imagine their thoughts. |

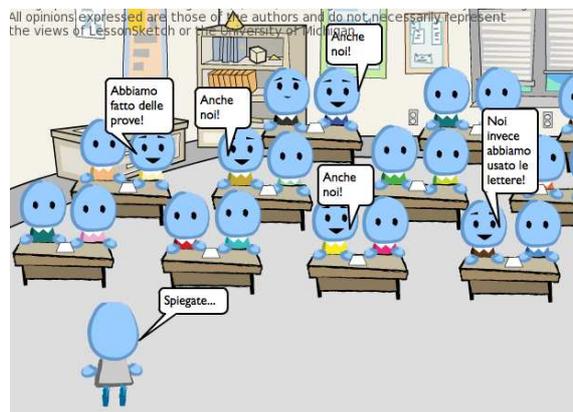


Figure 24: The scene 6 of T1 and T2's scenario

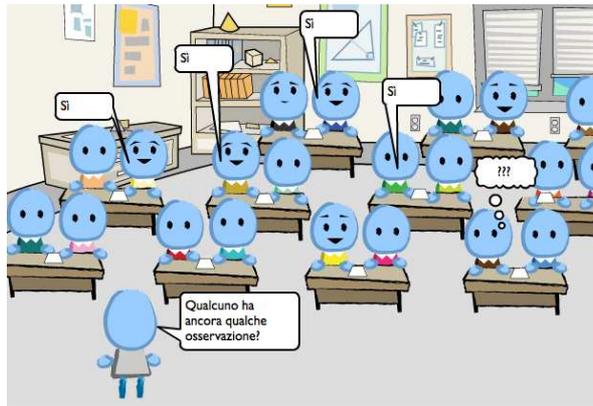


Figure 25: The scene 9 of T1 and T2's scenario

In the following excerpts, from the transcript of the third meeting, we can find instances of explicit articulation of teachers' scheme of utilization, related, in particular to the resource Lesson Sketch to provide the scenario design, stimulated by the researcher's questions.

38. **T1:** «Noi pensavamo: lo leggiamo da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso; però è chiaro che nella pratica non è detto che sia quello in basso a destra che ha risposto...»

[...]

57. **R2:** «Quindi i punti interrogativi sono i tuoi però, non sono loro.»

58. **T1:** «No, sono loro, nel senso che secondo la loro espressione non dovrebbe esserci questo... [cambio di decrescita in crescita]»

59. **R2:** «Sì, ma l'hanno detto loro in qualche modo, o sei tu che interpreti la loro espressione in quel modo?»

60. **T1:** «No vabbè, immaginando... io cerco di immaginare le reazioni degli studenti.»

61. **R2:** «Quindi è una tua interpretazione...»

62. **T1:** «Sì, loro secondo me...»

The researchers aimed to ensure that working with the scenario design approach could influence teachers' future practices and reflections in designing classroom activities. In the table below, we highlight some developments in the documentation work carried out by some teachers as a result of the reflections conducted with the researchers during the program meetings. This evolution may represent a step toward the creation of a new utilisation scheme incorporating instances shared with the researchers. Of course, as for meta-didactical praxeologies, it is not possible to study the long-term impact on participants' documentation work based solely on this data.

Table 3: Resources and utilisation schemes related to the shared documentation work

| <i>Towards instances of shared researchers' and teachers' documentation work</i> | |
|--|---|
| Resources | Utilisation scheme |
| | Class of situations: Addressing a practice-based meta-didactical task involving the design of a classroom situation |

| | | |
|---|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> - Task proposed by the researchers - Scenario design approach - Lesson Sketch - Teaching materials on the “two squares” activity - Discussions between teachers and researchers during the meetings | <p>Towards new shared rules of action:</p> <ul style="list-style-type: none"> - In the scenario design, propose different possible development of the classroom activity; - create a “tree” to represent possible different ways in which the classroom discussion could evolve. <p>In particular:</p> <ul style="list-style-type: none"> - In each scene, number the expected student answers, based on the order in which they are anticipated (line 33) - Insert in the speech bubbles the teacher's thoughts in a certain situation, including what they imagine the students are thinking (lines 75, 76) (Figure 26). | <p>Towards new shared operational invariants:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Scenario design should allow for envisioning various possible developments of the classroom activity, enabling the anticipation of different choices the teacher might make based on the various potential responses from the students. - It is important to clarify what the teacher is thinking when deciding to make a particular intervention. <p>In particular:</p> <ul style="list-style-type: none"> - It is important to clarify the order in which the students’ intervention should be read. - The teacher could not know students’ thoughts, which can only be imagined. So, students’ not expressed doubts are in the teacher's mind. |
|---|--|--|

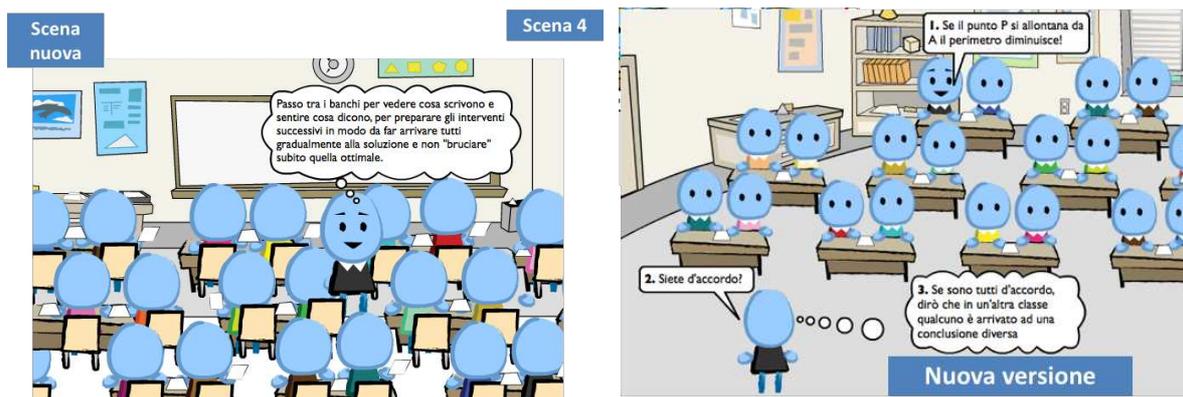


Figure 26: Revised scenes illustrating new utilisation schemes for Lesson Sketch and Scenario Design

In the following excerpts, the researchers are suggesting ways to overcome some difficulties related to the previous teachers' utilisation schemes of Lesson Sketch for the scenario design. In particular, they suggested numbering the students' answers in the expected chronological order and to put the thought bubbles related to the teachers instead of to the students.

33. **R1:** «[...] Forse per gli scenari, a livello della lettura, numererei se possibile le vignette, in modo da capire in che ordine... perché finché ci sono "Sì" e "No" ... però qua specialmente per vedere un po' come intervengono...»

[...]

75. **R2:** «No no, ho capito, però attenzione! Altrimenti c'è un gioco linguistico che non funziona, cioè qui si sta immaginando... cioè è un gioco complicato: loro stanno immaginando quello che gli altri possono dire, quindi una cosa. Poi possono anche immaginare anche - loro insegnanti - quello che loro immaginerebbero in quella situazione, e sono i punti interrogativi. Allora nella cosa [progettazione/rappresentazione] occorrerebbe forse un modo per... sono livelli diversi: quello che dicono esplicitamente gli allievi, quello che io dico o penso... cioè io penso che, immagino che: quello che dicono gli allievi, quello che dico io, quello che gli allievi pensano: ma sono io che immagino questo, quindi c'è un terzo livello.»

76. **R1:** «Si potrebbe mettere la nuvoletta -quella con i punti interrogativi- all'insegnante che dice [pensa]: secondo me loro non hanno le idee chiare e allora pongo un'altra domanda.»

As a result of the collective discussions between teachers and researchers during the meetings of the program, the final version of the scenes designed by T1 and T2 was coherent with the reflections emerged during the collective discussions, including the thought bubbles for the teacher and the numbering of the panels (Figure 23). This testify to the convergence towards shared elements of utilisation schemes between researchers and teachers, corresponding to shared components of meta-didactical praxeologies.

5.2 MDT.2 and beliefs

To complement the framework obtained combining MDT.2 and DAD, Pocalana and Robutti (2024a) found a double direction relationship between researchers' personal *beliefs* and their meta-didactical praxeologies, which reciprocally influence each other. Regarding their documentation work, researchers' personal beliefs about the needs of teachers participating in a PD program influence both the choice of resources to rely on and their utilisation schemes. Indeed, the researchers' personal level is intertwined with their institutional position, as part of a community with shared praxeologies.

From a study by Pocalana and Robutti (2024b) there is evidence on the evolution of teachers' *beliefs* during a professional development program. It results that teachers' beliefs can be interpreted as both a motivational agent and a consequence of the evolution of the meta-didactical praxeologies, which, in turn, is intertwined with the evolution of researchers' meta-didactical praxeologies. This is coherent with Swan's (2007) conceptualisation of the double direction relationship between teachers' practices and beliefs, but it goes further, because it also considers the *logos* component of their praxeologies and their relationship with researchers' praxeologies.

This led to the awareness of the necessity of taking into account and to devote specific attention to the evolution of the beliefs of both teachers and researchers, in connection with the evolution of their meta-didactical praxeologies. From this awareness, the model represented in Figure 27 stemmed (Pocalana & Cerasaro, in press).

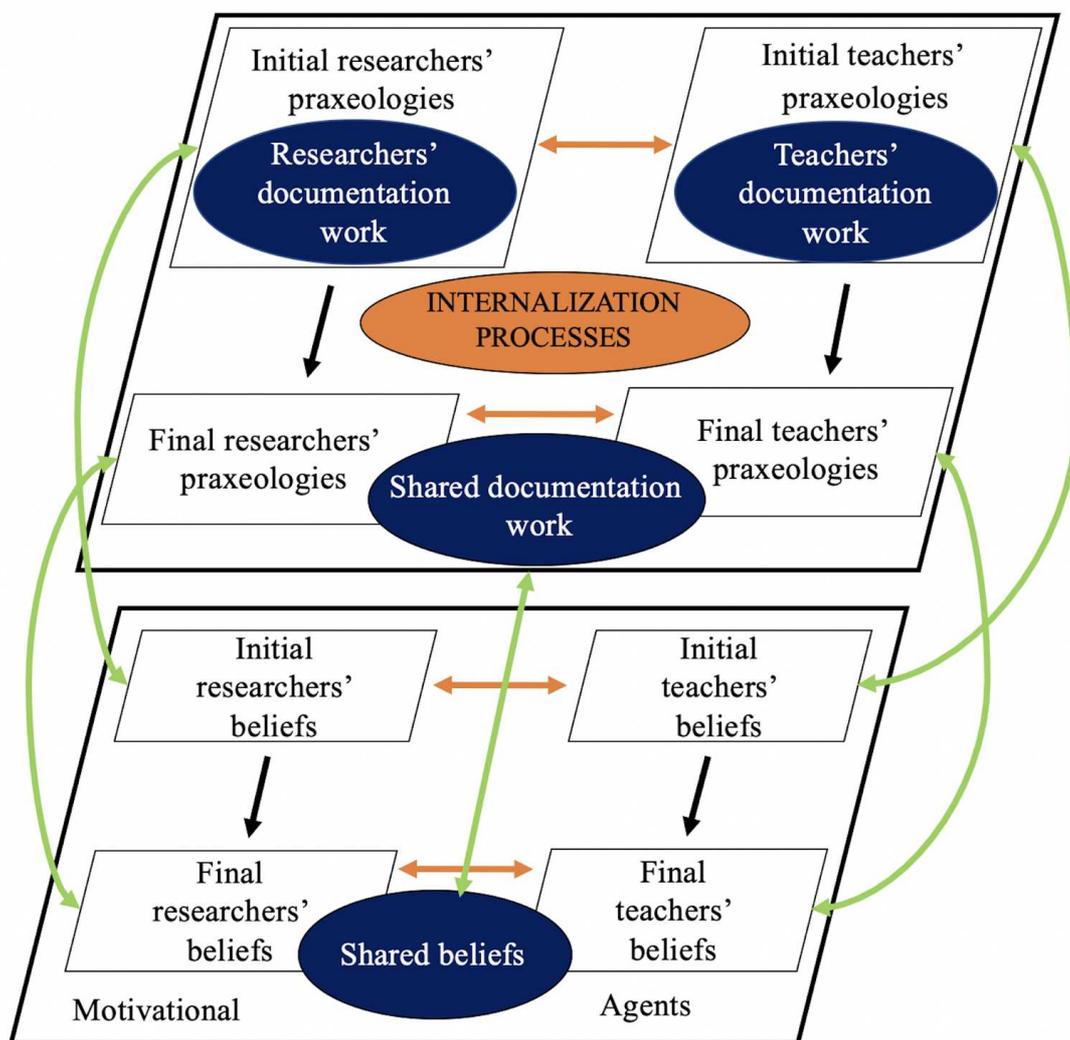


Figure 27: Model representing the evolution of meta-didactical praxeologies, documentation work and beliefs of the two communities.

In Figure 27, the orange arrows represent the relationships between the two different communities, teachers and researchers, and the black arrows represent the temporal evolution process. The green arrows, instead, represent the relationship between meta-didactical

praxeologies and beliefs and are bidirectional. Their bidirectionality is the novelty element in respect to the model of MDT.2 (Figure 2), where beliefs are included in the motivational agents for the evolution of the praxeologies. In this new model, beliefs are conceptualized as agents that act on the personal level but have also effects on the institutional level of the meta-didactical praxeologies, from which, in turn, they are influenced. Indeed, we consider individuals as “excessive subjects”, following Rothenberg (2010), who claims that, although individuals are socially produced, it remains “a remainder or [meaning] indeterminacy, so that every subject bears some unspecifiable excess within the social field. Every subject is an ‘excessive’ subject [and] the excess is ineradicable” (2010, p. 10).

5.3 MDT and the institutional position of actors in the meta-didactical process

The research on possible agents of internalisation brought forth the necessity of networking MDT with other theories, to describe the more complex phenomena, and showed the potentiality of including within MDT further elements of ATD: the concept of institutional *positions* and the *levels of didactic co-determinacy*.

As we report in the Introduction, the first step in this sense was the networking of MDT with the concept of position, coming from ATD. According to ATD, a person in an institution occupies a certain *position* in relation to an object that is relevant for the institution (Chevallard & Bosch, 2020c). In the school institution and in the academic institution, “teaching” is a relevant object: it is something carried out daily in the school, while it is being researched in academia. Furthermore, it is the object of professional development in which teachers and didacticians (in this section we use this term to stress the fact that we refer to researchers working as teacher educators) are involved. More specifically, teachers and didacticians – as subjects in the institutions – may cover (at least) two different positions each:

- Teachers are the ones who teach the students, and simultaneously they can be learners of how to improve their teaching and their preparations for teaching;
- Didacticians are the ones who educate the teachers and simultaneously they could be the ones who research on teachers’ professional development.

The interplay of didacticians and teachers’ institutional *positions* can be observed within the framework of MDT to analyse how it brings forth the evolution of teachers’ and didacticians’ meta-didactical praxeologies. In fact, for the teachers, this was already modelled in MDT as the *double dialectic* that is established between didactical and meta-didactical levels. This double dialectic would generate a tension between the two levels, and the teachers would include in their classroom practice new elements of practice and knowledge (praxeology) that had been developed during teachers’ professional development. Within the theoretical framework of MDT.1, this meant that elements of the praxis and logos that had been shared with the didacticians would proceed to become internal to the teachers’ community.

As an evolution of MDT, the new studies carried out in the last years (Minisola, 2004) concentrate the attention on the possible double (or multiple) positions of the actors involved in the meta-didactical transposition, along with the consequent multiple praxeologies they may use. The fact that the same actors - the teachers - have different positions may generate a tension that can have an impact on the process of evolution of their praxeologies. In this process, the dialogue with the didacticians would hold a prevalent role, as to provide a stimulus to this tension. In the light of this, the figure below provides an alternative interpretation of the process of meta-didactical transposition, taking into account the complexity due to the presence of multiple positions in the same agents (Figure 28):

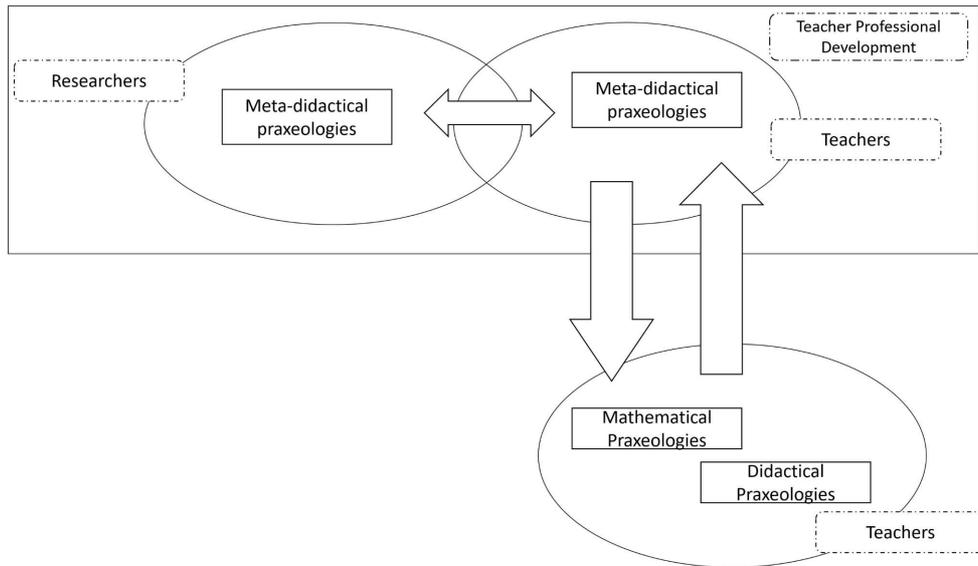


Figure 28: The process of meta-didactical transposition with teachers' double position

A similar process is observed for the didacticians as well. In fact, “didacticians, due to their complex role, live at the boundary between the ‘metadidactic’ and ‘research’ worlds and that it is precisely this being at the boundary that allows for the development of dynamics that support the evolution of their praxeologies.” (Minisola, 2004, p. 304).

The analysis of this complexity, where many positions of the actors are present, is one of the evolutions of the MDT framework. This evolution can be interpreted as a networking of theories, specifically a *combining* (in the sense of Prediger et al., 2008) of MDT.1 and the notion of position from ADT (Minisola et al., 2024). This combined theoretical framework allowed us to establish that, for the didacticians, the double dialectic can develop between two levels: *the meta-didactical level* and *the research level*. More specifically, the meta-didactical level is developed during teachers’ professional development and can be modelled with teacher-education praxeologies, and the research level is developed when they are making sense of the data collected during teachers’ professional development, and can be modelled with research praxeologies. This completes the schema in the above figure, illustrating in Figure 29 how all the different praxeologies at stake can bring forth new practices and knowledge in the communities involved in professional development.

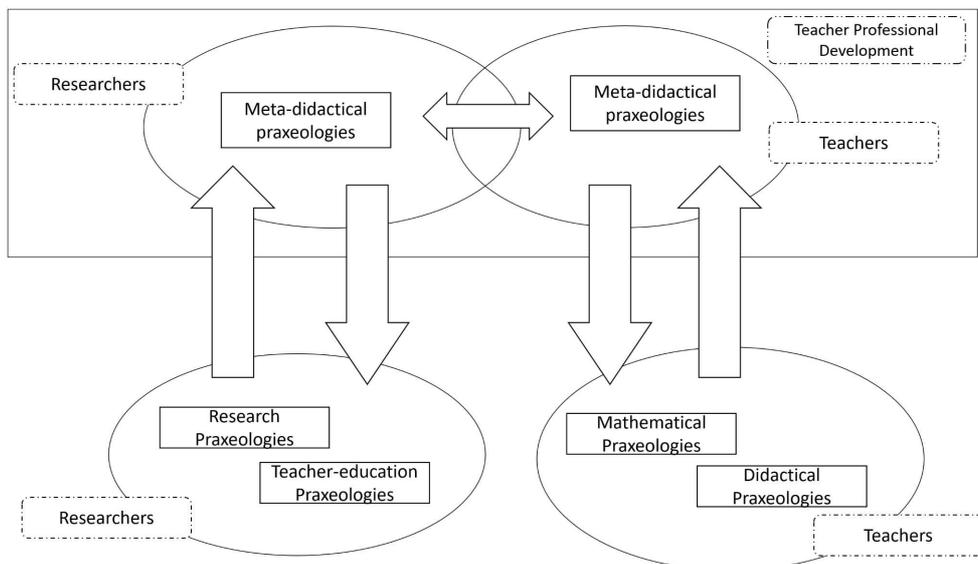


Figure 29: The process of meta-didactical transposition with researchers' and teachers' double position (edited from Minisola et al., 2024, p. 23)

Going further on the concept of *position*, one hypothesis of ATD is that depending on the *position* that people occupy in an *institution*, their practices and knowledge are influenced or shaped by different elements, known as institutional *conditions* and *constraints*, prevailing in the institution to which they belong, and depending on the position they occupy (Bosch & Gascón, 2006). These conditions and constraints define the boundaries of what teachers and didacticians can or cannot do, their *noosphere*. This shifts the focus, in the case of mathematics teaching, not only on the conditions and constraints in the classroom, but also those outside of it, such as cultural elements related to school, society, civilisation, etc. Chevallard (2002) pictures the complex relations of these factors with the *levels of didactic co-determinacy*, as shown in Figure 30:

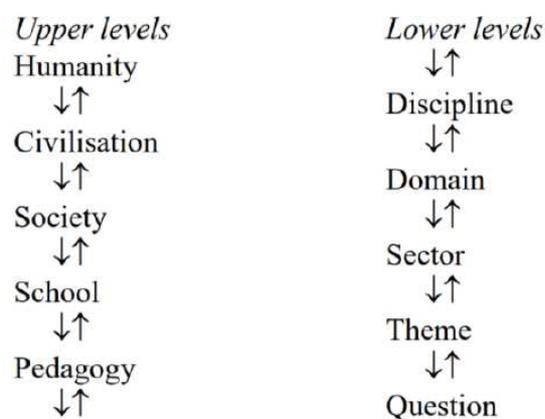


Figure 30: Scale of *levels of didactic co-determinacy* (Florensa et al., 2018, p. 5)

Minisola and Manolino (2022) guide their analysis of the Italian institutional context of teaching and teacher professional development through the use of this lens, to understand the cultural factors that could facilitate or hinder the introduction of Lesson Study in the Italian institutional context. Minisola (2024) suggests that networking MDT with the levels of didactic co-determinacy could help in the modelling of institutional agents of internalisation, improving the comprehension of the dynamics of the double dialectic.

In the case of the data presented in this report, we observe instances where the teachers provide institutional reasons to justify their choices. In the following, we analyse an intervention by T1, which can be found in line 8 of the transcript of the discussion carried out during the third meeting:

T1: «Mah, in realtà anche a noi sembrava, rispetto a tutto il percorso che aveva fatto... noi abbiamo pensato di proporlo in seconda. E pensando che alcuni problemi del genere -tipo un punto che varia su un segmento- è una lettura che poi emerge in qualche maniera risolvendo i problemi con le applicazioni delle equazioni di primo grado - l'anno scorso ci eravamo confrontati - , questo mi sembrava una ripresa di quel discorso, fra l'altro con degli abbinamenti significativi, perché c'è il discorso funzioni, il discorso grafico, il discorso sul valore assoluto ad esso connesso... che fornisse aperture significative rispetto a qualcosa di già introdotto, ma sicuramente un ampliamento... che poteva esserci utile. [...]»

The teacher explicitates the reason by which they chose the second problem. Their task is to choose an activity and try to guess how the classroom discussion may go. Their choice is part

of their technique, and their explanation is the technology supporting the technique. The technology is on two different levels: one is connected to the domain (how the task is connected to other different topics), one is connected to the school (in the sense that the teachers had discussed something similar in the previous cycle of professional development and expect to bring that knowledge in this cycle).

T1: «[...] D'altro canto, l'altro... essendo, diciamo, più di tipo fisico e insegnando noi matematica, ci sembrava... nella mia seconda in particolare, non vorrei andare a introdurre un problema che possa dare l'impressione alla collega di fisica che io voglia invadere i suoi spazi [...]»

In this excerpt, from the same line of the transcript of the discussion carried out during the third meeting, the teacher justifies why they did not choose the other task, an interdisciplinary one. We can interpret this as an agent preventing the emergence of a praxeology, and this is at the level of society: in Italy, classroom practice is seen as a private space (Minisola & Manolino, 2022), and invading it is considered disrespectful (“invadere i suoi spazi”).

T1: «[...] l'anno scorso avevano un altro insegnante di fisica, lei è subentrata quest'anno e c'è un po' un clima di tensione nella classe [...] L'avessi fatto, avrei comunque in qualche modo pensato di farlo insieme a lei; solo che in questo momento non ha molto tempo da dedicare a divertirsi, perché deve recuperare un po' di aspetti... Forse poteva anche essere invece, viceversa, un'occasione per venir fuori, però... questa ci è sembrata più in linea con le cose che facciamo noi... [...]»

T1 proceeds to consider the present situation of the physics teacher with the class. The justification, in this excerpt, is again on multiple levels: there is a pedagogy level connected to the fact that she does not want to interfere in the emerging relationship between the colleague and the class group (“lei è subentrata quest'anno”); there is a school level, related to the expectation that her colleague will need to cover some topic in less time that they may usually be expected (“deve recuperare un po' di aspetti”). There are reasons conflicting with her choice (“un'occasione per venir fuori”), but in the end instead of discussing the situation with the colleague, and possibly initiating a fruitful collaboration, T1 decides to recede from it and choose the purely mathematical task. The last reason is of particular interest, because it is not really clear whether T1 refers to a society level (“più in linea” in the sense that she prefers to leave the physics teacher to deal with the current issue on her own, as she would normally be expected to do) or a pedagogy level (“più in linea” in the sense that the task is more similar to what the students may expect).

Understanding that teachers' praxeologies are influenced by their position in the institution, and therefore can be influenced by institutional agents, may provide didacticians with tools to stimulate them to introduce new elements in their teachers praxeologies.

R1: «Mah... diciamo che il fatto di separare fisica e matematica, considerando solo l'argomento di pertinenza di fisica e non di matematica... e adesso poi nell'ottica della maturità, proprio no... [...]»

In this excerpt, from line 13 of the transcript of the discussion carried out during the third meeting, R1 provides two different reasons for the choice of the second task: on the discipline level because separating mathematics and physics are two closely related disciplines; and on the school level because since the school year 2018-19 the maturity exam for mathematics includes a purely mathematical problem and a physics problem, and the student can choose which one to solve. Even so, it seems that R1 does not particularly favour the choice of one task over the other, and proceeds with the lesson.

The analysis of this short excerpt shows many things:

- didacticicians’ awareness of their double position and of the different levels of co-determinacy may help in the management of teachers’ educational processes;
- the importance for the didacticicians of being aware of the institutional agents that foster or hinder the emergence of teachers’ praxeologies;
- the ways didacticicians may exploit these institutional agents to foster reflection in the teachers’ community.

6. FINAL DISCUSSION

The MDT theoretical framework has been used in several analyses and has proved its effectiveness in modelling interactions between researchers and teachers, and even anticipating the difficulties that can arise in meetings where the objectives of the actors may contrast or conflict. This framework was satisfactory to take into account the interactions between these professionals belonging to different institutions, when working together in collaborative or design-based research, in professional development, in distance learning, but also in the pre-service teacher education.

The necessity we had when we introduced the framework of MDT.1 in 2012, was to theoretically frame the investigation on teachers’ processes when they critically reflect on the didactical praxeologies and the corresponding transposition. If this work is done in a community, interacting with researchers, it has a double value, one in relation to the professionalism of the teachers, the other in relation to the researchers’ praxeological components, which can be shared with the teachers. The first value lies in the necessity to stand back from the work carried out in the mathematics classroom, designing, discussing, and looking at it from outside, having teachers engaged in a dialectics between the didactical and meta-didactical level. The second value is referred to the researchers, who are involved in the transposition with a double positioning: as teacher educators, being able to impact on the teachers’ processes with their praxeologies, supporting the transition to praxeologies (or their components) shared with teachers, and as researchers, having their own praxeologies also in evolution.

The presence of this double level means that one-off analyses are relevant for highlighting phenomena leading, in the long term, to a sharing of praxeologies and internalisation. From the moment we study data referring to a short period within the whole MDT process, the phenomena of sharing praxeologies and internalisation are not complete, and what we can highlight are indications, hints that internalisation (or the absence of internalisation) is in the start-up phase. But nothing can assure us that what is observed at a given moment will be maintained – as it is – or lost, afterwards. It is clear that these phenomena are long processes that need to be demonstrated over the long term. This is, for example, what has been done over the long term (three years) in the European FaSMEd project mentioned above. In this case, the study of meta-didactical praxeologies enables the phenomena of internalisation and of sharing of praxeologies to be highlighted over a long period of time (Aldon & Panero, 2020). A second point that needs to be mentioned is the fact that sharing, like internalisation, does not mean that researchers and teachers or other actors representing other institutions will come away with the same praxeologies, but rather that the praxeologies of each will be enriched by confrontations in order to develop their techniques and logos, having integrated their understanding of the praxeologies of the other actors. As we said in the introduction, education is a total fact, which means that it concerns all the actors in a society; but each belongs to a particular institution with its own rules, constraints and aims. Collaboration between representatives of different institutions (researchers and teachers, for example) does not mean that each will adopt the aims of the other, but that common aims can be achieved through a shared understanding of the praxeologies relating to the types of task studied. In this context, the MDT framework makes

it possible to take into account all the actors and to analyse the sharing of praxeologies or of some components of them, and common activities that can be implemented in joint work, whether being in a research group, a professional development course, or a joint project.

As we showed in this report, since its first presentation in 2012, the MDT framework has been used and developed in different contexts and research studies, integrating various theoretical lenses which enhanced its potentiality for analysing the interaction of different communities of practices. On occasion of this seminar, the researchers who have been using this framework for their studies have had the opportunity to meet, exchange, and discuss different facets of the framework. The novelty of the collaboration done for this seminar has been the unique opportunity to work on the same set of data, from different perspectives, comparing and crossing analyses and results. This data analysis enables us to highlight, on one hand, the connections between the different theoretical lenses integrated in the original MDT and, on the other hand, the ways in which these different lenses interrelate to support the interpretation of the internalisation process from different perspectives.

For instance, crossing the analyses of the *how* and the *why* of internalisation, it is possible to notice the role played by the researchers in detecting possible inactive agents and trying firstly to activate them and secondly to foster the interaction of these agents with the ones that are already active and predominant. This is done by moving the discourses and actions developed during the collaborative work on BO from the syntactic, to the semantic and to the pragmatic level, promoting the transfer, the translation and the transformation of knowledge that trigger and support the internalisation process. Furthermore, crossing the analyses of the *why* and of the *where* of internalisation, it is possible to detect the causes (in terms of interaction of agents at the micro-level) that trigger the creation of a new node or highlighting new or renewed connections in the participants' network of knowledge, when a new praxeological component emerges at the macro-level. At the same time, crossing the analysis of the *how* and *where* of internalisation, it is possible to identify the ways in which the collaborative work on a BO promotes interactions that potentially highlight new nodes, particularly when the discourses and actions are carried out at the semantic and pragmatic level. When translation and transformation processes happen, the effect is exactly the connection between nodes, or the creation of a new node into the teachers' network of knowledge. This process fosters reflection and the integration of new components in one's own praxeologies. Therefore, internalisation is seen as a process transforming the initial praxeologies, intertwining their original context with the dynamics of their development and obtaining final praxeologies from these dynamics. Another interesting finding in terms of the *how*, *why*, and *where* of internalisation is the further development of the framework in the direction of the study of the participants' beliefs. Beliefs appear to be a crucial agent (of motivational nature) to prompt (see the case of T1 and T2) or to inhibit (see the case of T3) the evolution of teachers' praxeologies.

Some reflections on the methodological approach are necessary to complete the final discussion on our work. The multi-level analysis we have developed has shown the role of the MDT framework as a tool for investigating the complexity of the phenomena involved in professional development programs and action-research projects. Furthermore, this analysis has shown that the combined use of the different theoretical tools introduced in the framework allows us not only to examine these phenomena from different perspectives, but also to show the interrelationship between the processes that emerge from the analysis. In order to develop this combined analysis, we had to reflect on the kind of data needed to study the internalisation processes from the perspectives of the *how*, the *why* and the *where*, and through the different theoretical lenses introduced within MDT.

These considerations led us to the need to look for data that included at least:

- a) audio- and video-recordings of the interactions between teachers and researchers, in order to zoom-in and out on these interactions through the analysis of the actors'

discourses and actions, with the aim of identifying the levels at which these discourses and actions are brought (the *how*), the role played by the different agents emerging from these interactions (the *why*) and possible instances of old and new nodes highlighted thanks to these interactions (the *where*);

- b) all the resources and documents shared with the teachers and produced by them during the different phases of the PD program (in their different forms over time), to identify the BO that is the object of the teachers' and researchers' collaborative work and to show its evolution (from a simple object of work to a BO); moreover, these data are necessary to have the opportunity to highlight the effects of the collaborative work on the BO in terms of the evolution of the teachers' praxeologies and the documentational genesis that accompanies this evolution;
- c) semi-structured interviews with teachers and/or written questionnaires to collect their reflections on their learning at the beginning, during and at the end of their experience in the PD program, in order to identify indications of a possible consolidation of the praxeologies that have emerged as a result of the internalisation processes observed.

Although the selected data have these characteristics, they were not collected with the aim of using them to develop the combined analysis presented in this report. As a result, the data were not sufficient, for example, to deepen the analysis of teachers' beliefs that seem to influence their decisions and behaviours. Another example is represented by the case described by Minisola (2024), showing how the introduction of the Lesson Study in the Italian teacher PD panorama is an opportunity to highlight the complex dynamics arising from the different institutional positions of teachers and researchers. These dynamics are more difficult to detect in a traditional training programme, and in any case require a larger data sample, thus increasing the complexity and time of the research work.

Moreover, as mentioned above, we are aware that our analysis highlights only brief moments in the complex and long process that leads to the development of stable and consolidated praxeologies. In order to investigate the effects of the internalisation highlighted by an analysis such as the one we have presented here, a long-term study is needed. In particular, in order to study whether the internalisation process highlighted has really led to the stabilisation of new praxeologies, the combined analysis of the above mentioned data should be integrated with the analysis of teachers' practices and of their implementation of the resources and documents designed within the PD program in their classes.

The theoretical framework presented in this report is constantly evolving. Right now, research is focused on networking those theoretical and methodological lenses that can be used to better define and study agents. If connectivism, the boundary object, the documentational approach and some elements of ATD have led to the results presented in the previous pages, we wonder what further advances we could achieve by considering other theoretical lenses in the landscape of mathematics education, or outside of it.

Future refinements of the theory may elaborate on the relationship between logos and beliefs. We have conceptualised beliefs as agents (motivational) in the internalisation processes of praxeological components, while also acknowledging the possibility that beliefs themselves may evolve as a result of the evolution of praxeologies. However, this stance is not without complexities. We need to underline that, in some cases, beliefs can be considered part of the logos, serving as justifications for certain practices, whether by teachers or researchers. However, there are instances where beliefs are not explicitly articulated, but can instead be inferred in more indirect ways. As already stressed above, this presents a methodological challenge for data collection and analysis. If we were to consider in the logos only the explicit justifications that teachers or researchers provide for their practices, the data collection and analysis process would be more straightforward and linear. Considering the dimension of beliefs, which may sometimes be implicit or even unconscious, complicates the matter

significantly but, as emerged in this report, it is not possible to neglect them if we consider professional development as a complex phenomenon made of complex processes. An additional layer of complexity arises from the difficulty researchers face in analysing their own beliefs, as teacher educators (Pocalana & Robutti, 2024b). This self-reflective dimension constitutes a challenge to be addressed and investigated by further research.

Considering the possibility of further *integrating* (in terms of networking) of MDT and ATD, a critical point should be underlined: at international level the notion of paradidactical praxeologies is emerging, i.e. those praxeologies that model the teachers' work outside the classroom, directly aimed at classroom work (Otaki, 2024). Their relation to meta-didactical praxeologies is yet unclear: is one a subset of the other, or are they models of different practices? And if so, what distinguishes one from the other? We could identify the meta-didactical praxeologies particularly in the collaboration with researchers, but in this sense the work of research and dialogue with ATD is still ongoing. Could we hypothesise that the three levels (didactical, para-didactical, and meta-didactical) could be integrated in an overall framework, distinguishing the positions of teachers and their different kinds of professional work?

In this report we showed that the complexity of teachers' and researchers' work needs a complex model to be analysed. With MDT as a common framework, and the support of different theoretical lenses, we were able to provide such a model. However, the reader might wonder whether, at this point, MDT is not an overly complex theory. We have discussed several constructs such as praxeologies, connectivism, boundary objects, agents, positions: has MDT gotten to the point of attempting a representation of reality? The role of a theory, after all, is to model reality, giving a tool to analyse and understand it. We are aware of the degree of complexity achieved in this work, but it is important to emphasize that MDT can now be regarded as a *modular* framework. This means that all studies intending to adopt this framework do not forcefully need to apply it in its entirety. While the study of the evolution of praxeologies is indispensable, networking MDT with other theoretical frameworks can enhance experimental design and sharpen the focus of analysis. Moreover, the MDT framework allows for analyses to be conducted at varying levels of *granularity*. Researchers may choose to concentrate solely on the macro-level evolution of praxeologies, or to go deeper into the micro-level, considering the roles of different types of agents. This flexibility ensures adaptability to a wide range of research contexts. Finally, we believe that the true strength of MDT lies in its *holistic* nature. It embraces collaboration with other theories, contributing to a rich, integrated approach to research, opening new avenues for exploration and understanding.

7. REFERENCES

- Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F. L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 359–381. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-5072-6>
- Adler, J., & Venkat, H. (2020). Subject Matter Knowledge Within “Mathematical Knowledge for Teaching”. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 817–820). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_98
- Aldon, G., Arzarello, F., Cusi, A., Garuti, R., Martignone, F., Robutti, O., & Soury-Lavergne, S. (2013). The meta-didactical transposition: A model for analysing teachers education programs. In A. M. Lindmeier & A., Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th conference of the international group for the psychology of mathematics education – Mathematics learning across the life span* (Vol. 1, pp. 97–124). PME.
- Aldon, G., Cusi, A., Morselli, F., Panero, M., & Sabena, C. (2017). Formative assessment and technology: reflections developed through the collaboration between teachers and researchers. In

- G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini & U. Gellert (Eds.), *Mathematics and technology: a CIEAEM source book. Advances in Mathematics Education Series* (pp. 551–578). Springer.
- Aldon, G., Garcia, T., & Panero, M. (2022). Aspects méthodologiques de la collaboration praticiens-chercheurs. Travaux du LéA Lycée Parc Chabrières au collège de Fontreynne. In R. Monod-Ansaldi, C. Loisy & B. Gruson (Eds.), *Le réseau des lieux d'éducation associés à l'Institut français de l'éducation* (pp. 235–255). Presses Universitaires de Rennes.
- Aldon, G., & Panero, M. (2020). Can digital technology change the way mathematics skills are assessed? *ZDM – Mathematics Education*, 52(7), 1333–1348.
- Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1988). *Problème ouvert et situation-problème*. Université Claude Bernard Lyon I.
- Arzarello, F., & Bartolini Bussi, M. G. (1998). Italian trends in research in mathematics education: A national case study in the international perspective. In J. Kilpatrick & A. Sierpiska (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 243–262). Kluwer.
- Arzarello, F., Olivero, F., T1, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *ZDM*, 34(3), 66–72. <https://doi.org/10.1007/BF02655708>
- Arzarello, F., & Robutti, O. (2002). *Matematica*. Professione docente. Editrice La scuola.
- Arzarello, F., Robutti, O., Sabena, C. Cusi, A., Garuti, R., Malara, N., & Martignone, F. (2014). Meta-didactical transposition: A theoretical model for teacher education programmes. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The mathematics teacher in the digital era* (pp. 347–372). Springer Science+Business Media. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_15
- Balacheff, N. (1990). Beyond a psychological approach: the psychology of mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 2–8.
- Bass, H. (2005). Mathematics, mathematicians, and mathematics education. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 42(4), 417–430.
- Ball, D., Thames M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bosch, M., & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58, 51–65.
- Carlile, P. R. (2004). Transferring, translating, and transforming: An integrative framework for managing knowledge across boundaries. *Organization Science*, 15(5), 555–568. <https://doi.org/10.1287/orsc.1040.0094>
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. *Research in Didactic of Mathematics: Selected Papers*, 131–168.
- Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & regulation. In J. L. Dorier (Ed.), *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41–56). La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2007). Readjusting didactics to a changing epistemology. *European Educational Research Journal*, 6(2), 131–134. <https://doi.org/10.2304/eeerj.2007.6.2.131>
- Chevallard, Y. (2019). On using the ATD: Some clarifications and comments. *Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo*, 21(4), 1–17. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p001-017>
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020a). Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 53–61). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100034

- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020b). Didactic Transposition in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 214–218). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_48
- Chevallard, Y., & Bosch, M. (2020c). A short (and somewhat subjective) glossary of the ATD. In *Working with the anthropological theory of the didactic in mathematics education: A comprehensive casebook* (pp. vxiii–xxxvii). Routledge.
- Cusi, A., Robutti, O., Panero, M., Taranto, E., & Aldon, G. (2022). Meta-didactical transposition. 2: The evolution of a framework to analyse teachers' collaborative work with researchers in technological settings. In A. Clark-Wilson, O. Robutti & N. Sinclair (Eds.), *The Mathematics Teacher in the Digital Era: International Research on Professional Learning and Practice* (pp. 365–389). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-05254-5_14
- Cusi, A., Swidan, O., Faggiano, E., & Prodromou, T. (2020). The collaborative work on scenario design as a tool to foster teachers' professional development. In H. Borko & D. Potari (Eds.), *Proceedings of ICMI Study 25 – Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups* (pp. 605–612). National and Kapodistrian University of Athens.
- de Freitas, E., & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom*. Cambridge University Press.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103–131.
- Florensa, I., Bosch, M., Cuadros, J., & Gascón, J. (2018). Helping lecturers address and formulate teaching challenges: An exploratory study. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild & N. M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of the INDRUM 2018* (pp. 373–382). <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01849937>
- Gardes, M.-L. (2013). *Etude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres* [Doctoral dissertation]. Université Claude Bernard Lyon 1.
- Goldstein, J. (1999). Emergence as a construct: history and issues. *Emergence*, 1(1), 49–72.
- Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers?. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 199–218. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9159-8>
- Gueudet, G., Sacristan, A. I., Soury-Lavergne, S., & Trouche, L. (2012). Online paths in mathematics teacher training: New resources and new skills for teacher educators. *ZDM – Mathematics Education*, 44(6), 717–731. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0424-z>
- Jaworski, B. (2008). Building and sustaining inquiry communities in mathematics teaching development: Teachers and didacticians in collaboration. In K. Krainer & T. Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education – Volume 3: Participants in Mathematics Teacher Education: Individuals, Teams, Communities and Networks* (pp. 309–330). Brill Sense. <https://hdl.handle.net/2134/8813>
- Jaworski, B., & Potari, D. (2021). Implementation of a developmental model of teachers' and didacticians' learning through inquiry: Design, operationalisation and outcomes. *ZDM – Mathematics Education*, 53(5), 1073–1084. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01290-x>
- Kieran, C., Boileau, A., Tanguay, D., & Drijvers, P. (2013). Design researchers' documentational genesis in a study on equivalence of algebraic expressions. *ZDM – Mathematics Education*, 45(7), 1045–1056. <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0516-4>
- Margolinas, C. (2004). Point de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques, Accreditation to supervise research, *University of Provence-Aix-Marseille*.
- Mauss, M. (2007). *Essai sur le don : Forme et raison de l'échange dans les sociétés archaïques*. Quadrige Grands textes. Presses universitaires de France. (First edition published in 1923).

- Minisola, R. (2024). *Exploring an Italian Approach to Lesson Study from a Cultural Perspective for an Improvement in Mathematics Teacher Education* [Doctoral dissertation]. University of Turin.
- Minisola, R., & Manolino, C. (2022). Teachers' professional development: A cultural matter. How to describe cultural contexts? In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 3650–3657). Free University of Bozen-Bolzano, Italy and ERME. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03748740>
- Minisola, R., Robutti, O., & Miyakawa, T. (2024). Didacticians introducing lesson study for the professional development of prospective mathematics teachers. *Asian Journal for Mathematics Education*, 3(1), 3–28. <https://doi.org/10.1177/27527263241228324>
- Otaki, K. (2024). The Paradidactic: A (Would-Be) Fundamental Theory of Noospheres. In I. Florensa, N. Ruiz-Munzón, K. Markulin, B. Barquero, M. Bosch & Y. Chevallard (Eds.), *Extended Abstracts 2022* (Vol. 16, pp. 45–57). Springer Nature Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_3
- Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. Columbia University Press.
- Pocalana, G., Bini, G., & Robutti, O. (2024). Multiple Documentational Genesis and Praxeologies: A Networked Approach to Investigate Mathematics Teachers' Documentation Work. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-024-10505-y>
- Pocalana, G., & Cerasaro, S. (in press). A model for teacher professional development taking into account meta-didactical praxeologies, documentation work and beliefs. *For the learning of mathematics*.
- Pocalana, G., & Robutti, O. (2022). Mathematics teacher educators work to foster an inquiry community. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 323–330). PME. <https://web.ua.es/it/pme45/documents/proceedings-pme-45-vol3.pdf>
- Pocalana, G., & Robutti, O. (2023). Evolution of didacticians' meta-didactical praxeologies and documentation work. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22, 211–233. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10367-w>
- Pocalana, G., & Robutti, O. (2024a). Evolution of teachers' and researchers' praxeologies for designing inquiry mathematics tasks: the role of teachers' beliefs. *Journal of Mathematics Teacher Education*. <https://doi.org/10.1007/s10857-024-09620-y>
- Pocalana, G., & Robutti, O. (2024b). Mathematics teacher educators' documents, praxeologies, and beliefs: a holistic model. *Journal of Mathematics Teacher Education*. <https://doi.org/10.1007/s10857-024-09656-0>
- Prediger, S., Bikner-Ahsbabs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM – Mathematics Education*, 40(2), 165–178. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z>
- Prodromou, T., Robutti, O., & Panero, M. (2018). Making sense out of the emerging complexity inherent in professional development. *Mathematics Education Research Journal*, 30(4), 445–473. <https://doi.org/10.1007/s13394-017-0229-z>
- Psycharis, G., & Kalogeria, E. (2018). Studying the process of becoming a teacher educator in technology-enhanced mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(6), 631–660. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9371-5>
- Robutti, O. (2020). Meta-didactical Transposition. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 611–619). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_100012
- Robutti, O., Cusi, A., Clark-Wilson, A., Jaworski, B., Chapman, O., Esteley, C., Goos, M., Isoda, M., & Joubert, M. (2016). ICME international survey on teachers working and learning through

- collaboration. *ZDM – Mathematics Education*, 48, 651–690. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0797-5>
- Robutti, O., Trouche, L., Kumar, A. R., & Pynes, D. A. (2024). Tools and resources used/created for teacher collaboration and resulting from teacher collaboration. In H. Borko & D. Potari (Eds.), *Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups* (pp. 203–274). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-56488-8_5
- Rothenberg, M. (2010). *The excessive subject: A new theory of social change*. Polity.
- Sfard, A. (2005). What could be more practical than good research? On mutual relations between research and practice of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 393–413. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-4818-5>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Siemens, G. (2005). Connectivism: A learning theory for the digital age. *International Journal of Instructional Technology and Distance Learning*, 2(1), 3–10.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77(1), 20–26.
- Star, S. L. (2010). This is Not a Boundary Object: Reflections on the Origin of a Concept. *Science, Technology, & Human Values*, 35(5), 601–617. <https://doi.org/10.1177/0162243910377624>
- Star, S. L., & Griesemer, J. (1989). Institutional ecology, ‘translations’, and boundary objects: Amateurs and professionals on Berkeley’s museum of vertebrate zoology. *Social Studies of Science*, 19(3), 387–420.
- Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers’ practices and beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teachers Education*, 10, 217–237. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9038-8>
- Swidan, O., Cusi, A., Robutti, O., & Arzarello, F. (2023). The Method Of Varying Inquiry For Stimulating Learning. *For the Learning of Mathematics*, 43(1), 14–18.
- Taranto, E. (2018). *MOOC’s Zone Theory: Creating a MOOC environment for professional learning in mathematics teaching education* [Doctoral dissertation]. Turin University.
- Taranto, E., & Arzarello, F. (2020). Math MOOC UniTo: An Italian project on MOOCs for mathematics teacher education, and the development of a new theoretical framework. *ZDM – Mathematics Education*, 52(5), 843–858. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01116-x>
- Taranto, E., Robutti, O., & Arzarello, F. (2020). Learning within MOOCs for mathematics teacher education. *ZDM – Mathematics Education*, 52(7), 1439–1453. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01178-2>
- Trouche, L., Adler, J., & Remillard, J. T. (2023). Conceptualizing teachers’ interactions with resources in crossing languages and cultures. *ZDM – Mathematics Education*, 55, 497–519. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01488-1>
- Venkat, H., & Adler, J. (2020). Pedagogical Content Knowledge Within “Mathematical Knowledge for Teaching”. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 655–658). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_123
- Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52, 83–94. <https://doi.org/10.1159/000202727>

APPENDIX 1: Analytic Index

| | |
|-----------------------------------|-------|
| Activity | p. 5 |
| Agent | p. 9 |
| Boundary object | p. 9 |
| Broker | p. 8 |
| Class of situations | p. 53 |
| Classroom situation | p. 19 |
| Component of a praxeology | p. 5 |
| Connectivism | p. 14 |
| Didactical praxeology | p. 7 |
| Didactician | p. 61 |
| Document | p. 52 |
| Documentational genesis | p. 53 |
| Double dialectic | p. 8 |
| Element of a boundary object | p. 31 |
| Institutional position | p. 4 |
| Instrumental genesis | p. 9 |
| Interactions | p. 3 |
| Internalisation | p. 8 |
| Levels of didactic co-determinacy | p. 13 |
| Logos | p. 5 |
| Macro-level | p. 9 |
| Mathematical praxeology | p. 7 |
| Meta-didactical praxeology | p. 7 |
| Micro-level | p. 9 |
| MKT | p. 6 |
| MOOC | p. 14 |
| MVI | p. 16 |
| Operational invariants | p. 53 |
| Pragmatic level | p. 12 |
| Praxeology | p. 5 |
| Praxis | p. 5 |
| Resource | p. 52 |
| Rules of action | p. 53 |
| Scenario | p. 16 |
| Scene | p. 16 |
| Semantic level | p. 12 |
| Syntactic level | p. 12 |
| Task | p. 5 |
| Teacher education | p. 3 |
| Technique | p. 5 |
| Technology | p. 5 |
| Theory | p. 5 |
| Transformation | p. 12 |
| Transposition | p. 7 |
| Utilisation schemes | p. 52 |

APPENDIX 2: Trascrizione del Terzo incontro

1. **R1**: «Quindi, scelta tra quadrati e Galileo, qual è stata?»
2. **T3**: «Per me... [attività sui quadrati] perché è più adatto al lavoro che sto facendo con i miei allievi... più intuitivo, perché comunque si parte in una classe lavorando sui perimetri fondamentalmente e sulle caratteristiche delle figure geometriche, quindi l'ho trovato più intuitivo. Quando ho visto il filmato di Galileo, del piano inclinato, faceva... cioè metteva in evidenza l'aumento della velocità con l'aumento dello spazio percorso... mi sono un po' spaventata, non l'ho visto adatto ai miei allievi tutto sommato. E poi mi è venuto in mente guardando i quadrati, l'ultimo compito, ho pensato alle equazioni, fondamentalmente. E quindi mi sembrava un modo per far comprendere come il valore della x può essere legato... a un percorso logico... l'ho visto adatto a loro insomma. Anche perché potevo partire da... facendoli disegnare, con delle attività semplici, intuitive; e poteva servirmi dalla prima alla terza. L'esperimento di Galileo non l'ho visto così adatto a loro, quello con il piano inclinato, non l'ho visto proprio... attuabile.»
3. **R1**: «Okey. E non hai pensato a una semplificazione eventualmente?»
4. **T3**: «No, non tantissimo, anche perché stiamo... cioè la difficoltà che io ho in questo momento è che comunque bisogna riuscire a lasciare un segno un po' su tutti gli allievi; e ho delle classi molto complesse e... dovendo giustamente anche seguire anche questi ragazzi BES -che coprono un po' tutto- e visto che in molte classi ci sono ragazzini problematici, devo scegliere delle attività che non gli complichino troppo l'esistenza, cioè invogliarli in qualche modo. Quindi, non so, il piano inclinato... E invece menomale... se tutti riuscissero a capire il significato di equazione, sia che all'uscita magari un gruppo andrà a fare il liceo, un gruppo andrà a fare un corso di formazione professionale, però comprendere il significato di equazione è fondamentale. È semplice tutto sommato come attività da proporre, quindi mi sono focalizzata lì. Sul secondo compito, sul secondo task, dove si prevedeva l'uso di GeoGebra... noi abbiamo un po' il problema dei computer da mettere a disposizione di tutti... abbiamo dei tablet... ecco, si può fare una semplice esperienza. Partire da un'esperienza pratica, dove loro disegnano e io nelle vignette ho cercato di mettere in evidenza questo. Dopo aver fatto un'esperienza pratica dove loro si sono costruiti delle tabelle misurando direttamente, si può fare un'esperienza con GeoGebra; però non riusciamo a dedicare tanto spazio ai computer, perché devi tenerli bravi, non sono tanto tranquilli a quest'età. Quindi bisogna trovare il modo di dare qualcosa di positivo a tutti. Ho fatto questa esperienza pensando al mio lavoro.»
5. **R1**: «Sì, sicuramente più elevato, al limite però si poteva pensare a una semplificazione.»
6. **T3**: «Sì, si poteva pensare, al momento non riesco a tradurlo ad un percorso di scuola media. Questa è una mia forma mentis, però sicuramente aprirla la mente e quindi...»
7. **R1**: «E invece voi? [T1 e T2]»
8. **T1**: «Mah, in realtà anche a noi sembrava, rispetto a tutto il percorso che aveva fatto... noi abbiamo pensato di proporlo in seconda. E pensando che alcuni problemi del genere -tipo un punto che varia su un segmento- è una lettura che poi emerge in qualche maniera risolvendo i problemi con le applicazioni delle equazioni di primo grado -l'anno scorso ci eravamo confrontati-, questo mi sembrava una ripresa di quel discorso, fra l'altro con degli abbinamenti significativi, perché c'è il discorso funzioni, il discorso grafico, il discorso sul valore assoluto ad esso connesso... che fornisse aperture significative rispetto a qualcosa di già introdotto, ma sicuramente un ampliamento... che poteva esserci utile. D'altro canto,

l'altro... essendo, diciamo, più di tipo fisico e insegnando noi matematica, ci sembrava... nella mia seconda in particolare, non vorrei andare a introdurre un problema che possa dare l'impressione alla collega di fisica che io voglia invadere i suoi spazi... insomma, è una situazione un po' particolare della relazione che la collega di fisica ha con questa classe, perché è subentrata quest'anno... l'anno scorso avevano un altro insegnante di fisica, lei è subentrata quest'anno e c'è un po' un clima di tensione nella classe, perché... perché lei effettivamente -correttamente secondo me- pone delle richieste alle quali l'anno scorso gli studenti non erano tanto abituati di fisica e quindi... c'è stato un po' di discordanza, di scontro. E quindi mi spiaceva trovarmi a proporre un problema che in qualche modo potesse essere anche di sua pertinenza. L'avessi fatto, avrei comunque in qualche modo pensato di farlo insieme a lei; solo che in questo momento non ha molto tempo da dedicare a divertirsi, perché deve recuperare un po' di aspetti... Forse poteva anche essere invece, viceversa, un'occasione per venir fuori, però... questa ci è sembrata più in linea con le cose che facciamo noi...»

9. **R1:** «Per te [T2] stessa cosa?»
10. **T2:** «Sì, e poi non è la classe in cui... la seconda in cui ho fisica, per cui le ore sono due... e forse quest'altra seconda si presta di più a lavori di questo tipo...»
11. **R1:** «Perché sarete nella stessa?»
12. **T2:** «No... sono due classi diverse in cui facciamo matematica e...»
13. **R1:** «Mah... diciamo che il fatto di separare fisica e matematica, considerando solo l'argomento di pertinenza di fisica e non di matematica... e adesso poi nell'ottica della maturità, proprio no... vedere invece la matematica come uno strumento che in realtà interviene nelle modellizzazioni di fenomeni che al limite hanno studiato in ambito fisico, è coerente secondo me con quello che è il programma... poi capisco che se però c'è una situazione particolare con una classe, con una insegnante... insomma, bisogna valutare bene il da farsi. Perché quando è nata ____, è proprio nata a partire da problemi di questo tipo: filling the bottle, Galileo, poi un altro sulla legge di Hooke... quindi contesti fisici.»
14. **R1:** «Allora, sia T3 che T2 e T1 hanno proposto degli scenari a partire dall'attività Quadrati e partirei da loro. Han cominciato dalla prima task...»
15. **T1:** «...Non è ancora una bozza, siamo ancora nella fase pre-bozza.»
16. **R1:** «Però ho visto che avete cominciato a ipotizzare cosa dice l'insegnante, cosa possono rispondere gli studenti... Allora si comincia [slide 1] con l'insegnante che dice: "Avete 5 minuti per la lettura individuale della scheda 1 e per l'esecuzione della consegna"»
17. **R2:** «Solo una domanda: avete trovato difficoltà a fare questa roba qui con [LessonSketch] ...? Cioè mediamente è fattibile, oppure...»
18. **T2:** «Sì, l'unico fastidio è che noi volevamo cercare di condividere il lavoro da subito, quindi abbiamo dedicato un sacco di tempo alla ricerca di come si potesse fare e non ci siamo riuscite. E quindi abbiamo accantonato... poi forse loro sanno...»
19. **R1:** «Sì, il mio suggerimento era: concentriamoci prima sul contenuto e poi su questa parte [LessonSketch], perché in realtà questa parte viene dopo, a mio parere. Nel senso che prima devo individuare: che cosa può uscire dalla classe e come posso intervenire a seconda degli interventi degli studenti, dopodiché c'è ancora una fase in cui... perché dicevamo ci sarebbe l'opzione -però appunto da studiare- di creare un gruppo su LessonSketch che condivide gli scenari. Per cui può essere molto bello poi un lavoro interattivo, anche a distanza, sugli scenari: commenti sugli scenari prodotti da qualcuno, suggerimenti... Per cui

- lo vedo come un lavoro da fare nel momento in cui già si è creato qualcosa di abbastanza solido, ecco. O per lo meno, appunto...»
20. **T2:** «Però lavorando sullo stesso... ci verrebbe comodo già adesso...»
[confronto su come creare un gruppo su LessonSketch...]
21. **R1:** «Allora... [schede LessonSketch] “Avete cinque minuti per lettura individuale... esecuzione della consegna”, “Ora avete cinque minuti per condividere quanto elaborato individualmente”. Qui mi viene una domanda: come mai cinque minuti? Come mai proprio cinque minuti. L’avete inquadrato all’interno una lezione ben delimitata nel tempo?»
22. **T2:** «Mah... l’abbiamo sperimentato anche con il Liceo Potenziato: più di cinque minuti non li reggono, più di cinque minuti individuali... comunque, si buttano nella condivisione... e anche la condivisione a coppie, dopo un po’... Sono piccoli anche, quindi può darsi che...»
23. **R1:** «...preferiscono tempi brevi di lavoro.»
24. **T1:** «Poi ovviamente se uno vede che lavorano bene e che hanno ancora bisogno di tempo, possono sfiorare. Però il fatto è di dare un’indicazione precisa, altrimenti: “Leggete la scheda...” e passa l’ora! Quindi, se loro sanno che invece hanno più cose da fare e gli viene dato un limite, riescono a essere più produttivi di solito.»
25. **R1:** «Quindi, c’è la condivisione a coppie di quanto elaborato individualmente... diciamo, per il momento è l’insegnante a vedere quello che potrebbero dirsi le singole coppie. “Come cambia il perimetro della figura ottenuta al variare della posizione del punto P sul segmento AB?”, qui si riprende la [...], giusto? E ora comincia la condivisione, quindi uno studente dice: “Se il punto P si allontana da A il perimetro diminuisce!”. [Insegnante] “Siete d’accordo?”. Qualcuno dice sì, qualcuno dice no. [Insegnante] “Perché?”. Allora, intanto volevo vedere i vari pezzetti, dopo guardiamo il “Perché?”. Come mai avete scelto questo [“Se il punto P si allontana da A il perimetro diminuisce!”] come primo possibile intervento? Come lo avete catalogato?»
26. **T1:** «Questa risposta...?»
27. **R1:** «Sì, questa risposta: “Se il punto P si allontana da A il perimetro diminuisce!”.»
28. **T1:** «Perché da una lettura superficiale del problema è stata la prima risposta che io avrei dato, a occhio. E quindi ho pensato che forse anche per gli studenti... mettendomi nei loro panni, quello che può succedere concretamente è che loro inizino a fare qualche disegno e a fare qualche calcolo. E se iniziano così, immaginando... siccome il punto si muoverà da A verso B, inizialmente -presumibilmente- molti di loro metteranno il punto P vicino ad A e poi mano a mano lo sposteranno verso destra; siamo un po’ abituati ad andare da sinistra verso destra... E se uno fa questi tentativi all’inizio, questo [prima risposta degli studenti] è il risultato che ottiene. Quindi forse se uno ha avuto l’idea di procedere con qualche tentativo, partendo da qualche caso particolare, probabilmente questa è la conclusione... la prima conclusione a cui può essere giunto.»
29. **R1:** «Ecco, quindi, durante la discussione di classe, pensiamo a cosa può succedere, immagino che girerete tra i banchi, vi accorgete che qualcuno ha dato appunto una... ha proposto una osservazione immediata senza meditare troppo, qualcun altro è già arrivato invece a un livello più approfondito nelle osservazioni. In un caso come questo, porreste comunque la domanda generica e aspettereste l’uscita di tutte le osservazioni, o puntereste a chiedere ad esempio allo studente che ha fatto l’osservazione più “superficiale”, più immediata...?»

30. **T2:** «Sì, forse è meglio partire da quella, certo, perché se no ci giochiamo tutte le... [possibili risposte]»
31. **R1:** «Quindi nell'ottica di uno scenario, si gira un po' tra i banchi per vedere quali sono le risposte... è chiaro che se tutti sono arrivati già al livello superiore, non c'è bisogno di tirare fuori... a meno che non si sfrutti un po' una tecnica come quella dell'anno scorso: "In un'altra classe hanno detto così, cosa ne pensate?", ci può essere sempre questa idea. Altrimenti, effettivamente meglio dire: "Lo studente x... ho visto che il gruppo di studenti x ha scritto questo, chiediamo subito a loro. Come avete risposto voi?". Pensando sempre nell'ottica... perché se poi interviene invece quello che ha già notato tutto, si soffoca la discussione che invece avete poi pensato. Tra l'altro qui avete messo - interessante! - quattro "Sì" e un solo "No", perché pensate alla vostra classe? Cioè nelle vostre classi vi aspettate come risposta...?»
32. **T1:** «E... dopo questa mattina forse toglierei anche quel "No" ...»
33. **R1:** «No, perché anche questo è interessante, sempre nell'ottica dello scenario. Il numero di risposte favorevoli e contrarie è proprio quello che ci aspettiamo dai nostri studenti, quindi la speranza che almeno qualcuno risponda no, per cui dopo "Spiegate..." [insegnante nella slide], qualcuno dice "Anche noi!", ah no parte con "Abbiamo fatto delle prove!". Forse per gli scenari, a livello della lettura, numererei se possibile le vignette, in modo da capire in che ordine... perché finché ci sono "Sì" e "No" ... però qua specialmente per vedere un po' come intervengono...»
34. **T1:** «Sì, infatti ci chiedevamo se bisognava fare una vignetta per ogni risposta, o...»
35. **R1:** «Secondo me così può andare, specialmente se c'è un'interazione di più studenti, però metterei in ordine sequenziale.»
36. **R2:** «E poi "Anche noi!" potrebbe essere ambiguo, perché riferito a "Abbiamo usato le lettere!" o "Abbiamo fatto delle prove!". Quindi, forse un modo per...»
37. **R1:** «...capire la sequenza.»
38. **T1:** «Noi pensavamo: lo leggiamo da sinistra verso destra, dall'alto verso il basso; però è chiaro che nella pratica non è detto che sia quello in basso a destra che ha risposto...»
39. **R1:** «Sì, sì. Però qua c'è prima l'insegnante che chiede di spiegare e poi abbiamo in sequenza: "Abbiamo fatto delle prove!", vari dicono "Anche noi!" (sia quelli che hanno risposto "Sì" sia quelli che han risposto "No"), "Noi invece abbiamo usato le lettere!". Quindi c'è già qualcuno che...»
40. **R2:** «Quindi nessuno dice "Anche noi!" [rispetto all'ultima vignetta].»
41. **T1:** «No...»
42. **R1:** «Ecco, eventualmente nell'ottica della preparazione dello scenario, diciamo, della prossima... quella che sarà la bozza (adesso era l'embrione), la bozza dello scenario... si potrebbe pensare a più opzioni: se non c'è questo "No" cosa si può fare? O se son tutti no?»
43. **T2:** «Forse lavorando con GeoGebra è più facile far emergere...»
44. **R1:** «Pensare in un caso come questo di chiedere di fare una verifica. Al limite c'è sempre l'escamotage: "In un'altra classe qualcuno ha detto no...". Perché poi l'obiettivo è quello di mettere in discussione un'osservazione, o perlomeno farli pensare a cercare un modo di verificare se davvero è così. Okey, quindi poi [slide successiva] comincia... quindi a questo punto dopo il "Noi abbiamo usato le lettere!", voi come rispondereste? Perché in

- quella [slide] successiva l'insegnante non interviene. Quindi voi vi aspettate che invece di fronte al "Noi abbiamo usato le lettere!" continui la discussione come qua?»
45. **T1:** «Sì, c'è la richiesta di spiegazione... però "Spiegate" secondo me era dopo... Perché prima... la domanda era "Perché?"»
 46. **R1:** «Okey. Allora, il gruppo che aveva detto "Abbiamo fatto delle prove!" dice "...se AP è 1 cm il perimetro è 38 cm", giusto?»
 47. **T2:** «Però parte da sopra...»
 48. **R1:** «Okey. Quindi, gli altri erano quelli che avevano detto "Anche noi!": "Noi abbiamo visto che se AP è 2 cm il perimetro viene 36 cm e se AP è 3 cm viene 34 cm, perciò diminuisce...". Danno un esempio... Quindi, dopo parte da qua: "...se AP è 1 cm il perimetro è 38 cm", "...e se AP è 5 cm il perimetro viene 30 cm"; quindi, diciamo, tutti questi interventi erano i "Sì" di prima e confermano la prima osservazione che era stata fatta. Poi questi erano quelli che avevano detto "No" ...»
 49. **T2:** «Sì, che in realtà è l'ultima però, perché c'è quella prima...»
 50. **R1:** «Okey, quindi ci sono questi: "Noi invece abbiamo chiamato x il segmento AP e abbiamo visto che il perimetro viene $40-2x$, quindi se x aumenta il perimetro diminuisce!"»
 51. **T2:** «Direi in accordo con il primo intervento.»
 52. **R1:** «Okey, poi intervengono loro che riportano al numerico. È carino perché c'è questa interpretazione algebrica che anno costruito senza che gli fosse richiesto, quindi autonomamente, ma effettivamente in seconda mi posso aspettare che qualcuno provi direttamente a costruire un'espressione simbolica, perché già ci avrete lavorato prima. Questi dicono: "Sì, però se AP è 6 cm il perimetro viene 12 cm e se AP è 7 cm viene 34 cm, quindi aumenta!". Quindi contribuiscono con l'esempio che ho qui. Mi ricordo delle attività che ho fatto per la mia tesi di dottorato, in cui c'era prima da lavorare su esplorazioni numeriche e costruzione di congetture, e poi si chiedeva di dimostrare. E c'erano delle studentesse che avevano costruito una congettura molto parziale perché avevano fatto solo l'analisi di dati numerici ben limitati. Per cui era interessante... poi lì era stato interessante perché un'altra studentessa invece aveva costruito l'espressione algebrica senza saperla interpretare, per cui c'era questo botta e risposta: questa provava a interpretare questa espressione e quelli che avevano costruito gli esempi dicevano "No, questa interpretazione non va bene, perché noi abbiamo questa coppia di esempi...". È carina questa idea, è bella questa idea della... È chiaro che pensiamo: se invece nessuno propone il discorso algebrico, cosa fare? Qui si può scegliere, perché per il fatto che poi nella Task successiva invece si richiede, forse non è necessario anticiparlo. Anche se anch'io mi aspetto che qualcuno possa costruirlo, allora bisogna valutare bene se è il caso di farli parlare, interpretare o no, o se aspettare che tutti arrivino a costruire l'espressione in modo che il confronto sia più semplice per chi non l'ha prodotta. Qui bisogna pensarci, quindi anche in questo caso si potrebbero ipotizzare due strade, insomma un bivio: fare l'albero dello scenario, quindi a seconda delle risposte... Dopodiché l'insegnante: "Cosa ne pensate? Siete d'accordo?", quindi rispetto all'ultimo intervento, quelli che avevano detto "aumenta", giusto? Un gruppo dice: "Se P è nella prima metà il perimetro diminuisce, oltre la metà aumenta!". Una serie di "Sì"..."»
 53. **R2:** «I punti interrogativi cosa vogliono dire?»
 54. **T1:** «Beh che sono... è la coppia che ha lavorato con le lettere. E lì bisogna capire... sempre conoscendo i nostri studenti, io temo che se hanno posto $AP = x$, come spesso si procede nella risoluzione di problemi del genere (segmento, prendi il punto P all'interno, $AP = x$, $PB = 10-x$), ecco lavorando in questa maniera, se uno pensa... e la figura che viene

costruita è nel caso in cui P sia più vicino ad A e probabilmente -poi non è detto, ma secondo me...- il disegno che uno fa forse lo fa così, dalla relazione che emerge sembrerebbe che effettivamente il perimetro debba comportarsi in quella maniera e invece bisogna capire che c'è...»

55. **R1:** «Sì, che da un certo punto in poi, anziché una differenza dovrebbero invertire...»
56. **T1:** «Certo. E quindi secondo me è difficile in poco tempo così...»
57. **R2:** «Quindi i punti interrogativi sono i tuoi però, non sono loro.»
58. **T1:** «No, sono loro, nel senso che secondo la loro espressione non dovrebbe esserci questo... [cambio di decrescita in crescita]»
59. **R2:** «Sì, ma l'hanno detto loro in qualche modo, o sei tu che interpreti la loro espressione in quel modo?»
60. **T1:** «No vabbè, immaginando... io cerco di immaginare le reazioni degli studenti.»
61. **R2:** «Quindi è una tua interpretazione...»
62. **T1:** «Sì, loro secondo me...»
63. **R1:** «No no no. Ho capito cosa intende, cioè lei intende: visto che questi qua sono i due che avevano trovato un'espressione algebrica che però non modella correttamente il problema e secondo loro sono passati direttamente all'espressione algebrica senza pensare a come varia la figura davvero, per cui rispetto a quelli che sono i "Sì" detti da chi ha gli esempi numerici di fronte -per cui ho visto che prima diminuiscono e poi aumentano di nuovo-, questi che hanno in mente solo $40-2x$...»
64. **R2:** «Sì, sono pienamente d'accordo, ma questa è un'interpretazione nostra, non è una affermazione da parte loro di una perplessità. Quindi non va bene messa nella nuvoletta, quello è un commento e può essere una nuvoletta dell'insegnante.»
65. **R1:** «No, oppure l'ipotesi è che questo gruppo possa avere delle perplessità, ma allora è meglio scrivere un loro commento diretto, per condividere le perplessità.»
66. **R2:** «No, perché bisogna intendersi, cioè se quella roba lì è quello che è avvenuto, allora non l'han detto in qualche modo, magari così... È l'insegnante che produce il punto interrogativo.»
67. **R1:** «Sì, no però qui loro stanno inventando quello che potrebbe succedere in classe, non è successo davvero!»
68. **R2:** «Aaah!»
69. **T1:** «È a priori questa cosa qua.»
70. **R1:** «Stiamo progettando a priori.»
71. **R2:** «Eh però attenzione che c'è una confusione... cioè questo può essere -come dire- tu immagini che dicano "Sì", però non puoi immaginare i loro pensieri... cioè c'è una differenza insomma...»
72. **R1:** «Anche se da insegnante mi potrei aspettare che quella coppia abbia perplessità ma non la manifesti e allora devo pensare a cosa posso chiedere alla coppia per essere sicura che abbia o meno perplessità.»
73. **R2:** «Sì, ma su questo son d'accordo, ma allora sei tu che pensi...»
74. **R1:** «Sì... però ho capito perché l'hanno impostato così.»

75. **R2:** «No no, ho capito, però attenzione! Altrimenti c'è un gioco linguistico che non funziona, cioè qui si sta immaginando... cioè è un gioco complicato: loro stanno immaginando quello che gli altri possono dire, quindi una cosa _____. Poi possono anche immaginare anche -loro insegnanti- quello che loro immaginerebbero in quella situazione, e sono i punti interrogativi. Allora nella cosa [progettazione/rappresentazione] occorrerebbe forse un modo per... sono livelli diversi: quello che dicono esplicitamente gli allievi, quello che io dico o penso... cioè io penso che, immagino che: quello che dicono gli allievi, quello che dico io, quello che gli allievi pensano: ma sono io che immagino questo, quindi c'è un terzo livello.»
76. **R1:** «Si potrebbe mettere la nuvoletta -quella con i punti interrogativi- all'insegnante che dice [pensa]: secondo me loro non hanno le idee chiare e allora pongo un'altra domanda.»
77. **R2:** «Potrebbe essere addirittura che la cosa dell'insegnante sia sempre -o a volte- divisa in due parti: quello che io penso (è sempre il penso che, immagino che, prevedo che...)... quello che io dico e quello che io penso. Quindi, dire e pensare dell'insegnante. Il pensare degli allievi diventa un po'...»
78. **R1:** «Tra l'altro secondo me questo gioco dell'esprimere quello che penso non è male, per la condivisione in particolare, perché in quello che penso giustifico perché dico in un certo modo. Quindi è bello per la condivisione [a livello meta], perché così appunto certe cose implicite sono più esplicite per noi.»
79. **R2:** «Perché loro possono in qualche modo comunicare quello che pensano o che pensano di pensare... insomma io pensare che gli allievi pensino...»
80. **R1:** «Sì, sì, ho capito.»
81. **R2:** «Può creare confusione se si va avanti senza distinguere.»
82. **T1:** «Sì, a volte noi abbiamo la sensazione che... dell'interrogativo stampato sulla faccia dello studente...»
83. **R2:** «Sì, sarebbe un'interpretazione di una cosa non di linguaggio ma della faccia...»
84. **R3:** «Quello che mi piacerebbe vedere nella scena... in quella di 40-2x, dov'è? Ecco quella lì! Qui secondo me è molto interessante: "Siete d'accordo?", perché potrebbe succedere che uno dica "40-2x" e ci sia un altro gruppo che invece dica "No, 2x-40". E questo succede normalmente, anche nei gruppi anche di insegnanti mi è successo recentemente: l'ho fatto con un gruppo di insegnanti e mi è successa proprio questa cosa. E quindi "Siete d'accordo?" significa che comunque lì si condivide un conflitto di soluzioni, diciamo, e quindi questo può stimolare a passare al livello successivo e quindi a trovare la soluzione giusta.»
85. **R1:** «Ma è quello che hanno messo [slide successiva], però effettivamente si sono fermati qua adesso per l'attività, è ancora da proseguire... Effettivamente però è interessante perché c'è il piano di chi dice "Sì, sono d'accordo" fornendo numeri, però potrebbe esserci chi dice "No, non sono d'accordo con loro, perché ho trovato un'altra espressione".»
86. **R3:** «Succede che uno faccia il disegno nell'altro modo.»
87. **T5:** «Forse conviene fare una cosa ad albero, in cui ogni volta si aggiunge...»
88. **R1:** «Sì, è quello che dicevo io, l'albero. Nella progettazione è carino: appunto, se arriva questo intervento di questo [gesto per indicare un ramo dell'albero], se non arriva ma mi interesserebbe un intervento del genere, dico una cosa che possa stimolarlo. Quindi se

- nessuno lo dice, si potrebbe dire “In un’altra classe qualcuno ha detto $40-2x$, come mai? $2x-40$, come mai?”. Sempre pensando a questo gioco... per progettare a priori quello che succede, ho sempre due opzioni, perché non c’è il percorso certo... poi in realtà non è detto che con l’albero si riempiano tutte le casistiche possibili, però effettivamente...»
89. **R1:** «Tu avevi alzato la mano?»
90. **T4:** «È perché io quando ho visto la nuvoletta fatta così, che è diversa dalle altre, io avevo letto un’espressività facciale dei ragazzi. Quindi, magari dato che in LessonSketch non c’è la gestualità... sì, ci sono alcune faccine, però. Io in quella lì avevo visto proprio la faccia con il punto interrogativo dei...»
91. **R1:** «No però mi piace molto l’idea del... Potremmo condividere questa cosa di paragonare... del mettere sempre nell’insegnante quello che dice esplicitamente, quello che sta pensando quando dice, in modo da...»
92. **R3:** «Non tutto quello che sta pensando! Perché se no: “Che cretino questo!”. Era una battuta.»
93. **R1:** «Negli aspetti didattici, dico così perché voglio che... ecco, ragioniamo in quest’ottica.»
94. **T4:** «Il mio intervento era perché, quando la prima volta avevo visto il LessonSketch, mi sono soffermata sul fatto che manchi proprio tutta la parte gestuale; espressiva sì, però è difficile poi andare a vedere la faccina sorridente.»
95. **R3:** «Tutto non si può fare, però...»
96. **T4:** «...però se riusciamo a individuare la nuvoletta, come dire, che ha la faccia dubbiosa, è interessante...»
97. **R1:** «Insomma, diciamo, per il momento comunque avete già avuto tante idee. Tante idee sull’inizio e... quello che volevamo. Quindi come inizio hai un embrione che secondo me porterà a una bella bozza e poi... a una bella sequenza insomma, scenario. Con un po’ queste idee che abbiamo detto: numeriamo le vignette in modo che sia più semplice leggere; pensiamo a più opzioni, al limite forse... non so se in LessonSketch si può inserire in alto una sorta di titolo, per cui se nessuno studente dice questo... se uno studente dice... In modo da capire come è organizzato questo albero, altrimenti diventa difficile con queste vignette connettere...»
98. **R3:** «Sì, bisogna secondo me cercare delle ramificazioni piuttosto grandi, nel senso che se si fa tutto sul dettaglio non si riesce a prevedere tutto; però...»
99. **R1:** «Le ramificazioni su tutto è impossibile, però almeno due opzioni... perché ci sono certi interventi che sono interventi chiave, se non escono cosa faccio? Oppure, se nessuno lo dice e so che però qualcuno l’ha detto, cosa devo chiedere? Pensare proprio anche a un po’ di opzioni...»
100. **R3:** «Qui le cose significative che vengono fuori sono: aumenta/diminuisce e l’avete messo, poi $40-2x/2x-40$, e poi l’aspetto “Ma come, a me viene una funzione sola!” e all’altro vengono due funzioni, “A me viene una funzione così” / “A me viene una funzione cosà”; e queste cose vengono fuori sia nel registro testuale -perché l’avete messo: “aumenta” / “diminuisce”-, sia nel registro simbolico -“ $40-2x$ ” / “ $2x-40$ ”-, oppure nel registro grafico: se uno si butta subito a fare il grafico qualitativo senza pensare, può vedere in alcuni casi, a seconda del disegno che ha fatto viene fuori una funzione così [gesto con il braccio che indica retta decrescente], all’altro viene fuori una funzione così [retta crescente], dici: come

- mai? Quindi queste sono le cose... diciamo, i nodi che portano a delle diramazioni dell'insegnante, i nodi dell'albero.»
101. **R1:** «Bene, poi anche T3 ha scelto i quadrati, le motivazioni prima le hai dette. E tu per il momento però hai solo impostato un po' cosa potrà succedere in classe, no? Non gli interventi, non la discussione mi sembra...»
102. **T3:** «No, nel senso che per esempio il lavoro che ho letto prima di dare, che ne so, alla posizione AP: $x = 3$, $x = 4$,... Io ho letto anche i messaggi che tu avevi mandato... io ti ho impostato il lavoro... E poi sul foglio mi sono fatta tutte le possibilità, non ho avuto il tempo di trasferirle, i calcoli che loro avrebbero potuto fare... Quindi, praticamente ho scritto come avrei impostato con loro il lavoro... E alle medie si lavora anche... cioè c'è molta manualità ancora, perché sono piccoli, non sono in grado di fare tutte queste congetture che abbiamo fatto. Poi, voi [T2 e T1] probabilmente lavorate... in che scuola?»
103. **T1:** «Liceo scientifico»
104. **T3:** «Cioè non c'è paragone. Per quanto possano essere magari problematiche, comunque un ragazzo che fa un percorso di liceo scientifico delle piccole congetture riesce ancora a farle. Noi abbiamo comunque ragazzi che hanno delle grosse difficoltà, della logica per esempio...»
105. **R1:** «Però ci sono anche ragazzi... Io penso che qualche congettura comunque esca. Poi a seconda del livello, bisogna pensare anche a cosa aspettarsi. Cioè l'idea di questi scenari è: io una metodologia di tipo [...] la posso applicare a qualsiasi contesto, perché consiste nello stimolare la ricerca, chiedere dei perché, chiedere di argomentare le risposte in modo che non dicano solo "aumenta", ma perché aumenta.»
106. **T3:** «Han bisogno di vedere. Nel senso che magari in una seconda liceo, per quanto problematica possa essere, possono iniziare a immaginare... non so, dalla mia piccola esperienza, io adesso è da anni che lavoro alle medie... penso che si possa immaginare un segmento x di 1 cm, di... si può immaginare. Alle medie glielo devi fare ancora disegnare.»
107. **R1:** «Comunque, come nel loro scenario, loro hanno ipotizzato che prima ci lavorino, individualmente. Quella che è rappresentata è la discussione dopo che ci hanno lavorato. Quindi è chiaro che... anch'io penso che davanti al testo di un problema, se non hanno toccato un po' con mano, nemmeno gli studenti dello scientifico danno una risposta... o la danno immediata appunto, però...»
108. **T3:** «Comunque, io qui ho pensato di partire dai disegni e provare a parlare di perimetro, che non è così scontato... E... quindi niente, questo è l'inizio...»
109. **R1:** «Okey, quindi tu pensavi di farli lavorare, però a partire dal testo della Task 1 così come...?»
110. **T3:** «A partire dal testo spiegato, comunque. Quindi, non ho scritto "Vi consegno le fotocopie", questo non l'ho scritto, li avrei messi in coppia e poi avrei dato il testo, ma lo avrei comunque spiegato. Perché l'altro problema che esiste alle medie... è vero che ci sono dei ragazzi con delle potenzialità, però devi portare avanti un discorso dove devi far sentire un po' tutti allo stesso modo... quindi, non è che puoi dire: "Voi che siete bravi ve lo leggete...", quindi sicuramente i problemi un pochino più elaborati io devo leggerli e devo spiegarli. Poi so benissimo che magari ne avrò due o tre che manco mi ascoltano e partono in quarta e fanno delle congetture anche logiche, ma ne avrò tanti altri che...»

111. **R1:** «No no ma infatti... diciamo, nello scenario pensiamo anche a cosa diresti per spiegare il testo, cioè pensa proprio agli interventi che faresti in relazione al testo, con l'obiettivo appunto di consentire a tutti di capirlo e di capire cosa devono vedere.»
112. **T3:** «Certo. No... io quello che mi sono immaginata - che poi non ho tradotto nel filmato [nella vignetta su LessonSketch] - avrei disegnato questi due quadrati... avrei disegnato delle coppie di quadrati, quindi sarei partita "Adesso disegniamo con la $x = 1$ cm", poi...»
113. **R1:** «Ma anche senza parlare di x , perché il problema non ne parla.»
114. **T3:** «Certo. Io infatti ho pensato: magari questa prima attività la farei per una prima - mi sembra di averlo scritto dopo - e quindi avrei detto: "Disegniamo un segmento AB di 10 cm e prendiamo questo segmento corto AP di 1 cm, l'altro sarà di 9. E proviamo a disegnare questi quadrati, provate a disegnare il perimetro. Poi avrei preso ancora un'altra coppia e avrei detto: "Questa volta misura 2 cm" e sarei partita comunque con dei numeri naturali, con dei calcoli molto semplificati, e li avrei portati a calcolare il perimetro totale. E avrei fatto fare loro tutto il percorso, proprio con tutto il disegno.»
115. **R1:** «Quindi, non solo spiegazione dell'attività, ma costruzione insieme degli esempi. Quindi non a coppie o individuale, ma collettiva.»
116. **T3:** «Li avrei messi a coppie, ma li avrei guidati in modo collettivo.»
117. **R1:** «Guidati molto da te... Okey. [Nuova slide] Qui è il tuo pensiero: "Farei disegnare così non si annoiano troppo e provano a sperimentare il significato di perimetro".»
118. **T3:** «Sì, perché -ripeto- alcuni proprio non riescono a stare fermi, quindi il fatto... poi te lo chiedono: "Dobbiamo scrivere? Dobbiamo...?". Quindi sfruttare la loro manualità, la loro voglia di produrre qualcosa per dare anche delle informazioni matematiche per farli riflettere.»
119. **R1:** «Però li faresti riflettere autonomamente o...?»
120. **T3:** «No, sempre comunque a coppie, questo sicuramente, e... sempre guidati, nel senso che io passeggierei in giro per la classe a verificare, chiedendo bene: "Adesso hai calcolato, scrivimi il perimetro... adesso... abbiam detto di farlo di 2 cm, quanto verrebbe il perimetro?". Quindi, diciamo che la prima parte del lavoro me la immaginerei piuttosto lunga, perché comunque ci va del tempo per far capire che cosa devono fare.»
121. **R1:** «Quindi comunque tu li aiuteresti molto... cioè in ogni passaggio faresti la verifica dopo. E invece almeno la parte di come varia il perimetro...?»
122. **T3:** «Come varia il perimetro, io mi sono immaginata qua che loro avrebbero dovuto da soli capire che aumentando gradualmente... perché poi avrei detto: "Provate a fare la..." adesso la chiamo x "1 cm, 2 cm, ... Provate ogni volta a calcolare il perimetro" e poi li avrei portati ad osservare che appunto variando, aumentando questa x -chiamiamola x - si osserva questa diminuzione del perimetro. Li avrei guidati, perché che temo che... magari quei due o tre avrebbero potuto cogliere che a una variazione della x corrisponde una variazione del perimetro, però molti non se ne renderebbero conto. Quindi avrei dovuto...»
123. **R1:** «Invece, non so, fare inizialmente un momento insieme, e poi dire: "Provate a coppie a costruire altri esempi e provate a rispondere alla domanda". Cioè, che è una mediazione... cioè, all'inizio gli fai capire il testo con degli esempi insieme, poi però a un certo punto li fai lavorare un pochino da soli e li fai scrivere come varia il perimetro. Qualcuno può dire: "All'aumentare di AP, il perimetro aumenta", oppure "...il perimetro diminuisce".»

124. **T3:** «No no, ma questo ci può... loro ci possono arrivare, però devi guidarli. Cioè magari mentre noi guardando i dati - anche l'altra volta - ti viene da dire... Non tutti lo colgono. Cioè devi proprio dire: "Ma secondo voi c'è un legame tra l'aumento di questo dato e il perimetro? Poi magari ci arrivano a dirti... Ma devi un po' guidarli, perché non viene tanto a questa età... cogliere le varianti...»
125. **R1:** «Anche se c'è la domanda nella scheda che dice...»
126. **T3:** «Sì, però deve esserci la domanda, guidarli in quel senso. Da soli non gli verrebbe... se gli metti la domanda assolutamente sì, la coglierebbero. Però da soli dire: che cosa varia? Che legame c'è? Forse un po' alla fine della terza media, ma neanche poi tutti, temo. L'altro problema è che comunque se io mi sono immaginata questa lezione, sono anche tanto disordinati talvolta, quindi nel momento in cui devono mettersi a disegnare, a volte scrivono anche una cosa per un'altra... non tutti, per carità, però...»
127. **R1:** «Però io proverei, proverei a lasciare un po' di spazio anche a loro, in modo da fare una discussione in cui intervengono. Poi se non esce niente son d'accordo, prendi le fila del discorso e fai l'esplorazione insieme a loro. Però provare a lasciare un po' di tempo per lavorarci a coppie... all'inizio capisco: devono capire un po' come costruire, allora si può guidare la costruzione con l'uso di figure: prendo due lunghezze per AP... dico "provate a continuare, costruite altri esempi, la domanda cosa chiede?" Non so, si potrebbe chiedere di interpretare anche il testo, cioè leggere il testo e dire: "Cosa vuol dire questa domanda?" e vedere cosa ti rispondono. Sempre nell'ottica di stimolare una ricerca un po' più autonoma, in modo che... potrebbe essere che non ci riescano, però mal che vada dopo li supporti tu. Adesso non lo so, perché alle medie mi è capitato di fare delle attività sperimentali, ma da esterna, quindi sperimentare in classe vuol dire che... mi è capitato di far lavorare a gruppi e c'è chi fa più fatica, chi meno, qualcuno ha bisogno di supporto, però ci provano, per cui possono uscire anche delle belle cose nella discussione.»
128. **T3:** «No questo assolutamente. Nell'ottica di... Devi riuscire a costruire anche un ambiente di lavoro, di... non è semplice, ecco, a volte insegnare alle medie.»
129. **R1:** «[Slide successiva] Poi qua c'è la parte che secondo me dicevi, perché dice: "Dopo aver spiegato il primo task con dei numeri, i ragazzi stanno disegnando. Lavorano a coppie con lo stesso segmento di lunghezza 10. Disegnati i quadrati, scriveranno su una tabella come cambiano i perimetri e ragioneranno sul risultato ottenuto".»
130. **T3:** «Sì, è venuto enorme questo fumetto, copre l'insegnante...»
131. **R1:** «Ecco, anche in questo caso diciamo che, nell'ottica dello scenario, questa parte poi si può tradurre in domande, affermazioni che può fare l'insegnante, eccetera... [Nuova slide] E qui sono i ragazzi che stanno lavorando a gruppi, anche qui [le vignette si leggono] nell'ordine...?»
132. **T3:** «Io sono partita da sinistra.»
133. **R1:** «Quindi si chiedono "Quanto misura il perimetro maggiore", "Il perimetro maggiore si avvicina al numero... 40?".»
134. **T3:** «Però lo pensa... Cioè io penso che potrebbero pensarlo... è un po' il discorso di prima...»
135. **R1:** «Cosa intendi con perimetro maggiore?»
136. **T3:** «Eh, ... cioè facendo... aumentando il valore della nostra x , ci accorgiamo che varia il perimetro, però tra tutti i perimetri che abbiamo trovato ci avviciniamo sempre di più al numero 40. Però non si osava dirlo, nel senso: "Mah...".»

137. **R1:** «E tu, perché ti aspetti che succeda...»
138. **T3:** «Perché secondo me qualcosa si arriva a cogliere, che c'è un legame tra questa x che cambia e questo perimetro. Se facciamo una bella tabella, fatta bene, dove mettiamo il perimetro che varia, la x che varia, scrivendo bene i numeri, viene fuori. Se faccio anche la domanda, lo capisci che si tende a questo numero, il numero maggiore dovrebbe essere 40, ci si avvicina. Secondo me questo lo colgono...»
139. **R1:** «Però ti aspetti che nell'esplorazione della relazione tra perimetro e AP, diciamo, in realtà focalizzino l'attenzione sul valore più grande che possono avere...»
140. **T3:** «O sul valore più grande o sul valore più piccolo, cioè cogliere...»
141. **R3:** «Vorrei chiedere una cosa: se a questo livello scolare gli studenti spontaneamente si buttano di più in un'esplorazione numerica o grafica. Cioè io mi immagino che là da loro [T1 e T2] capiti "40-2x", quello subito impallinato di calcoli che pum, spara la formula e dice "Io son bravo a contare", no? Qua...?»
142. **T3:** «Più nei numeri.»
143. **R1:** «E nei numeri secondo te pensano già a questa idea di valore più grande, di valore più piccolo...?»
144. **T3:** «No, non ci pensano di loro. Però di fronte magari a una tabella costruita con ordine, quindi partendo con $x = 1$, $x = 2$, ... e con una domanda, guidati, possono cogliere questa variabilità che c'è tra il perimetro e il variare della x , se guidati. Però sono legati ai numeri, perché traducono il numero in una misura e quindi in un disegno; cioè fanno fatica a immaginarsi le cose; se il numero lo trasformiamo in una lunghezza, in un disegno, loro lo colgono meglio. Dal punto di vista grafico, tipo il piano cartesiano lo si fa già in prima media. Però per esempio l'altro giorno in una prima stavamo facendo un disegno di un parallelogramma o di un quadrato, e dico: "Proviamo a calcolare il perimetro" e c'è voluto un po' di tempo, perché io gli avevo dato l'unità di misura, gli avevo detto prendiamo il quadretto e così, per farli ridere, l'ho chiamato u "Il quadretto è u", quindi dicevo "Quanto misura...?" e loro dicevano "Ma non ce l'abbiamo la misura, abbiamo i quadretti"... "Sì, però l'unità di misura può essere il quadretto, quindi il perimetro viene per esempio 10..." "...u". Sì, ci è voluto un po'... poi abbiamo riso: u_1 , u_2 ... e poi abbiamo fatto un po' di battute sciocche che servono un po' per sdrammatizzare... Il problema era trovare, sempre sul grafico, l'area di questo quadrato o parallelogramma: "Eh ma viene $10 u^2$ " e questa cosa li ha sconvolti, perché comunque la scrittura... ci va un po' di tempo...»
145. **R1:** «Lì dipende anche da come hanno lavorato alla primaria secondo me... cioè penso, alla primaria lavorano con le aree, con i quadretti, contare i quadrettini... però dipende da come hanno lavorato i docenti alla primaria...»
146. **T3:** «Per esempio un'altra cosa che loro trovano difficile, ma non solo nelle medie... Non so, per esempio trasformare la frazione in un disegno, ad esempio: un segmento è i due terzi dell'altro, quindi fare la... dividere... si fa fatica e ogni volta se lo dimenticano questa cosa. O fanno meccanicamente che so $2/3$ di un numero, però... l'unità di misura, il dividere, la rappresentazione grafica di un problema e di un numero è difficile. Però, poi... cresceranno...»
147. **R1:** «Vabbè, diciamo che qui per questa prima attività...»
148. **T3:** «No bè questa si può fare, voglio dire, perché comunque è guidata ed è tutta molto numerica, usando i numeri interi... quindi ci sta.»

149. **R1:** «Ecco, al limite... dopo vedo che passi già alla terza media, quindi per quanto riguarda questa io penserei anche alla discussione che c'è dopo, dopo che loro hanno... e anche pensare un po' a come risponderebbero a quella domanda. Vabbè, poi sì, ci può essere qualcuno che si focalizza su valore più piccolo, valore più grande, effettivamente è un focus che si può avere... Però pensare a cosa risponderebbero, che tipi di verbalizzazioni ci si aspetta, le argomentazioni che producono... E dopo invece quindi tu proporresti... questa per una prima, limitandola alla prima task, invece l'altra per una terza... però nella terza deve essere presente la prima task comunque, sì? 1? Perché prima esplorano, e poi...»
150. **T3:** «Sì sì, questo sicuramente... Si presume che comunque in terza un'idea di piano cartesiano, di grafico, di unità di misura, di relazione... qualche cosa in più si può fare... Eh... sì, si può prevedere lo stesso anno, si può prevedere anche in prima... E qui [slide] ho visto... mi è venuto in mente il legame con le equazioni, perché comunque molti libri, molti testi li propongono: il quadrato, la x, il perimetro... cioè vedo molti problemi dove imposti l'equazione...»
151. **R1:** «Però lì sarebbe l'equazione... di una funzione, diciamo: quella che rappresenta il perimetro. Quindi, anche qua [slide] ti sei soffermata un po' su cosa pensi che dicano i vari gruppi... sempre per la prima task questo, o già per quella...?»
152. **T3:** «Quella...»
153. **R1:** «La seconda in cui si chiede la relazione?»
154. **T3:** «Questa è la terza task... “Proviamo a parlare di equazioni”: sì, questa è la terza.»
155. **R1:** «Ah! Io pensavo che questa...»
156. **T3:** «No aspetta... Questa è terza media! Le equazioni le facciamo in terza media!»
157. **R1:** «No, appunto, chiedevo: su quale delle tre task qui stanno lavorando? Se lavorano già con x...»
158. **T3:** «Possiamo... ho provato dalla prima... cioè mi sono immaginata comunque... Perché dopo, mi pare, l'ho scritto... dove dico di usare il computer e di usare GeoGebra... mi pare che sia dopo...»
159. **R1:** «[legge la slide] “Noi abbiamo usato solo i numeri interi”, “Ma possiamo usare anche i decimali”, ...»
160. **T3:** «Sì, io direi... sì...»
161. **R3:** «Quindi tu prevedi di fare un'esplorazione numerica-geometrica, diciamo, a mano e dopo con GeoGebra... Ecco, mi stavo chiedendo una cosa... nella mia mente pensavo: se si potesse costruire un modello con un artefatto... non lo so, pratico... o di carta, con degli elastici, con dei fili... in modo che questa esplorazione a mano ricalchi un briciolino quella di GeoGebra, che faccia vedere [gesto con le mani che indica che l'esperienza è tangibile] questi quadrati che si muovono.»
162. **T3:** «Ecco io avevo provato a farlo così. In realtà non ho avuto tanto tempo per...»
163. **R3:** «Col disegno...?»
164. **T3:** «Sì!»
165. **R3:** «Col disegno... No, io dicevo di dargli proprio qualcosa in mano che si... Perché ad esempio la Castelnuovo lo faceva con gli elastici, no? Con il cordino, quello dei rettangoli isoperimetrici. E allora adesso io stavo pensando se non c'è il modo di costruire qualche

- cosa che simuli questa variazione di GeoGebra, ma che sia un artefatto da utilizzare prima. Eh?»
166. **R1:** «No, pensavo che l'elastico è un po' un problema, perché lì poi c'è da...»
167. **R2:** «Allora il problema è col cordino. Eh, però non è come per la Castelnuovo, è più difficile, perché devi... capisci è una cosa che ha le due variabili, i due lati, che variano insieme... e quindi devono fare un quadrato. Quindi, lo trovo molto difficile. Certo puoi farlo poi, ma... Cioè lo fai risolvendo già il problema... insomma, non ti aiuta temo.»
168. **R3:** «Anche perché, vabbè il cordino della Castelnuovo è perché c'era un uso...»
169. [sovrapposizione di voci]
170. **T1:** «Con dei chiodini?»
171. **R2:** «Eh ma i chiodini poi li devi spostare.»
172. **R3:** «Sì, una possibilità su un quadrato è quei così coi chiodini, no avete capito, tipo... non so come si chiamino, insomma questi affari qua... geopiano... Avere già delle forme fatte su numeri interi, perché ho visto che i ragazzini pensano... inizialmente si buttano sui numeri interi prima dei decimali. Quindi, non lavorare sul continuo, ma sugli interi come prima situazione e dare loro dei quadrati già pronti che loro sovrappongono.»
173. **R2:** «No, però se... Cominciano a pensare il quadrato... io c'ho il segmento... come lo chiami? AB? Non mi ricordo... Quello è fisso, no? Allora, fisso un chiodo... guardo uno dei chiodi messi a distanza 1, 2, 3, 4, 5,... ne fisso uno, faccio il primo quadrato, poi faccio il secondo quadrato... questo riesco a farlo col cordino, o con qualcosa, non lo so... e poi faccio i conti. Però è una roba -mi sembra- molto lunga.»
174. **R1:** «In questo senso è più facile fare il disegno. Più che altro il disegno sul quaderno resta...»
175. [sovrapposizione di voci]
176. **R3:** «Ma io stavo pensando, se uno ha il cordino che fa il giro attorno alla figura, poi prende questo cordino, lo mette così [lo distende facendolo diventare rettilineo] e vede questo cordino...»
177. **T5:** «E ogni volta ci fa una tacca con un pennarello e vede che le tacche si spostano.»
178. **T3:** «...il disegno della prima task, il disegno per la terza task, per esempio -pensando ai miei [allievi]- colorandolo. Quindi, segmenti uguali saranno tutti di colore rosso, mentre segmenti più lunghi li facciamo gialli, non so...»
179. **R2:** «Se tu gli dessi... ecco, questo potrebbe essere... su un foglio con già fotocopiati i... quindi un disegno insomma, i punti di coordinate intere insomma. E allora loro... e poi ben calcato il segmento AB, con questi qua... e allora loro col pennarello rosso fanno... dici: "Andate a vedere... adesso, fissate un punto nel segmento AB e lì disegnate i due quadrati, uno lo fate rosso e l'altro lo fate verde e poi fate il conto della lunghezza del perimetro della figura", quella delle due insomma [quella composta dai due quadrati], "e quindi scriveteli"; allora si può fare una tabella in cui metti il valore del punto...»
180. **T3:** «Prima non l'ho scritto -ripeto- per questione di tempo. Però avevo immaginato i disegni colorati, le lunghezze con i numeri interi e le variazioni dei primi...»
181. **R2:** «Però se tu gli dai già 25 fogli fotocopiati, con questa cosa ripetuta più volte, e...»
182. **R1:** «Perché così si evita la parte del segmento...»

183. **R2:** «Sì, perché son quelle robe lì che creano...»
184. **R1:** «Possono proprio creare più difficoltà quando ci sono studenti più problematici...»
185. **R3:** «Sì, quindi una situazione grigliata... con la griglia. E uno fa in rosso un certo modello, in blu ne fa un altro...»
186. **R2:** «Una tabella in cui hai il punto P, PA, lunghezza del perimetro,... e viene una funzione insomma.»
187. **T3:** «Sì sì, infatti me l'ero costruita, la tabellina, e quindi magari avrei... e poi volevo fare questo collegamento con GeoGebra, che trovo un po' difficile nella nostra realtà e l'avrei fatto per le terze; cioè dopo aver fatto queste tabelle con dei numeri interi, dopo che... è chiaro che c'è questo legame tra perimetro e la x, proviamo a fare questa animazione e quindi GeoGebra vista come un'animazione, quasi un giochino...»
188. **R1:** «Ma si può anche... Tu vedi difficile che loro sappiano costruire con GeoGebra le figure o creare tu il file per farglielo usare? Un po' come abbiamo fatto la scorsa lezione: c'era già un applet preparata, si dà l'applet agli studenti, così usano l'applet per esplorare e non c'è il problema di dover costruire la figura. Quelli bravi possono farlo comunque... possono provare. Così c'è un problema in meno per te a livello operativo, perché altrimenti devi seguirli tutti per essere sicura che riescano a costruire la figura.
- Bene, diciamo... questa era l'ultima [slide] tua. Io per l'incontro di oggi, a livello di discussione degli scenari, mi fermerei. Poi l'idea era quella di casomai cominciare a pensare al prossimo momento, nel senso che voi [T1 e T2] avete cominciato a lavorare alla prima task, tu [T3] hai pensato un po' alle prime idee però ancora noi hai scritto le discussioni, gli interventi dell'insegnante, eccetera... Quindi la mia idea era riflettiamo anche insieme, proviamo a lavorarci; noi giriamo e sentiamo un po'. In modo poi, la prossima volta, di riprendere gli scenari completi e discuterli, perché la prossima è febbraio... il 15. [...] Diciamo che l'idea è... secondo me ancora il 15 e il 22 possiamo discutere sugli scenari, poi T4 e T5 spero vengano, quindi ci sono anche loro; e non so cosa sceglieranno di fare, su quali lavorare... però anche continuerei a discutere sulla parte nuova, o sui cambiamenti che avete fatto, anche proprio nell'ottica di pensare: "ho cambiato questo perché..."; in modo proprio da costruire insieme gli scenari. [...] Poi la parte interessante sarebbe, una volta che son state fatte le attività in classe, discutere a livello operativo: intanto quanto si è verificato quello che avevo previsto, come ho reagito alle novità, agli elementi che non avevo previsto, e è stato utile averla pianificata così oppure no. Cioè dopo ci sarà una riflessione di questo tipo su quello che è successo in classe. Quindi, la mia idea... sì, secondo me, ancora febbraio e marzo è bene lavorare e confrontarci; e poi ci dovrebbe essere il tempo, anche se in mezzo ci sono le vacanze di Pasqua, il tempo per sperimentare, in modo che poi durante l'ultimo incontro si possa anche discutere di ciò che è successo in classe. Questa sarebbe la mia idea sulla pianificazione. Sì?»
189. **R2:** «Solo una domanda... cioè, negli scenari secondo me si nomina, ma c'è tutto un non esplicitato che però sicuramente nella mente dell'insegnante c'era e sono tutte le... chiamale rappresentazioni, tutto quello che gli allievi si pensa che scrivano - come formule... come quello che vuoi... oppure facciamo al computer - allora forse... io non so se poi va bene, eh? Però si potrebbe pensare che, siccome le coppie di allievi hanno come una scrivania, un banco, allora se si aggiungesse una... un quadrato, anche verticale, non importa, lì davanti al banco; in cui [c'è] lo scritto [da una parte] e il computer [dall'altra], due cose... poi non è detto che... ci si mette solo un segno, un asterisco, per dire: "Noi pensiamo che scrivano delle cose...". Perché poi quando si va a vedere quello che succede, allora avrai che la coppia 1 ha scritto quella roba lì... da voi compariva tra l'altro, per quelli

che han fatto... quello che avete fatto vedere prima: compariva x meno... quella formula con la x insomma... e quindi c'era già in un certo senso... però... certo che loro l'avranno detto... però fanno riferimento a una cosa di questo genere. Lo stesso può essere il fatto che si pensa che tu pensi... gli dai da fare delle cose, usando il computer, eccetera, eccetera... Quindi anche queste forme... Così come prima si era detto: ma ci son le faccine, no? Quindi, può darsi che ci siano anche elementi non verbali e non scritti che spuntano fuori in questa... Mi sono accorto che Pippo lì aveva un'aria che non capiva niente, oppure invece Chiara aveva un'aria felice, ... non so, cose di questo genere. E poi forse quando si va a fare la seconda parte, in cui si dice: "È successo questo, è successo quell'altro", avevam messo gli asterischi, messo dei segnali per dire "Mi aspetto che succeda questo", può essere un aiuto. Anche un modo per pensare a quello a cui poi guarderò.»

APPENDIX 3: Trascrizione del Quarto incontro

1. **R2:** «[Parla della scenografia delle vignette di LessonSketch, ha scambiato un poster sulla parete della classe virtuale per la lavagna] ...Son messi lì per bellezza, in un certo senso...»
2. **R1:** «Secondo me erano già fissati in scena...»
3. **R2:** «Sì, però potrebbe indurre in tentazione nel dire: “Mah bisogna preparare anche qualcosa alla lavagna”. Soprattutto, se poi si usa la lavagna, allora sarebbe bene se la lavagna fosse pulita, magari non azzurra ma magari più scura... ma questo poco importa, insomma... ma senza niente. Poi se l’insegnante pensa di usar la lavagna... possibile, no?, in un intervento... allora sulla comparirà la lavagna qualcosa, che può essere una scritta, un disegno...»
4. **R1:** «Secondo me la lavagna però è quella bianca, quella col contorno marrone.»
5. **R2:** «No, perché può essere fuorviante... [...]»
6. **R1:** «Sì, tra l’altro, sembra contestualizzare che è una classe più di scuola media che...»
7. **R2:** «Di matematica...»
8. **R1:** «Sì, di matematica di sicuro. Però potrebbe sembrare più di scuola media che di scuola... anche i due poligoni là in alto... [...] Poi ho visto una modifica nella scena tre. Ho messo vecchia e nuova scena per vedere i cambiamenti. Nella vecchia: “5 minuti per condividere a coppie”; nella nuova: “5 minuti per condividere a gruppi di tre quanto elaborato”. Quindi volevo intanto sapere questa modifica: come mai avete pensato ai gruppi da tre anziché alle coppie?»
9. **T2:** «Perché in realtà sono meglio i gruppi da tre, probabilmente avevamo scritto a coppie perché avevamo il vincolo dello scenario da scegliere, infatti questi sono gruppi di tre ma in realtà lo scenario continua a essere a coppie.»
10. **R1:** «Questo è anche un limite dello scenario.»
11. **T2:** «Sì, però abbiamo lasciato lo scenario così, con le coppie. Forse si possono aggiungere i singoli studenti, però il banco non si presta...»
12. **T5:** «Ci sono dei banchi da quattro.»
13. **T2:** «Eh sì, però non sono gruppi da tre.»
14. **T5:** «Sì, da quattro e poi se ne toglie uno, di studente.»
15. **T2:** «Ah si toglie uno studente...»
16. **R1:** «Sì, penso che la parte grafica è meno importante. Quindi comunque... allora prima eravate state vincolate dai tipi di...»
17. **T2:** «Sì, in genere facciamo gruppi da tre.»
18. **R1:** «Sì sì, infatti capisco anche la scelta, perché su gruppi da tre se c’è quello che non riesce a lavorare, perlomeno gli altri due possono supportarlo... [Slide 4] Poi c’è una nuova scena 4: “Passo tra i banchi per vedere cosa scrivono” è il pensiero dell’insegnante “e sentire cosa dicono, per preparare gli interventi successivi in modo da far arrivar tutti gradualmente alla soluzione e non ‘bruciare’ subito quella ottimale”. Qui insomma c’è molto quello che abbiamo detto l’altra volta, quindi di pensare di non far intervenire gli studenti a caso, ma secondo un ordine ben preciso, in modo da non “bruciare” troppo...»

19. **R2:** «Questo forse è un po' meno da deficiente, ma abbiate tolleranza coi vecchietti... Allora, è implicito in quello che è scritto lì, però forse è da esplicitare, perché tu passi... che cosa ti serve per preparare gli interventi successivi? Individuare delle strategie comuni e delle strutture comuni in quello che stanno scrivendo gli allievi... Al fine di preparare gli interventi, cioè per individuare possibili strategie comuni, o bozze di strategie comuni degli allievi al fine di preparare gli interventi successivi, eccetera eccetera...»
20. **R1:** «Sì. Ecco, la stessa domanda che vi ho fatto prima: quando lavorano individualmente osservate solo, qui invece pensate anche a possibili interventi? Cioè, se vedete un gruppo bloccato, cosa fate? Bloccato, oppure che sta andando proprio in una direzione che si capisce che può portare solo a un fallimento... cosa fate? Intervenite o osservate e basta?»
21. **T2:** «Osserverei e basta, e poi provo a far venir fuori... È che se uno dà le indicazioni lì in mezzo...»
22. **R2:** «Gli altri sentono e... Forse l'idea è che si sfrutta poi la discussione per far evolvere quelli bloccati.»
23. **T2:** «Secondo me se sono fuori tema del tutto, uno non mette neanche in evidenza la strada che è completamente fuori...»
24. **R2:** «No perché uno potrebbe dire, non a loro, ma un messaggio generale: “Attenzione! Non pensate che sia...”»
25. **R1:** «Sì, lì potrebbe... diciamo, lì dipende dalle classi: ci può essere chi è completamente bloccato, non sa neanche da che punto partire, allora forse un suggerimento del tipo “Provate a costruire dei casi particolari, fate dei conti...” non è un suggerimento che dà troppo. Mi aspetto che in una classe di liceo scientifico non ci sia bisogno di fare un intervento di questo tipo, però non si sa mai... però eventualmente... Condivido invece di non dire troppo, nel senso che poi si rischia di bruciare proprio... di bruciare parte della discussione. [Slide 5] Poi di nuovo un pensiero dell'insegnante. L'ho chiamata scena 5 perché sta sempre osservando. “Chiederò a questo gruppo di provare a spiegare alla classe quanto ottenuto, dal momento che la soluzione trovata non è corretta”, anche qui ho una domanda, perché prima loro... diciamo, non hanno ancora preparato il file da associare con queste categorie di risposte a cui si riferiscono, perché hanno avuto una bella idea, cioè di scrivere ___ foto, di scrivere le risposte. A che tipo di soluzione non corretta state pensando qui?»
26. **T1:** «Quella che probabilmente... vabbè nella nostra testa c'era... forse si percepisce dopo... loro hanno fatto dei tentativi numerici, però con... mettendosi sempre in un caso particolare, cioè la scelta del punto sul segmento più vicino al primo estremo...»
27. **R1:** «Sì, nella prima metà...»
28. **T1:** «Esatto e quindi hanno visto solo metà della variazione.»
29. **R1:** «Infatti qua [Slide 6: vecchia e nuova] ho evidenziato... si capisce da qua cosa avete pensato... La vecchia scenetta, la nuova scenetta... Prima era una domanda generica, ripresa dal testo del task 1 e diventa: “Il gruppo laggiù in fondo vuole provare a spiegare alla classe come varia il perimetro della figura ottenuta al variare della posizione del punto P sul segmento AB?”, quindi quello che mi stavate dicendo adesso: questo gruppo che vede solo casi particolari, per cui non si rende conto che in realtà c'è questa evoluzione...»
30. **R3:** «Quando chiedete “...come varia il perimetro della figura ottenuta al variare della posizione del punto P sul segmento AB?” state pensando anche a un registro di

rappresentazione? Cioè, pensate di osservare graficamente oppure di guardare i numeri (quindi come cambia la misura) oppure altro? Quindi, nel registro grafico, oppure nel registro numerico, oppure già qualche cosa in più?»

31. **T1:** «In realtà la domanda...»
32. **R3:** «O è aperto?»
33. **T1:** «È aperto.»
34. **R1:** «Nella [task] due poi si introduce la tabella e il grafico, quindi lì è più vincolante, anche il tipo di domanda... Nella [task] uno in effetti è aperta...»
35. **T2:** «Però in realtà forse ci aspettiamo che partano dalla costruzione geometrica. Mi sembra anche complicato dare una risposta... magari ci stupiscono, però...»
36. **R3:** «No, il problema è se la pensi in maniera aperta, c'è di tutto allora: uno guarda una cosa, magari un altro può guardare in un altro modo...»
37. **R1:** «Comunque, diciamo, le prime risposte che vi aspettate sono verbalizzazioni delle osservazioni: “Diminuisce”, “Aumenta”,... Infatti poi c'è il cambiamento... [slide 7: numerazione errata, c'è scritto 6] Questa sarebbe la scena 7; dove avete aggiunto il pensiero dell'insegnante, oltre che appunto i numeri della sequenza. Perché c'è: 1. (gruppo di studenti là in fondo) “Se il punto P si allontana da A, il perimetro diminuisce” e l'insegnante chiede a tutti “Siete d'accordo?”; e poi c'è il pensiero dell'insegnante: “Se sono tutti d'accordo, dirò che in un'altra classe qualcuno è arrivato a una conclusione diversa”, quindi qua ci sono le opzioni: se dicono tutti di sì dico questo, speriamo che qualcuno dica no. Anche di questa cosa ne avevamo parlato l'altra volta. Poi scena 7 [in realtà 8], effettivamente qui avete inserito i numeri. Quindi, un coro di sì e poi un gruppetto che dice no e l'insegnante: “Perché? Provate a spiegare come avete ragionato”, quindi al semplice perché di prima avete aggiunto questa richiesta, riferendovi al gruppetto che dice no, o in generale?»
38. **T1:** «In generale.»
39. **R1:** «Okey. E poi abbiamo questa successione [scena 9]: “Abbiamo fatto delle prove”, vari “Anche noi!”, “Noi invece abbiamo usato le lettere” e l'insegnante “Voi che avete fatto delle prove, spiegate che prove avete fatto”. Quindi qua c'è la scelta che, nel gruppo di risposte che possono arrivare dalla classe, vi focalizzate su chi ha fatto un'esplorazione numerica. Questo per non bruciare il discorso simbolico. Okey... Poi scena 9 [scena 10], di nuovo avete fissato delle... avete aggiunto però l'intervento dell'insegnante rispetto alla scena precedente. Quindi, 1. “Noi abbiamo visto che se AP è 2 cm, il perimetro viene 36 cm e se AP è 3 cm viene 34 cm, perciò diminuisce...” si vede che è sul discorso numerico, 2. “...se AP è 1 cm, il perimetro è 38 cm”, “...e se AP è 5 cm il perimetro viene 30 cm”, poi 4. “Sì, però se AP è 6 cm il perimetro viene 32 cm e se AP è 7 cm viene 34 cm, quindi aumenta”, quindi qui c'è l'idea che dalle esplorazioni numeriche c'è il fatto che qualcuno ha messo in luce, non ha messo una relazione... non è una funzione sempre decrescente. Dopodiché intervento per far parlare chi ha lavorato con le lettere: “Chi ha usato le lettere vuole spiegare come ha ragionato?”. E [scena 11] quelli che hanno usato le lettere dicono: “Noi abbiamo chiamato”... ah io ho messo ‘scena nuova nata dalla suddivisione della vecchia scena’, cioè a partire da quella in cui c'erano scritti gli interventi... “Noi abbiamo chiamato x il segmento AP e abbiamo visto che il perimetro viene $40-2x$, quindi se x aumenta il perimetro diminuisce”, [insegnante] “Che cosa ne pensate?”, quindi rilanciate a tutta la classe. E qui [scena 12] ci sono due opzioni, giusto? Nella scena... sarebbe la 12. Quindi, si parte da: “Però facendo le prove viene che se P è nella prima metà il perimetro diminuisce, oltre la metà aumenta!”...»

40. **R3:** «Ora si potrebbe anche pensare che qualcuno... almeno parlo per classi che ho visto finora di sperimentazioni precedenti di questi problemi, perché questo problema l'ho già sperimentato moltissimo con insegnanti e con studenti a vari livelli d'età. Che qualcuno si accorga che c'è la limitazione, quindi questo x viaggia tra un valore minimo e un valore massimo, e che qualcun altro non se ne accorga per nulla. Questo va anche un attimo previsto prima.»
41. **R1:** «Sì, in caso non esca il fatto che x varia in un intervallo limitato, la domanda è aperta: “Ma x può assumere qualsiasi valore?”.»
42. **T2:** «E forse con la costruzione con GeoGebra nello step successivo, in teoria dovrebbero vederlo. Conviene farlo uscire già adesso o aspettare la seconda task?»
43. **R1:** «È che dicevamo prima che in realtà la prima e la seconda task sono strettamente connesse, quindi io mi aspetto che dalla prima, specialmente in un contesto in cui ci sono ragazzi bravi che intervengono, possano uscire tante cose che invece costituiscono l'obiettivo della seconda. Quindi io lascerei più che la discussione vada. Però se esce tanto, anche qui su una rappresentazione simbolica, forse la domanda si può porre, senza spingere troppo però. Se tutti dicono “Può assumere qualsiasi valore” allora poi si può passare allo step successivo, con il grafico si può vedere che cosa succede successivamente. Quindi, questi dicono che “facendo le prove viene che se P è nella prima metà il perimetro diminuisce, oltre la metà aumenta!”, questo qui è il gruppo...? Non è il gruppo che però all'inizio ha detto diminuisce e basta...»
44. **T1:** «O forse ascoltando il racconto degli altri compagni, le prove degli altri compagni, mette assieme un po' i vari pezzetti. Potrebbe anche essere. Perché prima ci sono stati quelli che hanno fatto solo prove in cui il perimetro diminuiva, o che aumentava; quindi mettendo un po' assieme, forse adesso a questa conclusione, un po' riassuntiva, anche solo pensando ai tentativi numerici, potrebbero arrivarci.»
45. **R1:** «Un'altra domanda che si può fare, per esempio qua è sottinteso... ci sono quelli che dicono: “Noi effettivamente abbiamo preso P nella prima metà del segmento”, quindi c'è qualcuno che si rende conto della limitazione dell'esplorazione che ha fatto, del punto di vista solo parziale di fronte alla situazione. Se non esce spontaneamente, un'altra cosa che si può chiedere è: “C'è qualcuno che ha cambiato idea?” è abbastanza tipico di un approccio... di una valutazione formativa far uscire chi grazie alla discussione ha capito qualcosa in più. E poi c'è questo 4 che dice: “Ma prendendolo dopo non viene la stessa cosa?”, per voi questo è uno studente che non ha capito quindi? Che è un po' bloccato... Perché c'è quello che dice “Noi abbiamo preso P nella prima metà” quindi sembra consapevole che nella prima metà diminuisce e ha capito che invece nella seconda metà c'è un aumento, giusto?»
46. **T1:** «O forse, non l'ha capito, però dai numeri può averlo capito e loro con le lettere, avendo visualizzato solo la situazione della prima metà, non hanno idea di che cosa possa capitare dopo. Infatti il compagno di gruppo, in realtà è lui che dice “Ma prendendolo dopo, non viene la stessa cosa?”. Perché poi qua potrebbero... cioè, non avendoci provato, non so se è così evidente che effettivamente, facendo una scelta diversa, la funzione che viene poi fuori è proprio differente. Se non ci provi, forse non ne hai la percezione. Anche perché molti dei problemi che magari loro risolvono, non essendo di tipo simmetrico, non fanno emergere questa difficoltà. Spesso quando gli viene detto di prendere un punto P su un segmento AB , chiami AP con x e poi non ha rilevanza esattamente dove vai a mettere il punto, quindi probabilmente un esempio del genere... sinora non l'hanno mai incontrato...»
47. **R1:** «Eh questo è interessante, è qualcosa di nuovo.»

48. **T1:** «Credo che nei problemi... sinceramente non lo so... Mi sembra che anche gli anni passati, al biennio di non aver visto problemi del genere, dove effettivamente... no, qualche problema forse c'è... forse sono quelli in seconda [alla fine della seconda].»
49. **R1:** «Sì, capita di più al triennio.»
50. **T1:** «Sicuramente non è un problema di routine per loro, ecco.»
51. **R1:** «Quindi, c'è questa opzione A... perché dopo c'è l'opzione B... Nell'opzione B abbiamo sempre l'1 che dice la stessa cosa: “Nella prima metà il perimetro diminuisce, oltre la metà aumenta”, l'insegnante dice sempre “Siete d'accordo?” e qui dice “No, perché usando le lettere si dimostra che il perimetro diminuisce!”. Qua cosa...?»
52. **T1:** «Perché non hanno... cioè secondo loro hanno comunque usato le lettere e non si accorgono nemmeno che il punto P nel loro disegno l'hanno preso nella prima metà. E quindi sono convinti che avendo chiamato con x il segmento AP e quindi essendo passati a una rappresentazione simbolica... non si pongono neanche il problema che se avessero preso un punto P nell'altra metà, potevano arrivare a una conclusione diversa.»
53. **R1:** «Però secondo voi questi dalla rappresentazione simbolica colgono la decrescenza perché la interpretano come retta con coefficiente angolare negativo...? Perché da questo intervento sembra proprio che dalla rappresentazione simbolica viene fuori che il perimetro diminuisce. Quindi che abbiano già questa intuizione da...»
54. **T1:** «A me sembra che il “40-2x” potrebbe anche solo essere il fatto che ci sia “40-...”. Potrebbe anche solo essere...»
55. **T2:** «Ma anche pensarla come retta... nel senso che avendo svolto quell'argomento potrebbe venire in mente.»
56. **R1:** «Sì, lì potrebbe essere... potrebbe essere carino... no, perché poi... vabbè vediamo anche l'opzione tre. Ah no! Questa è l'altra. Di questa avete solo queste due opzioni. La A, dove qualcuno... chi ha usato le lettere si rende conto che forse c'è qualcosa che non va... almeno, in un gruppo. E qui [opzione B] invece no. Assolutamente. Si riferiscono solo all'opzione simbolica che hanno costruito. E cosa ci vedreste però dopo? Ecco, da parte dell'insegnante, dopo questo intervento, caso A, e dopo questo intervento, caso B. Quale potrebbe essere la domanda che viene dopo? Perché qui avete messo in generale: qualcun altro ha usato le lettere.»
57. **T1:** «Sì, quindi adesso c'è qualcun altro che magari ha solo lavorato, per esempio, con il punto nella seconda metà e quindi ha ottenuto esattamente il risultato opposto.»
58. **T2:** «Poi dicevamo: qualcuno dopo i primi interventi magari continua a fare delle prove, dei tentativi... e quindi magari...»
59. **R1:** «...riesce a calcolarli.»
60. **T2:** «Sì, difatti!»
61. **R1:** «Sì, perché qua invece nell'opzione B avete messo: “Sì e abbiamo trovato la stessa formula”. E invece un altro che dice: “Sì, ma ci è venuto $20 + 2x$ ”, quindi l'altra formula che fa riflettere. No, qua io mi chiedevo invece: “...usando le lettere si dimostra che il perimetro diminuisce” ... forse qui potrei [insegnante] chiedere perché: “Perché dite che il perimetro diminuisce?”. In modo che sia esplicitato questo discorso. Poi sono d'accordo che un'altra idea è quella di chiedere se qualcun altro ha usato le lettere e confrontare i risultati. Però di fronte a un'affermazione di questo tipo, il perché... Come pure, di fronte a dove dice... il 4: “Ma prendendo il punto dopo, non viene la stessa cosa”, io rilancerei alla classe

la domanda: “Siete d’accordo? Vi viene la stessa cosa oppure no?”. Forse, oppure chiederei a qualcun altro di rispondere a questa domanda, perché comunque è una domanda che viene posta, quindi... farei rispondere alla classe.»

62. **R3:** «O mettere di fronte il partito che la vede in un modo, quello della prima metà, e quello dell’altra. Vedono due funzioni diverse, e dire: “Ma com’è questa faccenda?” ...in contrasto.»

63. **R1:** «Dopo sì, io qua mi riferivo al pezzo che dice “Non viene la stessa cosa”, cioè il punto è chiedere di rispondere a questa questione... Come pure questo che dice “Si dimostra che il perimetro diminuisce” ... [insegnante:] “perché dici che si dimostra che diminuisce?”. Dopodiché c’è questa che è l’ultima scena, con le tre opzioni. Prima opzione: “Qualcun altro ha utilizzato le lettere?” e tutti dicono “No”; e infatti ho aggiunto io la domanda: quale sarà il successivo intervento dell’insegnante? Se dicono tutti no, cosa succede? Quale sarà l’intervento successivo? Ci sono più opzioni: si potrebbe dire “Proviamo a passare alla task 2”, e a questo punto farli lavorare con una tabella, provare a costruire il grafico... questa è una possibilità. Altrimenti, un’altra possibilità è quella di chiedere a chi ha utilizzato le lettere di venire alla lavagna e far vedere come ha costruito l’espressione, in modo che possano esplicitare anche agli altri come ci sono arrivati: non è frutto di un tirare a caso, comunque hanno lavorato sulla figura, senza tenere conto di tutte le possibilità... per cui può essere che dal resto della classe, di fronte a una costruzione geometrica, possa uscire qualcosa, anche solo una domanda. Questa potrebbe essere un’idea, almeno per condividere la costruzione dell’espressione, dopodiché io proporrei la task 2, perché una delle domande è la costruzione dell’espressione simbolica.

Qui [opzione B] stessa cosa, [l’insegnante] dice: “Qualcun altro...?”, [studente:] “Sì e abbiamo trovato la stessa formula”. Secondo me dire “Venite alla lavagna e dite come l’avete trovata” può essere una buona idea, per stimolare il confronto e la riflessione di tutti.

E invece qua sull’opzione C, abbiamo due espressioni diverse e chiediamo “Ma... qual è quella giusta?”. Cosa ne pensate? Però in ogni caso chiederei ai due gruppi, chi è arrivato a un’espressione, chi è arrivato all’altra, di venire alla lavagna e raccontare come l’hanno trovata. Io mi aspetto che sia più probabile che si arrivi a un aspetto del tipo A o del tipo B, cioè pochi che hanno provato a scrivere l’espressione simbolica e la maggior parte che ha costruito quella con il punto più vicino ad A.

Dopodiché effettivamente questa scena 12 si apre tranquillamente a “Passiamo alla task 2”. Qualcuno è arrivato... se nessuno arriva alle lettere... se nessuno propone un’espressione...»

64. **R3:** «Comunque da esperienze precedenti, non...»

65. **R1:** «Ma sì, poi pensando specialmente al liceo scientifico, questa idea di modellizzare ce l’hanno... Quindi è molto probabile che la trovino.»

66. **R3:** «La cosa buffa -se posso fare una battuta- è che quello che succede con gli studenti, succede con gli insegnanti, uguale! Cioè gli stessi errori, gli stessi misconcetti... Cioè gli insegnanti fanno da sperimentatori per la situazione in classe...»

67. **R1:** «Quindi adesso... dicevamo prima: la progettazione della task 2, di cosa potrebbe succedere... eventualmente anche la 3. Però quello che mi aspettavo sulla 3... mi aspetto che il liceo scientifico, se si è lavorato in un certo modo nella discussione sulla 1 e sulla 2, la 3 sia comunque più semplice. Per cui mi chiedo se non sia invece il caso di passare a una complessità maggiore; al limite anziché la 3, pensare a una versione, sempre di esplorazione, di un altro tipo; sempre a partire da un segmento con un punto variabile.»

68. **R3:** «Son tante le possibilità...»
69. **R1:** «Sì, io lo dicevo solo per... diciamo, la task 3 per come è impostata può essere un consolidamento, può essere anche una buona attività di valutazione formativa... comunque ha un senso. Se invece si vuole andare oltre nell'esplorazione, forse si potrebbe porre una questione ancora un po' più complessa.»
70. **R3:** «Sì, io direi di sì. La cosa che hai detto è assolutamente importante: se noi vogliamo fargli fare un salto a livello cognitivo, per andare verso la generalizzazione, puntare sull'introduzione di variabili e parametri... una possibilità è quella di dire: "Ma se io anziché fare questo quadratino, ne faccio tanti tutti uguali... quindi ho il primo quadrato che è fatto come il caso 1 e gli altri in fila tutti uguali..." per esempio, tutti uguali perché è un po' più semplice. Quindi tutti uguali mi da una fila di quadratini così e poi un altro quadrato. Oppure si può andare in una dimensione in più.»
71. **R1:** «Io volevo... non ti farei dire troppo, perché mi piacerebbe nella seconda parte fare un po' "simuliamo cosa potrebbe succedere". Diciamo, la mia idea era: una fa l'insegnante, le altre gli studenti, e proviamo a simulare una lezione sulla seconda parte. Perché fin qua, la task 1 secondo me l'avete sviscerata bene. Adesso vediamo anche le proposte di T3... E si potrebbe pensare invece a come lavorare nella task 2 ed eventualmente a un'evoluzione della task 3.»
72. **R3:** «La cosa importante a questo punto, secondo me, per gli insegnanti è porsi un obiettivo didattico: "Cosa voglio introdurre?" in termini di variabili e, se variabili, variabile indipendente e variabile dipendente; in termini di parametri.»
73. **R1:** «Prima di passare a questa seconda fase, vediamo quello che ha fatto T3.»
74. **R1:** «Ti volevo chiedere qualche chiarimento. Tu hai pensato a queste tre categorie: A, B, C. Quindi sono più categorie di studenti e di risposte, giusto?»
75. **T3:** «Sì, poi nelle vignette ho indicato i numeri in sequenza e anche la categoria.»
76. **R1:** «Quindi... Quello che hai scritto qua, questa parte qua: non è legata alle risposte degli studenti...?»
77. **T3:** «Sono le domande che il docente potrebbe fare. Cioè ho messo insieme... Ho scritto: "Il perimetro di un quadrato...". Spunti di ragionamento... Cioè, cosa potrebbe pensare, quali spunti secondo il docente potrebbero venir fuori e quali ragionamenti potrebbero essere portati avanti dai ragazzi.»
78. **R1:** «Okey. Quindi, sempre pensando alle categorie di risposta... loro non le hanno ancora scritte, però ci sono: quelli che hanno fatto solo l'esplorazione numerica e dicono "Diminuisce, il perimetro diminuisce rispetto a P", quelli che hanno fatto esplorazione numerica e han notato che diminuisce ma da un certo valore aumenta e quelli che hanno cercato subito un'espressione simbolica, però senza controllare i significati. Sono queste tre le categorie a cui avete pensato voi. Tu invece...?»
79. **T3:** «Avendo lavorato alla scuola media... forse più basso, forse il livello... Ma le domande che loro hanno formulato, che vengono fuori dalle vignette... appunto, le ho divise in base alle difficoltà. Cioè nel gruppo C ci sono studenti che probabilmente fanno fatica anche... Cioè, la modellizzazione è difficile alle medie; nel gruppo C... Infatti le domande che vengono fuori erano domande delle vignette fuorvianti... Nel gruppo B...»
80. **R1:** «Quindi nel gruppo C non riescono nemmeno a dare una risposta.»

81. **T3:** «Infatti le domande che si vedono nelle vignette sono fuorvianti. A e B sono quelli più interessanti. Gruppo A, disponibilità a lavorare; gruppo B, forse anche più intelligenti di quelli del gruppo A, ma con problemi a volte comportamentali, nel senso che nel momento che l'insegnante passa e si accorge che qualcuno non ha lavorato, fa i conti con questa realtà... Il discorso che facevi prima "Se un gruppo è in difficoltà, meglio dire o non dire", alle medie devi fare attenzione che a volte non dire significa abbandonarli. C'è questo tipo di problema. Si spera che in un liceo scientifico ci sia stata una scrematura...»
82. **R1:** «Però dicevamo l'altra volta che per quelli in difficoltà si poteva pensare a delle schede sulle quali impostare già il segmentino di 10, in modo da aiutarli...»
83. **T3:** «Sì, dopo l'ho scritto, di semplificare. Ci sono le frecce nei grafici che ho fatto dopo. L'insegnante pensa, nei confronti di quelli che proprio... presumibilmente gruppo C... di lavorare con dei disegni, con degli elastici...»
84. **R1:** «Sì, qua c'è anche una parte sul colorare...»
85. **T3:** «Quindi, ogni volta che si cambia la dimensione della x , che si cambia la dimensione dei quadrati, fare proprio dei disegni diversi, colorati in modo diverso. Per far vedere che comunque c'è un intervallo di variazione: varia la x , varia il perimetro... Far capire che c'è un collegamento. I ragazzini del gruppo C vanno comunque protetti, se no ce li perdiamo.»
86. **R2:** «Rispetto alla scheda precedente, volevo... intanto, questi A e B volevo... Sono tue parole o sono cose che pensi, cioè in qualche modo legate a comportamenti?»
87. **T3:** «Legato a un comportamento...»
88. **R2:** «Sì, perché allora è molto interessante il punto 1, il punto A: "Aumento il valore della x in modo regolare...", ad esempio discutere con gli allievi cosa vuol dire "Aumento il valore della x in modo regolare" porta a considerare i Δx sostanzialmente, quindi degli incrementi costanti. Che intanto non è una banalità. Cioè il fatto di pensare in questo modo. E poi vedi invece in B: intervallo di variazione... sono tra il minimo e il massimo... Allora cosa succede? Succede che facendo interagire i due gruppi, io riesco a stabilire un intervallo graduato, con i Δx costanti... e gli chiedo... in modo da considerare la cosa. Cioè, mentre il problema è: vi do i quadrati, fissando la x eccetera, e poi vado a vedere cosa succede... adesso ho un piano, che a partire dalla graduazione dell'asse... insomma della variabile x , in modo da stare tra un minimo e un massimo, vado a osservare cosa succede nelle figure e poi nel perimetro. Secondo me è una modellizzazione tutt'altro che sciocca che può venir fuori da questo tipo di...»
89. **T3:** «Ma secondo me se alle medie uno riesce a guidarli, non vengono fuori dei concetti sciocchi. Cioè, un conto è spiegare gli intervalli di variazione come si... io arrivo dal liceo scientifico... magari non tutti possono comprendere... ci puoi arrivare anche in maniera soft. Magari loro non conoscono bene gli intervalli di variazione, ma riescono a capire che esistono degli intervalli. Solo che tu devi porli in modo pratico questi... Perché nel momento in cui glielo spieghi in teoria, non ci capiscono niente.»
90. **R2:** «Però c'è un altro aspetto che secondo me è importante e che può essere rilevato a tutti i livelli d'età, e cioè il fatto che tu qui hai un aspetto formale, non so: la x , gli intervalli... e tu pensi al Δx , anche se non glielo chiami così. Però loro sostanziano in modo molto concreto, come dicevi tu. Se viene fuori la parola "regolare", vado a vedere che cosa vuol dire "regolare": allora quel "regolare" lì diventa qualcosa che non è solo formale, ma vai a sostanziare con qualcosa di concreto quello che loro hanno intuito, detto chissà come, eccetera eccetera... Però basi il tuo intervento su qualcosa che parta da loro, nel senso anche

- concettuale, nel senso cognitivo, nel fatto che stanno costruendo un modo di pensare che sta diventando matematico. Secondo me è molto importante questa cosa. Poi là c'è "x aumenta troppo", anche quello è un qualcosa espresso con un linguaggio... cioè c'è il fatto del negativo, che è il male assoluto... e allora anche quello è bello, perché provvedo in modo formale, se vuoi, introducendo il valore assoluto...»
91. **T3:** «Infatti... si può già introdurre il concetto di valore assoluto?»
92. **R2:** «Sì, però lo usi sempre a partire dalla loro osservazione e gli dai in qualche modo una base concreta su un processo di modellizzazione matematica.»
93. **T3:** «Ma io... è una mia esperienza personale... io arrivo dal liceo scientifico e vabbè poi sono laureata in scienze della terra, quindi l'esame di matematica, l'esame di fisica c'è... comunque abbiamo fatto un percorso diverso... però io ho sempre avuto la passione di insegnare, perché già al liceo davo le mie ripetizioni ai compagni... Però posso dire che nel momento in cui ho iniziato a insegnare alle medie e quindi ho iniziato a leggere molti libri, molti testi, io ho compreso molti concetti matematici che avevo imparato a memoria... io avevo una buona memoria, ho sempre studiato molto velocemente... La comprensione degli intervalli di variazione... io li ho capiti dopo, posso dire che li ho capiti nel momento in cui ho dovuto farmi delle domande, inventarmi delle lezioni. Cioè, io lo trovo bellissimo questo. Tante volte riprendo dei libri dell'università [...], a volte li rileggo e adesso li capisco, forse all'epoca non avevo capito tutto. Quindi la modellizzazione parte dalla realtà, tanti concetti alle medie li puoi passare.»
94. **R1:** «Più che altro io non mi aspetto assolutamente che esca che se x aumenta in modo regolare, il perimetro cresca in modo regolare... se non costruendo la tabella.»
95. **R2:** «Può darsi che venga fuori anche...»
96. **T3:** «Ma sicuramente dopo lo dico che si costruiscono delle tabelle, però può venir fuori... magari se lo dimenticano, però sono dei concetti base...»
97. **R2:** «Può venire fuori in tanti modi, anche in modo più percettivo, non so, il fatto che muovendo questa cosa... Cioè, si parla adesso del senso del numero, del senso del grafico, del senso del simbolo... qui c'è il senso di un altro processo, che è il senso di matematizzare, cioè di trasferire in un linguaggio preciso, rigoroso, matematico quello che sono delle intuizioni, delle percezioni, dei modi di vedere e di pensare che sono dentro di noi quando vedo qualcosa... [...]. Il crescere in modo regolare è qualcosa di importante nella...»
98. **T3:** «Che comunque parte dall'esperienza...»
99. **R2:** «Che fa parte di una percezione, certamente di un modo di lavorare con le cose in modo razionale...»
100. **T3:** «Io ricordo quando studiavamo, noi biologi, il decadimento radioattivo: è una curva esponenziale. Che comunque tu disegni, non ti danno una funzione e poi fai il disegno; prendi i dati e poi li metti insieme e viene fuori una curva. Noi facevamo al contrario: partiamo dall'esperienza e poi...»
101. **R2:** «Questa cosa del fatto di non separare la parte astratta, formale dalla parte più intuitiva, concreta... il problema è di intrecciarle il più possibile.»
102. **T3:** «Io conoscevo tutti i teoremi, ma mi sembravano cose astratte...»
103. **R2:** «Ci sono due vie: non è sempre dal concreto al formale, a volte il formale... faccio una trasformazione... ho una formula, faccio una trasformazione formale e "Cosa vuol dire

- questa formula?” ... e allora vado a vedere nel concreto quello che significava. Cioè dipende dai casi, dalle situazioni questa crescita doppia.»
104. **R1:** «Poi appunto c'è questa parte su cosa è utile per supportare gli studenti in difficoltà. Poi hai fatto questo diagramma...»
105. **T3:** «Ne ho fatti due.»
106. **R1:** «Adesso non so bene da dove si parte...»
107. **T3:** «Allora, il docente dovrebbe verificare che i dati presenti nelle tabelle siano stati ricercati personalmente e verificati anche attraverso il tablet, dopo. In caso affermativo, se questo è successo... può anche succedere che sia il gruppo C a lavorare bene... [l'insegnante] dovrebbe verificare che tutti abbiano compreso l'esistenza di un intervallo di variazione del perimetro, che comunque se vario x varia il perimetro. Potrebbe sollecitarli a usare i numeri decimali o le frazioni per far vedere loro che l'intervallo di variazione non cambia, quindi non soltanto i numeri interi come dicevo l'altra volta, ma spingerli anche a fare dei calcoli... Invece che mettere 1, mettiamo 1.2, 1.3,... Il caso invece... l'altro: se non tutti sono riusciti a realizzare il compito richiesto, si potrebbero realizzare dei modellini, di quadrati per esempio costruiti con elastici, o con delle cannuce, o comunque qualcosa di concreto, tangibile. Ogni modellino di quadrato realizzato con colori diversi dovrebbe avere accanto il valore del perimetro complessivo. E poi una tabella essenziale con numeri interi dovrebbe completare il lavoro per evidenziare gli intervalli di variabilità. L'ultima possibilità per chi non ha proprio capito: smontiamo di nuovo tutto e costruiamo i quadrati... costruiti, non disegnati. E poi in realtà nelle vignette ho stravolto il lavoro dell'altra volta...»
108. **R1:** «Sì, sì, infatti ho pensato che gli mettevi...»
109. **T3:** «Sì, in quello di oggi ho messo tutto insieme, ho messo i numeri e le lettere. E forse... faccio autocritica nel senso che il mio modo di lavorare ha dei preconcetti, nel senso che ho detto ad esempio... 1C: io presumo, pensando alla mia fascia più bassa, abbiamo già disegnato il quadrato, se io propongo un'attività così, per evitare di farla trovano una scusa... E poi diciamo che con la lettera A e con la lettera B ci sono interventi un pochino più motivati, quindi c'è il gruppo 3B che dice “Io faccio i gruppi”.»
110. **R1:** «Ah dei gruppi nel senso che vuole creare...»
111. **T3:** «Invece 2A, misuriamo e facciamo delle... Cioè per evidenziare il modo diverso di lavorare. Poi c'è anche quello che non si pronuncia, che pensa “Perimetro?”. Noi facciamo anche i conti con questa realtà, magari nei casi di dislessia grave.»
112. **R1:** «Poi nella scena 2, è rimasto “Li farei disegnare...” e poi ci sono gli interventi. Quindi, di nuovo...»
113. **T3:** «1A: “Ma questo esercizio lo abbiamo già svolto quando ha parlato di equazione”. Ci sono dei problemi sul libro che si risolvono con l'equazione... ricorda un po' questi problemi. E quindi il gruppo 1A magari se lo ricorda. 2A: “Ma in questo possiamo variare x quanto vogliamo”, quindi nell'esercizio fatto l'altra volta dovevi trovare la x , qui invece la devi variare.»
114. **R1:** «Anche se... tu qua stai pensando già di porre la questione sulla costruzione della...»
115. **T3:** «...sì, nel primo compito.»
116. **R1:** «No, perché in teoria nel primo compito si chiede solo di determinare come varia il perimetro al variare del punto, cioè di x non si parla ancora. Quindi per te viene spontaneamente ai ragazzi...»

117. **T3:** «Io avrei posto... nel primo compito avrei fatto il disegno... avrei comunque iniziato a dir loro, cioè li avrei guidati, comunque avrei fatto capire che abbiamo questi due quadrati e ci dobbiamo spostare con il punto P. Quindi a qualcuno potrebbe venire in mente questo tipo di problema che abbiamo già fatto, perché si trova nei libri di terza media; ad altri può pian piano venire in mente che in realtà non dobbiamo trovare un valore di x qua, non dobbiamo inventare un valore di x , ma dobbiamo spostare un punto. Quindi l'intervento 2A risponde all'intervento 1A: dice "No, qui non devi trovare $x = 2$, devi spostare il punto P, quindi non hai un valore..."»
118. **R1:** «Anche se qui 2A dovrebbe capire tutto l'implicito che c'è nell'1A, cioè il fatto che si considera la variabile... secondo me non è così immediato. Dipende però dalla domanda che poni, qua non c'è scritta quindi non so da cosa parte la discussione. Qual è la domanda che poni? Task 1, task 2?»
119. **T3:** «Allora, la domanda che pongo è che potremmo spostare questo punto P.»
120. **R1:** «Nella task 1 sarebbe: "Come varia il perimetro al variare di P"»
121. **T3:** «Quindi, partiamo dal fatto che la lunghezza è finita e che la nostra x , cioè il nostro punto P è ballerino. Quindi si crea uno spazio che sarà x ...»
122. **R1:** «No, io mi chiedo che domanda poni alla classe, nel senso che perché lo studente lo veda come un problema sulle equazioni, a monte ci deve essere una domanda che spinge in quella direzione. Se invece la domanda è "Come varia il perimetro al variare del punto P", tu ti aspetti che pensino all'equazione?»
123. **T3:** «Io mi aspetto di fare un disegno alla lavagna. Io non posso dare il problema e loro si fanno il disegno: partiamo dal fatto che io leggo loro il problema e facciamo il disegno alla lavagna. Quindi diciamo che la mia lavagna non dovrebbe essere bianca, dovrebbe avere il disegno. E questo disegno comunque ricorda un problema con le equazioni [...]. E quindi 1A dice "Ma l'abbiamo già fatto", però io dico "No, qui non vi chiedo di trovare quanto misura la x ", quindi dico che P si deve muovere. Quindi è vero che ricorda un problema che abbiamo già fatto e se lo ricorderebbe il gruppo A, ma anziché trovare $x = 2$, chiedo di dire che c'è una variazione di questa x . Se ne accorge un'altra parte del gruppo A. E poi ci sono gli altri interventi: "Se mettiamo solo numeri interi è più semplice", secondo me come concetto probabilmente lo penserebbe il gruppo B. Il gruppo C probabilmente penserebbe solo a numeri interi, al gruppo C non verrebbe neanche in mente di usare... però forse è un mio preconcetto. Pensando ai miei allievi in difficoltà, a questi non verrebbe neanche in mente di usare il tablet, agli altri forse sì...»
124. **R1:** «Okey, quindi [scena 3] "Provate a disegnare i quadrati e una tabella"»
125. **T3:** «Sì, io li metto a lavorare a gruppi di nuovo, diciamo che gli interventi più furbi, più evoluti sono del gruppo A: "Il perimetro complessivo varia se x aumenta"»
126. **R1:** «Quindi parlano di x ...»
127. **T3:** «Sì, io li ho...»
128. **R1:** «Però tu, nella lezione, suggeriresti di chiamare x AP?»
129. **T3:** «Io sì, farei il disegno alla lavagna, è una premessa.»
130. **R1:** «Perché diciamo in teoria nell'impostazione dell'attività non so se è il caso di introdurre fin dall'inizio un'incognita esplicitamente.»
131. **T3:** «Io questa attività intanto la farei in terza e la farei dopo aver parlato delle equazioni comunque.»

132. **R1:** «No, però, ad esempio pensando alla loro impostazione, nella loro impostazione a un gruppo di studenti viene in mente di introdurre la x , però non iniziano già suggerendo di chiamare x la lunghezza del segmento AP.»
133. **T3:** «Io penso di sì, perché ad esempio in un altro problema, ad esempio nel libro di algebra, si incomincia con il calcolo letterale. Io sento la necessità di spiegare ai miei allievi perché si usano le lettere, per esempio. È una necessità molto forte che cominciamo ad avere in seconda quando parliamo delle proporzioni; perché loro iniziano: “a che cosa servono queste cose?”»
134. **R1:** «Sì, ma su questo siamo d'accordo.»
135. **T3:** «E quindi mi sento portata... Anche tanti problemini semplici che ci sono... li spingo io affinché usino le lettere. La lettera ha un significato, la lettera ti dice che quel numero può cambiare. E quindi io sì, la porrei come premessa. Anzi io farei il disegno alla lavagna...»
136. **R1:** «Siete d'accordo? Cosa ne pensate?»
137. **T1:** «Allora, posto che è evidente che nessuno dei nostri studenti ha avuto te come insegnante alle medie, perché invece noi facciamo tanta fatica in prima a farli proprio passare dall'esplorazione numerica pura e semplice a un'esplorazione in cui si usino le lettere; ma a qualunque livello, partendo anche da dei problemini semplici, che so, considera la somma di due numeri dispari consecutivi: loro fanno $3 + 5$, $5 + 7$, ma a nessuno viene poi spontaneamente di dire “prendiamo $2n + 1$ e $2n + 3$ ”. Nessuno arriva a questo.»
138. **T3:** «Nessuno, però io... con quali risultati non lo so... però mi pongo... Ad esempio un'altra cosa che succede in terza media, quando devono fare le espressioni, i numeri te li scrivono ancora leggibili, le lettere sono un di più. [...]»
139. **T1:** «Però secondo me sarebbe più utile in un problema come questo lasciarli liberi di fare qualche tentativo di esplorazione numerica per vedere come gira l'esercizio, per farsi un'idea, per fare qualche congettura...»
140. **T3:** «Tutto si può fare, però anche qui, penso per un mio preconetto, io ho l'impressione che alle medie forse quando ne hai due in una classe che lavorano se li lasci liberi, sei fortunato; poi tutti gli altri in qualche modo vanno guidati, se vengono lasciati liberi si perdono...»
141. **T1:** «Quindi secondo te dandoglielo senza altre indicazioni non verrebbe in mente di dire: “Se quel lato è lungo 10, io il punto P lo posso prendere qui così AP è lungo 1, oppure 2,...»
142. **T3:** «No. Secondo me...»
143. **T1:** «Secondo te non li fanno dei tentativi?»
144. **T3:** «Io li sento... Io sento proprio la necessità di guidare... [...]»
145. **R1:** «Però a volte se si fissano troppo i confini, si fa in modo che i ragazzi si muovano tutti su un unico sentiero stretto e chi riesce, bene; gli altri sono imprigionati, non riescono ad esprimere... Almeno, io lascerei all'inizio un po' di libertà di esplorazione, libertà di scegliere con quale strumento, con quale linguaggio comunicare le osservazioni. Non partirei dal dire “prendiamo x questo segmento”, mi sembra anche nella scuola superiore un po' troppo non spontaneo per gli studenti, tant'è che l'idea di questa attività non è quella di partire dal “chiamiamo x ...”, è un obiettivo finale quello di vedere la formalizzazione simbolica come una rappresentazione delle osservazioni fatte toccando con mano, anche nell'esplorazione numerica. Quindi non sarei per chiamare x AP prima.»

146. **R3:** «Ma anche perché la prima esplorazione potrebbe avvenire a puro livello qualitativo, senza niente di variabili, di grafici, di numeri,... potrebbe arrivare solo a livello visivo il percepire il cambiamento sull'immagine che cambia, con i quadratini statici come dicevi tu o con la rappresentazione...»
147. **R1:** «Se pensiamo al senso dell'algebra, al significato,... deve essere un obiettivo, deve servire il potere dell'uso dello strumento algebrico con vari... per cui puoi scegliere un problema dove si riesce a risolvere utilizzando... oppure come in questo caso l'obiettivo è arrivare a una scrittura simbolica e poi quello tramite un software ti serve a vedere qual è il grafico di una funzione, a vedere che l'ipotesi iniziale “qui diminuisce, qui aumenta” è verificata oppure no. La vedo sempre come una cosa che si deve conquistare. Sono dell'idea che se all'inizio si impone...»
148. **T3:** «Io non l'ho pensato come un imporre che questa è x ; ma nei problemi che abbiamo fatto con le equazioni lo chiamavamo x e x aveva un valore, in questo caso la tua x non ha un valore [...]. Cioè avere un anello di congiunzione con i problemi fatti con le equazioni... far capire che questa x può variare [...].»
149. **R1:** «Ma secondo me è meglio conquistarlo dall'esplorazione, cioè dall'esplorazione io mi rendo conto che ad AP posso associare una pluralità di valori numerici e allora qual è il modo migliore per generalizzare? Potrei chiamarlo anche AP... È questa la forza dell'introduzione poi del simbolo, almeno io la vedo così.»
150. **R3:** «Sì, sì, sono d'accordo, sono per rafforzare... la x è una conquista.»
151. **R1:** «Anche storicamente tutti questi problemi risolvibili... i problemi dell'abaco... si verbalizzava addirittura. Dopodiché si arriva al senso del numero, al simbolismo per sintetizzare... Non è così spontaneo...»
152. **R2:** «Credo che si possa anche drammatizzare un pochino la cosa a livello di scuola media o anche a livello di superiori forse. Cioè dire: “Adesso vediamo... vi insegno uno strumento incredibile: tutte queste robe che avete visto, che sono state un mucchio di calcoli, di tabelle, eccetera eccetera... diventano una lettera”. Guarda che è una roba magica questa! E secondo me fare un po' di drammatizzazione con gli studenti fa rimanere impresso queste cose qua. “E adesso passiamo a uno strumento potente, che è stato inventato [...] nei tempi passati, ma è usato ancora oggi”. E allora citare Russell che diceva che con questo strumento in algebra si possono fare... anzi non era Russell, era un altro... si possono fare i conti, lui diceva, “a vapore”: si possono fare i conti molto più in fretta. E quindi sdrammatizzare [...].»
153. **R1:** «E poi c'è la quarta scena, nuova.»
154. **T3:** «E questi riescono a capire che c è un'oscillazione nel perimetro, se cambio il mio punto P , ci si avvicina al 40. E quindi ci si domanda: “Quando sarà il perimetro più grande? Quando sarà il perimetro più piccolo?”. Quelli del gruppo C non osano probabilmente, perché temono di dire delle sciocchezze; infatti c è la nuvoletta. Il gruppo A, il gruppo B invece osa di più [...]. E poi ho questo gruppetto C che... che probabilmente fa delle considerazioni logiche e che probabilmente si avvicina al numero 40, ma “sentiamo cosa dicono gli altri...”»
155. **R1:** «Io adesso pensavo che, non è il caso di questo problema, però in altri problemi si può anche mettere in luce che è un intervallo in cui il massimo e il minimo sono assunti in corrispondenza di numeri interi e quindi di fatto se esplorano utilizzando numeri interi trovano sia il minimo che il massimo. Potrebbero esserci tanti altri problemi in cui o il minimo, o il massimo, o entrambi non vengono assunti in corrispondenza di valori interi, per cui potrebbe essere anche interessante un'esplorazione di questo tipo, se si limitano agli

interi trovano un certo minimo, qualcun altro potrebbe rendersi conto che il minimo invece non è in corrispondenza di un valore intero. E allora lì, pensavo, l'uso della rappresentazione grafica e dell'espressione simbolica aiuta molto di più. Nel nostro caso no, perché se non sbaglio $x = 5$ è il minimo, quindi alla fine semplicemente con l'esplorazione, associando alle lunghezze di AP dei numeri naturali... Però potrebbe essere interessante nel caso di tre invece...

E poi qui hai messo: [insegnante] “Dopo che hanno fatto tutto il lavoro con le tabelle e hanno ragionato...”»

156. **T3:** «Lo pensa, dice “dopo che hanno fatto tutto il lavoro con le tabelle e hanno ragionato...” io penso sia importante usarli dopo i tablet, perché è vero che è veloce GeoGebra, però se lo sperimentano provano a calcolare... “adesso usiamo i tablet”, però il suo pensiero dice abbiamo fatto un lavoro a monte... E poi abbiamo detto più o meno le stesse cose, i ragazzini: “Aumentando il valore di x , il perimetro diminuisce progressivamente”, il legame con la tabella può evidenziare il perimetro più grande e quello più piccolo, quindi magari qualcuno si accorge che c'è un numero più grande e un numero più piccolo. 3C dice: “Anche noi abbiamo colorato il valore maggiore e il valore minore”, quindi il gruppo C ha bisogno di vederle le cose, perché i numeri non gli dicono niente, scorrono, vedono che c'è un numero più grande e un numero più piccolo e si fermano lì. E invece l'intervento 4A: “Proviamo anche con i decimali, quindi c'è un'oscillazione sempre di questo perimetro”. Sono più curiosi gli altri, B lo comprendono, ma magari non hanno la voglia, non hanno la pazienza di star lì a fare tentativi; però comunque la matematica implica la pazienza...»
157. **R1:** «Altra domanda: qua li hai messi a lavorare a gruppi, questi interventi che hai segnato in queste vignette li immagini come interventi che fanno all'interno dei gruppi o tutti insieme?»
158. **T3:** «Tutti insieme, io me li sono immaginata tutti insieme.»
159. **R1:** «Però allora il tuo ordinamento degli interventi non l'avevi ancora pensato... devi valutarlo. Perché qua [nelle vignette di T3], l'insegnante ascolta e dice solo cosa fare. E come invece coordinare i vari interventi? Ad esempio, loro avevano pensato a girare tra i banchi, a vedere cosa dicono i vari gruppi...»
160. **T3:** «Questo sicuramente. Non l'ho scritto, però l'insegnante gira tra i banchi e osserva. Le vignette evidenziano che cosa si sta facendo...»
161. **R1:** «Io pensavo, visto che l'obiettivo di questo lavoro è quello di andare in classe e fare l'attività in classe, durante la discussione sicuramente la scelta di lasciarli parlare e intervenire uno sopra l'altro diventa un po' complesso, per cui mi chiedevo se hai pensato come coordinare questo...»
162. **T3:** «Ho pensato di ricordarlo poi al vecchio [vecchie slides], ho fatto un po' velocemente, nei due grafici finali ci sono i pensieri dell'insegnante, nel senso che se nei vari interventi hanno visto che c'è questa oscillazione allora obiettivo raggiunto, se nei vari interventi emerge che ci sono delle difficoltà, come ho detto prima provare a disegnarli, a colorarli, a farli,... Cioè i pensieri e le azioni dell'insegnante li ho messi poi nell'allegato word.»
163. **R1:** «E invece gli interventi nel corso della discussione, tipo se uno studente dice una cosa, se ne dice un'altra...?»
164. **T3:** «No, questo non l'ho fatto... Ti ho fatto un documento word in cui ho fatto un sunto delle considerazioni che l'insegnante potrebbe fare, con chi non ha capito farei questo, con

chi ha compreso farei altro; però sicuramente cercherei di lavorare tutti insieme, di iniziare insieme e di finire insieme.»

165. **R1:** «Io avevo pensato una simulazione [...]. Farli riflettere in questa prospettiva oppure esplorare qualcosa di diverso, nel senso il perimetro, l'area... ci possiamo pensare. Quindi orientare parte di questo intervento a un'evoluzione. Per GeoGebra: io ieri ho provato a costruire, anche io mi stavo chiedendo...»

166. **R2:** «Si potrebbe introdurre uno slider... allora, uno slider che controlla il punto P: lo slider ti chiede da dove va a dove va. Quindi prendo l'ascissa di A e l'ascissa di E e metto che va da 0 a 10. Non solo, ma gli chiedo anche il passo: quanto è il passo? Allora posso mettere 0.1 per esempio, o 0.2, non importa. E allora, cosa succede? Succede che facendo variare x, la prima cosa che vedo è questa cosa dinamica delle due... Non solo ma una volta che ho quello, avendo fatto quella cosa che ha detto R3 [evoluzione del problema su 3 quadrati], che può essere il perimetro, può essere l'area che dipende da questo P, allora cosa succede? Che io posso utilizzare un altro strumento, che è la raccolta dati e quindi raccogliere i dati: sulla colonna A mettere i dati dell'ascissa di P e sulla colonna B mettere per esempio il perimetro. Non solo, una volta che ho raccolto questi dati e li ho discreti, perché lui saltella, no? [il punto P si muove in maniera discreta su AB, con passi determinati dallo slider delta] C'è il Δ dello slider che non è continuo. Allora ho una serie di dati... Però cliccando in alto sugli spazi A e B, allora se clicchi sul tasto destro, viene fuori "crea", oppure "lista di punti". Ecco, "lista di punti" e ti viene fuori una tabella. È già qualcosa che spinge... che, instrumentando, spinge verso un approccio funzionale e poi posso fare... Allora, posso in qualche modo pensare di dire: "Ah adesso...", cioè via via giocare a introdurre parametri, diremmo noi matematici... Allora il primo gioco può essere: "guarda c'è AB che avevo messo 10, mettiamo un altro slider per controllare la lunghezza di AB" e allora posso variare questa cosa qui. Un'altra variazione può essere, invece di prendere... mi metto i due quadrati in modo che non è la somma dei loro lati che fa AB, ma è -che so- uno più il doppio dell'altro. Cioè le variazioni possono essere... e loro possono divertirsi. E fare sempre questo percorso in cui lo slider mi governa il passaggio alla tabella e la tabella mi governa il passaggio al grafico; e poi decidere se fare la spezzata aperta o il grafico per punti... Comunque è un modo in cui introduco... un modo abbastanza... con l'esperienza, con le "sensate esperienze"... le dimostrazioni matematiche. Quindi, pensate anche a questo aspetto che ricordava la nostra collega prima: queste cose favoriscono quello che diceva proprio Galileo, fate delle sensate esperienze per giungere alle necessarie dimostrazioni. E io credo che qui ci sia abbastanza questo spirito se si avvicinano le cose in questo modo; naturalmente si pensi che il Metodo della Variazione consiste, interpretato, proprio nel metodo scientifico, nel quale si considerano delle variabili che si ritengono importanti e si studia cosa succede facendole variare; alcune non servono a niente, mentre altre sono significative. Secondo me è un metodo che parte da... addirittura dalla scuola elementare, in modi opportuni... la strumentazione usata dalla metodologia francese permette di rendere accessibili agli allievi delle cose che dette invece a parole, fatte con carta e matita forse risulterebbero troppo astratte... Qui invece hai questa roba che viaggia... che ti fa questo lavoro... Questi tre quadri [su GeoGebra] che hai fatto vedere sono fondamentali: cioè il quadro grafico [rappresentazione geometrica], il quadro della tabella e il quadro grafico già astratto rispetto a quello che è la figura. Secondo me è qualcosa che dovrebbe guidare tutta quanta l'esperienza.»

167. **R1:** «Sì, poi io pensavo... pensando alla discussione poi in classe, far riflettere i ragazzi sulle conversioni da un registro ad un altro è... e fare sì che tutti abbiano questo controllo, perché qualcuno ce l'avrà abbastanza spontaneo, altri potrebbero benissimo bloccarsi in alcuni dei passaggi. Potrebbe essere uno degli obiettivi del lavoro su GeoGebra. Poi

- effettivamente a quello non ci avevo pensato: rendere AB un parametro, quindi anche solo nella domanda “qual è il minimo, qual è il massimo?”, vedere come variano il minimo e il massimo...»
168. **R2:** «E poi ad esempio variare la figura, ad esempio invece del quadrato prendere un triangolo equilatero... e confronto poi, guardo i grafici... sarà lo stesso? Sarà diverso? Cioè è tutto quello che, se ci pensi, sono le “sensate esperienze”.»
169. **R1:** «Per cui come prima parte di questo incontro io sarei ancora proprio sul farvi riflettere su questo. Possiamo darci un momento in cui si lavora a gruppi e dopo ne discutiamo. Quindi, su questioni del tipo: “Come gestire quest’aspetto di uso di GeoGebra nell’esplorazione della Task 2?”, eventualmente “Come da qui spingere a esplorazioni dei ragazzi nell’ottica della Task 3?”, cioè far variare qualcosa: “Cosa succede se...?”. Potremmo pensare a questo, in modo che al termine della lezione di fatto forse si può fare una prima lezione esplorativa senza GeoGebra e allora a questo punto, pensando a voi [T1, T2 e T4] perché per le medie si può pensare anche ad altre cose, forse in un’oretta si potrebbe affrontare e poi invece una lezione un po’ più complessa e approfondita con l’uso del software. Si potrebbe vedere anche in quell’ottica, per stare all’interno di quello che avete pensato voi. In modo che la terza richiesta noi sia posta a parte, ma sia posta nel momento in cui si lavora già sulla formalizzazione degli aspetti già trattati lavorando sulla Task 1. È un’idea, poi... non è detto che sia la migliore. Quindi sarei per lasciarvi riflettere un pochino.»
170. **T2:** «[Per la costruzione geometrica in GeoGebra] Diamo noi proprio gli step della costruzione o diamo già il file costruito e lo facciamo esplorare?»
171. **R1:** «Per altre attività, come Galileo o filling the bottle, effettivamente lì se sono già costruite è molto meno complesso...»
172. **T1:** «L’unica cosa è che dovrebbero avere il testo e già la funzione.»
173. **R2:** «No, non sono d’accordo, la funzione non è qualcosa che hai in testa perché te la da... come usciva Minerva dalla testa di Giove. La funzione non ce l’hai ancora, però vedo quella cosa lì e pian piano mi accorgo che c’è un legame tra queste cose che sono rappresentate in queste tre cose e via via costruisco... Ma il fatto che tu definisca in modo astratto che cos’è una funzione non dà niente agli allievi, tranne ad alcuni...»
174. **T1:** «No però la colonna B come viene costruita?»
175. **R2:** «La colonna B ti esce fuori in automatico facendo variare il punto.»
176. **R1:** «Io qui ho trovato B facendo tutti i casi, quindi non c’è bisogno di... Altrimenti, come diceva R3, mettendo tutte le lettere, legge... tu puoi mettere la somma AP + PB + eccetera... e te le misura automaticamente...»
177. **T4:** «Praticamente io ho costruito i due quadrati e poi ho costruito un poligono congiungendo i vertici...»
178. **R3:** «Allora, ci sono due cose da tenere presente da un punto di vista didattico di programmazione a priori, di analisi a priori: che se io faccio fare le misure dei singoli segmenti ottengo una cosa, se io faccio calcolare la misura del perimetro della figura unita è un’altra; cioè, mentre la somma dei singoli segmenti mi fa poi avere la possibilità di riflettere sul fatto che quel segmento là una volta è questo meno questo [AP - PB], l’altra volta li scambiano [PB - AP], cioè viene fuori il modulo se lo faccio in questa maniera; se prendo il pacchetto tutto insieme, so già il perimetro ma non ho la possibilità di riflettere sull’espressione... Io non dico che è meglio scegliere uno o scegliere l’altro, però diciamo

che da un punto di vista didattico favorisco una certa indagine oppure un'altra, se scelgo l'uno o scelgo l'altro. Questa è la prima osservazione che volevo fare. La seconda osservazione che volevo fare è questa: è proprio da un punto di vista epistemologico che noi facciamo una scelta come insegnanti se gli diamo la funzione, come dicevamo, e gli dico "Costruisci la tabella sulla base della funzione", e questa è una cosa ed è matematica epistemologicamente. Invece se ci avviciniamo a quella valenza importante delle scienze sperimentali, allora faccio il "cattura": catturo la misura e quindi ho sempre una funzione: due colonne, un grafico, eccetera, ma costruite in maniera completamente diversa dal punto di vista epistemologico perché in questo secondo modo sono vicino alle scienze sperimentali, cioè catturo delle misure e, al variare della misura di una grandezza misurabile che è la variabile indipendente, ho risultato della seconda variabile, cioè la variabile dipendente. Quindi, mi sto muovendo su due piani e, come diceva R2 prima, quello matematico in cui già metto la funzione ____»

179. **T2:** «La nostra domanda era appunto sull'utilizzo di GeoGebra, perché ad esempio siamo anche riusciti a fare una rappresentazione per punti mettendo un punto con la traccia di coordinate AP e il perimetro ricostruito; però gli studenti non sono in grado di fare questa cosa autonomamente, quindi noi dovremmo dare l'input almeno dell'utilizzo di GeoGebra.»
180. **R3:** «Sì, allora, questo è il processo di instrumentation che si diceva, in cui noi come docenti facciamo da mediatori rispetto al software per costruire una determinata funzione e gli diamo degli schemi d'uso.»
181. **T2:** «Quindi dovremmo... fare una scheda con scritto costruisci questo...»
182. **R3:** «O farlo insieme, perché farlo insieme mentre si proietta e loro lo fanno...»
183. **T2:** «...forse è meglio.»
184. **R1:** «Ecco, questa non l'ho provata a fare, però voi avete provato. Cioè, se io dico...»
185. **T2:** «No, l'ho fatto in un modo: dovevo prendere due punti, altrimenti mi veniva o solo la funzione crescente o solo la funzione decrescente; poi evidentemente prendendo i segmenti non con gli estremi... in uno dei due modi viene la porzione di funzione in modulo...»
186. **R1:** «Sì, voi avete pensato alla cosa più semplice per gli studenti, cioè di fare il... tanto prima si suggerisce di costruire la tabella, dopodiché qui semplicemente gli metto i valori e si rendono conto che c'è questo tipo di andamento. Poi dal lì ad arrivare alla funzione...»
187. **T1:** «No, pensavo... non avevo capito che nella colonna B i dati erano messi; pensavo fossero stati ricavati e allora per farli ricavare è chiaro che devi dare la soluzione di come ricavarli.»
188. **R1:** «Io invece, effettivamente... rendere AP un parametro è carina come cosa, forse non l'ultimo step del lavoro con GeoGebra, però...»
189. **R2:** «Sì, noi pensavamo che -se posso permettermi- siamo condizionati da una tradizione didattica che... dovuta al fatto che questa tradizione didattica fa riferimento a una didattica pre-tecnologica. Allora capire che cos'è un parametro... io l'ho fatto, con gli insegnanti, chiedere da un punto di vista formale, la differenza tra variabili e parametri. Ed è la stessa cosa che fai se conosci la differenza informatica tra variabile globale e variabile locale: la variabile globale è il parametro, la variabile locale è la variabile. Allora cosa succedeva? Succedeva che i parametri venivano introdotti... erano la massima a cui si poteva giungere nella didattica tradizionale, tanto è vero che l'esame di maturità che ho ancora fatto io consisteva nella discussione di un problema in cui avevi un'equazione di secondo grado

con un parametro e tu dovevi discutere le radici reali, la realtà delle radici, ... al variare del parametro. [...]. E il parametro in effetti non era banalissimo da comprendere... Ma con questi strumenti qui, con l'strumentazione, è qualcosa che si può introdurre anche alla scuola media in modo opportuno, non è che bisogna aspettare gli ultimi anni delle superiori... E quindi questa cosa va tenuta presente perché è uno strumento potentissimo di... Se tu hai uno slider, quello è il parametro. Se invece parto dalla x sull'asse che si muove, quella è la variabile. Ma non ho bisogno di una definizione astratta, è nella concretezza delle cose. Quindi questo fa pensare, fa riflettere su come il pensare matematicamente cambi didatticamente rispetto a... [...]. A mano non sarebbe possibile. Rendo accessibili i concetti che matematicamente sono complessi. E questo è da tenere molto presente.

E il Metodo della Variazione porta con sé questo fatto che, siccome ho queste possibilità tecnologiche, posso utilizzare tutti i suoi aspetti cognitivi, pedagogici, eccetera eccetera... in modo molto concreto, dove con concreto intendo che abbia le opportune strumentazioni.»

[...]

190. **R1:** «Nella sua classe [di T4] nemmeno arrivo a un'espressione simbolica a partire dal disegno.»
191. **R2:** «Bè, non è facile...»
192. **R1:** «No, per cui andrei a riflettere anche con queste classi a riflettere sulle differenze finite, cioè far aggiungere nella tabella la colonna e far vedere... Sì?»
193. **R2:** «Diciamo, come cassetta degli attrezzi delle funzioni analitiche, tipo la retta, ce l'hanno loro?»
194. **T4:** «Hanno visto la funzione lineare, ma proprio $y = ax + b...$ »
195. **R2:** «Sì, disegno il grafico per punti. Se tu introduci i famosi slider, è un approccio molto concreto, cioè il fatto che se io muovo quello slider, comincio a vedere il punto P che si muove sull'asse x e percorre il segmento; e se muovo lo slider, comincio a dire -come facevamo prima-: “Il punto copia lo slider: va da 0 a 10 e lì c'è x che si muove da 0 a 10 mentre io faccio variare proprio meccanicamente con il mouse. Questo fin lì lo capisce un bambino. Allora adesso comincio a dire: “Cambio il passo dello slider” e gli faccio dire [agli studenti] cosa succederà: se ogni volta che lo slider si muove di 1, il punto fa un passo ed è il doppio di quello di prima. Questo lo posso far vedere, che viene da 0 a 20 se prima mi diventava da 0 a 10. Come la posso rappresentare questa cosa? Come posso tradurla? Allora, posso dire: “Guarda, questo prima era lo slider”, lo slider ce l'ho lì sotto sull'asse x , “e adesso l'altro signore che cammina sull'asse $y...$ ”, gli dico di camminare in quel modo lì. Ogni volta che il signore sull'asse x fa un passo lungo 1, l'altro fa un passo lungo 2, o fa due passi... E allora io rappresento sull'asse delle y questa cosa; questo mi dà una retta. Allora questa retta qui mi esprime il fatto che il signore sull'asse x fa un passo, segue lo slider, e l'altro [sull'asse y] ne fa due. E poi posso vedere se ne fa tre, se ne fa 4, se ne fa $\frac{1}{2}$, se ne fa $\frac{1}{3}...$ e quindi incomincio a vedere questa retta che si inclina in questo modo. Primo blocco di roba. Secondo blocco di roba: adesso introduco... in questo modo sono andato dal camminatore-slider all'altro camminatore e ho visto delle cose che succedono sull'inclinazione della retta. Adesso introduco una variazione sulla formula. Quelle robe là le rappresentavo come $y = kx$, dove k che cos'era? Era il passo doppio, il passo triplo, o il passo a metà del signore sull'asse y . Allora, cosa succede adesso? Introduco una variazione: $y = 3x + 2$, per esempio. Cosa succede? Guardo cosa mi fa il computer se io gli butto dentro la formula. Tac! Quella roba... mi accorgo che la spinge in alto, di quanto? Di 2. Quindi, cosa succede? Succede che la storia del signore che si muoveva su $y...$ lui fa un passo di 2 all'inizio. Ma se il signor y decide di fare un salto iniziale non di 2, ma di 3, di 4, di 5, cosa

succede? Succede che invece di avere $y = 2x + 2$, avrò $y = 2x + 3$, $+4$,... Allora adesso io posso fare... come dire... tutte queste storie le posso racchiudere in un'unica formula e utilizzare due slider: quello per la a e quello per la b . E posso muovere a mio piacimento il signor y , e rappresentare tutte le possibili storie del signor y che si muove in questo modo. Credo che questo sia accessibile. E questo introduce questo modo di pensare funzionale, cioè la co-variazione spunta lì, attraverso questo meccanismo. E questo è il primo blocco della faccenda. Poi può darsi che tu faccia $y = x^2$. Allora, la stessa storia: siamo abituati a questa cosa del mettere dentro lo slider con la variabile e sono abituato a un doppio cammino: dallo slider, che poi diventa una lettera, è già una lettera, nel modo in cui lo introduco mi produce una formula, che era stata $y = ax$, $y = ax + b$; adesso parto di nuovo da $y = x^2$, adesso io ci metto $y = ax^2$ e guardo cosa succede: allora ax^2 ... ce l'ho, variandolo guardo che la curva va più in giù, ha concavità negativa, e tutte queste cose... Adesso introduco il $+b$, cosa succederà? Bè, si può fare la domanda: "Cosa succederà?". Quello là [la retta di prima] andrà su di b , se è positivo, o giù di b , se è negativo, succederà la stessa cosa? Andiamo a verificare. Cioè, una cosa molto empirica. E qua avrai già $ax^2 + b$ e quindi comincio a variare due delle cose, due delle tre possibili. Poi ci sarà $ax^2 + bx + c$, che è quella una pochino più complicata da vedere. Se vuoi introdurre anche le tabelle in tutta questa storia, la cosa può essere... Però io farei la variazione: questo gioco tra slider e lettere e formule. Cioè hai tre cose: slider, lettere e formule. E vado a vedere un po' il vai e vieni da queste cose. Credo che possa essere un modo per introdurli in modo molto semplice, non è che si richiede...»

196. **T4:** «Questo lavoro andrebbe fatto prima di questa attività...?!»
197. **R2:** «E forse sì, forse sì. Cioè l'obiettivo qui, la competenza da sviluppare è quella di sviluppare una competenza che ti permetta di cogliere aspetti, relazioni funzionali tra grandezze che cambiano.»
198. **T4:** «Sì, perché loro dall'equazione sanno passare al grafico, ma dati dei punti [sul piano cartesiano] non sanno tornare indietro.»
199. **R2:** «Sì, però quello non è una cosa facile. Perché poi c'è tutto un itinerario... tra i video del Liceo Matematico, se vai a vedere c'è quello che chiamavano "Il bricolage delle funzioni", che è molto riassunto e arriva fino agli esponenziali, però con questo gioco di usare il... lì poi il problema diventa più difficile, cioè ti do il grafico di una cosa disegnata così e tu cerchi di capire... è un altro livello, però queste cose qui sulle lineari e sulle quadratiche possono essere abbastanza fatte facilmente. Abbiamo finito?»
200. **R1:** «Sì, dicevamo solo che si potrebbe introdurre la colonna con le differenze prime...»
201. **R2:** «Ah sì! E poi c'è la colonna delle differenze. Utilissima!»
202. **R1:** «...c'è questa peculiarità dove c'è il valore assoluto, che notiamo un cambiamento: quindi prima vediamo le differenze prime negative, poi positive. Come, diciamo, altro indizio.»
203. **R2:** «Quello è un altro filone utilissimo!»
204. **R1:** «Se è qualcosa di costante, da lì lo posso capire...»
205. **R2:** «Certo. Adesso, io non so se questo funziona con... non ho mai provato su GeoGebra... se funziona con il foglio di calcolo di GeoGebra. Funzionava con fogli di calcolo tipo Excel. Ed era proprio con... una volta che arrivi a vedere che... che cominci a capire che se le differenze prime sono costanti... cioè il fatto di raccogliere quando è costante il Δy ... allora con le funzioni di primo grado le differenze prime, con le funzioni di secondo grado le differenze seconde, poi ci si mette una cubica magari e mi accorgo anche delle

differenze [terze]... e allora uno accetta di generalizzare in questo modo. Allora c'è tutta una... con questi problemi... si può risolvere il seguente problema, che è tutt'altro che banale, però devi avere la possibilità... vedere come in qualche modo l'effetto di questi parametri a, b, c sul grafico della funzione. Che puoi vedere usando gli slider, però puoi anche andare a vedere prendendo dei valori, le differenze prime, le differenze seconde, ... e vedere quando... su che cosa... influisce su quali differenze: prime, seconde, terze,... influiscono i vari parametri. E allora quello è molto istruttivo. [...] Vai a vedere queste cose; cambi e ti accorgi... cambi la a e cambia... cambi la b e alcune cose cambiano e altre no, eccetera eccetera, che è sempre questa attenzione tipicamente, se vuoi, galileiana o sperimentale a ciò che cambia e a ciò che non cambia, che sono le prime cose che uno guarda per descrivere scientificamente qualcosa. Se faccio i vaccini a tutti i bambini per il morbillo, il numero di casi di morbillo cambia o non cambia? Sono cose che si fanno... Fanno parte dell'educazione al cittadino, in modo da evitare strane idee...»