

Formazione insegnanti in prospettiva interdisciplinare tra matematica e fisica: caratterizzazione dell'*expertise*

Lorenzo Pollani (Dipartimento di Matematica 'Guido Castelnuovo', Sapienza Università di Roma)

Il contesto di ricerca del nostro progetto è la formazione degli insegnanti di matematica e fisica per la scuola secondaria. Al suo interno, ci focalizziamo sul ruolo dell'interdisciplinarità tra matematica e fisica, il cui interesse sta crescendo sempre di più. Questo interesse è testimoniato dall'incremento di ricerche su questo tema, e la necessità di affrontarlo è spesso giustificata sia da un punto di vista normativo (molti *curricula* menzionano l'interdisciplinarità come obiettivo formativo per gli studenti) sia da un punto di vista sociale (sfide sociali, come il cambiamento climatico, richiedono di saper integrare *expertise* disciplinari diverse). In letteratura, l'interdisciplinarità, e *a fortiori* quella tra matematica e fisica, fa emergere tensioni su vari piani (si vedano i risultati ottenuti nel progetto FEDORA, <https://www.fedora-project.eu/>): ad esempio, sul piano epistemico ed epistemologico, la tensione di dover riconoscere e negoziare criteri di verità e validità assunti; sul piano emotivo, la tensione di dover gestire situazioni di incertezza e spaesamento. Queste tensioni rimangono nascoste ad uno sguardo mono disciplinare o di giustapposizione di più discipline (Satanassi et al., 2023). L'educazione (scolastica e universitaria), organizzata per discipline (Satanassi et al., 2023), favorisce al più una giustapposizione di discipline da parte degli insegnanti. D'altra parte, al momento non esiste una formazione insegnanti "ufficiale" che permetta agli insegnanti di affrontare le tensioni evidenziate.

Queste considerazioni aprono un problema alla ricerca sulla formazione insegnanti: caratterizzare l'*expertise* desiderabile ed elaborare criteri di *design* per implementare in modo efficace i processi di formazione insegnanti desiderabili. Nel nostro progetto, ci focalizziamo sulla formazione iniziale di futuri insegnanti di matematica e fisica con formazione in matematica, ossia studenti del corso di laurea magistrale in matematica che hanno intenzione di diventare insegnanti di matematica e fisica nella scuola secondaria. Nonostante il focus sulla formazione iniziale, riconosciamo la necessità di sinergia tra formazione iniziale e formazione continua degli insegnanti. Assumendo che l'interdisciplinarità si distingue dalla multidisciplinarità in quanto questa coinvolge una giustapposizione additiva di contenuti, mentre la prima un *processo* di interazione e integrazione profonda tra discipline (Klein, 2010), sembra ragionevole pensare che il nostro profilo obiettivo di insegnante non sia la "somma giustapposta" di un insegnante di matematica ed un insegnante di fisica.

Il nostro progetto di ricerca vuole contribuire al problema evidenziato sopra. Con questo macro-obiettivo, il quadro teorico si compone di due parti: una per l'interdisciplinarità e una per la formazione. La prima, sviluppata da due progetti europei (IDENTITIES, <https://identitiesproject.eu/>; FEDORA), combina l'approccio *family resemblance*, adattato al caso della *Nature of Science* dal lavoro Erduran e Dagher (2014), con i costrutti di *boundary*, *boundary objects*, e *boundary crossing* presentati in Akkerman e Bakker (2011). Questa parte del quadro permette di ripensare la relazione tra discipline e sapere superando una visione geopolitica esclusiva, in cui i confini separano nettamente ciò che è matematica da ciò che è fisica. La seconda parte del quadro, in via di sviluppo, combina in modo originale la prospettiva *novice/expert* e il costrutto dell'attenzione (Mason, 1998) con i costrutti di *critical detail*, *critical attitude* e *critical analysis* (Viennot, 2001; Viennot & Décamp, 2018). Questa parte permette di caratterizzare il comportamento dell'insegnante, in particolare di fronte a risorse come il libro di testo. Per studiare l'*expertise*, abbiamo caratterizzato (a partire dalla letteratura) un primo modello di *expertise* interdisciplinare desiderato e (a partire da dati empirici) un primo profilo *novice*. Dal momento che nella prospettiva *novice/expert* si interpreta la formazione come *shift*

da *novice* a *expert*, caratterizzare entrambi i profili è importante e necessario per poi ragionare sugli step di *design* per effettuare lo *shift*.

I contesti degli studi iniziali intrapresi sono stati due corsi di “Didattica della Matematica”, rispettivamente presso le Università di Milano e di Genova. L’attività proposta ai partecipanti chiedeva di discutere su uno o più estratti di libri di testo di fisica riguardanti il moto dei proiettili, prima in piccolo gruppo, poi collettivamente anche con i formatori. Al termine dell’attività è stata richiesta la redazione di un report scritto sulla discussione collettiva. L’argomento e i libri di testo sono stati scelti sulla base della loro significatività epistemologica (Bagolini et al., 2021). Il tipo di risorsa (libro di testo) è stato scelto ipotizzando che la vicinanza con la (futura) pratica didattica potesse favorire la discussione e considerando che è uno degli strumenti efficaci nella valutazione dell’*expertise* (Viennot & Décamp, 2018). Abbiamo raccolto due tipologie di dato: le audio registrazioni delle discussioni collettive con i ricercatori, in seguito trascritte, e i report. Finora abbiamo analizzato solo parte delle trascrizioni, con metodologie di tipo *qualitative content analysis*. Per questo, abbiamo operazionalizzato gli elementi caratteristici dell’attenzione per Mason (1998), ossia *locus*, *form*, e *focus*, nel caso di una discussione su estratti di libri di testo. Il *locus* è uno specifico elemento semiotico del libro di testo (ad esempio, una parola, una frase, una figura o una tabella). La *form* verso un *locus* può essere focalizzata, ossia avere un *focus*, o diffusa. Il *focus* è il commento fatto intorno al *locus*, compreso il motivo per cui il *locus* viene considerato. Abbiamo poi usato questa operazionalizzazione sia per elaborare un modello teorico di *expertise* che per codificare la trascrizione. Alla codifica è seguito un raggruppamento degli estratti di discussione con specifici *loci* (finora, esempi e rappresentazioni) per i quali abbiamo esplicitato i *foci*, laddove le *form* fossero focalizzate. Discutendo anche con un gruppo di ricerca in didattica della fisica, abbiamo elaborato un primo modello di *expertise* fondato sul quadro teorico. In particolare, ci aspettiamo che un insegnante esperto sappia strutturare l’attenzione con *loci* in *critical details* nel libro di testo, e sappia *focalizzarla* sulla relazione tra le discipline, rispettandone i nuclei epistemici e rivelandone somiglianze e specificità (Erduran & Dagher, 2014). Ipotizziamo che questa *focalizzazione* sia possibile nel caso in cui i *critical details* siano *boundary objects*. Alla luce di questo modello e dei *loci* considerati, abbiamo ipotizzato quali *foci* fossero desiderabili, elaborandoli a partire dalle letterature di ricerca in didattica della matematica e della fisica. L’analisi degli elementi caratteristici dell’attenzione e l’elaborazione di un modello teorico e dei *foci* rilevanti sono stati processi che hanno contribuito a caratterizzare entrambi i profili *novice* ed *expert*. I dati analizzati mostrano un caso in cui anche laddove i *loci* evidenziati nella discussione erano *boundary objects* e le *forms* erano focalizzate, i *foci* differivano da quelli attesi rispetto a tre categorie (“captures”). Queste tre categorie sono state chiamate rispettivamente *disciplinary capture* (Branchetti et al., 2023), *applicationist capture*, *engagement capture*. L’identificazione di queste categorie ci ha permesso di dare una caratterizzazione più esplicita dei comportamenti rispetto a cui i partecipanti possono essere considerati *novices* rispetto all’interdisciplinarietà.

I prodotti attesi nel progetto di ricerca saranno: un quadro teorico di riferimento (al momento composto da due parti); alcuni criteri per elaborare un modello di *expert* desiderato, basato su questo quadro (in parte discussi in Branchetti et al. (2023)); alcuni criteri per caratterizzare il profilo *novice*, basati sugli ostacoli evidenziati da analisi di dati (tra cui le tre “captures”).

Bibliografia essenziale

- Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary Crossing and Boundary Objects. *Review of Educational Research*, 81(2), 132–169. <https://doi.org/10.3102/0034654311404435>
- Branchetti, L., Morselli, F., & Pollani, L. (2023). Interdisciplinary task design for pre-service teacher education: Learning potentials at the boundary between mathematics and physics. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (A c. Di), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 3345–3352). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.
- Erduran, S., & Dagher, Z. R. (2014). *Reconceptualizing the nature of science for science education: Scientific knowledge, practices and other family categories* (Vol. 43). Springer Netherlands. <https://doi.org/10.1007/978-94-017-9057-4>
- Klein, J. T. (2010). A taxonomy of interdisciplinarity. In R. Frodeman, J. T. Klein, & C. Mitcham (Eds.), *The Oxford handbook of interdisciplinarity* (pp. 15–30). Oxford University Press.
- Mason, J. (1998). Enabling Teachers to be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of Attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 243–267. <https://doi.org/10.1023/A:1009973717476>
- Pollani, L., & Branchetti, L. (2022). An experience of exploring the boundary between mathematics and physics with preservice teachers. In M. Trigueros, B. Barquero, R. Hochmuth, & J. Peters (A c. Di), *INDRUM2022 Proceedings* (pp. 425–434). University of Hannover and INDRUM.
- Satanassi, S., Branchetti, L., Fantini, P., Casarotto, R., Caramaschi, M., Barelli, E., & Levrini, O. (2023). Exploring the boundaries in an interdisciplinary context through the Family Resemblance Approach: The Dialogue Between Physics and Mathematics. *Science & Education*. <https://doi.org/10.1007/s11191-023-00439-2>
- Viennot, L. (2001). Physics Education Research: Inseparable Contents and Methods—The Part Played by Critical Details. In M. Ahtee, O. Bjorkqvist, E. Pehkonen, & V. Vatanen (A c. Di), *Research on Mathematics and Science Education: From Beliefs to Cognition, from Problem Solving to Understanding* (pp. 89–100). Institute for Educational Research.
- Viennot, L., & Décamp, N. (2018). Activation of a critical attitude in prospective teachers: From research investigations to guidelines for teacher education. *Physical Review Physics Education Research*, 14(1), 010133. <https://doi.org/10.1103/PhysRevPhysEducRes.14.010133>

Analisi di profili di apprendimento matematico di studenti con difficoltà **Macchioni Elena**

La ricerca a cui mi sto dedicando si inserisce nel progetto PRIN DynaMat, *Dynamic Math for Inclusive Education*, il cui obiettivo è quello di promuovere e studiare processi di apprendimento di studenti frequentanti la scuola secondaria di secondo grado con difficoltà in matematica. Il mio progetto di ricerca, incentrandosi sull'individuazione di profili di apprendimento matematico, rappresenta un primo passo verso questo più ampio obiettivo di didattica inclusiva. La necessità di individuare dei profili di apprendimento muove dalla convinzione che, per promuovere processi di apprendimento significativi, sia necessario partire da un'attenta analisi dei bisogni educativi degli studenti coinvolti in tali processi. Nello specifico, il focus è sui bisogni educativi di studenti *con difficoltà in matematica*, identificando così quegli studenti che sono protagonisti di una persistente storia di fallimento o di basso rendimento in matematica, riconosciuta come tale da loro e dai loro insegnanti.

Il problema che sto studiando è dunque contestualizzato all'interno degli studi di stampo cognitivo sulle difficoltà, ed in particolare rispetto a quel recente filone di ricerca che si propone di individuare "profili di difficoltà" individuando così gruppi di studenti con caratteristiche simili in differenti ambiti dell'apprendimento matematico (Baccaglioni et al., 2020). Si è tuttavia scelto di ampliare tale prospettiva, considerando anche fattori affettivi, che la ricerca indica come elemento chiave nel complesso quadro dello studio delle difficoltà (Zan et al., 2007). Il mio obiettivo è dunque quello di delineare profili di apprendimento matematico sia dal punto di vista cognitivo che affettivo, con una lente più olistica, guadagnando in termini di sinergia tra dimensione cognitiva e dimensione affettiva.

Il quadro teorico scelto è quello della teoria della Commognition (Sfard, 2008) che, nella descrizione del *mathematizing* e dell'*identifying*, consente di trattare coerentemente sia aspetti cognitivi che aspetti affettivi. Per quanto riguarda il *mathematizing* abbiamo cercato di operationalizzare dimensioni chiave emergenti dagli studi cognitivi, come "la memoria" ed "il ragionamento". Abbiamo pensato di legare la prima alla partecipazione rituale ed all'implementazione di procedure precedentemente memorizzate (importanza del *task* interpretata dagli studenti) (Lavie, et al. 2019). La dimensione del ragionamento invece è stata ridefinita in termini di *sense-making*, ossia come costruzione di una narrazione *consistente, comprensiva, coesa* (Baccaglioni-Frank 2021, Sfard 2021), ma anche commensurabile al discorso canonico. Abbiamo poi operationalizzato questo *sense-making* in termini di processi di *de-ritualizzazione* (Lavie, et al. 2019) e di istanze di *agency* (Baccaglioni-Frank 2021). L'*identifying* è stato invece operationalizzato in termini di *identità corrente* e di *identità designata*, seguendo gli studi di Heyd- Metzuyanin (Heyd-Metzuyanin et al. 2012). L'eventuale distanza tra ciò che uno studente racconta su di sé (identità corrente), e ciò che lo studente pensa o desidera si realizzi nel futuro (identità designata), è stato infatti ipotizzato essere un elemento chiave nelle storie di fallimento (Heyd- Metzuyanin, 2011). Per cogliere interazioni tra *mathematizing* e *identifying* stiamo indagando le *metaregole discorsive* (Sfard, 2008), ossia le regole che guidano la produzione del discorso. Queste, infatti, sono strettamente legate sia al *mathematizing* (lo sviluppo del discorso matematico può infatti essere letto in termini di un progressivo cambiamento nelle metaregole), che all'*identifying* (alcune metaregole trovando origine in aspetti affettivi, hanno la possibilità di rimanere invariate al progredire del discorso matematico).

Il mio progetto di ricerca è dunque articolato in più direzioni. Inizialmente è stato necessario progettare ed implementare un'intervista da somministrare agli studenti. Contemporaneamente è stato necessario sviluppare uno schema analitico, alla luce del quadro teorico scelto, con cui analizzare l'intervista, per poter così delineare profili di apprendimento matematico. Lo schema analitico, così come l'intervista, è stato, ed è tuttora, oggetto di successive modifiche alla luce dei dati raccolti ed analizzati dopo i tre cicli di sperimentazione condotti (Settembre 2022, Settembre-Ottobre 2022 e

Ottobre-Dicembre 2023). Inoltre, poiché tutte le interviste sono state video-registrate, con le successive modifiche dello schema analitico, è possibile svolgere una *retrospective analysis* dei dati raccolti nei primi cicli di sperimentazione.

Riferimenti bibliografici

Baccaglini-Frank, A. (2021). To tell a story, you need a protagonist: how dynamic interactive mediators can fulfill this role and foster explorative participation to mathematical discourse. *Educational Studies in Mathematics*, 106(2), 291–312.

Baccaglini-Frank, A., Karagiannakis, G., Pini, C., Terme, C. & Girelli, L. (2020). Identificare profili di apprendimento matematico di bambini tra 6 e 12 anni: la standardizzazione italiana della batteria MathPro. *Ricercazione*, 12(1), 19-51. <https://doi.org/10.32076/RA12109>

Heyd-Metzuyanim, E. (2011). Emotional aspects of learning mathematics - how the interaction between identifying and mathematizing influences the effectiveness of learning [Doctoral dissertation]. Technion - Israel Institute of Technology.

Heyd-Metzuyanim, E. & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: On learning mathematics as an interplay of mathematizing and identifying. *International Journal of Educational Research*, 51-52, 128–145.

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 153–176.

Sfard, A. (2021). Taming Fantastic Beasts of Mathematics: Struggling with Incommensurability. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1–33.

Zan, R., & Di Martino, P. (2007). Attitude toward Mathematics: Overcoming the Positive/Negative Dichotomy. In B. Sriraman, (Ed.), *The Montana Mathematics Enthusiast* (Monograph 3, pp. 157–168). The Montana Council of Teachers of Mathematics.

La difficoltà percepita di un task matematico: analisi della prospettiva degli studenti

Bianca Nicchiotti

Libera Università di Bolzano

La ricerca in didattica della matematica si è occupata a lungo delle difficoltà in matematica, descrivendo alcuni dei fattori che le influenzano (si vedano, per esempio, Bolondi et al., 2018; Zan, et al., 2006). La difficoltà viene comunemente valutata a posteriori sulla base dei risultati ottenuti dal campione a cui il task è stato sottoposto (Mehrens & Lehmann, 1991). Al contrario, il tema della difficoltà percepita non è stato analizzato con la stessa attenzione. In generale, la difficoltà di un task e la sua difficoltà percepita sono considerate diverse, seppur fortemente legate tra loro (Spagnolo & Saccoletto, 2021). In didattica della matematica, attualmente, non esiste una definizione condivisa della difficoltà percepita di un task, sebbene tale aspetto sia stato analizzato in campi diversi, tra cui quello della psicologia cognitiva (si vedano Eccles & Wigfield, 2020; Efklides & Touroutoglou, 2010).

Alcuni studi hanno messo in luce aspetti della difficoltà percepita rispetto alla prospettiva degli insegnanti e come questi non sembrano sempre consapevoli delle ragioni degli errori commessi dagli studenti (Arzarello et al., 2023). Al contrario, i fattori che influenzano la loro percezione di difficoltà non sono stati ancora descritti approfonditamente. Alcune ricerche hanno ipotizzato le motivazioni di questo fenomeno (Nathan & Koedinger, 2000; Arzarello et al., 2023), che fino a ora non sono state considerate tutte all'interno di un quadro complessivo anche se vi sono stati alcuni tentativi in questa direzione (Philipp & Leuders, 2014). Negli ultimi anni, alcune ricerche qualitative hanno messo in luce i fattori che concorrono alla difficoltà percepita da studenti e insegnanti rispetto a quesiti matematici (Saccoletto & Spagnolo, 2022; Spagnolo & Saccoletto, 2023; Nicchiotti & Spagnolo, accettato per la pubblicazione il 20/12/2023; Nicchiotti & Spagnolo, accettato per la pubblicazione il 21/12/2023). In tali fasi, a studenti e insegnanti è stato chiesto di risolvere quesiti matematici e valutarne la difficoltà, spiegando le motivazioni che li hanno portati ad attribuire la valutazione. Tali motivazioni sono state poi classificate e analizzate utilizzando le categorie definite da Saccoletto e Spagnolo (2022), ulteriormente precisate in (Spagnolo & Saccoletto, 2023). Le categorie (che non sono mutualmente esclusive) sono cinque (*Strategie di risoluzione, Capacità ed esperienze, Emozioni, Formulazione del task, Considerazioni personali*) e sono ulteriormente dettagliate in sottocategorie più specifiche. Dai risultati di questi primi studi è emerso che i fattori che influenzano la difficoltà percepita da studenti e insegnanti sembrano essere gli stessi, ma in proporzione diversa.

La ricerca che sto portando avanti nell'ambito del mio dottorato si colloca in questo quadro e si focalizza sulla difficoltà percepita dagli *studenti* rispetto a quesiti matematici dopo averli risolti. Inoltre, data la crescente importanza che le tecnologie stanno assumendo dalla pandemia e considerato il fatto che la tecnologia influenza il modo in cui gli studenti affrontano i quesiti (Laborde et al., 2006), si valuta la possibilità di inserire nella ricerca cenni riguardo a una prima analisi per esplorare l'influenza delle tecnologie sulla difficoltà percepita dagli studenti, con lo scopo di approfondire il tema in ricerche successive. L'obiettivo principale della ricerca è quindi quello di analizzare la difficoltà percepita dagli studenti rispetto a quesiti matematici *difficili*, nell'accezione di Mullis et al. (2021), e il peso relativo dei fattori che la influenzano, validando allo stesso tempo le categorie sopracitate. Un obiettivo secondario è infine quello di analizzare il ruolo e il peso della tecnologia nella difficoltà percepita relativa a tali quesiti, considerando anche il rapporto dello studente con essa. Questa ricerca si inserisce nel filone degli studi riguardanti la difficoltà percepita in matematica, portati avanti con l'ampio obiettivo di esplorare il tema e arrivare infine a proporre una definizione di difficoltà percepita di un quesito matematico, costruita sulla base dei fattori estrapolati ed analizzati.

La ricerca si svolgerà in due fasi: una prima fase quantitativa e una successiva fase qualitativa. Nella prima fase, a un campione di studenti del secondo anno della scuola secondaria di secondo grado (grado 10) sarà somministrato un questionario composto da tre quesiti tratti da prove INVALSI e considerati difficili sulla base delle risposte ottenute durante la somministrazione su scala nazionale, seguiti da domande per valutare la difficoltà percepita rispetto ad essi. Abbiamo scelto di utilizzare quesiti INVALSI nella ricerca in quanto, oltre ad essere validati statisticamente, essi sono già stati somministrati a studenti del grado 10, quindi si presume siano adatti. Inoltre, per i quesiti somministrati prima del 2018, sono disponibili le percentuali di risposte

corrette ed errate su scala nazionale, che ci hanno permesso di selezionare quesiti difficili, nell'accezione descritta precedentemente. Nella fase qualitativa, un sottoinsieme degli studenti coinvolti nella prima fase sarà sottoposto a interviste svolte singolarmente per commentare quanto fatto nella prima fase e proporre variazioni dei quesiti già svolti, per valutare la coerenza tra le risposte fornite nel questionario e gli elementi successivamente oggetto di modifica da parte degli studenti.

Bibliografia essenziale

- Arzarelo, F., Ferretti, F., & Vannini, I. (2023). La formazione degli insegnanti di matematica e le valutazioni standardizzate: primi risultati di un progetto di ricerca nazionale interdisciplinare. *Annali online della Didattica e della Formazione Docente*, 15(25), 88-103.
- Bolondi, G., Branchetti, L., & Giberti, C. (2018). A quantitative methodology for analyzing the impact of the formulation of a mathematical item on students learning assessment. *Studies in Educational Evaluation*, 58, 37-50. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2018.05.002>
- Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2020). From expectancy-value theory to situated expectancy-value theory: A developmental, social cognitive, and sociocultural perspective on motivation. *Contemporary Educational Psychology*, 61. Article 101859. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2020.101859>
- Efklides, A., & Touroutoglou, A. (2010). Cognitive interruption as an object of metacognitive monitoring: Feeling of difficulty and surprise. In: A. E. & P. Misailidi (Ed.), *Trends and prospects in metacognition research* (pp. 171–208). New York, NY: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6546-2_6
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). “Teaching and Learning Geometry with Technology”. In *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*. Leiden, The Netherlands: Brill. https://doi.org/10.1163/9789087901127_011
- Mehrens, W. A., & Lehmann, I. J. (1991). *Measurement and evaluation in education and psychology*. Fort Worth: Holt, Rinehart & Winston.
- Mullis, I.V.S, Martin, M.O., & von Davier, M. (Eds.). (2021). *TIMSS 2023 Assessment Frameworks*. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: <https://timssandpirls.bc.edu/timss2023>
- Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction*, 18, 209–237. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI1802_03
- Nicchiotti, B., & Spagnolo, C. (accettato per la pubblicazione il 20/12/2023). Perceived difficulty of a mathematical task: do teachers and students have a common view? In *Proceedings of MAVI29*, Lumat.
- Nicchiotti, B., & Spagnolo, C. (accettato per la pubblicazione il 21/12/2023). Comparison between students and teachers' perceived difficulty of a mathematical task: an introductory investigation. In Inchley, C. (Ed.) *Proceedings of CIEAEM 74*, Quaderni di Ricerca in Didattica.
- Philipp, K., & Leuders, T. (2014). Diagnostic competences of mathematics teachers – Processes and resources. In C. Nicol, S. Oesterle, P. Liljedahl, & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Conference of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 4, pp. 425–432). Vancouver, Canada: PME.
- Spagnolo, C., & Saccoletto, M. (2021). Perceived difficulty in answering mathematical task: reflections on metacognitive factors. In *Proceedings of ICME14*.
- Saccoletto, M., & Spagnolo, C. (2022). Students' perceived difficulty of mathematical tasks: an investigation on influencing factors. *Didactica Mathematicae Journal*, 44, 59–79. <https://doi.org/10.14708/dm.v44i1.7181>
- Spagnolo, C., & Saccoletto, M. (2023). How students view the difficulty of mathematical tasks: factors that influence their perceptions. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1498–1506). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.
- Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. (2006). Affect in mathematics education: an introduction. *Educational studies in mathematics*, 63(2), 113–121. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9028-2>

Reificazione e gestione di diverse rappresentazioni in analisi matematica: focus sul comportamento asintotico delle funzioni

Giada Viola
Università di Ferrara

La mia ricerca è focalizzata sullo studio dei processi di apprendimento di studenti universitari per quanto riguarda specifici concetti di analisi matematica e mira ad indagare il ruolo delle rappresentazioni e il loro utilizzo nei processi risolutivi di quesiti a livello universitario. In particolare, l'obiettivo del progetto è indagare il processo di reificazione (nel senso di Sfard, 1991) in relazione all'ambito specifico del comportamento asintotico delle funzioni. La scelta di questo tema deriva dai diversi ostacoli che si frappongono all'apprendimento di questi concetti e, in particolare, sulle difficoltà di diversi studenti universitari ad acquisire la capacità di confrontare l'andamento delle funzioni all'infinito e comprendere se si possono avvicinare, allontanare o se sono asintoticamente equivalenti.

Le diverse modalità di approccio agli oggetti matematici sono ampiamente studiate in letteratura; numerose ricerche fanno riferimento alla dualità processo-oggetto come aspetto determinante del concetto matematico emergente. Nel 1991 Sfard ha messo in luce quanto sia nell'evoluzione storica delle nozioni matematiche astratte sia nella loro costruzione cognitiva da parte dell'individuo, è possibile riconoscere una duplice natura: esse si presentano in un primo momento in un aspetto operativo, procedurale, e solo successivamente in un aspetto strutturale, oggettivato. Uno dei processi fondamentali del passaggio tra la fase operativa e quella strutturale è la reificazione; come evidenziato in Ferretti, Santi & Bolondi (2022), i processi di reificazione sono legati alla gestione delle rappresentazioni semiotiche. Il mio studio si inserisce nella linea di ricerca che mira a indagare il ruolo dell'utilizzo di differenti rappresentazioni nei processi di reificazione.

Le principali lenti teoriche che hanno inquadrato la prima fase del mio progetto di ricerca e che stanno delineando la progettazione della fase successiva sono la *teoria della reificazione*, un costrutto teorico fornito da Sfard (1991), coordinata (nel senso di Prediger et al., 2008) con la *teoria delle rappresentazioni semiotiche* di Duval (2006) e la *teoria dell'oggettivazione* di Radford (2003). La teoria di reificazione è caratterizzata da due aspetti: processo e oggetto; per analizzare ciò che riguarda il processo ho utilizzato la teoria dell'oggettivazione di Radford (2003), mentre per indagare il lato dell'oggetto ho utilizzato la teoria delle rappresentazioni semiotiche di Duval (2006). La combinazione di questi due approcci teorici (Prediger et al., 2008) permette di cogliere il fenomeno della reificazione come complementarità processo-oggetto, infatti, una delle difficoltà del processo di reificazione è quello di considerare processo-oggetto come due aspetti complementari dello stesso concetto matematico. Questi approcci teorici forniscono la possibilità di esaminare in maniera approfondita il modo in cui gli studenti concepiscono specifici concetti matematici, permettendo l'analisi delle modalità con cui essi utilizzano diverse forme di rappresentazione per esprimerli. Le domande di ricerca che stanno guidando questo studio sono le seguenti: in che modo la complementarità processo-oggetto influisce sulla capacità degli studenti di approcciarsi al comportamento asintotico delle funzioni? In che modo i diversi registri di rappresentazione influenzano la gestione di tale complementarità?

La prima fase dello studio condotta fino ad ora, il pilot study, è una *mixed-method research* (Johnson & Onwuegbuzie, 2004). Durante il pilot study è stato somministrato un questionario a 129 studenti: 81 studenti di Licei Scientifici delle province di Ferrara e di Roma e 48 studenti universitari del corso di ingegneria della Sapienza Università di Roma. Per poter approfondire il problema di ricerca, sono state progettate due versioni dello stesso quesito caratterizzati da diverse rappresentazioni semiotiche: algebrica e grafica. L'analisi delle risposte fornite mostra che la presenza di differenti rappresentazioni semiotiche ha avuto un impatto sia sulle percentuali di risposte corrette sia sulla scelta e implementazione delle strategie risolutive. Per approfondire i processi risolutivi e il legame con le rappresentazioni semiotiche, sono state condotte interviste a un sottogruppo di studenti che ha svolto il questionario. Le interviste effettuate sono di tipo semi-strutturato: alcune domande sono state decise in anticipo sulla base delle risposte fornite dagli studenti nel questionario e altre sono state formulate in base alle risposte degli studenti fornite durante l'intervista, seguendo l'*interview guide approach* (Patton, 1980). Per poter indagare il ruolo e l'utilizzo delle differenti rappresentazioni nel processo di reificazione del concetto matematico in gioco, è stato utilizzato un design di tipo correlazione (Hiebert et al., 2023), che rende possibile analizzare la relazione tra diverse variabili. I primi risultati della

ricerca mostrano che la gestione delle rappresentazioni è legata alla complementarità processo-oggetto. La mancata attuazione delle conversioni tra diversi registri semiotici non consente una completa acquisizione del significato matematico (Duval, 2006), i primi risultati mostrano che la rottura della dualità processo-oggetto si è verificata quando gli studenti hanno attivato solo il lato oggetto o solo il lato processo e questo ha influito sullo studio dell'oggetto matematico in questione. In alcune situazioni, utilizzando la rappresentazione grafica gli studenti hanno attivato ciò che riguarda il processo utilizzando la percezione per fornire la risposta; in altre, attraverso la rappresentazione algebrica, gli studenti hanno attivato ciò che concerne l'oggetto e hanno avuto accesso alle proprietà dell'oggetto matematico con un approccio pseudo-strutturale. Entrambe le situazioni mettono in luce una mancata acquisizione del significato matematico.

I risultati ottenuti nel pilot study hanno permesso di formulare le domande di ricerca e di delineare la fase sperimentale successiva. In particolare, si stanno conducendo delle interviste di tipologia *task-based interviews* (Goldin, 2000) in cui l'attenzione è posta sull'analisi dei processi risolutivi attivati nella risoluzione di quesiti di analisi matematica sull'andamento asintotico delle funzioni.

Bibliografia essenziale

Duval R. (2006), *The Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in the Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131.

Ferretti, F., Santi, G. R. P., & Bolondi, G. (2022). Interpreting difficulties in the learning of algebraic inequalities, as an emerging macro-phenomenon in Large Scale Assessment. *Research in Mathematics Education*, 24(3), 367-389.

Hiebert, J., Cai, J., Hwang, S., Morris, A. K., & Hohensee, C. (2023). *Doing Research: A New Researcher's Guide* (p. 136). Springer Nature.

Goldin G (2000) A scientific perspective on structures, task-based interviews in mathematics education research. In: Lesh R, Kelly AE (eds) *Research design in mathematics and science education*. Erlbaum, Hillsdale, pp 517–545

Johnson, R. B., & Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational researcher*, 33(7), 14-26.

Patton, M. Q. (1980) *Qualitative Evaluation Methods*. Beverly Hills, CA: Sage.

Prediger, S., Bikner-Ahsbals, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, 40, 165–178.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37–70.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36