

Abstract dei moduli

Moduli 1 e 3: Un approccio epistemologico alla Matematica da insegnare e (da) apprendere. Riflessioni epistemologiche su contenuti matematici

Samuele Antonini
Università di Firenze

Maria Alessandra Mariotti
Università di Siena

Una riflessione epistemologica sulla matematica può prendere almeno due direzioni, una più generale, riguardante la matematica come scienza nel suo complesso, e una più specifica, riguardante ambiti o contenuti particolari della matematica. Questa seconda direzione è quella che prenderemo: il modulo che proponiamo presenta e intende promuovere un'attività di riflessione epistemologica su particolari contenuti matematici; la scelta si è orientata verso quelli emersi dalle vostre richieste, ma soprattutto verso quelli che potrebbero essere direttamente coinvolti in una ricerca in didattica della matematica.

Obiettivi del modulo

Il lavoro proposto ha l'obiettivo di chiarire cosa si intende per analisi epistemologica relativa ad un particolare contenuto matematico e di introdurre i partecipanti al processo di analisi epistemologica, coinvolgendoli attivamente in prima persona nello studio di alcuni casi.

Struttura e modalità di svolgimento

Il modulo di articola in due fasi. La prima, più breve, vedrà gli esperti presentare il problema e introdurre i partecipanti al processo di analisi epistemologica; la seconda, più lunga, si articola in più incontri che prevedono l'alternarsi momenti di lavoro collettivo, guidato dagli esperti, e periodi di lavoro personale su compiti assegnati.

Contenuti matematici

Per quanto riguarda i contenuti, uno concerne non tanto un contenuto specifico ma piuttosto un particolare ambito della matematica, la *Geometria*, intesa in modo ristretto come Geometria elementare o euclidea; l'altro concerne un contenuto non immediatamente riconoscibile come un contenuto specifico, in particolare si tratta di una nozione che non appare in modo esplicito nei curricula, o tra le definizioni riportate nei manuali, ma che può a buon titolo considerarsi un elemento chiave del sapere matematico perché appare in ambiti diversi, talvolta come modalità di pensiero, talvolta come 'oggetto matematico' specifico: si tratta della '*variabile*'.

Modulo 2: Ostacoli epistemologici: riflessioni metodologiche, teoriche e pratiche. L'epistemologia della matematica dalla prospettiva di Enriques agli sviluppi recenti

Ferdinando Arzarello
Università di Torino

Miglina Asenova
Libera Università di Bolzano

Presentazione del modulo

L'epistemologo della scienza Gaston Bachelard vede gli ostacoli epistemologici come le cause inerenti all'atto stesso di conoscere che impediscono l'evoluzione del pensiero scientifico (Bachelard, 1938). Secondo la prospettiva di Bachelard, l'epistemologo deve cercare di cogliere i concetti scientifici in una sintesi psicologica progressiva, stabilendo, riguardo a ogni nozione, una scala di concetti che mostri come un concetto ha prodotto un altro. L'attenzione dell'epistemologo deve essere rivolta alla (ri)costruzione della razionalità nell'evoluzione del pensiero scientifico.

Partendo da questa idea di base, Brousseau introduce il concetto di ostacolo epistemologico nell'ambito dell'apprendimento matematico, dando origine alla teoria degli ostacoli. Secondo Brousseau, un ostacolo è "a piece of knowledge or a conception, not a difficulty or a lack of knowledge" (Brousseau, 1997, p. 99). Anche se un ostacolo può essere rilevato tramite gli errori degli studenti, esso non deve quindi essere confuso con l'errore stesso, che è causato dall'ostacolo. Secondo Brousseau, l'ostacolo è "a previous piece of knowledge which was interesting and successful, but which now is revealed as false or simply unadapted" (Brousseau, 1997, p. 82). Gli ostacoli epistemologici rappresentano dunque un tipo di conoscenza che, pur dimostrandosi di ostacolo al proseguimento nella costruzione di conoscenza riguardo a un dato oggetto matematico, è non solo inevitabile, ma ha anche una forte valenza formativa, in quanto il loro superamento porta a una comprensione più profonda dei concetti coinvolti.

Attraverso le proprie ricerche, Brousseau mostrò come gli ostacoli epistemologici legati alla disciplina si presentano con una certa persistenza e assiduità in aula e diventano dunque ostacoli epistemologici di tipo cognitivo o, come potremmo chiamarli, ostacoli epistemici, scegliendo di usare il termine "epistemico" quando ci riferiamo alla concettualizzazione del singolo soggetto e il termine "epistemologico" quando ci riferiamo all'evoluzione concettuale nella disciplina. Conoscere gli ostacoli epistemologici è dunque indispensabile per chi si occupa di DdM per poter riconoscere gli ostacoli epistemici che emergono in aula e sapere come supportare gli studenti non nell'evitarli, ma nel comprendere la loro natura assumendo un punto di vista più generale e comprensivo. Tuttavia, un ostacolo ha anche una natura cognitiva, nella misura in cui comporta la necessità di un nuovo modo di pensare che la nuova conoscenza richiederebbe ma apparentemente non è coerente con quello precedente e incontra difficoltà per essere attivato. Le difficoltà in un ostacolo possono essere particolarmente sottili poiché, a prima vista, la relazione tra la vecchia e la nuova conoscenza sembra una contraddizione tra le due, ma generalmente non è così: la nuova cornice semplicemente amplia quella vecchia proponendo un nuovo punto di vista, che consente di abbracciare quella precedente in un nuovo contesto, che contraddice quello più vecchio nel caso in cui la cornice più vecchia venga ancora utilizzata.

Esempi in questo senso sono: la concezione dello zero come "nulla" (riferimento intuitivo alla cardinalità dell'insieme vuoto) nel momento in cui esso deve assumere il ruolo di posizione vuota nella notazione posizionale; il concetto di infinito potenziale nel momento in cui si tratta di cogliere il senso di insieme infinito e la definizione di limite; il concetto di numero come entità unitaria "posizionabile sulla retta numerica", nel momento in cui si deve costruire il concetto di numero complesso, ecc..

Dunque, per riuscire a inquadrare meglio gli ostacoli epistemici dal punto di vista cognitivo, sembra necessario fare chiarezza sull'apparente incompatibilità tra le due prospettive, quella che si ha se si mantiene l'ostacolo epistemologico, e quella che si ha se lo si supera. Un concetto molto utile in questo senso è quello di incommensurabilità. Sfard (2008) citando Rorty, introduce la nozione di incommensurabilità spiegando che: "Incommensurability means there is no super theory that would provide criteria for proving one framework right while refuting the other. Incommensurability entails irreducibility [of vocabularies], but not incompatibility." (p. 749: note 36). Il concetto di incommensurabilità sembra dunque avere un grande potenziale nell'inquadrare l'aspetto cognitivo degli ostacoli epistemologici quando si presentano sotto forma di ostacoli epistemici. Tuttavia, esso sembra introdurre una rottura nella razionalità del discorso epistemologico, messa in evidenza da Bachelard come una delle caratteristiche principali dell'indagine epistemologica. In questa direzione è opportuno menzionare il lavoro di Bagni (2009) che, prendendo a sua volta spunto da Rorty, evidenzia la necessità di un approccio ermeneutico, cioè interpretativo, in DdM, nel momento in cui due discorsi epistemologici si presentano come incommensurabili. L'ermeneutica (p.e. Gadamer, 1960/2019; Rorty, 2004), intesa come interpretazione che si muove costantemente tra il senso

complessivo di un testo e il senso delle sue parti, diventa dunque indispensabile per collegare tra loro i discorsi epistemologici “alla Bachelard”. Includendo la componente ermeneutica, il discorso epistemologico va oltre l’epistemologia nel senso di Bachelard, intesa come una scienza normativa, e diventa un caso particolare di ermeneutica, in linea con quanto proposto da Rockmore (1990).

Tornando dunque all’aspetto più strettamente epistemico che ci interessa in questo contesto, il termine “ostacolo” può essere ricondotto a quello di conflitto (cognitivo) vissuto da un soggetto nel momento in cui un pezzo di conoscenza si aggiunge alla conoscenza pregressa che non più adeguata per la risoluzione di un problema. L’obiettivo che sembra opportuno perseguire in aula sarebbe dunque quello di supportare lo studente nella presa di coscienza dell’incommensurabilità della nuova conoscenza con la precedente, ma anche della loro non contraddittorietà, conciliando le due prospettive in un quadro più ampio. Un approccio appropriato in questo senso sembra quello in cui l’epistemologia in senso classico, cioè alla Bachelard, è necessaria per comprendere l’evoluzione dei due frammenti di conoscenza in questione, mentre nel tentativo di accordare quest’ultimi in un quadro più ampio, diventa necessario assumere una prospettiva ermeneutica, necessaria per creare uno spazio di comunicazione tra due discorsi incommensurabili. In questo modo l’attenzione viene spostata dalla supposta contraddittorietà alla incommensurabilità.

Una volta riconosciuta l’importanza dell’epistemologia della Matematica per la ricerca in Didattica della Matematica, una questione che si pone per il ricercatore in Didattica della Matematica è di natura metodologica: Come si fa un’analisi epistemologica di un contenuto matematico? In questo senso sono preziose le basi poste nella tradizione italiana da Federigo Enriques, che produsse risultati significativi non solo in Geometria, ma anche in Epistemologia, ispirando una scuola di pensiero italiana in questo ambito. Un esempio in questo senso sono i suoi contributi alle voci matematiche dell’enciclopedia italiana, per la quale Enriques firmò 38 voci tra il 1929 e il 1937. Queste voci enciclopediche rappresentano degli esempi, di diversa lunghezza, ma pur sempre sintetiche, di analisi epistemologiche dei concetti

matematici, nello stile tracciato da Bachelard. Esse forniscono esempi concreti di indagini epistemologiche, la cui analisi comparativa può consentire di estrarre dei criteri metodologici utili al ricercatore. D’altro canto, nel momento in cui l’indagine mette in evidenza degli ostacoli epistemologici che hanno dunque un’elevata probabilità di presentarsi sotto forma di ostacoli epistemici nel senso di Brousseau, diventa importante trovare modalità utili per superare tali ostacoli attraverso la messa in evidenza della incommensurabilità tra il punto di vista precedente e quello successivo all’ostacolo, piuttosto che della loro contraddittorietà. In questo senso si tratta dunque di individuare opportuni contesti problematici che provochino conflitti cognitivi e la cui soluzione sia funzionale al superamento degli ostacoli.

L’obiettivo del modulo consiste nel fornire ai partecipanti un supporto dal punto di vista metodologico, teorico e pratico in riferimento agli aspetti messi in evidenza finora: fornire strumenti metodologici per un’analisi epistemologica, focalizzando l’attenzione sulla presenza di eventuali ostacoli epistemologici e su punti di vista che consentono di lavorare al loro superamento.

Struttura del modulo

Il modulo si svolgerà da marzo ad aprile 2025 e sarà strutturato in tre parti, come descritto di seguito.

Parte I

Introduzione del percorso del modulo da parte degli esperti

- Lettura individuale dei partecipanti della voce «Matematica» tratta dall’Enciclopedia italiana a cura di Federigo Enriques (ca. 20 pagine).
- Presentazione dell’argomento da parte degli esperti e discussione collettiva sugli aspetti caratteristici dell’indagine epistemologica di Enriques, con indicazioni degli sviluppi più recenti come tracce per approfondimenti.
- Lavoro in piccoli gruppi su due/tre delle voci matematiche dell’Enciclopedia italiana a cura di Enriques, pubblicate tra il 1929 e il 1937, come p.e.
 - Continuità
 - Definizione
 - Dimostrazione
 - Incommensurabile
 - Infinito
 - Numero
 - Postulato
 - Problema

- Consegna: Individuare le caratteristiche dell'indagine storico-epistemologica tipica dell'approccio di Enriques nelle diverse voci, esemplificandole sulla base degli esempi esaminati

-

Parte II

- Presentazione da parte degli esperti di alcuni sviluppi più recenti dell'epistemologia della Matematica.
- Discussione in piccoli gruppi sulla base di domande guida fornite dagli esperti.
- Discussione collettiva guidata dagli esperti.

-

Parte III

- Lavoro di progettazione in piccoli gruppi di un elaborato (presentazione, poster, video, ...) con feedback individuale per ciascun gruppo da parte degli esperti e revisione successiva, finalizzato all'evento di restituzione conclusivo

Bibliografia

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Vrin.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer.

Bagni, G.T. (2009/2023). *Interpretazione e didattica della matematica. Una prospettiva ermeneutica*. Pitagora. (Riedizione nel 2023 con Bonomo). Calonghi, Coggi, Chatel, (1985). *Costruiamo la geometria piana*. De Agostini.

D'Amore B., & Fandiño Pinilla, M.I. (2005). Area e perimetro Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*, 19(2), 165-190.

Fischbein, E. (2002). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Springer.

Gadamer, H. G. (2019). *Verità e Metodo* (Trans. G. Vattimo) [Truth and Method]. Giunti/Bompiani. (Original work published 1960).

Livy S., Muir T., Maher N. (2012). How do they measure up? primary pre-service teachers' mathematical knowledge of area and perimeter. *Mathematics Teacher Education Development*, 14(2), 91–112.

Rockmore, T. (1990). Epistemology as hermeneutics. *The Monist*, 73(2), 115–133. <https://doi.org/10.5840/monist199073222>

Rorty, R. (2004). *La filosofia e lo specchio della natura* (Trans. G. Millone). [Philosophy and the Mirror of Nature]. Bompiani. (Original work published in 1979).

Rouche N. (1992). *Le sense de la mesure*. Bruxelles: Didier Hatier.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human Development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Speranza F. (1987). La geometria dalle cose alla logica. In B. D'Amore (Ed.) (1987). *La matematica e la sua didattica*, 1(1), 105-114.

Stavy R., Tirosh D. (2000). *How Students (Mis-)Understand Science and Mathematics: Intuitive Rules*. Teachers College, Columbia University.

Modulo 4: Dimostrazione e modelli matematici: epistemologia del conoscere, dell'agire e del comunicare

Paolo Boero
Università di Genova

Oggetti dell'analisi epistemologica in funzione della ricerca in didattica della matematica saranno:

TEMA 1:

La varietà delle dimostrazioni e del dimostrare in relazione a teorie matematiche di riferimento diverse e a settori disciplinari diversi della matematica, evidenziando come tali differenze incidono non solo sugli aspetti epistemici (criteri di validità di affermazioni e inferenze), ma anche sulla natura dei processi dimostrativi e sulla qualità della comunicazione.

Includere nell'analisi delle dimostrazioni i relativi processi dimostrativi consentirà di mettere in luce, su esempi, come la tensione (nel senso di legame che evolve, non necessariamente in modo lineare, nella durata del processo dimostrativo) tra scelte strategiche per individuare e connettere affermazioni nel processo dimostrativo, e prodotto di tale processo, si sviluppa o si può bloccare o deviare per ragioni diverse che è opportuno conoscere in vista della progettazione didattica e della necessaria attività di mediazione dell'insegnante.

TEMA 2: L'ATTIVITÀ DI MODELLIZZAZIONE MATEMATICA CON ATTENZIONE ALLE SPECIFICITÀ DEL CONOSCERE, DELL'AGIRE E DEL COMUNICARE NEL SETTORE MATEMATICO DI RIFERIMENTO PER IL MODELLO E NEL SETTORE IN CUI VIENE REALIZZATA LA MODELLIZZAZIONE

Saranno trattate le differenze tra il conoscere, l'agire e il comunicare nei due settori, evidenziando possibili ostacoli e conflitti che ne derivano, sia nel caso in cui la modellizzazione riguarda settori diversi della matematica (ad esempio, l'algebra e la 'geometria razionale'), sia nel caso in cui essa riguarda un settore particolare della matematica, che "fornisce" i modelli (ad esempio, l'analisi o l'algebra) e un altro ambito scientifico (ad esempio, la dinamica delle popolazioni, o la fisica).

Verranno analizzate questioni riguardanti, in particolare:

I criteri di validità del modello e di efficacia delle strategie per costruirlo e validarlo.

I limiti di validità del modello ma anche i possibili significati conoscitivi del modello al di là dei suoi limiti di validità (proiezione controllata al di là della situazione oggetto intenzionale di modellizzazione).

I rischi dell'assunzione acritica della matematica come linguaggio delle scienze, nei due sensi: riduzionismo (del conoscere al modellizzabile) e totalitarismo (estrapolazione non controllata al non modellizzabile), anche con riferimento a STE(A)M e alla perdita di specificità della matematica (tra l'altro tagliando i ponti con alcune delle sue radici storiche nella cultura dell'Occidente, e sottovalutando la necessità della sopravvivenza del suo insegnamento anche quando l'AI consentirà di fare a meno delle competenze matematiche-applicative nell'affrontare problemi delle scienze e della tecnologia)

DURATA COMPLESSIVA: almeno 6 incontri di due ore

DOPO UNA INTRODUZIONE GENERALE A CIASCUN TEMA DA PARTE DELL'ESPERTO, CON COMPITI, PER GLI ISCRITTI, DI FORMULAZIONE DI DOMANDE DI CHIARIMENTO GENERALE O RELATIVO AGLI ESEMPI FATTI, LE MODALITÀ DI LAVORO PREVISTE PER GLI INCONTRI ONLINE SARANNO DI DUE TIPI:

- **ANALISI DI ELABORATI DI ALLIEVI** (scuola o università): Criteri di analisi forniti dall'esperto
effettuazione delle analisi degli elaborati da parte degli iscritti □ loro restituzione delle analisi □
discussione guidata dall'esperto su alcune analisi di elaborati Obiettivo: comprensione e padronanza
di criteri di analisi epistemologica di processi e prodotti
- **PRODUZIONE DI CONOSCENZE DA PARTE DEGLI ISCRITTI:** Richiesta di produrre conoscenze
in una data situazione □ individuazione (da parte degli iscritti) dei criteri di analisi delle produzioni e
dei prodotti □ loro discussione guidata dall'esperto □ applicazione dei criteri convenuti alla
produzione e al prodotto relativo a un'altra situazione (simile, o anche la stessa) Obiettivo: sviluppo
delle competenze di analisi epistemologica a priori di situazioni e compiti (e relativi processi e
prodotti) da proporre nelle ricerche sperimentali e nella formazione degli insegnanti

In sostanza, l'attività seminariale sarà finalizzata al miglioramento della professionalità dei giovani ricercatori (e soprattutto, degli apprendisti-ricercatori) partecipanti per quanto riguarda le loro competenze di progettazione e analisi di attività sperimentali secondo le dimensioni del conoscere consapevole dei criteri epistemici, dell'agire consapevole in relazione ai fini da raggiungere, e del comunicare consapevole dei vincoli derivanti dal contesto.

Riferimenti a testi classici di filosofia della scienza e di epistemologia della matematica (Lakatos, Wittgenstein) e a testi di inquadramento, a fini didattici, della dimostrazione (A. Stylianides, Mariotti) e della modellizzazione matematica (Blum & Niss) serviranno come contrappunto per i discorsi sviluppati nel modulo.