



XXXVIII Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica Giovanni Prodi

Rimini, 25-27 Marzo 2022



Digital Interactive Storytelling in Matematica: un approccio sociale orientato alle competenze

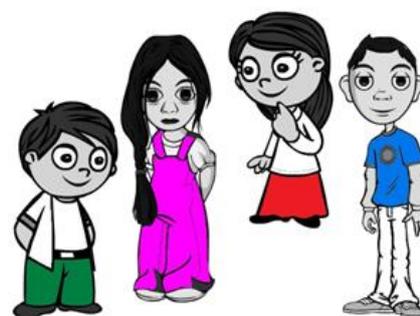
a cura di

Giovannina Albano¹, Maria Polo², Giuseppe Fiorentino³, Cristina Coppola¹, Umberto Dello Iacono⁴, Anna Pierri¹, Roberto Tortora⁵, Giuseppina Marsico¹, Monica Mollo¹, Anna Concas², Rossella Ascione⁶, Gabriella Deiana⁷, Piera Romano⁸

¹Università di Salerno, ²Università di Cagliari, ³Accademia Navale di Livorno, ⁴Università della Campania 'L. Vanvitelli', ⁵Università di Napoli 'Federico II', ⁶Istituto d'Istruzione Superiore "A. Tilgher" di Ercolano (NA), ⁷Istituto d'Istruzione Superiore "Primo Levi" di Quartu S.Elena (CA), ⁸Liceo Scientifico Statale "Mons. B. Mangino" di Pagani (SA)

Questa relazione è stata preparata per i partecipanti al Seminario Nazionale. È un documento ancora in bozza che sarà rivisto anche tenendo conto dei contributi dei controrelatori e dei partecipanti.

Si prega di non diffonderlo.



Sommario

Introduzione	4
1 Teorie dell'apprendimento	6
1.1 Teoria dell'attività	6
1.1.1 I principi base della Teoria dell'Attività.....	6
1.1.2 Un modello di sistema di attività.....	8
1.2 Expansive Learning	9
1.2.1 Radici teoriche dell'expansive learning.....	10
1.2.2 Il principio della doppia stimolazione	11
1.2.3 Il principio dell'ascesa dall'astratto al concreto	12
1.3 Il modello della spirale espansiva.....	12
2 Strumenti metodologici per il dispositivo didattico	14
2.1 Interventi formativi.....	14
2.2 'Sceneggiare' la collaborazione: gli script	14
2.2.1 Il concetto di 'script': dalla psicologia cognitiva alla psicologia dell'educazione	15
2.2.2 Processi socio-cognitivi nell'apprendimento collaborativo.....	15
2.2.3 L'apprendimento collaborativo in matematica.....	16
2.3 Il concetto di orchestrazione.....	16
2.3.1 L'orchestrazione nella ricerca educativa basata sulla tecnologia	16
2.3.2 L'orchestrazione nel ricerca in didattica della matematica	17
2.4 L'azione congiunta	18
3 Metodologia della ricerca	19
3.1 Il contesto del progetto	19
3.2 Primo ciclo espansivo.....	19
3.3 Secondo ciclo espansivo.....	21
3.4 Terzo ciclo espansivo	21
4 Il dispositivo didattico	22
4.1 Il concetto di competenza/e in matematica.....	22
4.2 La competenza argomentativa	24
4.2.1 Storytelling e problemi-storia in matematica	25
4.2.2 Linguaggi e comunicazione in matematica	26
4.3 Il problema matematico scelto.....	27
4.3.1 Un possibile percorso didattico	27

5 Primo Disegno	30
5.1 Principi di design.....	30
5.2 Micro-design: ruoli e organizzazione didattica	30
5.3 Macro design: il flusso degli episodi.....	31
5.4 Il problema-storia	32
5.4.1 Introduzione.....	33
5.4.2 La squadra investigativa	33
5.4.3 Arrivano gli alieni 1.....	34
5.4.4 Arrivano gli alieni 2.....	36
5.4.5 Arrivano gli alieni 3.....	38
5.4.6 Arrivano gli alieni 4.....	39
5.4.7 Arrivano gli alieni 5 e Arrivano gli alieni 6	39
5.4.8 Arrivano gli alieni 7.....	40
5.5 Implementazione del primo disegno.....	40
5.6 Sperimentazione del primo disegno	41
5.7 Variante del primo disegno e note implementative	41
5.7.1 Modifiche agli episodi	42
5.7.2 Modifiche all'implementazione.....	42
5.8 Sperimentazione della variante del primo disegno.....	43
5.9 Alcuni risultati di analisi del primo disegno.....	43
5.9.1 Interazioni discorsive online, argomentazione e dimostrazione.....	43
5.9.2 La prospettiva della Social Network Analysis per l'analisi delle interazioni.....	46
5.10 Riflessioni sul primo disegno	48
6 Secondo Disegno	50
6.1 Inside-out: viaggio nella mente di un problem-solver.....	50
6.2 I nuovi ruoli: i personaggi e le funzioni cognitive del problem solving.....	50
6.3 Nuovo script di secondo livello: lo schema dell'episodio	52
6.4 La nuova modalità di partecipazione: Attori e Osservatori	52
6.5 Riflessione in itinere sui ruoli.....	53
6.5 Altre modifiche rispetto al primo disegno	55
6.6 Implementazione del secondo disegno	56
6.7 Sperimentazione del secondo disegno.....	57
6.8 Alcuni risultati di analisi del secondo disegno	57
6.8.1 L'influenza dei ruoli nella collaborazione ai fini del raggiungimento dell'obiettivo	57
6.8.2 Come la partecipazione da Osservatore aiuta l'appropriazione del ruolo	59

6.9 Riflessioni sul secondo disegno.....	62
7 Terzo disegno.....	63
7.1 La storia: il nuovo disegno della meta-narrazione matematica	63
7.2 Riflessione e valutazione collettiva: narrazione e meta-narrazione matematica	64
7.3 Autovalutazione sui ruoli.....	65
7.4 Valutazione individuale.....	66
7.5 Strumenti digitali specifici.....	66
7.6 Implementazione del terzo disegno	66
7.7 Sperimentazione del terzo disegno	69
7.8 Alcuni risultati di analisi del terzo disegno	69
7.8.1 Strumenti digitali come mediatori visuali	69
7.8.2 L'interazione tra i pari e con il docente nella fase di esplorazione.....	71
8 Re-inquadramento dispositivo didattico.....	74
8.1 Il dispositivo didattico come intervento formativo.....	74
8.2 Il dispositivo didattico e i sistemi di attività.....	75
8.3 Il dispositivo didattico e i principi cardine dell'expansive learning	76
8.4 Il dispositivo didattico e l'orchestrazione.....	76
8.4.1 L'orchestrazione tecnologica.....	77
8.4.2 L'orchestrazione di voci multiple.....	77
9 Il ruolo del docente.....	78
9.1 L'esperienza 'aumentata' del docente nel DIST-M.....	78
9.2 Il coinvolgimento di docenti e studenti	79
9.3 Una riflessione sull'episodio di valutazione collettiva	82
9.3.1 Esempi di feedback e valutazione di gruppo	83
10 Sintesi e sviluppi futuri.....	86
10.1 L'architettura metodologica del DIST-M.....	86
10.2 Il ruolo della tecnologia.....	88
10.3 Quadri sinottici del DIST-M.....	90
10.4 Verso un meta-modello	91
Bibliografia.....	92

Introduzione

La ricerca in Didattica della Matematica degli ultimi vent'anni ha sempre proceduto secondo una dialettica stretta tra la ricerca di base, sia teorica che sperimentale, e la pratica didattica. Si possono identificare alcune principali componenti delle ricerche in Didattica della Matematica (Bartolini-Bussi, 2001) alle quali la comunità dei ricercatori italiani ha dato un contributo riconosciuto a livello internazionale: una componente epistemologica o di analisi del contenuto (ricerche basate sulla organizzazione concettuale della disciplina); una componente sperimentale (l'azione per una concreta innovazione nella classe), una componente cognitiva (l'analisi dei processi individuali e collettivi, come osservazione e modellizzazione di processi di laboratorio) e una componente didattica (l'analisi dell'interazione e del ruolo dell'insegnante). L'interazione tra le componenti e la partecipazione attiva degli insegnanti/sperimentatori costituiscono la peculiarità e l'originalità di tali ricerche italiane. Il nostro contributo si inserisce in questo contesto di studi.

In questo seminario vogliamo proporre e discutere con la comunità di tutti i ricercatori e gli insegnanti interessati gli obiettivi, l'impostazione teorica, metodologica e tecnologica, i risultati della ricerca condotta nell'ambito del progetto PRIN 2015¹ "Digital Interactive Storytelling in Mathematics: a social competence-oriented approach". Il progetto, sviluppatosi nell'arco di tempo 2017-2020, ha visto coinvolto un gruppo di ricercatori in didattica della matematica, in psicologia dell'educazione, in ambito tecnologico legati all'educazione e insegnanti-ricercatori.

Nella prospettiva di integrare alcuni aspetti della ricerca negli ambiti della didattica della matematica, della psicologia dell'educazione e dell'insegnamento/apprendimento digitale online, abbiamo tenuto conto e integrato tre punti di vista: l'attenzione crescente nell'insegnamento/apprendimento della matematica verso un approccio contestualizzato basato sulle competenze, la cui efficacia richiede un buon equilibrio tra narrazione e pensiero logico-scientifico; l'enfasi che le teorie della psicologia dell'educazione danno al successo dell'apprendimento come risultato di un processo che è sia sociale, attraverso la comunicazione e l'interazione tra pari, sia individuale, attraverso l'interiorizzazione dei concetti; il ruolo sempre più importante che gli ambienti digitali stanno assumendo nell'istruzione, con particolare riguardo alle opportunità educative offerte dall'insegnamento/apprendimento online.

La complessità degli elementi messi in gioco, dovuti all'integrazione di diverse prospettive, ha richiesto la definizione di un opportuno quadro teorico che fondasse il nostro lavoro, tenendo presente i diversi elementi che hanno ispirato il progetto (storytelling, ambiente digitale, interazione con l'ambiente e interazione sociale). La ricerca è stata condotta attraverso un processo iterativo di più cicli espansivi che, a partire da una prima problematizzazione di alcuni aspetti della pratica didattica ordinaria, ha portato a definire e concretizzare orizzonti didattici innovativi, solo parzialmente immaginati a inizio del Progetto.

Parte di questo documento è una riformulazione corale di quanto prodotto nei vari lavori dal gruppo di ricerca. Una presentazione del Progetto per chi volesse avere un'idea prima, durante o dopo la lettura della relazione che segue è sul sito: <https://sites.google.com/unisa.it/dist-m/>. La navigazione permette di accedere alle informazioni sul Progetto, sui partecipanti e collaboratori e fornisce gli

¹ Progetto di Ricerca di Interesse Nazionale – Bando 2015 - Prot. 20155NPRA5 Durata: 5 febbraio 2017 - 5 febbraio 2020.

elementi di base per la definizione e la riproducibilità di attività basate sulla metodologia del Digital Interactive Storytelling in Matematica anche in modalità DAD.

Ringraziamo il Comitato Scientifico e Organizzatore del Seminario Nazionale per averci offerto questa preziosa occasione di riflessione, confronto e discussione sui temi del Progetto, anche nell'ottica di possibili sviluppi sia nella ricerca sia nella pratica scolastica.

1 Teorie dell'apprendimento

1.1 Teoria dell'attività

La Teoria dell'Attività si inserisce nella tradizione vygotkiana di cui ne reinterpreta l'eredità attraverso tre generazioni di studiosi e ricercatori. Più precisamente, si inserisce nell'approccio storico-culturale che Cole ha sistematizzato a partire dagli studi di Vygotskij, Leont'ev e Lurja. È proprio per evidenziare l'importanza della dimensione storico-culturale che questo approccio è stato denominato Teoria dell'Attività Storico-Culturale (Cultural Historical Activity Theory, spesso abbreviato con l'acronimo CHAT).

Il concetto chiave è quello di *attività*, che viene intesa come qualcosa caratterizzata da *interazione* (è un'azione nel mondo) e *intenzionalità* (l'azione risponde a uno scopo). È importante sottolineare che è un processo, che mette in relazione un *soggetto* e un *oggetto*, che si influenzano a vicenda e così entrambi sono trasformati dall'attività stessa (ad es. se è vero che le abilità matematiche influenzano il modo di risolvere un problema matematico, è anche vero che la risoluzione di problemi matematici contribuisce a formare le abilità matematiche).

Il concetto alla base della teoria dell'attività è che tutti i processi psicologici si sviluppano nell'attività e l'azione, mediata dagli strumenti culturali, rappresenta l'unica unità di analisi possibile.

1.1.1 I principi base della Teoria dell'Attività

Una sistematizzazione del quadro della Teoria dell'Attività sviluppato da Leont'ev è stata fatta da Kaptelinin and Nardi (2006), basandosi su quanto fatto da Wertsch (1981), identificando alcuni principi cardine che di seguito elenchiamo

- a) La Teoria dell'Attività è *object-oriented*
- b) Strutturazione gerarchica dell'attività
- c) Mediazione
- d) Internalizzazione e interiorizzazione
- e) Sviluppo dell'attività

e descriviamo brevemente.

a) **La Teoria dell'Attività è *object-oriented*.**

Gli oggetti motivano e dirigono le attività e tutte le attività umane sono dirette ai loro oggetti. Questo principio è strettamente legato al concetto chiave di *relazione "soggetto-oggetto"*. L'oggetto ha una duplice sfaccettatura: da un lato ha un proprio significato *oggettivo*, che nasce dalle interazioni con le altre entità presenti nel mondo (compreso il soggetto); dall'altro lato, assume un significato *soggettivo* cioè determinato dall'uso che il soggetto ne fa. Il principio dell'*orientamento all'oggetto* afferma che intorno ad esso le attività sono coordinate e in essi le attività si cristallizzano quando le attività sono complete.

Leont'ev usa il termine '*predmet*' (предмет, traducibile con termini come oggetto, materia, argomento, soggetto) che include nel termine 'oggetto non solo l'entità oggettivamente esistente ma implica la rilevanza di quell'entità rispetto a certi scopi o interessi. (Kaptelinin, 2014).

b) Strutturazione gerarchica dell'attività

L'*attività* è un costrutto di alto livello, in genere di tipo collaborativo, che è guidato da un *motivo* orientato all'oggetto. L'attività è in cima a una gerarchia dove sono previsti ulteriori due componenti: le *azioni* e le *operazioni*. Mentre l'oggetto di un'attività non è sempre chiaro ai partecipanti, le azioni sono intraprese consapevolmente e intenzionalmente per raggiungere degli *obiettivi* che servono a realizzare l'oggetto. Le azioni sono attuate mediante una serie di operazioni, spesso inconsapevoli, generate dall'azione stessa. Tali operazioni, che rappresentano le *modalità* attraverso cui si realizza l'azione, sono automatiche ed indipendenti dalle caratteristiche dell'attività stessa, azioni di routine che utilizzano gli strumenti disponibili (Figura 1.1).

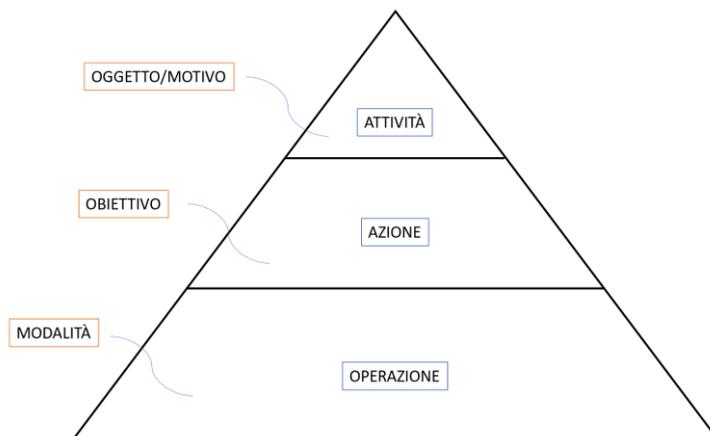


Figura 1.1. Strutturazione gerarchica dell'attività

c) Mediazione

L'interesse per la mediazione proviene dalla scuola storico-culturale di Vygotskij. La mediazione è la dimensione primaria che distingue l'essere umano: ogni interazione con il mondo è mediata da strumenti che, nella visione di Leont'ev, permette di appropriarsi di forme socialmente sviluppate di agire nel mondo. Il focus di Leont'ev sulla mediazione è stato rivolto ai mezzi che mediano un'attività orientata all'oggetto nel suo complesso.

d) Internalizzazione e interiorizzazione

Questo principio assume che le attività (umane) sono costituite da due componenti, una interna ed una esterna, che si influenzano continuamente e si modificano l'una con l'altra.

I concetti di *internalizzazione* ed *esternalizzazione* possono essere ridefiniti in un contesto di attività sociali. Nel caso di un'attività inizialmente distribuita, cioè portata avanti da più persone, può avvenire un processo di internalizzazione nel momento in cui un individuo si appropria di quell'attività "sociale" e poi la porta avanti individualmente. Di contro, perché l'attività di un individuo possa essere ridistribuita tra più persone, è necessario un processo di esternalizzazione. Le dimensioni di interno/esterno e individuale/sociale sono strettamente correlate.

e) Sviluppo dell'attività

Questo principio si riferisce al fatto che per comprendere le attività bisogna sempre monitorarne i cambiamenti e analizzarne lo sviluppo nel tempo. In questo senso lo sviluppo dell'attività ha più a che fare con una strategia metodologica.

1.1.2 Un modello di sistema di attività

Nel corso delle tre evoluzioni della Teoria dell'attività verso la Teoria dei sistemi di attività e la Teoria delle reti di attività, si passa dalla modellizzazione classica vygotskiana (Figura 1.2) al triangolo complesso (Figura 1.3), in cui vengono inclusi ruoli, comunità e divisione del lavoro.

Il triangolo classico esplicita il fatto che l'interazione tra soggetto e oggetto è mediata da strumenti che aiutano il soggetto a costruire significati. Questo modello non dà conto delle azioni collettive; per questo motivo Engeström aggiunge il nodo 'comunità', composta dagli individui che condividono lo stesso oggetto, e dentro la quale si esplicita la dimensione sociale dell'azione del soggetto. Con l'aggiunta di questo nuovo nodo, come accadeva per la relazione soggetto-oggetto, ognuna delle nuove relazioni soggetto-comunità e comunità-oggetto assume i propri specifici mezzi di mediazione. La relazione soggetto-comunità è mediata dalle 'regole', che costituiscono i principi o le condizioni (esplicite o implicite) secondo cui si sviluppano le azioni nel sistema di attività. La relazione comunità-oggetto è mediata dalla 'divisione del lavoro', che si riferisce alla divisione orizzontale dei compiti tra i membri della comunità e alla divisione verticale in base allo status e al potere (Zucchermaglio, 1996).

Il triangolo classico viene quindi esteso come in Figura 1.3.

L'oggetto è il 'problem space' a cui l'attività è diretta. L'oggetto viene convertito in risultato attraverso artefatti, strumenti o segni. Va inoltre sottolineato che l'oggetto è duplice: un *oggetto generalizzato*, cioè inteso nel suo significato socialmente accettato e condiviso, e un *oggetto specifico*, cioè connesso al senso personale, di uno specifico soggetto, in uno specifico momento e in una data attività (Engeström & Sannino, 2010, p.6).

Il nuovo modello prevede, inoltre, un 'risultato' del sistema di attività nel suo complesso, che consiste nel risultato di una trasformazione dell'oggetto dovuta all'attività e che può essere utilizzato da altri sistemi di attività.

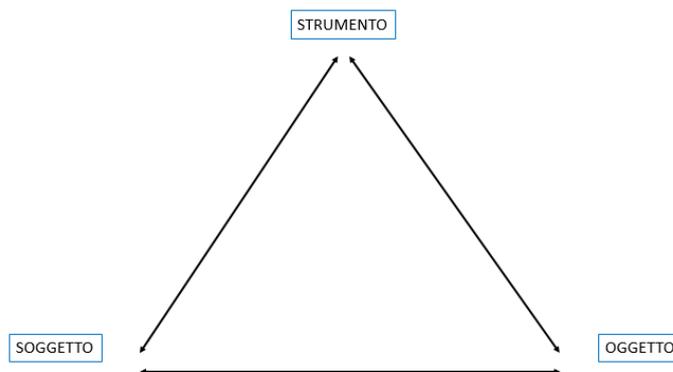


Figura 1.2. Il Triangolo di Vygotskij

modello multidimensionale, in cui oltre alla dimensione studente con la dicotomia individuo-comunità, ci sono altre tre dimensioni che riguardano come viene inteso l'apprendimento:

- processo che crea e trasforma la cultura piuttosto che come processo che trasmette e conserva la cultura;
- sviluppo orizzontale relativo a scambio e ibridazione tra diversi contesti culturali e standard di competenza piuttosto che sviluppo verticale che segue scale di competenza uniformi;
- processo che porta alla formazione di conoscenze e concetti teorici piuttosto che acquisizione e creazione di conoscenze e concetti empirici.

La teoria dell'*expansive learning* non è basata né sulla metafora dell'acquisizione, né su quella della partecipazione, ma su una metafora propria che è quella dell'espansione. Gli studenti imparano qualcosa che non è ancora lì: costruiscono un nuovo oggetto e concetto per la loro attività collettiva, e implementano questo nuovo oggetto e concetto nella pratica.

La metafora dell'espansione deriva dalla considerazione che le modalità tradizionali di apprendimento si occupano di compiti in cui i contenuti da apprendere sono noti in anticipo da coloro che progettano, gestiscono e implementano vari programmi di apprendimento. Tuttavia, esse non sono sufficienti quando interi sistemi di attività collettive, come i processi lavorativi e le organizzazioni, hanno bisogno di ridefinire se stessi in un processo continuo di ottimizzazione. (Engeström, 1999; Engeström & Sannino, 2010).

Il bisogno sociale di un apprendimento espansivo nasce anche dalla crescita della produzione sociale o produzione tra pari (Benkler, 2006 in Engeström & Sannino, 2010) che utilizza il potenziale collaborativo e partecipativo del Web 2.0.

1.2.1 Radici teoriche dell'*expansive learning*

Alla base dell'*expansive learning* si possono individuare 8 idee teoriche cardine, di cui sei vengono dalla scuola russa (Vygotskij, Leont'ev, Il'enkov, Davydov), a cui se ne aggiungono altre due dovute a Bateson e Bachtin.

1. Leont'ev distingue *azioni* e *attività*, e questa distinzione emerge come conseguenza della divisione del lavoro. Un'attività collettiva si riproduce, generando azioni apparentemente simili. Tuttavia nell'attività c'è un cambiamento continuo e a volte drammaticamente discontinuo: nuove attività derivano da azioni che manifestano le contraddizioni interne della forma precedente dell'attività in questione. In questo senso, l'*expansive learning* si caratterizza come movimento dall'azione all'attività.
2. Il concetto di Vygotskij di *zona di sviluppo prossimale*. Quello che originariamente si riferiva alla distanza tra il livello di sviluppo effettivo - determinato dalla risoluzione indipendente di problemi - e il livello di sviluppo potenziale - determinato dalla risoluzione di problemi sotto la guida di un adulto, o in collaborazione con coetanei più capaci - viene ridefinito in termini di apprendimento e sviluppo a livello di attività collettive. La zona di sviluppo prossimale diventa lo spazio di transizione espansiva dalle azioni alle attività.
3. Essendo un'applicazione della Teoria dell'Attività, la teoria dell'*expansive learning* è *object-oriented* (cfr. sezione 1.1.1).
4. Essendo la Teoria dell'Attività una teoria dialettica, un ruolo chiave è giocato dal concetto dialettico di *contraddizione*. Le contraddizioni interne all'oggetto di un'attività sono viste come sorgente di movimento e cambiamento e quindi sono la forza che guida la trasformazione dell'oggetto stesso (Sannino & Engeström, 2018).

5. Il metodo dialettico di *ascendere dall'astratto al concreto*, sviluppato da Davydov. Nell'attività di apprendimento l'idea semplice iniziale viene trasformata in un oggetto complesso, in una nuova forma di pratica e l'apprendimento porta alla formazione di concetti teorici. In questo quadro *astratto* significa *parziale* rispetto a un tutto e un'astrazione cattura la più piccola e semplice unità di un sistema interconnesso (cfr. sezione 1.2.3). L'estensione di questo principio dà vita a un modello come ciclo ideale tipico di *expansive learning* che è un dispositivo concettuale euristico (cfr. sezione 1.3).
6. Il principio della *doppia stimolazione* di Vygotskij, che si basa sulla centralità dell'agentività del soggetto, della sua capacità di cambiare il mondo e il proprio comportamento. Questo principio si concretizza nel fornire al soggetto, oltre al problema iniziale, un ulteriore stimolo che il soggetto può utilizzare per reinterpretare il problema (cfr. sezione 1.2.2). Basandosi su questo principio, l'*expansive learning* definisce i cosiddetti *interventi formativi* (cfr. sezione 2.1).
7. Il concetto di *Apprendimento III* e il concetto associato di *doppio vincolo* di Bateson. Il primo è essenzialmente l'attività di *expansive learning*, nel senso che gli individui apprendono qualcosa che non hanno mai visto prima. La nozione di doppio vincolo deve essere interpretata come "un dilemma sociale, socialmente essenziale, che non può essere risolto (solo) attraverso azioni individuali separate – ma come un contesto nel quale le azioni cooperative congiunte possono far emergere una nuova forma di attività" (Engeström, 1987, in Engeström & Sannino, 2010, p.5).
8. L'idea di Bachtin (1982) delle *voci multiple*. Nell'*expansive learning* significa che tutte le voci contrastanti e complementari dei vari gruppi e strati del sistema devono essere coinvolte e utilizzate, non solo accademiche, ma anche di gente comune. L'*expansive learning* è intrinsecamente un processo a più voci di dibattito, negoziazione e orchestrazione.

1.2.2 Il principio della doppia stimolazione

La *doppia stimolazione* consiste nel fornire ai partecipanti un primo stimolo (o set di stimoli) che è il problema stesso, dunque con un *goal* che i partecipanti non possono raggiungere con le sole capacità già in loro possesso; successivamente viene fornito un secondo set di stimoli (ad es. una domanda, un segno, un'indicazione) che crea un conflitto. Il punto chiave è sempre creare una zona di tensione tra quello che i partecipanti già sanno e quello che dovrebbero raggiungere. Il secondo stimolo (o set di stimoli) non consiste nel fornire qualcosa di direttamente collegato alla risoluzione del problema, quanto piuttosto degli stimoli esterni anche indirettamente collegati alla soluzione. I partecipanti incorporano gli stimoli esterni nella situazione problematica e con il loro aiuto l'individuo acquisisce il controllo della sua azione e costruisce una nuova comprensione del problema iniziale. Attraverso questo processo, l'individuo trasforma una situazione che ha un significato non ancora chiaro in una situazione che ha un significato più chiaro.

Il processo di costruzione del significato, però, non può essere controllato rigidamente dall'esterno, ma richiede la volontà dell'individuo. Sannino ha ripreso il concetto di *volition* (intenzionalità, volontà) che era presente nella forma originaria di Vygotskij ma poi trascurato nelle successive trasposizioni nel contesto occidentale. Il concetto di *volition* è individuale: è il soggetto che esprime una volontà di azione (Vygotskij non ha mai denigrato la dimensione soggettiva complementare a quella sociale). Secondo Vygotskij, la doppia stimolazione emerge come un processo che coinvolge due apparati. L'apparato 1 consiste nel prendere la decisione di agire in un certo modo con l'aiuto di un motivo ausiliario (per esempio, l'orologio che suona ad una certa ora). L'apparato 2 consiste nell'attuare questa decisione.

Il secondo set di stimoli può tanto consistere in stimoli (mezzi) esterni, preparati dagli sperimentatori e messi a disposizione dei partecipanti mentre stavano affrontando il compito problematico dato, quanto in stimoli che i partecipanti applicano spontaneamente coinvolgendo mezzi ausiliari specifici come simboli individuati da loro stessi (Sannino, 2011).

La doppia stimolazione è il meccanismo fondamentale che attiva l'agentività del soggetto. Pertanto, la doppia stimolazione è la porta di accesso alle funzioni mentali superiori e parte da un conflitto (di obiettivi, sentimenti, volontà, propositi, etc.).

Gli studi di Vygotskij sulla doppia stimolazione riguardano l'individuo ma con questo non si vuole negare l'azione della collettività. Le funzioni psicologiche compaiono prima sul livello interpsicologico, quindi tra gli individui in una azione collaborativa, e dopo sul livello intrapsicologico, quando cioè tali funzioni vengono interiorizzate dall'individuo (Engeström, 2011 in Morselli, 2019).

1.2.3 Il principio dell'ascesa dall'astratto al concreto

È un metodo che permette di cogliere l'essenza di un concetto, riproducendo la logica del suo sviluppo storico attraverso l'emergere e la risoluzione dei conflitti che lo hanno generato. Un concetto nasce come idea semplice e poi viene gradualmente arricchita e trasformata nella pratica (cioè in un sistema concreto di relazioni multiple in continuo sviluppo ed espansione).

Nel pensiero teorico-dialettico, l'astratto rappresenta l'idea (l'unità) più piccola e più semplice di tutto il sistema. L'ascesa dall'astratto al concreto si realizza attraverso specifiche azioni epistemiche o di apprendimento che, secondo Davydov, sono (Engeström & Sannino, 2010): 1) trasformare le condizioni del compito per rivelare la relazione universale dell'oggetto in studio, 2) modellare la relazione identificata in una forma materiale, grafica o letterale, 3) trasformare il modello della relazione per studiare le sue proprietà nella loro "veste pura", 4) costruire un sistema di compiti particolari che vengono risolti in un modo generale, 5) monitorare l'esecuzione delle azioni precedenti, 6) valutare l'assimilazione del modo generale che viene fuori dalla risoluzione del compito di apprendimento dato.

Il metodo dell'ascesa dall'astratto al concreto porta alla costruzione di un concetto teorico (che quindi sarebbe il concreto). L'emergere di questo concetto teorico può avvenire senza l'aiuto di un 'istruttore', ma piuttosto può emergere dalla situazione e dagli ostacoli incontrati nella situazione.

1.3 Il modello della spirale espansiva

A partire dalle azioni epistemiche o di apprendimento individuate da Davydov nel principio di ascesa dall'astratto al concreto, Engeström ha elaborato un modello che si evolve come una spirale (Figura 1.5). Le comunità professionali, attraverso la metodologia indicata dalla spirale, riescono a immaginare, sviluppare e concretizzare nuovi orizzonti nelle loro pratiche, espandendosi costantemente in una zona di sviluppo prossimale collettiva.

La spirale espansiva consta di sette azioni epistemiche che descriviamo di seguito (Engeström & Sannino, 2010):

- 1) *Problematizzare*: mettere in discussione, criticare o rigettare aspetti di pratiche accettate o conoscenze note.
- 2) *Analizzare*: analizzare la situazione attraverso una trasformazione mentale, discorsiva o pratica della situazione per trovare le cause o i meccanismi esplicativi; si possono fare due

tipi di analisi per spiegare la situazione: storico-genetica, basata sul tracciamento delle sue origini e della sua evoluzione; reale-empirica, basata sulla costruzione di un quadro delle sue relazioni sistemiche interne.

- 3) *Modellizzare*: costruire un modello esplicito e semplificato della nuova idea che spiega e offre una soluzione alla situazione problematica;
- 4) *Esaminare*: esaminare il modello, lavorarci, applicarlo in modo da capire se e come funziona e coglierne potenzialità e limiti.
- 5) *Implementare*: implementare il modello attraverso applicazioni pratiche, arricchimenti ed estensioni concettuali.
- 6) *Riflettere*: riflettere e valutare il processo.
- 7) *Consolidare*: consolidare i suoi risultati del processo in una nuova forma stabile di pratica.

Il modello del ciclo espansivo è rappresentato dalla Figura 1.5, dove le frecce sempre più spesse indicano l'espansione dello scopo e della partecipazione delle varie azioni.

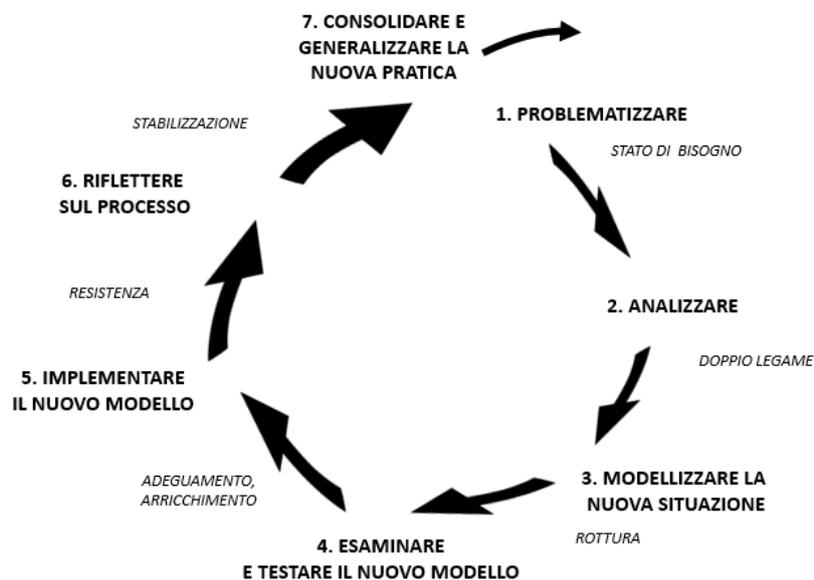


Figura 1.5. Il modello del ciclo espansivo ripreso da Engeström & Sannino, 2010.

A differenza del modello di Davydov che si sviluppa e si riferisce al contesto scolastico dove i contenuti curriculari sono stabiliti a priori da opportuni esperti, il modello di Engestrom valica i confini del contesto scolastico dell'apprendimento. Questo sembra essere alla base dell'introduzione dell'azione epistemica del *Problematizzare*, che manca in Davydov, e della sostituzione dei passi 4) e 6) di Davydov (cfr. sezione 1.2.3) che risultano adeguate in contesto scolastico con le azioni epistemiche di *Implementare* e *Consolidare*, volte alla produzione di pratiche culturalmente nuove.

Val la pena di sottolineare che il ciclo espansivo non va inteso come modello universale con fasi fissate. Piuttosto è un dispositivo concettuale euristico.

2 Strumenti metodologici per il dispositivo didattico

2.1 Interventi formativi

Nel solco delle idee di Vygotskij che aprono la pista a un tipo di ricerca rivolto alla promozione del cambiamento attraverso modelli che collegassero teoria e pratica, Engeström sviluppa l'idea di *interventi formativi*, basati sul principio di doppia stimolazione. Questi si oppongono ai *design experiments* o *design research* (prime formulazioni risalgono a Brown, 1992 e Collins, 1992), che aderiscono a una visione lineare tipica del pensiero *gold standard*. L'assunto della *design research* è che i ricercatori progettano il disegno dell'esperimento avendo in mente i principi e gli obiettivi e portando avanti la realizzazione e eventuali refinimenti. Gli insegnanti si limitano a implementare il disegno, dando per scontato l'esito finale del successo dell'apprendimento da parte degli studenti. In questo tipo di processo, si tende ad avere il controllo di tutte le variabili in gioco, senza problematizzare gli assunti di partenza. La sperimentazione serve solo a rifinire il disegno in modo tale da eliminare discordanze con i risultati attesi.

Al contrario invece gli interventi formativi si inseriscono in una nuova metodologia in cui non c'è il controllo totale e rigido da parte dei ricercatori di tutte le variabili. Qui entra in gioco l'autonomia del partecipante.

Le caratteristiche principali che distinguono gli interventi formativi dai *design experiments* sono:

1. *Punto di partenza*: a differenza degli interventi lineari in cui i ricercatori conoscono contenuti e obiettivi sin dall'inizio e in maniera precisa, negli interventi formativi i partecipanti affrontano un problema, intrinsecamente contraddittorio, che viene analizzato ed espanso dando vita ad un nuovo concetto, i cui contenuti non sono del tutto noti a priori dai ricercatori;
2. *Processo*: a differenza degli interventi lineari in cui i partecipanti sono attesi implementare l'intervento senza resistenza, negli interventi formativi i partecipanti sono coinvolti in processi di continua negoziazione dei contenuti e del corso degli interventi stessi; in questo senso il principio di doppia stimolazione è un meccanismo supporta i partecipanti all'autonomia di azione e a prendersi carico del processo;
3. *Risultati*: a differenza degli interventi lineari in cui controllando tutte le variabili si mira ad ottenere una soluzione standardizzata che funziona nello stesso modo anche in altri contesti, negli interventi formativi si mira a generare nuovi concetti che possono essere utilizzati in altri contesti come cornice per la progettazione di nuove soluzioni localmente appropriate e anche favorire il coinvolgimento dei partecipanti;
4. *Ruolo del ricercatore*: a differenza degli interventi lineari dove il ricercatore tende a controllare tutte le variabili, negli interventi formativi il ricercatore mira a provocare e sostenere un processo di trasformazione espansivo gestito dagli stessi partecipanti.

2.2 'Sceneggiare' la collaborazione: gli script

È noto che l'efficacia della collaborazione nell'apprendimento non è scontata: nella collaborazione raramente gli studenti riescono a mettere in pratica forme di interazione efficaci e a indirizzare l'interazione al compito che stanno affrontando, senza essere supportati esplicitamente da una guida. Per questo, molti sono gli studi che si possono trovare focalizzati sulla strutturazione e regolazione dell'interazione. Questa necessità di pre-strutturare e regolare i processi sociali e cognitivi è accentuata negli ambienti dove la collaborazione è mediata dal computer (Weinberger et al., 2009).

È nato così il termine *scripting* (o *scripted*) *collaboration*, per indicare l'apprendimento collaborativo che viene strutturato dall'esterno sia in contesti online che in presenza.

2.2.1 Il concetto di 'script': dalla psicologia cognitiva alla psicologia dell'educazione

Questo concetto nasce in psicologia cognitiva e fa riferimento a uno schema di memoria interna corrispondente a una sequenza di azioni che definiscono una ben nota situazione (Schank & Abelson, 1977). Qui ogni attore ha uno specifico ruolo e delle specifiche azioni da fare: "a script is a guide to the roles and steps people follow for what to do and how to do it in a specific social situation" (trad. nostra: uno script è una guida ai ruoli e ai passi che una persona deve seguire per sapere cosa fare in una specifica situazione sociale e come farlo). Una persona sviluppa un certo script estraendo gli elementi comuni che ritrova quando partecipa più volte a situazioni del medesimo tipo. Acquisito uno script, questo viene attivato ogni volta che la persona si trova in una situazione simile e lo guida nel da farsi in quella situazione.

I ricercatori in psicologia dell'educazione hanno preso in prestito il concetto di *script* dandogli un significato leggermente diverso: consiste in una *sceneggiatura* (*scripting*) delle interazioni, esternamente imposta, che regola ruoli e azioni, che gli studenti coinvolti devono assumere e svolgere, tale da sollecitare specifici processi cognitivi, socio-cognitivi e metacognitivi, necessari perché l'apprendimento abbia successo.

Una differenza sostanziale tra le due visioni consiste nel fatto che nel contesto didattico gli script sono creati da persone diverse (docente, facilitatore, designer) da quelle che li implementano (studenti) e sono esplicitamente imposti a questi ultimi. In ottica vygotskiana, col tempo e attraverso la pratica sociale, l'aspettativa è quella di un'interiorizzazione degli script esterni da parte dello studente, quindi un passaggio da etero-regolazione ad auto-regolazione.

2.2.2 Processi socio-cognitivi nell'apprendimento collaborativo

Nell'ambito delle teorie socio-costruttiviste, assumono un'importanza notevole i *processi socio-cognitivi* che sono quelli indotti durante attività che supportano pensiero e apprendimento collaborativo nella costruzione condivisa di conoscenza. A differenza dei processi cognitivi e metacognitivi che si riferiscono al livello individuale, i processi socio-cognitivi sono processi sociali, ma tutti e tre insieme sono coinvolti in contesti di apprendimento collaborativo. Durante l'interazione da un lato ogni studente risente delle azioni degli altri, che vanno a influenzare il proprio pensiero e la propria conoscenza, attivando così un processo cognitivo individuale; dall'altro lato tutti gli studenti sono coinvolti in un processo congiunto di negoziazione di significati e di costruzione di conoscenza, che è un processo socio-cognitivo. Alla fine di un'attività collaborativa, quello che viene interiorizzato dal singolo studente è sia la nuova conoscenza co-costruita sia le abilità cognitive messe in gioco dai vari membri del gruppo durante l'attività, che possono poi essere usate in successive situazioni di apprendimento simili.

I processi metacognitivi (monitoraggio, regolazione e valutazione del proprio pensiero e apprendimento) assumono un ruolo principale nell'apprendimento collaborativo poiché gli studenti regolano mutuamente il loro apprendimento congiunto, e questo può riverberarsi anche a livello individuale.

Un'attività veramente collaborativa è un'attività che induce processi socio-cognitivi.

2.2.3 L'apprendimento collaborativo in matematica

Gli studi sull'apprendimento collaborativo in matematica evidenziano che l'efficacia dei gruppi collaborativi si basa su ruoli dedicati ad uno specifico obiettivo. Pesci (2004, 2009) individua i seguenti:

- a) *l'orientato al compito*: è responsabile del raggiungimento del miglior risultato;
- b) *l'orientato al gruppo*: è responsabile del clima comunicativo del gruppo;
- c) *il relatore*: fa da portavoce delle soluzioni proposte dal suo gruppo;
- d) *la memoria*: è responsabile della verbalizzazione scritta dei risultati raggiunti,
- e) *l'osservatore*: è responsabile dell'osservazione del processo interattivo nel gruppo.

A questi se ne aggiunge uno ulteriore, nato nell'ambito di un approccio di tipo *inquiry* (Arzarello e Soldano, 2016):

- f) *l'avvocato del diavolo*, colui che mette in discussione ciò che i compagni propongono, pone domande su quanto i compagni affermano, insinua dubbi.

Pesci sottolinea come l'assegnazione dei ruoli tra i membri del gruppo incoraggi la collaborazione e l'interdipendenza, convogli le capacità individuali nel lavoro comune e riduca alcuni comportamenti inefficaci, come la non partecipazione al lavoro col gruppo o la prevaricazione di uno dei componenti del gruppo sugli altri. Inoltre evidenzia che lo sviluppo delle risorse degli studenti richiede che essi facciano esperienza di tutti i ruoli per poterne comprendere i compiti connessi.

2.3 Il concetto di orchestrazione

2.3.1 L'orchestrazione nella ricerca educativa basata sulla tecnologia

Dillenbourg (2013) si riferisce all'orchestrazione come una forma di gestione (processo di regolazione) di scenari pedagogici e tecnici integrati, tra cui da un lato le attività, che possono essere in presenza o online, e dall'altro lato gli strumenti che consentono la realizzazione delle attività. A suo parere, l'orchestrazione non riguarda solo l'apprendimento, ma anche vari vincoli estrinseci (tempo, spazio, disciplina, curriculum,...). Questa è una delle caratteristiche che distingue l'orchestrazione dalla progettazione didattica, oltre al fatto che si riferisce a un gruppo di studenti piuttosto che ad un individuo e che il controllo dell'insegnante prevale su quello del sistema. Dillenbourg afferma che l'orchestrazione rafforza il potenziale degli insegnanti nel dirigere le attività in classe e le tecnologie *'permettono di vedere cose altrimenti invisibili'* (p.491).

In risposta alla posizione di Dillenbourg, gli studiosi Kollar & Fischer (2013) sostengono che la metafora dell'orchestra musicale può essere efficace se si riferisce non solo agli aspetti di gestione in tempo reale delle attività e degli eventi ma anche all'intero processo alla base della creazione della musica, che include anche gli aspetti di composizione e direzione. Così si riferiscono all'orchestrazione come al *'processo di creazione, adattamento e messa in atto di uno scenario di apprendimento potenziato dalla tecnologia in condizioni di classe complesse'* (ibidem, p. 508), individuando l'orchestrazione come un processo in cui si distinguono tre sotto-processi: comporre, organizzare, dirigere. Comporre consiste nella definizione/descrizione che i ricercatori/sviluppatori fanno di uno scenario, costituito da risorse e strumenti, specificando come vengono combinati e utilizzati dall'insegnante e dagli studenti. Organizzare è ciò che l'insegnante fa adattando lo scenario

ai vincoli della sua classe (ad es. vincoli legati alla possibilità di avere disponibili alcuni strumenti tecnologici). Dirigere è realizzare, mettere in atto lo scenario nella propria classe sotto la guida dell'insegnante. Dal loro punto di vista, ciò a cui Dillenbourg si riferisce come orchestrare significa in realtà dirigere, mentre essi evidenziano come tutti e tre i processi siano da considerarsi essenziali perché l'apprendimento potenziato dalla tecnologia (Technology Enhanced Learning- TEL) sia efficace in classe. Infine, sottolineano che l'obiettivo principale della TEL è quello di facilitare l'apprendimento degli studenti, che dovrebbe essere sempre preso in considerazione, quindi c'è un forte shift del focus dall'insegnamento all'apprendimento.

Un'ulteriore concettualizzazione dell'orchestrazione riguarda il modo in cui gli studenti sono coinvolti nelle attività: individuale, piccoli gruppi, grandi gruppi. L'attività può prevedere più di una modalità di coinvolgimento o i vincoli reali possono chiedere di cambiare quelle progettate. Così, Weinberger & Papadopoulos (2016) introducono l'idea di orchestrazione di diverse modalità sociali di apprendimento. Gli studenti possono imparare individualmente o in modo collaborativo, in piccoli e grandi gruppi. Orchestrare le modalità sociali di apprendimento significa organizzare l'apprendimento scegliendo una di esse o fondendone alcune. Essi sostengono che la transizione da una modalità sociale all'altra dovrebbe essere attentamente pianificata dall'insegnante tenendo conto di come ciascuna di esse aiuti gli studenti a raggiungere gli obiettivi globali di apprendimento. L'insegnante è riconosciuto come il centro di un complesso ambiente tecnologico, dove la tecnologia richiede di essere orchestrata e può facilitare l'orchestrazione.

2.3.2 L'orchestrazione nel ricerca in didattica della matematica

Nella didattica della matematica, Trouche (2004) propone il termine 'orchestrazione strumentale' in un ambiente di apprendimento computerizzato (computer learning environment - CLE). Uno strumento comprende un artefatto (cioè un oggetto dato) insieme a schemi di utilizzo socialmente costruiti dal soggetto. Il processo che dà origine a uno strumento è chiamato genesi strumentale. Trouche evidenzia che i complessi artefatti presenti nel CLE producono un insieme di strumenti. Il processo di genesi strumentale così come l'articolazione degli strumenti in CLE non può essere lasciato agli studenti stessi, ma richiede la guida dell'insegnante, che può essere fatta attraverso l'orchestrazione strumentale.

In questo filone, Drijvers e colleghi (2009) propongono un modello a tre livelli: configurazione didattica, cioè l'impostazione dell'ambiente di insegnamento dotato di artefatti (strumenti tecnologici e compiti); modalità di utilizzo, cioè il modo in cui l'insegnante utilizza la configurazione didattica per raggiungere i suoi obiettivi didattici; performance didattica, riferendosi alle decisioni ad hoc e run-time prese dall'insegnante durante l'insegnamento.

All'interno della Teoria della Mediazione Semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), oltre all'accezione di orchestrazione riferita a Trouche in relazione all'uso di artefatti, viene utilizzata anche un'accezione relativa alla discussione matematica (Bartolini Bussi, Boni, & Ferri, 1995), definita come "una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento e apprendimento" (p. 7). All'interno di un'attività, l'insegnante, che ha in mente il motivo generale (cfr. sezione 1.1.1), guida i suoi studenti nella costruzione della conoscenza matematica monitorando le interazioni tra loro e stimolando la verbalizzazione e le discussioni generali. Le verbalizzazioni che avvengono in un'attività sono significative nella misura in cui risultano adeguate *'a rappresentare una parte del dramma giocato dall'umanità in relazione a quella particolare conoscenza'* (Bartolini Bussi et al., 1995, p. 7). Ciò che caratterizza un dramma è la presenza di diverse voci, nel senso di Bachtin (1982).

Ogni voce può essere messa in relazione con un ruolo nel dramma. Inoltre, affinché tutte le voci siano riconosciute, è necessario prevedere tempi e modi della loro articolazione, senza il “monologo” dell’insegnante o una voce che monopolizza tutta la discussione, mettendo a tacere quelle divergenti. Tuttavia, la voce dell’insegnante è comunque fondamentale, dal momento che rappresenta la cultura di riferimento. L’insegnante funge da guida assicurando l’articolazione delle diverse voci. Lo fa in diversi modi: unendosi ad una discussione nel flusso dell’attività di classe o influenzando lo sviluppo della discussione attraverso i suoi interventi.

2.4 L’azione congiunta

Sensevy e colleghi (2005) associano al termine *azione* il qualificativo *congiunta* intendendo che un’azione sia congiunta quando coinvolge due (o più) partecipanti che agiscono con un obiettivo comune. Questi partecipanti possono occupare posizioni relativamente simili (due insegnanti della stessa classe e di discipline diverse, stando in ambito scolastico) o posizioni diverse (come insegnante e alunno, dirigente e insegnante, ...). Un tale atto congiunto epistemico non può essere descritto senza allo stesso tempo descrivere l’azione dell’insegnante, l’azione dello studente e il modo in cui queste due azioni mettono in atto uno specifico procedere verso la conoscenza in gioco. L’aggettivo ‘congiunta’ non deve far pensare ad un’azione che sia necessariamente concordata, condivisa, efficace e pertinente, né necessariamente a un’azione che per il solo fatto di essere congiunta abbia successo o produca l’apprendimento voluto.

Un altro punto di vista interessante dato dal costrutto di azione congiunta è sulle pratiche di insegnamento, in quanto si sostiene che, contrariamente ad un gran numero di azioni abituali, l’azione didattica è “preparata” e tale preparazione esercita un’influenza significativa sull’azione stessa. Di conseguenza per cercare di comprendere l’attività didattica non ci si può fermare al qui e ora dell’azione in atto ma si deve risalire alle sue origini. Le decisioni dell’insegnante dipendono da queste origini e nell’attività in atto sono descritte in termini di dialettica tra quello che l’insegnante esplicita o non esplicita agli studenti in relazione alle conoscenze in gioco. Questa dialettica è una delle cause dell’origine di modifiche nella gestione dell’attività rispetto alle previsioni nell’azione di preparazione (Sensevy, 2011 e Sensevy, 2012).

3 Metodologia della ricerca

3.1 Il contesto del progetto

L'idea progettuale nasce dalla necessità di integrare istanze urgenti che arrivano da diversi ambiti:

- insegnamento/apprendimento della matematica: i quadri di riferimento delle valutazioni internazionali pongono sempre più l'accento sulla necessità di formare individui che siano attivi risolutori di problemi (OECD, PISA 2015). La *mathematical literacy* intesa come la capacità di un individuo di usare la matematica in contesto richiede lo sviluppo di competenze matematiche (Niss, 2003, Magenes & Maracci, 2015) e la necessità che la scuola offra esperienze didattiche ricche che ne favoriscano il raggiungimento (PISA 2015, p. 5);
- psicologia dell'educazione: si afferma con sempre maggiore forza che l'apprendimento è il risultato di un processo sia sociale, attraverso la comunicazione e l'interazione tra pari e con l'esperto, sia individuale, attraverso l'interiorizzazione dei concetti;
- avvento del Web 2.0: lo sviluppo di Internet come piattaforma in cui l'utente non è solo fruitore ma diventa autore e collaboratore ha portato un cambiamento sociale epocale fortemente caratterizzato dalla regola dello 'sfruttamento dell'intelligenza collettiva' (Needleman, 2007), che ha cambiato la nostra vita e non può non investire anche il mondo dell'educazione.

Tutti questi aspetti ci hanno portato ad aprire una nuova direzione di ricerca, quasi inesplorata, che suggerisce studi volti ad indagare l'uso di piattaforme online nell'insegnamento/apprendimento della matematica, assumendo un approccio orientato allo sviluppo di competenze in contesto, come risultato di un processo sociale. Da qui l'idea germinale che ha dato nome al progetto che mirava alla progettazione di un Digital Interactive Storytelling in Matematica (DIST-M) basato su un approccio vygotkiano, secondo il quale l'apprendimento è prima socializzato e poi interiorizzato. L'uso di una storia, che permette l'integrazione del pensiero narrativo e logico-scientifico, sembra funzionale sia ad un apprendimento basato sulle competenze sia allo sviluppo di capacità di uso contestualizzato (nel senso di PISA). L'accento sul digitale e sull'interazione è fortemente connesso allo sviluppo della società determinato dal Web 2.0.

Il gruppo di ricerca ha visto sin da subito il coinvolgimento di diversi attori: ricercatori in didattica della matematica, ricercatori in psicologia dell'educazione, ricercatori in ambito tecnologico legati all'educazione, insegnanti. La metodologia di ricerca seguita è stata quella dell'uso di più cicli espansivi di Engeström (cfr. sezione 1.3). Nel corso del progetto possiamo individuare tre cicli espansivi principali che andiamo di seguito a descrivere.

3.2 Primo ciclo espansivo

Il punto di partenza (*Problematizzare*) del primo ciclo espansivo è stato quello di voler introdurre nella scuola, cioè in un ambito di apprendimento formale, esperienze didattiche basate su una metodologia nuova che fosse al contempo funzionale tanto al raggiungimento di obiettivi didattici individuati necessari per il cittadino quanto più al passo con la rivoluzione tecnologica cominciata col Web 2.0.

L'analisi, condotta insieme da ricercatori (matematica, psicologia, TEL) e insegnanti, basata su dati che vengono dall'esperienza sul campo e su risultati della ricerca nei diversi ambiti, ci ha portato a chiarire meglio il significato che abbiamo voluto dare alle parole chiave che hanno dato nome al progetto. La metafora dello *storytelling* viene declinata come contesto metodologico nel quale si

sviluppa il processo di insegnamento/apprendimento. Fin dall'inizio dei tempi, la narrazione è stata usata come un metodo fondamentale per il trasferimento delle conoscenze. Nell'insegnamento può rendere l'ambiente di apprendimento più piacevole e la conoscenza più accessibile, coinvolgendo gli studenti sul livello non cognitivo delle emozioni e dell'immaginazione. Questo aspetto di coinvolgimento è stato ancora più accentuato con l'introduzione del *digital storytelling*, che in didattica è stato prevalentemente declinato come pratica che vede gli studenti costruire storie focalizzate su un certo argomento utilizzando vari media (ipertesti, immagini, video, suoni, ...). All'interno del progetto, l'idea di digital storytelling ha portato alla definizione di un contesto come problema-storia implementato attraverso fumetti digitali. Gli studi in didattica della matematica hanno mostrato che l'aspetto narrativo dei cosiddetti problemi-storia di per sé non è sufficiente a promuovere apprendimento, anzi addirittura può essere di ostacolo (Zan, 2012). Tra gli elementi chiave individuati da Zan per favorire l'efficace integrazione di pensiero narrativo e pensiero logico c'è l'esigenza che la storia presenti una situazione che evolve nel tempo, in cui sono presenti personaggi animati, e che sia 'aperta', cioè che lo studente possa contribuire con la propria risoluzione del problema a proseguire/chiudere la storia. Questo elemento ci ha portato a meglio definire il significato da attribuire all'aggettivo *Interactive* che diamo a storytelling: l'interazione dello studente (con i pari, con la piattaforma, con l'esperto...) deve servire al completamento della storia.

Gli elementi emersi dall'analisi sono stati l'impalcatura sulla quale è stato costruito il primo modello di DIST-M. Per la sua definizione, sono state fatte alcune scelte generali e alcune scelte specifiche.

Le scelte generali hanno riguardato l'organizzazione didattica:

- l'uso di fumetti digitali per creare una storia in cui contestualizzare la situazione problematica;
- la storia in forma di canovaccio per garantire che sia una storia 'aperta' nella quale gli studenti possono intervenire e costruire la propria versione della storia;
- la storia come successione di episodi per garantire un'evoluzione temporale;
- la definizione della modalità *immersiva* di partecipazione degli studenti: ogni studente è un personaggio della storia e agisce per costruire una versione originale della storia;
- le modalità della collaborazione: ogni studente ha un ruolo predefinito in accordo al quale si muove rispetto alla risoluzione del problema;
- la modalità di partecipazione: gli studenti della classe sono divisi in gruppi che lavorano in parallelo come attori della storia;
- scelta delle funzionalità tecnologiche abilitanti.

Le scelte particolari hanno riguardato la matematica:

- focus sulla competenza argomentativa, con occhio anche alla competenza comunicativa. Volendo il progetto avere un impatto sul sistema scolastico italiano, siamo andati a guardare come le istanze del quadro PISA fossero state recepite all'interno delle Indicazioni Nazionali;
- definizione delle caratteristiche del task adeguate al focus;
- scelta della piattaforma Moodle.

Attraverso il confronto tra ricercatori e tra ricercatori ed insegnanti, è stato fatto un primo esame a priori della robustezza del modello e si sono definite le modalità di implementazione e di sperimentazione di un primo pilot.

Le prime sperimentazioni sono state seguite da ulteriori fasi di discussione e riflessione che hanno portato a stabilizzare alcuni risultati e a problematizzare altre questioni che hanno portato ad un secondo ciclo espansivo.

3.3 Secondo ciclo espansivo

Il secondo ciclo espansivo è partito con la problematizzazione dei seguenti punti:

- ruoli degli studenti: il focus si è spostato da ruoli dettati dalle teorie sull'apprendimento collaborativo a ruoli definiti in base alle funzioni cognitive che intervengono nei processi di problem solving;
- riflessione individuale in itinere sui ruoli: l'esperienza dei nuovi ruoli va nella direzione di favorire la costruzione dell'identità matematica dello studente e a tal fine lo studente viene supportato in una riflessione sul significato dei ruoli che ha impersonificato;
- modalità della collaborazione: nella fase di collaborazione simmetrica, tra pari, si è introdotta la possibilità di interazione con l'esperto, attraverso uno specifico canale;
- modalità di partecipazione: i gruppi di studenti sono divisi nella storia in Attori ed Osservatori (cfr. sezione 6.4).

3.4 Terzo ciclo espansivo

Il terzo ciclo espansivo è partito con la problematizzazione dei seguenti punti:

- strutturazione più fine della meta-narrazione matematica, che ha portato alla ridefinizione degli episodi della storia;
- inserimento del DIST-M nelle attività curriculari e quindi con la considerazione della necessità di prevedere una fase di valutazione della narrazione matematica che gli studenti collaborativamente hanno prodotto. Un ulteriore obiettivo è che gli studenti diventino anche consapevoli della meta-narrazione matematica, cioè che si appropriino l'oggetto di ogni episodio, non limitandosi al solo risultato;
- ulteriore riflessione, in termini di autovalutazione a posteriori, sui ruoli giocati per favorirne l'appropriazione da parte dello studente.

Nei prossimi capitoli verrà illustrato il dispositivo didattico. In particolare, sarà presentato il problema matematico e i vari disegni corrispondenti ai cicli espansivi.

4 Il dispositivo didattico

In questo capitolo introduciamo tutte le scelte che sono alla base del dispositivo didattico progettato e implementato.

4.1 Il concetto di competenza/e in matematica

Partiamo subito con l'andare a definire cosa intendiamo per 'competenza'. Competenza è la capacità di mettere in moto e di coordinare le risorse interne possedute e quelle esterne disponibili per affrontare positivamente una tipologia di situazioni sfidanti (Pellerey, 2004).

Ci poniamo la domanda sulla natura delle competenze e condividiamo la posizione di Pellerey (2011) che tende "a non contrapporre sapere e competenza, bensì a considerarle come forme complementari di pensiero" (Pellerey, 2011, p.40). Egli inoltre sostiene la necessità di prendere in considerazione il carattere soggettivo e quello relazionale della competenza e l'impossibilità di costruire competenze se non a partire da conoscenze e saperi posseduti. Il carattere relazionale della competenza

implica l'esistenza dell'altro e di altro: delle situazioni sfidanti, con i loro caratteri oggettivi, più o meno ben percepiti e ben inquadrati, ma ben presenti nella loro durezza ed esigenza; delle persone più esperte, un riferimento con cui confrontarsi continuamente, che sono in grado di giudicare la qualità delle scelte e delle azioni; del contesto organizzativo e della pratica umana nella quale si è inseriti [...]. La prima relazione è tra *il soggetto e il compito* da svolgere o la situazione sfidante.[...] La seconda relazione è tra *il soggetto e il contesto sociale e collaborativo* nel quale si è inseriti [...] La terza relazione si evidenzia se teniamo presente come sia *il soggetto* che agisce, sia *il compito* da svolgere siano inseriti *in un contesto culturale e pratico* che evolve nel tempo [...]. (Pellerey, 2011 pp. 43-44)

Affrontare il problema della costruzione di competenze comporta la necessità di indagare e conoscere le condizioni che possono favorire o impedire tale costruzione.

La qualità della competenza di una persona non può essere riferibile alla sua manifestazione in un caso specifico e isolato [...] Un compito, una sfida non può essere colta solo in riferimento a se stessi, bensì tenendo conto del contesto pratico, sociale o culturale in cui tale compito o sfida si colloca. La percezione che uno studente viene ad avere del compito assegnato tiene conto della pratica didattica nella quale è inserito. Se prevale un insegnamento che sollecita risposte standardizzate, questi si appresterà a manifestare la sua competenza in tale direzione; se invece prevale un orientamento più flessibile e aperto, egli dovrà mettere in gioco risorse interne assai più impegnative e coerenti con le esigenze della richiesta. (Pellerey, 2011 p. 45)

Indagare le condizioni, secondo Pellerey, significa anche guardare all'agire pratico e ciò conduce ad affrontare uno studio finalizzato a mettere in luce anche

quanto non è possibile racchiudere in leggi e principi di natura scientifico-tecnologica, perché legato a una costruzione personale di conoscenza, competenza e senso, che deriva da una riflessione sull'esperienza. (...) la pratica evocata (...) è una pratica complessa, culturalmente e linguisticamente segnata, nella quale il soggetto non è solo recettore ma attore, anche quando appare muto e immobile". (Pellerey, 1998, p. 5-6.).

Per quello che riguarda più specificamente la Matematica, un caposaldo di studi su cosa significhi possedere competenza in matematica è stato il progetto danese KOM Project (KOM: Competencies

and the Learning of Mathematics). Sebbene la parola ‘competenza’ richiami anche aspetti affettivi e di volizione, Niss & Højgaard (2019), partendo dalla definizione di *competence* come “*someone’s insightful readiness to act appropriately in response to the challenges of given situations*” (p. 12). la considerano solo dal punto di vista cognitivo, anche se il riferimento all’azione sottintende un prendere decisioni consapevoli ed esplicite. Analogamente, la parola ‘sfida’ richiama aspetti soggettivi e socio-culturali, ma gli autori cercano di riportarla in un quadro oggettivo precisando che si tratta di sfide matematiche, cioè di sfide dove in qualche modo è in gioco la matematica (non che necessariamente le situazioni di partenza siano già di per sé situazioni matematiche), dando la seguente definizione: “*Mathematical competence is someone’s insightful readiness to act appropriately in response to all kinds of mathematical challenges pertaining to given situations*” (Niss & Højgaard, 2019, p. 12).

Gli stessi autori declinano la competenza matematica in alcune sue componenti fondamentali – *competency*, che attivano gli individui rispetto a una specifica sfida matematica. Più precisamente “*A mathematical competency is someone’s insightful readiness to act appropriately in response to a specific sort of mathematical challenge in given situations*” (Niss & Højgaard, 2019, p. 14). Le 8 componenti individuate sono suddivise in due cluster:

1) Porre e rispondere a domande *in e per mezzo* della matematica

- a) Pensiero matematico: si riferisce alla capacità di sapersi muovere tra i costrutti tipici del sapere matematico (definizioni, teoremi, etc) e di avere familiarità con la natura delle domande e delle risposte attese in matematica;
- b) Gestione di problemi matematici: riguarda la formulazione di problemi matematici così come la capacità di valutare criticamente proposte di soluzioni proprie o altrui;
- c) Modellazione matematica: è focalizzata sull’uso e l’analisi di modelli matematici in situazioni extra-matematiche;
- d) Ragionamento matematico: è la capacità focalizzata sulla produzione (in forma orale o scritta) e sull’analisi di argomenti e giustificazioni a supporto di affermazioni matematiche.

2) Gestione del linguaggio, dei costrutti e degli strumenti della matematica

- a) Rappresentazioni in matematica: riguarda la capacità non solo di rappresentare in un dato sistema semiotico ma anche al passaggio tra diversi sistemi semiotici;
- b) Formalismo e simboli matematici: si riferisce alla capacità di usare e capire espressioni e trasformazioni simboliche;
- c) Comunicazione matematica: riguarda la capacità di un individuo di essere coinvolto in comunicazione matematica multimodale (scrittura, oralità, gesti) e multivariata (diversi registri linguistici);
- d) Aiuti e strumenti matematici.

È evidente che le 8 componenti non possono essere l’una completamente separata dall’altra, per questo gli autori propongono una loro rappresentazione come petali di un fiore che si sovrappongono in parte (Figura 4.1).

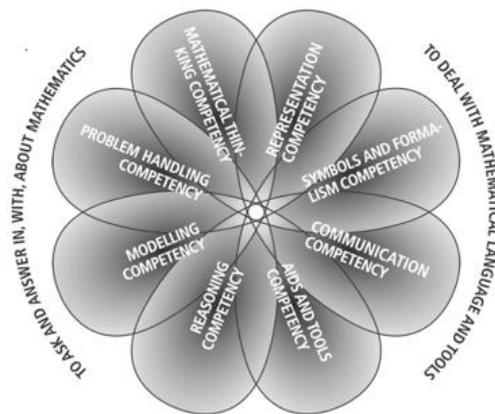


Figura 4.1. Le 8 competenze matematiche adattato da Niss (2003)

4.2 La competenza argomentativa

Le Indicazioni Nazionali del 2010 fin dal primo ciclo mettono in evidenza il ruolo della matematica per lo sviluppo di competenze argomentative:

Le conoscenze matematiche contribuiscono alla formazione culturale delle persone e delle comunità, sviluppando le capacità di mettere in stretto rapporto il “pensare” e il “fare” e offrendo strumenti adatti a percepire, interpretare e collegare tra loro fenomeni naturali, concetti e artefatti costruiti dall’uomo, eventi quotidiani. In particolare, la matematica dà strumenti per la descrizione scientifica del mondo e per affrontare problemi utili nella vita quotidiana; contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri. In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l’alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive. (...) La costruzione del pensiero matematico è un processo lungo e progressivo nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un’acquisizione graduale del linguaggio matematico. Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. Gradualmente, stimolato dalla guida dell’insegnante e dalla discussione con i pari, l’alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche, rappresentandole in diversi modi, conducendo le esplorazioni opportune, dedicando il tempo necessario alla precisa individuazione di ciò che è noto e di ciò che s’intende trovare, congetturando soluzioni e risultati, individuando possibili strategie risolutive. Nella scuola secondaria di primo grado si svilupperà un’attività più propriamente di matematizzazione, formalizzazione, generalizzazione (Indicazioni Nazionali per la Scuola dell’Infanzia e per il Primo Ciclo di Istruzione, MIUR, 2012 p. 49).

Questo viene ripreso anche nelle Indicazioni per i segmenti scolastici successivi:

Lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni) (Indicazioni Nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei, MIUR 2010, p. 434)

Per tutte le ragioni esposte, noi ci focalizziamo nella competenza di ‘reasoning’ che è cruciale per il pensiero matematico: partire da un quesito matematico, formulare congetture sulla sua risoluzione e argomentare sulla risposta trovata o ipotizzata fino a dimostrarne la ‘validità’ o a validarla.

La competenza di reasoning riguarda diversi aspetti del processo di argomentazione e giustificazione di enunciati matematici. In particolare, essa comprende la capacità di ideare e produrre in modo autonomo dimostrazioni matematiche e di trasformare possibili argomentazioni euristiche in dimostrazioni matematiche. (Magenes & Maracci, 2015, p. 647).

Pur focalizzandoci sulla competenza matematica, il nostro approccio si inquadra in un orizzonte più ampio, di apprendimento permanente, che prevede lo sviluppo di varie competenze, come definite dal Parlamento europeo e dal Consiglio dell’Unione europea (Raccomandazione del 18 dicembre 2006²).

In quest’orizzonte individuiamo quelle che sono di particolare interesse per il DIST-M (pp. 14 e seguenti):

- comunicazione nella madrelingua: “è la capacità di esprimere e interpretare concetti, pensieri, sentimenti, fatti e opinioni in forma sia orale sia scritta (comprensione orale, espressione orale, comprensione scritta ed espressione scritta) e di interagire adeguatamente e in modo creativo sul piano linguistico in un’intera gamma di contesti culturali e sociali, quali istruzione e formazione, lavoro, vita domestica e tempo libero”;
- competenza digitale: “consiste nel saper utilizzare con dimestichezza e spirito critico le tecnologie della società dell’informazione per il lavoro, il tempo libero e la comunicazione. Essa implica abilità di base nelle tecnologie dell’informazione e della comunicazione (TIC): l’uso del computer per reperire, valutare, conservare, produrre, presentare e scambiare informazioni nonché per comunicare e partecipare a reti collaborative tramite Internet”;
- imparare a imparare: “è l’abilità di perseverare nell’apprendimento, di organizzare il proprio apprendimento anche mediante una gestione efficace del tempo e delle informazioni, sia a livello individuale che in gruppo. Questa competenza comprende la consapevolezza del proprio processo di apprendimento e dei propri bisogni, l’identificazione delle opportunità disponibili e la capacità di sormontare gli ostacoli per apprendere in modo efficace (...)”;
- consapevolezza ed espressione culturale: “riguarda l’importanza dell’espressione creativa di idee, esperienze ed emozioni in un’ampia varietà di mezzi di comunicazione, compresi la musica, le arti dello spettacolo, la letteratura e le arti visive”.

4.2.1 Storytelling e problemi-storia in matematica

L’idea progettuale nasce sotto la metafora dello storytelling, che viene declinata come narrazione matematica a due livelli: come problema-storia, quindi narrazione dalla quale emergono i problemi matematici con cui gli studenti si trovano a confrontarsi, e come storia-matematica, cioè narrazione dei concetti matematici e delle loro relazioni che gli studenti costruiscono nel loro lavoro insieme.

I problemi-storia sono quelli in cui la struttura matematica viene calata in una situazione familiare per lo studente e assume la forma di una narrazione. Per comprendere la storia, lo studente deve far ricorso non solo al pensiero logico, che è quello che si occupa di spiegare le cose che accadono in una logica di tipo deduttivo, ma ad un altro tipo di pensiero che quello narrativo, che invece si

² <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/IT/TXT/PDF/?uri=CELEX:32006H0962&from=EN>

preoccupa di dare un senso alle cose, mettendo quindi in gioco intenzioni, desideri, convinzioni e sentimenti (Bruner, 1986). Perché la storia sostenga il processo risolutivo è necessario che la dimensione narrativa e quella logica siano ben integrate (Zan, 2012). Per ben modulare le due dimensioni nel testo del problema in modo che venga supportata la soluzione del problema, Zan suggerisce un modello, cosiddetto modello C&D (Contesto e Domanda), caratterizzato dai seguenti punti:

- c'è una storia: evoluzione temporale di una situazione, almeno un personaggio animato;
- c'è un collegamento naturale tra storia e domanda: personaggio con uno scopo e contesto da cui nasce in maniera naturale il problema matematico;
- la storia è ben strutturata: le parti del testo sono tra loro collegate, le informazioni hanno senso “narrativo”.

Zan sottolinea l'importanza che la domanda nasca naturalmente dalla necessità di raggiungere uno scopo per il personaggio della storia e, perché abbia senso, tale scopo non deve ancora essere stato raggiunto, cioè lo studente deve poter immaginare di poter incidere sulla storia con la sua risoluzione.

Guardando al lavoro del matematico, il legame tra matematica e narrazione è fondamentale in quanto la matematica, “non dice nulla, né a chi la inventa né a chi la ascolta se il suo senso non è raccontato in una storia” (Lolli, 2018). Comprendere la storia nel duplice senso che stiamo dando alla narrazione matematica è parte integrante del concetto di *Apprendimento III* che, riferito allo studente, ci porta a considerarlo come immerso in una attività di *expansive learning*, perché apprende ciò che non conosceva prima o in anticipo. L'apprendimento a scuola è una re-invenzione e per esprimere il senso dell'oggetto appreso o che si sta apprendendo, non si può che iniziare da una narrazione. E nella narrazione confluiscono obiettivi, intenzioni, conoscenze.

4.2.2 Linguaggi e comunicazione in matematica

Il pensiero, secondo Sfard (2001), è una forma di comunicazione e i linguaggi sono costruttori dei significati stessi. L'apprendimento diventa dunque la partecipazione a un particolare discorso che è il “discorso matematico”.

Secondo (2007), la verbalizzazione, indotta dal pensare ad alta voce o scrivere sul compito in esame, attiva un processo di riconcettualizzazione delle proprie conoscenze e quindi di per sé produce apprendimento. Farlo in gruppo permette al singolo di accedere al pensiero altrui, attivando così un processo di confronto che mette in moto altre pratiche quali *spiegare, mettere in discussione, argomentare*, etc.

Più in particolare, nel pensiero matematico avanzato, caratterizzato da concetti specialistici, nasce l'esigenza di utilizzare forme linguistiche specifiche. Gli studi di Ferrari (2021) su matematica e linguaggio sottolineano che lo sviluppo negli studenti di tali forme linguistiche non può ricondursi a sole questioni di forma (grammatica, sintassi) o legate a singole parole o espressioni (lessico, simboli), ma dev'essere costruito assumendo un approccio che metta al centro le funzioni dei linguaggi e consideri i testi anche nella loro globalità. Tra gli strumenti della linguistica, il costrutto di *registro*, inteso come varietà di uso del linguaggio, si rivela essere di particolare importanza, sia perché permette di spiegare la relazione tra linguaggio quotidiano e linguaggio matematico, sia perché permette di legare un testo al contesto in cui viene prodotto. Come riportato da Ferrari, una distinzione significativa è quella tra registri *colloquiali* e registri *evoluti*. I primi si riferiscono a quegli usi propri di situazioni in cui i partecipanti condividono il contesto e quindi possono ben interpretare anche testi incompleti (con informazioni sottintese) o possono replicare in maniera immediata per avere

chiarimenti, pertanto sono usati prevalentemente nella comunicazione orale in contesti informali. I secondi, invece, si riferiscono a quel tipo di comunicazione in cui il testo esplicita gran parte delle informazioni necessarie alla sua comprensione indipendentemente dal conoscere o meno il contesto in cui il testo è stato prodotto (ad es. comunicazione accademica), e quindi sono tipici della comunicazione scritta diretta a persone che possono essere lontane nel tempo e nello spazio. Le ricerche di Ferrari sottolineano come i registri che vengono utilizzati nella comunicazione matematica sono da considerarsi forme estreme dei registri evoluti.

4.3 Il problema matematico scelto

Il problema matematico è stato scelto in modo che fosse adatto a quanto detto fino ad ora, ovvero in modo che potesse supportare l'introduzione degli studenti alla modellazione algebrica e sviluppo di competenze argomentative e dimostrative. Il problema è il seguente (Iannece & Romano, 2008; Mellone & Tortora, 2015):

Scegli quattro numeri naturali consecutivi, moltiplica i due intermedi fra loro, moltiplica i due estremi, e sottrai i risultati. Che cosa ottieni?

Quello che vorremmo è far arrivare gli studenti a congetturare che il risultato è sempre 2 e a dimostrarlo, attraverso la rappresentazione algebrica della quaterna generica come $n+1$ $n+2$ $n+3$, la conversione della richiesta come $(n+1)(n+2) - n(n+2)$ e il trattamento di quest'ultima che porti a ottenere la costante 2.

4.3.1 Un possibile percorso didattico

Il problema è stato scelto anche perché è un'attività aperta che si presta per un (precoce) avvio all'algebra e può essere svolta e sviluppata in molte direzioni e con diversi gradi di approfondimento. Ad esempio, può essere generalizzato considerando quattro numeri naturali dispari (o pari) consecutivi o, più in generale, prendendo quattro valori consecutivi da una progressione aritmetica di ragione k . Il problema può essere utilizzato anche per promuovere riflessioni su concetti matematici, come il significato di "numeri consecutivi" o la densità dei numeri razionali in \mathbb{R} , e apre a questioni linguistiche e logiche, legate a termini come "tutti" e "sempre".

Un'attività di questo tipo, dunque, può essere utile a rafforzare conoscenze e abilità matematiche già possedute, trasformandole in competenze; consente di trattare numerosi argomenti di vari livelli scolastici e di far crescere abilità linguistiche, argomentative, di rappresentazione, di calcolo; consente di attivare la sequenza "*esplorazione, selezione dei dati osservati, congettura, verifica, dimostrazione*", ripetutamente e con i gradi di approfondimento che la situazione consente; è adatta all'alternanza di modalità di lavoro individuale, di piccolo gruppo e di grande gruppo e può supportare lo sviluppo di capacità di comunicazione attraverso il confronto.

Un possibile percorso che abbiamo disegnato, a partire dal problema iniziale, in base agli obiettivi didattici e ai piani di intervento del docente/tutor, è il seguente (Figura 4.2):

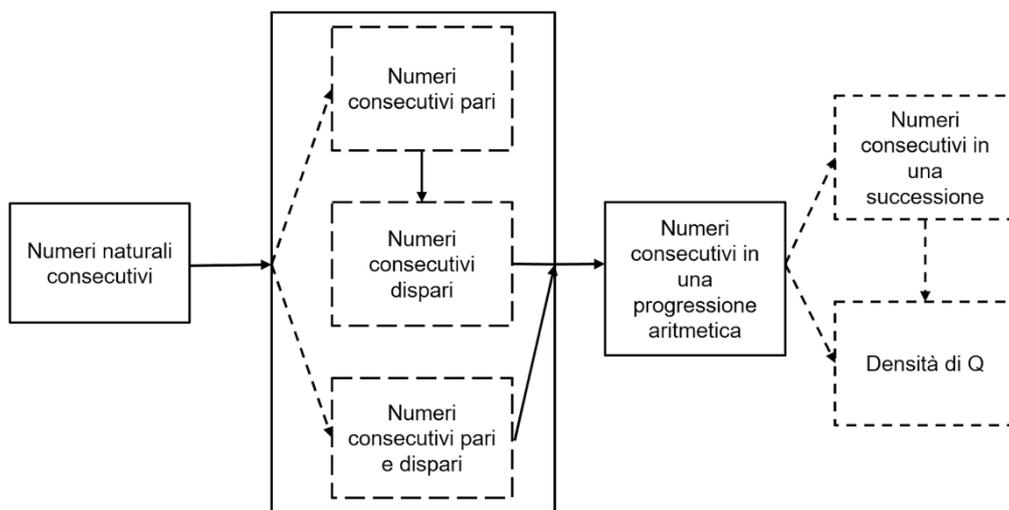


Figura 4.2. Disegno del percorso didattico

Il percorso disegnato non è lineare e può svilupparsi in direzioni diverse a seconda delle contingenze, come il curriculum della classe e le competenze degli studenti. Alcuni passi, mostrati con linee tratteggiate nella Figura 4.2, possono essere opzionali e supervisionati dal docente/tutor che gestisce al momento la conoscenza matematica che la classe sta costruendo.

Il gruppo di ricerca è partito con il focalizzarsi sui primi due blocchi, ovvero il problema iniziale sui numeri naturali consecutivi e successivamente sul passaggio ai numeri pari e dispari.

4.3.2 Analisi a priori

Un'analisi a priori del problema, sviluppata anche in base ad esperienze con attività simili con studenti di scuola secondaria di secondo grado (Tortora, 2012) ci ha fatto riflettere su diversi aspetti interessanti che si può decidere di osservare. Ad esempio si possono osservare le strategie degli studenti e, in particolare, i loro approcci a: traduzione algebrica, verifiche/dimostrazioni, generalizzazioni, ricerca di pattern, trasferibilità. Si possono osservare le strategie degli insegnanti e le loro convinzioni (sulla matematica, sull'insegnamento, sugli studenti, etc) o le modalità di lavoro in classe e il loro impatto sui risultati.

Passiamo in rassegna le strategie messe in atto generalmente, per ognuno dei blocchi del percorso in Figura 4.2.

Blocco 1 - Numeri naturali consecutivi: Prendete quattro numeri consecutivi; moltiplicate i medi fra loro e gli estremi fra loro; sottraete. Cosa si ottiene? Che succede se si prendono altri quattro numeri?

Tipicamente gli studenti partono con verifiche numeriche di vario tipo; provano successivamente a formulare la congettura: “La differenza è sempre 2” e passano a tentativi di dimostrazione della congettura. In questa fase non sorge di solito nessun dubbio sul “significato” di “numeri consecutivi”: se a e b sono consecutivi, allora $b = a + 1$. In realtà può non essere chiaro se questa sia la “definizione” di numeri consecutivi o se ne sia una proprietà caratteristica ed in questa fase potrebbe non essere importante approfondire questa distinzione, che potrebbe essere ripresa in seguito. Tuttavia spesso è propensione dell'insegnante spingere verso tale caratterizzazione (a e b sono consecutivi se e solo se $b = a + 1$), per la sua utilità ai fini del trattamento, e in particolare della dimostrazione della congettura. Questo è il motivo per cui spesso si liquidano come sbagliati o inadeguati i tentativi di alcuni studenti

di denotare con a b c d i quattro numeri consecutivi che nascono dal riferimento al senso della parola (in termini di relazione di ordine) e all'isomorfismo con l'ordinamento delle lettere dell'alfabeto.

Blocco 2 - Numeri pari consecutivi: Prendete quattro numeri pari consecutivi e ripetere il procedimento fatto nel blocco 1. Che cosa si osserva? Che cosa si può dimostrare?

Nel blocco 2 è interessante notare come spesso la rappresentazione dei quattro numeri pari consecutivi in una forma del tipo a , $a+2$, $a+4$, $a+6$; oppure $2n$, $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$, arriva immediatamente, specialmente da parte di quegli studenti che hanno rappresentato come a , $a+1$, $a+2$, $a+3$ i quattro numeri naturali consecutivi. Questo può essere interpretato come segno di due cose: (in modo implicito) il significato di consecutivi è presente negli studenti nella sua accezione più generale; l'aver tradotto in versione additiva il caso dei numeri naturali favorisce analogo traduzione nel caso dei pari.

La forma favorita di rappresentazione nel primo di questi due compiti è a , $a+2$, $a+4$, $a+6$, rispetto all'altra $2n$, $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$, certamente più fedele. Ma questa infedeltà è forse inconsapevolmente anticipatoria rispetto alla richiesta che sarà fatta al punto successivo. Sembra quasi come se l'attenzione alla natura di progressione aritmetica già emergesse prevalendo sulla "natura" dei numeri in gioco.

Blocco 3 - Numeri dispari consecutivi: Prendete adesso quattro numeri dispari consecutivi e ripetere il procedimento. Che cosa si osserva? Che cosa si può dimostrare?

Nel blocco 3, chi adotta la notazione $2n$, $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$ non sempre se la cava altrettanto bene a rappresentare i quattro dispari, ad esempio come $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$. Sarebbe interessante indagare perché: il sospetto è che il segno $+$ qui gioca per così dire due ruoli, come parte di un simbolo standard per un generico numero dispari, e come somma, per ottenere gli altri tre numeri a partire dal primo.

Gli altri blocchi non sono stati ancora progettati. Il percorso completo, come in Figura 4.2, potrebbe essere occasione per riflettere sul significato di "consecutivi" per scoprire che: tale significato è indipendente da una sottostante struttura algebrica; è intuitivo, ma la sua trascrizione e il suo relativo trattamento non sono affatto semplici; non sempre la parola ha significato, in particolare non ce l'ha sui numeri razionali; condizioni caratterizzanti per un concetto in un ambiente non si trasferiscono automaticamente in un ambiente diverso; al contrario un cambio di ambiente può dare luogo ad una differenziazione di un concetto apparentemente unico in due diversi, ciascuno meritevole di essere sviluppato.

5 Primo Disegno

5.1 Principi di design

Le considerazioni teoriche e le scelte specifiche che abbiamo esposto nei capitoli precedenti hanno ispirato alcuni principi di design, che sono stati alla base dell'architettura metodologica-tecnologica del DIST-M, e che elenchiamo di seguito:

- (P1) la storia evolve in forma di successione di episodi e gli episodi sono parte di una narrazione coerente;
- (P2) gli studenti agiscono come personaggi della storia mossi da uno scopo;
- (P3) il quesito matematico nasce *nella* storia;
- (P4) l'azione dello studente per il raggiungimento dello scopo è guidata da un ruolo che gli/le viene assegnato;
- (P5) la comunicazione tra i personaggi della storia avviene esclusivamente in forma scritta;
- (P6) ci sono spazi di comunicazione differenti a seconda dei registri linguistici che si vogliono usare.

5.2 Micro-design: ruoli e organizzazione didattica

In base ai principi (P2) e (P4), gli studenti sono immersi in una storia come personaggi e quindi lavorano in gruppo, ciascuno con un proprio ruolo.

I ruoli, che abbiamo individuato attraverso la re-interpretazione di quanto esistente in letteratura (cfr. sezione 2.2.3), sono:

- *Boss*: è orientato sia al compito sia al gruppo, si occupa del clima di partecipazione, focalizza l'attenzione del gruppo sulle azioni da svolgere in funzione dello scopo dell'episodio e del compito matematico; la responsabilità del successo matematico, invece, è a carico dell'intero gruppo;
- *Blogger*: è sia memoria che relatore, riassume e comunica all'esperto i risultati ottenuti da tutto il gruppo;
- *Peste*: agisce da "avvocato del diavolo" ponendo domande per verificare la solidità delle premesse e dei risultati ottenuti dal gruppo.

Visto il contesto tecnologico nel quale l'esperienza didattica si sviluppa, abbiamo ritenuto di introdurre un ulteriore ruolo, legato alla *digital literacy* (Albano e Dello Iacono, 2018):

- *Smanettone*: è l'informatico, orientato alla tecnologia, aiuta i compagni nell'utilizzo dei diversi strumenti tecnologici.

Pertanto l'organizzazione didattica prevede che la classe sia suddivisa in gruppi di quattro studenti, ciascuno dei quali assume uno dei ruoli sopra descritti. Naturalmente, non è sempre possibile ottenere tutti gruppi da quattro, in questo caso abbiamo scelto di fare qualche gruppo da cinque, duplicando il ruolo di *Peste* considerato particolarmente significativo in ogni processo matematico.

Ai ruoli giocati dagli studenti, si aggiunge un ruolo asimmetrico:

- *Esperto*: è l'esperto in senso vygotskiano, ed è ruolo assunto dall'insegnante di classe.

I gruppi fruiscono parte della storia separatamente e confluiscono in una discussione collettiva nell'episodio finale, orchestrata dall'esperto (cfr. sezione 2.3).

5.3 Macro design: il flusso degli episodi

Il percorso didattico disegnato (cfr. Figura 4.2) si sviluppa all'interno di una storia con episodi che dal punto di vista della narrazione matematica possono essere raggruppati in cicli che si ripetono secondo uno stesso schema (script di primo livello). All'inizio la storia prevede due episodi che hanno lo scopo di introdurre gli studenti nel contesto della storia (episodio Introduzione in Figura 5.1, cfr. sezione 5.4.1) e di immergersi come personaggi che ha delle specifiche caratteristiche (episodio Personaggi in Figura 5.1, cfr. sezione 5.4.2 e sezione 2.2.3).

Lo script di primo livello prevede tre fasi : Inquiry & Conjecture, Arguing & Proof, Summing up & Refining (Figura 5.1).

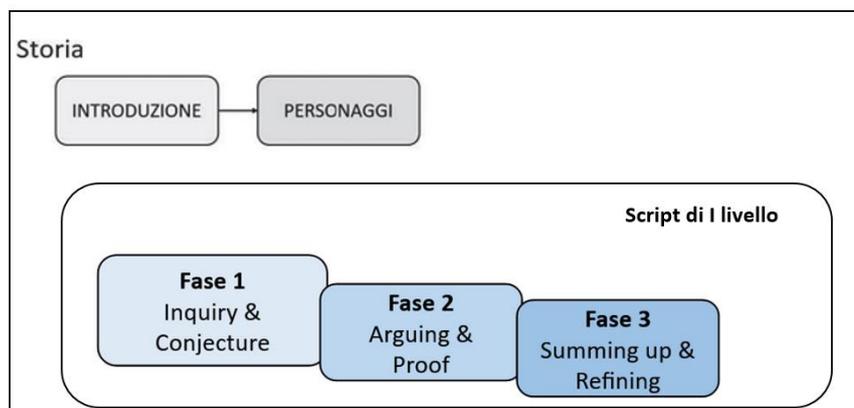


Figura 5.1. Schema dell'attività

La fase **Inquiry & Conjecture** (Figura 5.1) prevede l'esplorazione della situazione matematica. A partire da un evento che ha posto il problema matematico, attraverso l'indagine, lo studente arriva alla formulazione di una congettura personale che condivide con i compagni, giungendo ai primi ragionamenti a supporto (Figura 5.2). Nel caso del problema matematico scelto, ci si aspetta che lo studente identifichi le regolarità, le condizioni delle regolarità e i primi argomenti per la plausibilità della congettura prodotta.

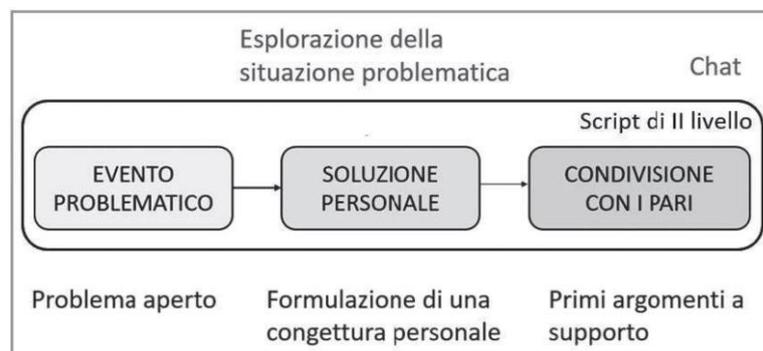


Figura 5.2. Soluzione personale e condivisione con i pari

A partire da quanto ciascuno ha trovato e condiviso, si apre un confronto tra pari che ha come obiettivo esplicito quello di formulare una congettura comune e di comunicarla, poi, all'esperto.

Mentre il confronto tra pari avviene in Chat, dove la comunicazione resta su un registro colloquiale, la comunicazione all'esperto avviene attraverso lo strumento Forum (Figura 5.3).

Questa scelta è stata fatta assumendo che lo strumento Forum, per la sua insita asincronicità, sia adatto ad accentuare e favorire la richiesta di produrre un testo espresso in un registro più evoluto (cf. principi (P5) e (P6) in sezione 5.1 e cfr. sezione 5.5). Questo episodio prevede che il Forum sia utilizzato solo per comunicare all'esperto (Gianmaria), il testo concordato dal gruppo, e questo compito è in capo a Blogger, pertanto in questa fase il Forum è visibile solo da Blogger.

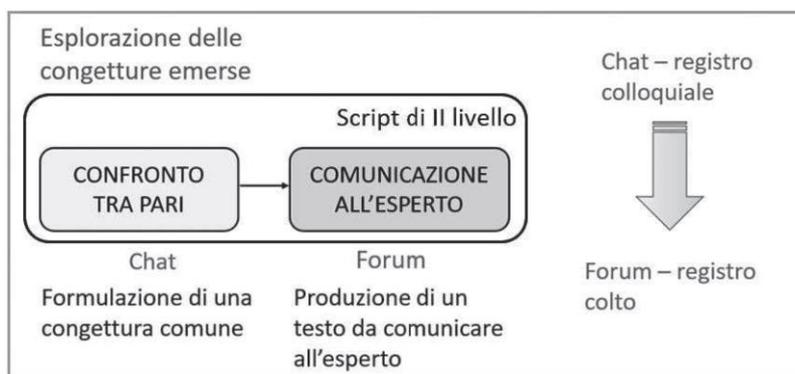


Figura 5.3. Contro tra pari e comunicazione all'esperto

La fase **Arguing & Proof** (Figura 5.1) coinvolge tutto il gruppo classe e porta, attraverso la discussione con l'esperto, a confrontare la congettura emersa nella fase precedente con una dimostrazione formale. L'esperto gestisce questa discussione con l'obiettivo di guidare gli studenti verso la costruzione di una dimostrazione. Il Forum adesso diventa visibile a tutti gli studenti che possono vedere non solo il testo inviato dal proprio gruppo, ma anche i testi inviati dagli altri gruppi. Il docente avvia un confronto sui diversi testi prodotti e orchestra una discussione matematica, allo scopo di supportare gli studenti nell'organizzazione degli argomenti prodotti in una catena deduttiva introducendoli così alla dimostrazione formale. L'uso del Forum rispetto alla Chat vuole sfruttare l'intrinseca asincronia della comunicazione scritta in un registro verbale e fornire tempo flessibile per reazioni adeguate. Nel caso in cui gli studenti siano arrivati da soli alla meta, l'esperto si limita ad istituzionalizzare quanto da essi trovato.

La fase **Summing Up & Refining** (Figura 5.1) prevede il raffinamento e l'integrazione, da parte degli studenti, di tutti i passi che li hanno portati dall'esplorazione, alla congettura e alla sua formalizzazione e dimostrazione.

5.4 Il problema-storia

Il percorso didattico e gli studenti sono immersi nella storia "Arrivano gli alieni". Man mano che la narrazione avanza, la storia evolve in accordo all'interazione dei personaggi con essa. Il genere scelto è stato quello della fantascienza, che vede un gruppo di quattro amici impegnati nell'impresa di comunicare con degli alieni da cui avevano ricevuto misteriosi messaggi fatti di numeri e operazioni. I quattro amici corrispondono ai quattro ruoli individuati:

- Marco, Boss, è il leader del suo gruppo di amici, ed ha conquistato con i suoi modi di fare, la fiducia dei suoi compagni;
- Sofia, Blogger, è amante della lettura e della scrittura; vuole fare la giornalista e ha la mania dei blog;

- Clara, Peste, ha un carattere un po' diffidente e spesso tormenta i suoi compagni con dubbi e domande.
- Federico, Smanettone, è un amante di computer, convinto dell'esistenza di vite extraterrestri, sta sempre a smanettare con dispositivi elettronici alla ricerca di segnali alieni.

Accanto ai quattro amici, vi è anche un adulto, Gianmaria, lo zio di Federico, anch'egli esperto di dispositivi informatici e appassionato di matematica. Gianmaria è l'avatar del docente e funge da esperto nel percorso di apprendimento.

Gli studenti entrano nella storia attraverso gli episodi Introduzione e Personaggi (cfr. Figura 5.1).

Il problema-storia prende le mosse da Federico che, affascinato dalla vita al di là del pianeta Terra, ha messo a punto un congegno elettronico nella speranza di catturare un qualche segnale proveniente dal cielo lontano. E finalmente un giorno ecco comparire sullo schermo una sequenza di caratteri. Purtroppo durante la ricezione il congegno si rompe e il messaggio rimane incompleto. La curiosità di Federico è troppo forte per non coinvolgere gli amici in questa avventura, alla ricerca del significato di quei segni e di un modo per comunicare con gli sconosciuti. Per farsi aiutare nell'impresa, i quattro amici decidono di coinvolgere lo zio Gianmaria, che accetta di aiutarli nella risoluzione dell'enigma. Le interazioni dei ragazzi tra loro e con Gianmaria guidano il flusso della storia (e del percorso di apprendimento), e li portano a continuare le comunicazioni con gli alieni, dopo che Federico ha aggiustato il congegno e anche provveduto a collegarlo con gli smartphone di ognuno di loro. Questa nuova funzionalità permette agli alieni di inviare un messaggio diverso a ciascuno di essi, così che in una seconda fase i ragazzi si ritrovano a ragionare su sequenze diverse e a scoprire cosa hanno in comune (caso dei numeri consecutivi pari e dispari).

Di seguito sono descritti in dettaglio gli episodi lungo cui la storia si sviluppa. In particolare gli episodi "Arrivano gli alieni 1", "Arrivano gli alieni 2" e "Arrivano gli alieni 3" implementano rispettivamente lo script di I livello, che consiste nelle fasi di *Inquiry & Conjecture*, *Arguing & Proof* e *Summing Up & Refining* (cfr. sezione x.3), sul problema matematico delle quaterne di naturali consecutivi. L'episodio "Arrivano gli alieni 4" funge da valutazione individuale e mira a verificare che ciascuno studente abbia compreso quanto prodotto insieme al proprio gruppo. Successivamente, gli episodi "Arrivano gli alieni 5" e "Arrivano gli alieni 6" implementano le fasi di *Inquiry & Conjecture* e *Arguing & Proof* sul problema matematico delle quaterne di naturali pari (o naturali dispari) consecutivi.

5.4.1 Introduzione

L'obiettivo di questo episodio è quello di introdurre lo studente all'interno della storia. Viene descritto il contesto nel quale interagiscono i personaggi interpretati dagli studenti e dal docente.

5.4.2 La squadra investigativa

Gli studenti di ogni gruppo di 4 visualizzano le descrizioni dei vari ruoli e ciascuno sceglie il proprio, concordandolo con i compagni in Chat.

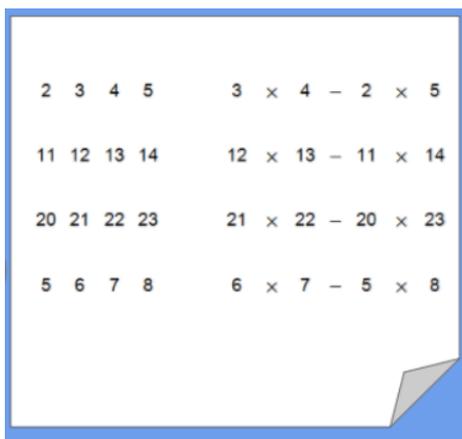
La fruizione di alcuni episodi successivi è personalizzata in funzione del ruolo scelto in questo episodio. La personalizzazione riguarda

- le istruzioni fornite, che riguardano aspetti legati al ruolo specifico;
- la disponibilità o meno di alcuni strumenti, in base al ruolo (ad esempio, nell'episodio Arrivano gli alieni 1, il Forum è visibile solo a Blogger, cfr. sezione 5.4.3)

5.4.3 Arrivano gli alieni 1

Questo episodio corrisponde alla fase di *Inquiry & Conjecture* (cfr. sezione 5.3). Obiettivo dell'episodio è che gli studenti esplorino la situazione matematica e arrivino a congetturare che si trovano davanti a quaterne di naturali consecutivi, che le operazioni indicate accanto alla quaterna indicano sempre la differenza tra il prodotto del secondo e del terzo numero della quaterna e il prodotto del primo e del quarto numero della quaterna e infine che il risultato delle operazioni applicate a ciascuna quaterna è sempre 2.

Nella fruizione della storia, gli studenti visualizzano un “foglietto” contenente delle quaterne di numeri interi consecutivi e delle operazioni accanto a ciascuna quaterna come mostrato in Figura 5.4.



2 3 4 5	$3 \times 4 - 2 \times 5$
11 12 13 14	$12 \times 13 - 11 \times 14$
20 21 22 23	$21 \times 22 - 20 \times 23$
5 6 7 8	$6 \times 7 - 5 \times 8$

Figura 5.4. Il foglietto nel primo disegno

Ogni studente ha come task individuale: *Scrivi nella chat quale pensi possa essere un'ulteriore quaterna accettabile e perché*, che viene introdotto con il fumetto seguente (Figura 5.5).

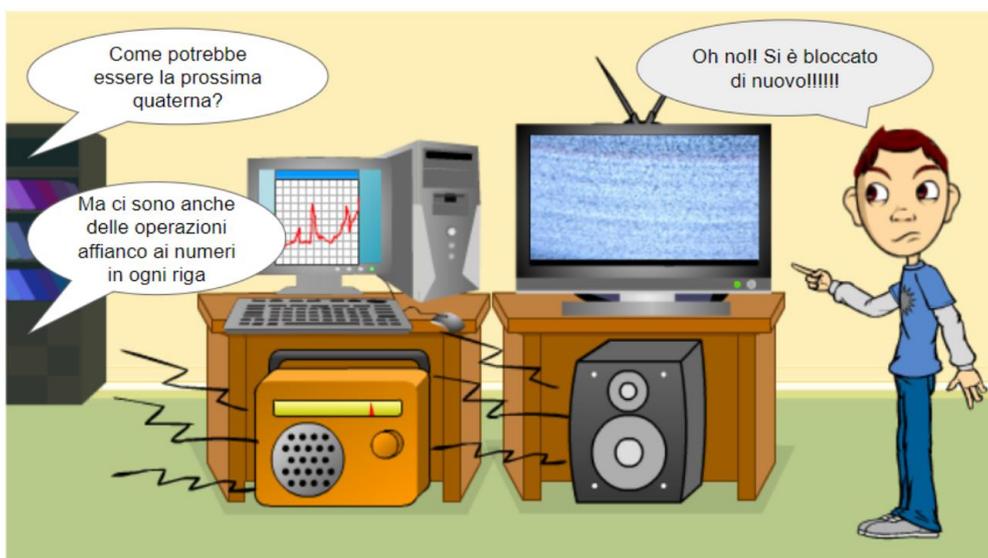


Figura 5.5. Un'ulteriore quaterna

Successivamente gli studenti, sollecitati da Gianmaria attraverso il fumetto in Figura 5.6, hanno come task collettivo quello di discutere in chat per concordare una risposta comune.



Figura 5.6. Le richieste di Gianmaria

Blogger ha il compito di riportare all'esperto (Gianmaria), attraverso un post nel Forum (che in questo episodio è disponibile solo per lui/lei) quello che il gruppo ritiene di aver trovato in maniera concordata.

In questo episodio, ogni studente riceve informazioni personalizzate in funzione del ruolo scelto, senza vedere quelle fornite ai suoi compagni. Ad esempio, Boss e Peste visualizzano i fumetti rispettivamente in Figura 5.7 e Figura 5.8.



Figura 5.7. Istruzioni per Marco Boss



Figura 5.8. Istruzioni per Clara Peste

5.4.4 Arrivano gli alieni 2

Questo episodio corrisponde alla fase *Arguing & Proof* (cfr. sezione 5.3). Obiettivo dell'episodio è che gli studenti producano degli argomenti concatenati che supportino il fatto che, per quaterne di naturali consecutivi, dalle operazioni "esce sempre 2". La dimostrazione attesa è di tipo algebrico. A tal fine, gli studenti dovrebbero essere in grado di indicare i numeri naturali consecutivi con espressioni del tipo n , $n+1$, $n+2$, $n+3$, formalizzare la congettura verbale sulle quaterne di naturali consecutivi e sul risultato della differenza tra il prodotto dei medi e il prodotto degli estremi ed effettuare le opportune manipolazioni algebriche che portano ad ottenere 2. Dimostrazioni di tipo geometrico sono possibili, ma non auspicabili in questo momento perché potrebbero non favorire le successive dimostrazioni.

All'inizio dell'episodio, gli studenti visualizzano dei fumetti che sintetizzano quanto accaduto nell'episodio precedente, ossia che "dalle operazioni con le quaterne esce sempre 2" (Figura 5.9). I fumetti attraverso Gianmaria, suggeriscono agli studenti il bisogno di provare in generale l'enunciato trovato (Figura 5.10). I fumetti fungono quindi da *scaffolding* per l'avvio del processo di dimostrazione.



Figura 5.9. Fumetto che sintetizza quanto accaduto nell'episodio precedente



Figura 5.10. Intervento di Gianmaria

Nei dialoghi dei personaggi della storia vengono riportate alcune ipotesi di lavoro, che ripercorrono ragionamenti reali di studenti emersi dall'analisi a priori (cfr. sezione 4.3), pertanto, non tutte adeguate allo scopo (Figura 5.11).



Figura 5.11. Fumetto che anticipa la richiesta di dimostrazione

Dopo gli input lanciati, Gianmaria si congeda dai ragazzi, dando loro appuntamento per una discussione successiva alle loro riflessioni. Ogni studente ha come task individuale: *Scrivi come pensi che si possa dimostrare che esce sempre 2*. Nella risoluzione di questo task, sebbene individuale, lo studente può confrontarsi con i suoi compagni di gruppo, utilizzando la Chat di gruppo che è sempre disponibile.

Quando lo studente ha completato il task, posta la sua soluzione in un Forum (che è lo stesso a cui aveva accesso solo Blogger nell'episodio precedente), per discuterne con Gianmaria come con lui concordato.

Come anticipato (cfr. sezione 5.3, fase *Arguing & Proof*), nel Forum confluiscono gli studenti di tutti i gruppi e Gianmaria orchestra una discussione collettiva. L'azione congiunta studenti-Gianmaria è da un lato un'azione 'preparata' a priori prima che l'attività inizi (cfr. sezione 2.4), ma dall'altro lato

è un'azione 'preparata' in itinere. Infatti, per svolgere il suo ruolo di mediatore Gianmaria può avvalersi della possibilità di leggere gli interventi degli studenti nelle chat di gruppo e quelli di Blogger dei vari gruppi nel Forum. Sulla base di quello che gli studenti hanno prodotto, orchestra una discussione matematica in cui rilancia senza mai fornire la risposta corretta, ossia la dimostrazione, ma guidando gli studenti nella costruzione della stessa. Ad esempio, se gli studenti, nella formalizzazione dei numeri consecutivi, utilizzano le lettere a, b, c, d, allora rilancia facendo riflettere gli studenti sul fatto che i numeri debbano essere legati tra loro in qualche modo da una relazione di consecutività; oppure e gli studenti utilizzano le lettere a, $b=a+1$, $c=b+1$, $d=c+1$, allora rilancia facendo capire che è possibile utilizzare un'unica lettera per esprimere lo stesso concetto. Solo se gli studenti, dopo diversi tentativi, sono in panne, Gianmaria interviene fornendo input che sbloccano la situazione.

5.4.5 Arrivano gli alieni 3

Questo episodio corrisponde alla fase *Summing Up & Refining* (cfr. sezione 5.3). Nella parte iniziale dell'episodio, vengono presentati alcuni fumetti in cui i protagonisti della storia fanno il punto della situazione sintetizzando quanto trovato negli episodi precedenti. L'obiettivo di questo episodio è che gli studenti rifiniscano e integrino tutti i passi che li hanno portati dall'esplorazione, alla congettura e alla sua formalizzazione.

A tal fine, all'interno della storia, gli studenti vengono coinvolti nella redazione di un messaggio da inviare agli alieni nel quale fanno loro capire che hanno interpretato il messaggio delle quaterne ricevuto (Figure 5.12 e 5.13). Siccome gli alieni non capiscono la nostra lingua, gli studenti dovrebbero convergere su un messaggio che fa uso solo del sistema simbolico.



Figura 5.12. Il segreto delle quaterne



Figura 5.13. Cosa inviare agli alieni

Come per l'episodio *Arrivano gli Alieni 1*, ogni studente riceve informazioni personalizzate in funzione del ruolo scelto, senza vedere quelle fornite ai suoi compagni.

5.4.6 Arrivano gli alieni 4

Questo episodio mira a verificare che ciascuno studente sappia formalizzare in maniera corretta il messaggio ricevuto dagli alieni nel primo episodio, che è stato decriptato e generalizzato nel lavoro di gruppo. A questo scopo, ciascuno studente deve inviare agli alieni la propria formulazione scelta tra alcune che gli vengono mostrate. Gli alieni mandano un feedback a ciascuno studente, in forma di emoticon, personalizzato in funzione della scelta effettuata dallo studente.

5.4.7 Arrivano gli alieni 5 e Arrivano gli alieni 6

Da questo episodio riprende il ciclo dello script di I livello, cambiando le quaterne di numeri consecutivi. Ogni personaggio riceve una sequenza diversa di quaterne di numeri, senza nessuna operazione accanto ad esse: Blogger e Smanettone ricevono quaterne di numeri dispari consecutivi; Boss e Peste quaterne di numeri pari consecutivi (Figura 5.14).



Figura 5.14. Le nuove quaterne ricevute sugli smartphone rispettivamente di Boss e Blogger

Attraverso i fumetti della storia, gli studenti vengono stimolati a provare a ripercorrere quanto fatto negli episodi precedenti.



Figura 5.15. Gli stimoli ricevuti

Dal lavoro di gruppo e con la mediazione di Gianmaria, gli studenti sono portati a scoprire che, applicando lo stesso tipo di operazioni, il risultato è sempre 8, e quindi a far emergere opportune rappresentazioni di numeri pari consecutivi, del tipo $2n$, $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$ oppure di numeri dispari consecutivi, del tipo $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$.

5.4.8 Arrivano gli alieni 7

Questo episodio che chiude (almeno temporaneamente) la storia, va a istituzionalizzare tutto quanto visto e ottenuto durante la storia vissuta.

L'episodio termina con un fumetto (Figura 5.16) che vuole porre il problema del concetto di 'consecutivo' in altri contesti, come quello delle frazioni o più in generale di una successione numerica, aprendo così la storia a successivi sviluppi.



Figura 5.16. Fumetto conclusivo

5.5 Implementazione del primo disegno

Il disegno è stato implementato utilizzando prevalentemente la piattaforma di e-learning Moodle, sia per la sua flessibilità sia perché dispone nativamente di buona parte degli elementi necessari per l'erogazione dell'attività e la gestione dei gruppi e delle interazioni sociali (Albano, Dello Iacono, Fiorentino, 2016). Tutti gli episodi della storia sono implementati all'interno di un unico corso Moodle. Il breve episodio 'La squadra investigativa' è stato implementato utilizzando il modulo 'Scelta' di Moodle, mentre gli altri episodi sono stati realizzati impiegando il modulo 'Lezione', che consente il pieno controllo dell'avanzamento della storia.

La ricca dotazione di strumenti di comunicazione sincrona ed asincrona ha permesso di adottare sempre lo strumento più adeguato per ciascuna esigenza comunicativa; ad esempio, per gli scambi più immediati e colloquiali, svolti prevalentemente tra pari, è stato scelto il modulo 'Chat', mentre gli scambi più ponderati e formali, come le comunicazioni dei risultati degli studenti all'esperto, sono stati valorizzati col modulo 'Forum' (cfr. principio (P6) e sezione 5.3). Inoltre è stato utilizzato il 'Forum domande e risposte', che consente a ciascuno studente di visualizzare gli interventi dei propri compagni solo dopo aver postato il proprio, in modo tale da preservare il lavoro all'interno di ciascun gruppo, evitando che le produzioni dei diversi gruppi non si influenzassero l'un l'altro prima della discussione comune. Infatti Blogger di ogni gruppo può vedere il testo prodotto da altri gruppi (cfr. sezione 5.4.3) solo dopo aver inserito quello prodotto dal proprio gruppo.

La gestione dei gruppo e la personalizzazione degli episodi in funzione dei ruoli assunti dagli studenti sono stati implementati configurando opportunamente le condizioni di accesso e il meccanismo dei 'gruppi non visibili' della piattaforma.

I fumetti sono stati implementati utilizzando l'ambiente online Toondoo (Toondoo.com e Toondospaces.com sono stati chiusi definitivamente a partire dall'11 novembre 2019) e Power-Point.

5.6 Sperimentazione del primo disegno

Abbiamo condotto due sperimentazioni relative a questo primo disegno.

La prima sperimentazione è stata condotta con 28 studenti di una classe prima del Liceo Scientifico "Mons. B. Mangino" di Pagani (SA), nel periodo gennaio 2018 - marzo 2018. Il docente della classe ha provveduto a formare 7 gruppi da 4 studenti ciascuno. La sperimentazione è stata avviata in classe con il docente di matematica che ha giocato il ruolo di esperto (Gianmaria) e che ha seguito la sperimentazione in presenza, dove gli studenti hanno lavorato fino al termine del secondo episodio. Tutti i gruppi hanno poi lavorato da casa portando a completamento i primi 4 episodi. Solo 2 gruppi hanno sperimentato tutti gli episodi della storia.

La seconda sperimentazione è stata condotta con 30 studenti di una classe prima del Liceo Linguistico dell'Istituto d'Istruzione Superiore "Adriano Tilgher" di Ercolano (NA), nel periodo aprile 2018 - giugno 2018. Il docente della classe ha formato 7 gruppi: 5 gruppi da 4 studenti e 2 gruppi da 5 studenti. Nei gruppi da 5 studenti si è scelto di duplicare il ruolo della Peste, ritenuto particolarmente significativo nei processi di apprendimento.

La sperimentazione è stata avviata in classe durante le ore di matematica insieme ai ricercatori e al docente di matematica, esplorando i primi episodi della storia. Gli studenti si sono poi organizzati tra di loro per continuare, in orario extrascolastico, quanto avevano avviato in classe giungendo a completare i primi due episodi della storia. Nelle settimane successive, hanno continuato a lavorare a distanza, fissando in maniera autonoma degli orari in cui incontrarsi online.

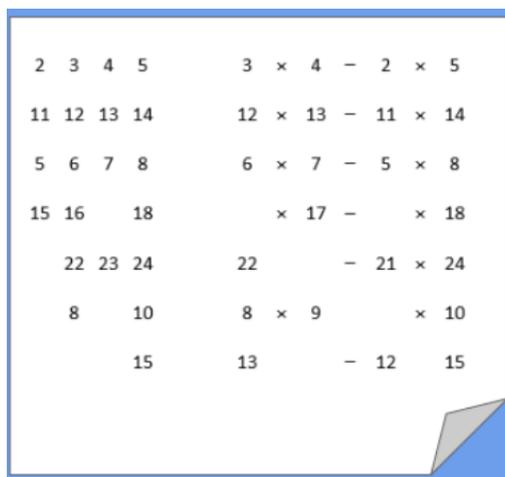
La sperimentazione si è conclusa nelle prime settimane di giugno, in cui gli studenti hanno lavorato insieme al docente di matematica in orario scolastico in modo da portare a conclusione la storia. I pochi studenti che non sono riusciti a terminare in classe hanno poi concluso la storia a fine giornata.

5.7 Variante del primo disegno e note implementative

In seguito ad alcune criticità emerse durante le sperimentazioni e, al fine di aumentare l'impatto dello storytelling e la facilità d'uso degli strumenti, sono state apportate alcune modifiche.

5.7.1 Modifiche agli episodi

Una prima modifica ha riguardato l'episodio 'Arrivano gli alieni 1'. Le prime sperimentazioni hanno evidenziato che nell'esplorazione, gli studenti hanno focalizzato l'attenzione solo sulla parte destra del foglietto, dove sono riportate le operazioni, non cogliendo il fatto di avere delle quaterne di numeri naturali consecutivi. Per supportare un passaggio da una interpretazione strumentale dell'espressione a destra a una interpretazione relazionale (Skemp, 1976), il foglietto è stato modificato inserendo dei 'buchi', cioè delle parti mancanti (Figura 5.17).



2 3 4 5	3 × 4 - 2 × 5
11 12 13 14	12 × 13 - 11 × 14
5 6 7 8	6 × 7 - 5 × 8
15 16 18	× 17 - × 18
22 23 24	22 - 21 × 24
8 10	8 × 9 × 10
15	13 - 12 15

Figura 5.17. Foglietto nella variante del primo disegno

Gli studenti hanno come task quello di capire cosa manca per poter correttamente interpretare il messaggio inviato loro dagli alieni, favorendo così uno spostamento del focus di attenzione anche sulla parte sinistra e sul collegamento tra questa e la parte destra in cui appaiono operazioni. Inoltre il task è stato personalizzato in modo tale che a ciascuno studente sia richiesto di completare una specifica riga. Questo apre la porta a maggiori riflessioni e ragionamenti matematici nelle discussioni dei gruppi. Gli studenti condividono in Chat i loro ragionamenti relativi al completamento delle righe ricevute, cominciando ad abbozzare argomentazioni e motivazioni.

Sono stati progettati ulteriori 3 episodi - Arrivano gli alieni 8, 9, 10 - che vanno a replicare lo script di I livello (Figura 5.1) applicato a sequenze di numeri razionali (cfr. sezione 4.3). Nell'episodio 10, l'esperto orchestra una discussione volta a favorire una riflessione sul significato di 'consecutivo' e più in generale sul concetto di successione numerica (cfr. sezione 4.3).

5.7.2 Modifiche all'implementazione

Un motivo di criticità di molte esperienze didattiche facenti uso delle tecnologie spesso deriva dall'assunto che i cosiddetti "nativi digitali" sappiano usare (tutte) le tecnologie in modo efficace (e didatticamente utile) e che, quindi, non sia necessario introdurre gli strumenti che verranno utilizzati. Queste criticità emergono fortemente soprattutto quando questi strumenti sono relativamente lontani dall'ambito di uso quotidiano. Per evitare questo problema (emerso durante le prime sperimentazioni e, in particolare durante la prima), in questa variante del disegno sono implementati dei Tutorial (utilizzando la 'Lezione' di Moodle) per supportare gli studenti nell'uso efficace di strumenti quali la Chat e i Forum, ma anche dei fogli di calcolo.

Per favorire l'ambientazione fumettistica, sono state fatte alcune modifiche nell'implementazione su Moodle:

- in tutti gli episodi si è fatto uso delle Etichette di Moodle che hanno permesso di mostrare dei fumetti come punti di accesso per le varie attività della storia. Agli studenti è stata resa visibile soltanto l'Etichetta in modo tale che anche la home page del corso Moodle usato per gestire l'attività si presenti agli studenti come un fumetto;
- il flusso degli episodi non è più realizzato attraverso la risorsa 'Lezione' ma attraverso la risorsa 'Libro', che consente allo studente di fruire la storia come se stesse sfogliando un libro a fumetti.

Altre modifiche su Moodle sono state le seguenti:

- per evitare agli studenti l'accesso (superfluo) ad ambienti e strumenti diversi, gli episodi 'Arrivano gli alieni 2' e 'Arrivano gli alieni 6' sono implementati non più come 'Lezione' di Moodle ma direttamente come Forum, all'interno del quale sia avvia la discussione sia tra pari che con l'esperto;
- il Forum, usato da Blogger per comunicare all'esperto i risultati raggiunti e concordati all'interno del proprio gruppo, è stato sostituito dalla risorsa 'Questionario' di Moodle, opportunamente adattato per conferirgli l'aspetto di un servizio di posta elettronica (ovvero personalizzando alcune stringhe del pacchetto linguistico in modo che l'interfaccia utente faccia esplicitamente riferimento all'invio di una mail, ad esempio visualizzando "Inviato" al posto di "Questionario inviato"), in modo tale che nella storia, in maniera meno artificiosa e più verosimile, appaia che Blogger comunichi quanto deve a Gianmaria inviandogli una mail.

5.8 Sperimentazione della variante del primo disegno

Nel periodo Dicembre 2018 - Maggio 2019 sono state condotte due sperimentazioni della variante del primo disegno sopra descritta.

Una sperimentazione ha coinvolto 19 studenti di una classe seconda dell'Istituto d'Istruzione Superiore "Einaudi Senorbi" di Cagliari, suddivisi in 3 gruppi da 5 studenti e un gruppo da 4. Un'altra sperimentazione ha coinvolto 24 studenti di una classe prima del Liceo Scientifico dell'Istituto d'Istruzione Superiore "Adriano Tilgher", suddivisi in 6 gruppi da 4 studenti ciascuno. Per entrambe le classi coinvolte nella sperimentazione, i gruppi sono stati costituiti dai rispettivi insegnanti di matematica che hanno seguito, insieme al gruppo di ricercatori, la sperimentazione.

In questa sperimentazione, si è pensato di far osservare il comportamento degli studenti da un docente di matematica che fosse esterno al gruppo classe. Per fare questo, il disegno ha previsto che i docenti di matematica giocassero il ruolo di esperto (Gianmaria) ognuno per la classe dell'altro Istituto, ossia il docente dell'Istituto "Einaudi Senorbi" ha giocato il ruolo di esperto per l'Istituto "Adriano Tilgher" e viceversa.

5.9 Alcuni risultati di analisi del primo disegno

5.9.1 Interazioni discorsive online, argomentazione e dimostrazione

Il disegno del DIST-M si basa sull'assunto che apprendimento e sviluppo sono il risultato di un *processo dialogico di negoziazione* nel corso del quale non solo si sviluppano nuove conoscenze, ma quelle già possedute vengono organizzate e sistematizzate. In questo senso l'argomentazione emerge anche nella sua dimensione *dialogica*, come una forma di organizzazione e sviluppo di conoscenze, che evolve all'interno di un processo di *negoziazione discorsiva intersoggettiva* che si serve del

linguaggio per la costruzione *intrapersonale* di nuovi livelli di conoscenza (Mollo, 2018). A questa dimensione dialogica si lega l'analisi delle interazioni discorsive online che abbiamo condotto (Albano, Coppola, Dello Iacono, & Pierri, 2020) per indagare se e come queste possano favorire i processi di spiegazione e argomentazione per arrivare a una dimostrazione. Ci siamo serviti del modello *one-line proof* (Gholamazad, Liljedahl, & Zazkis, 2003), mostrato in Figura 5.18.

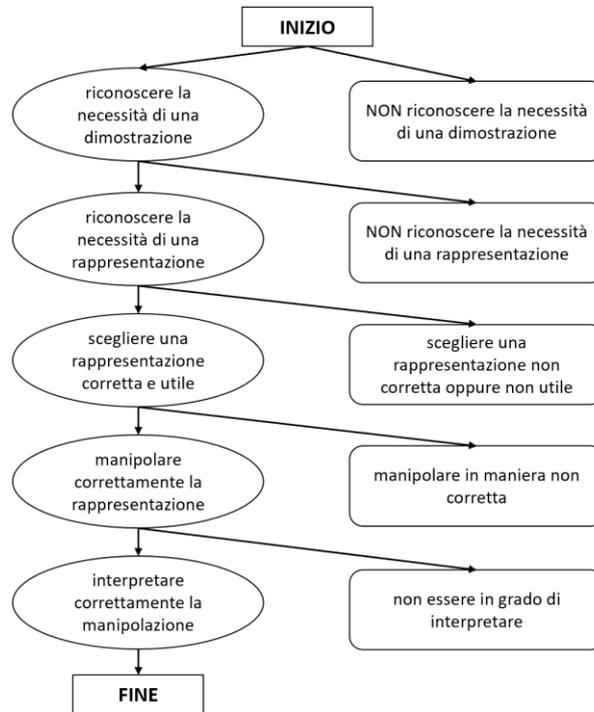


Figura 5.18. Il modello one-line proof

Esaminando il seguente estratto dalle interazioni di gruppo nella Chat di ‘Arrivano gli alieni 2’

Smanettone: Ho pensato di inviare o le quadruple che abbiamo pensato (anche se non sappiamo se sono corrette o no) o la formula che abbiamo trovato, cioè = .

Blogger: Avevo pensato di inviare $\text{medi} - \text{estremi} = 2$

Smanettone: Ho pensato di inviare una di queste cose perché sono le cose su cui abbiamo lavorato e riflettuto di più

Blogger: sì, sono d'accordo, forse la seconda è meglio

notiamo come all'inizio gli studenti discutono su cosa scegliere tra un esempio o una formula. Essi concordano sul fatto che la formula sia preferibile, il che sembra evidenziare il riconoscimento che un esempio non è sufficiente a dimostrare ciò che hanno capito. Anche se quanto dicono non significa esattamente “riconoscere la necessità di una dimostrazione” (cfr. Figura 5.18), può tuttavia essere considerato un passo verso questa direzione.

Andando avanti nella discussione, nell'estratto seguente, emerge la necessità di giustificare la loro scelta:

Smanettone: se mandiamo quella, dovremmo aggiungere anche una dimostrazione e magari giustificare questa scelta.

Blogger: Diciamo che abbiamo deciso di inviare questa dimostrazione, perché facendo i calcoli con le quadruple che ci hanno inviato gli alieni, il risultato è sempre 2. Cioè $a, b, c, d = bxc - axd$.

Smanettone: poiché inviare il numero 2 è inutile senza spiegare come l'abbiamo trovato. La dimostrazione senza formula è lo stesso inutile.

Blogger: Riassumendo, abbiamo pensato che potremmo inviare agli alieni la dimostrazione del perché è sempre 2, cioè: a, b, c, d sono lettere generiche, quindi assumono il valore che vogliamo dar loro, cioè numeri consecutivi. Quindi se facciamo prodotto dei medi- prodotto degli estremi è sempre 2. Quindi mandiamo: a,b,c,d bxc-axd.

In realtà, Smanettone sembra distinguere tra il fornire una dimostrazione ed il dare una spiegazione della scelta fatta dal gruppo e, successivamente, sottolinea l'esigenza di completezza (cfr. secondo intervento Smanettone "La dimostrazione senza formula è lo stesso inutile"). Gli studenti hanno poi cercato di formalizzare quanto osservato e Blogger ha riassunto quanto trovato.

Notiamo che gli studenti comprendono che i numeri delle quaterne assegnate sono consecutivi, ma usano la rappresentazione a, b, c, d ('scegliere una rappresentazione non corretta oppure non utile', Figura 5.18). Sembra che facciano uso un isomorfismo che fa corrispondere l'essere consecutivo dei numeri all'ordine delle lettere dell'alfabeto (cfr. sezione 4.3).

L'analisi di altre chat di questo gruppo mostra come gli studenti non siano stati in grado di scegliere una rappresentazione corretta e utile e quindi non abbiano prodotto alcuna dimostrazione della congettura.

Passando a guardare il Forum dello stesso episodio, possiamo vedere i vari tentativi degli studenti nel verificare la congettura. Nell'estratto seguente

Peste: è generalmente vero perché se eseguiamo: $(9 \times 8) - (10 \times 7) = 2$ $(3 \times 4) - (2 \times 5) = 2$ [... *n.d.r. ci sono altri esempi*] possiamo notare che in ogni riga il risultato è 2, allora la risposta è sì, è sempre vera. Possiamo notare un'altra cosa: le operazioni avvengono sempre secondo lo schema "pari \times dispari - pari \times dispari" o viceversa. Proviamo a usare i simboli!
a=numero pari b=numero dispari c=numero pari d=numero dispari $(b \times c) - (a \times d) = 2$.

Boss: Possiamo dimostrarlo con le lettere a=12 b=13 c=14 d=15 e=16 f=17 g=18, per esempio, $(e * f) - (d * g) = 2$.

Blogger: Per esempio, proviamo con i grandi numeri 200,201,202,203 $(201 \times 202) - (200 \times 203)$ dà come risultato esattamente 2! Quindi direi che con qualsiasi sequenza di numeri, il risultato è sempre lo stesso.

notiamo che gli studenti concentrano la loro attenzione sullo schema relativo all'ordine delle operazioni, cioè la differenza tra il prodotto di un numeri dispari con un numero pari e un numero pari con un numero dispari. Non emerge il fatto che i numeri siano consecutivi, eccetto che nell'affermazione di Boss.

Vale la pena osservare che gli studenti sembrano riconoscere la necessità di andare oltre l'esempio usando le lettere, ma non ci riescono: si limitano a sostituire le lettere per rinominare alcuni numeri specifici ('manipolare in maniera non corretta', Figura 5.18). Infatti, Blogger "dimostra" di nuovo la congettura usando i numeri, anche se sceglie numeri grandi. Dal fatto che funzioni con numeri grandi, conclude che funzioni sempre - notiamo l'espressione che Blogger usa a tal proposito "qualsiasi sequenza di numeri", cioè la congettura è dimostrata. Osserviamo inoltre che, nel loro discorso nel Forum, gli studenti non fanno alcun riferimento al fatto che i numeri della quaterna siano consecutivi. Ne possiamo riconoscere la loro consapevolezza dall'uso dell'isomorfismo sopra citato che rimanda

alle lettere consecutive ma anche dall'uso colloquiale delle parole 'sequenza di numeri', dove sequenza sottintende il significato di consecutivo.

L'analisi delle interazioni tra gli studenti evidenzia una co-costruzione di spiegazioni ed argomenti: gli studenti lavorano insieme, a turno, a partire da ciò che ha detto un altro studente del gruppo, si risponde e si ribatte ed insieme cercano di costruire la soluzione al compito proposto. Questo tuttavia non basta per giungere ad una dimostrazione. Osserviamo che quando gli studenti parlano tra loro in Chat, spesso usano un registro colloquiale. Probabilmente è dovuto al fatto che la Chat è percepita come un contesto condiviso, quasi come se fossero l'uno in presenza dell'altro. Un cambiamento, invece, si osserva quando la comunicazione diventa asimmetrica, come accade quando si passa dalla Chat al Forum: gli studenti non hanno più lo stesso contesto condiviso, quindi devono essere più "formali" e usare un registro evoluto (cfr. sezione 4.2.2).

Dall'analisi dei risultati delle sperimentazioni sembra, inoltre, che trasferire il ruolo del docente esperto al gruppo di pari o all'ambiente tecnologico non sia stato sufficiente a condurre gli studenti ad una interpretazione corretta della congettura che li portasse alla dimostrazione.

Sembra quindi emergere che né il gruppo di pari, né l'ambiente tecnologico siano sufficienti a guidare gli studenti a manipolare le rappresentazioni scelte per interpretarle correttamente e arrivare a una dimostrazione della loro congettura.

5.9.2 La prospettiva della Social Network Analysis per l'analisi delle interazioni

Per indagare il livello di coinvolgimento degli studenti e le reazioni provocate dagli interventi dell'esperto, abbiamo analizzato le loro interazioni (Polo, Dello Iacono, Fiorentino, Pierri, 2019) attraverso strumenti di analisi di reti complesse (Social Network Analysis - SNA). L'analisi è stata sia quantitativa - guardando all'intero grafico, visto anche come una rete complessa-, sia qualitativa e semantica, - focalizzata sul tipo di intervento e quindi sulle implicazioni didattiche.

Il grafo è stato costruito per mezzo del plug-in Forum Graph di Moodle³ che prende in esame tutte le interazioni all'interno di un forum e crea un grafo orientato (cfr. Figura 5.19) in cui:

- ogni nodo rappresenta un singolo utente attivo e la sua dimensione cresce in base al numero di messaggi utente; la rappresentazione permette di cogliere a prima vista gli utenti più attivi e quelli che interagiscono poco o per nulla;
- ogni linea rappresenta l'interazione tra due utenti attivi (ovvero un utente che risponde a un post di un altro utente) e il loro spessore indica il numero di (reciproche) risposte.

Nella Figura 5.19 sono evidenti le interazioni tra l'Esperto (il nodo nero più grande) e tutti gli studenti, la freccia che esce da un nodo denota studenti che hanno risposto ad un singolo post di un altro studente o dell'esperto, se dal nodo esce solo una freccia; in quest'ultimo caso la freccia indica l'utente a cui è stata data risposta. I nodi isolati denotano studenti a cui non è stata data risposta né dall'esperto né da un altro studente.

³ https://moodle.org/plugins/report_forumgraph

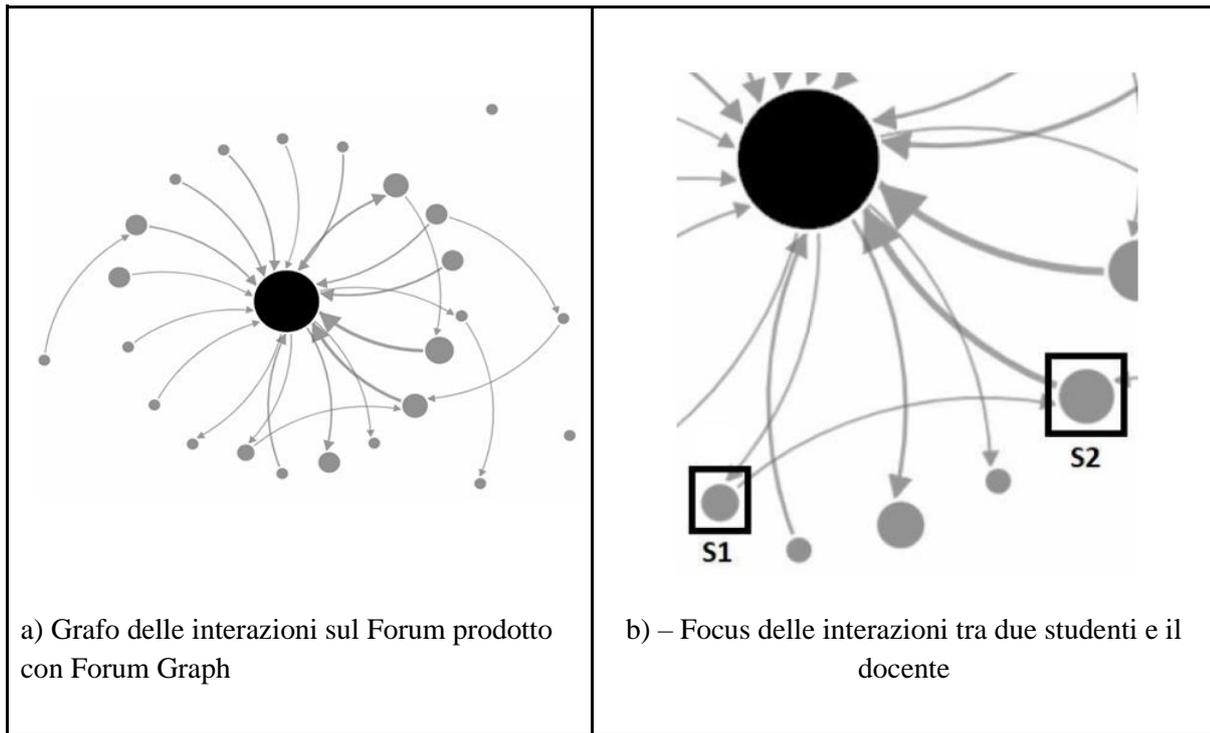


Figura 5.19. Grafico prodotto dal plug-in Forum Graph

Dal punto di vista quantitativo analizzando il grafo della Figura 5.19a è possibile individuare come interagiscono gli studenti tra di loro e con l'esperto e tale analisi può guidare l'analisi qualitativa attraverso la scelta dei nodi corrispondenti a studenti più attivi. Nel focus in Figura 5.19b sono indicati con S1 e S2 due degli studenti che hanno maggior interazione con l'esperto e tra di loro come mostra l'estratto seguente delle interazioni sul Forum (cfr. sezione 5.4.4):

S1: perché, secondo me, scrivere la quaterna in forma letteraria, sostituendo il numero più piccolo della quaterna con b e ottenendo gli altri seguenti aggiungendo il numero appropriato, si ottiene una piccola espressione letteraria che risulta nel numero 2. Infatti, da b ; $(b+1)$; $(b+2)$; $(b+3)$ dove b appartiene all'insieme dei numeri naturali segue che $[(b+1)*(b+2)]-[b*(b+3)] = b^2+2b+1b+2-b^2+3b = 2$. Possiamo considerare questa espressione come la formula per calcolare le varie espressioni derivate dalle quadruple che ci hanno dato gli alieni. E per spiegare che funziona con qualsiasi numero naturale, grande o piccolo...

Esperto: È lo stesso se sostituiamo una lettera al numero più grande della quaterna? Perché sei così convinto che il valore che attribuisce ad A non sia importante? ...

S2: prima di tutto ho pensato di prendere una lettera, diciamo C , come primo numero così, per gli altri, abbiamo: $C+1$, $C+2$, $C+3$. Nelle quaterne per ottenere come risultato 2 devi fare la sottrazione tra il prodotto del secondo e del terzo numero e anche il prodotto tra il primo e il quarto numero, quindi, tenendo conto di C possiamo calcolare $(C+1)(C+2) - C(C+3)$ e se semplifichiamo questa piccola espressione vedremo che ne uscirà 2 perché: $(C+1)(C+2) - C(C+3) = C^2+2C+1C+2 - C^2+3C=2$. Questa espressione, come abbiamo visto, potrebbe essere la giusta formula per calcolare le quaterne date dagli alieni. Inoltre, abbiamo visto che qualunque valore diamo a C , sia un numero piccolo che grande, il risultato, come abbiamo visto, sarà sempre 2

Come previsto in questo primo disegno, l'interazione nel Forum è preceduta da momenti di condivisione in Chat dove le conversazioni informali hanno anticipato e facilitato il confronto più formale con l'esperto nel Forum. Per esempio uno studente afferma nella Chat:

S1: non possiamo comunicare con gli alieni con la nostra lingua perché non è certo che la capiscano quindi dobbiamo usare una quaterna

così come un altro studente

S2: secondo me dobbiamo creare una quaterna attraverso una formula, che useremo anche a scopo dimostrativo

Secondo una visione dell'azione didattica come una azione congiunta insegnante-alunno (cfr. sezione 2.4), possiamo osservare come l'esperto rilanci domande o insinui dubbi sulle affermazioni dello studente, inducendolo a pensare autonomamente nell'ottica di una doppia stimolazione favorita proprio dall'ambiente di apprendimento (in questo caso le lettere e le formule utilizzate).

Alcuni aspetti di criticità permangono a conclusione dello studio riguardo alla funzionalità per l'analisi delle interazioni, infatti, lo strumento Forum Graph non si adatta al tipo di analisi automatica se si volesse analizzare la Chat. La rappresentazione degli scambi comunicativi mediante il grafo orientato e le sue peculiarità può dare, invece, interessanti informazioni sulle interazioni tra studenti fornendo una mappa che individua, in tempo reale, i partecipanti isolati o troppo presenti. Ciò soprattutto se si prevedesse una organizzazione didattica che non si limiti, come nel nostro studio, alle analisi ex post delle interazioni e nel caso più generale dell'interazione a distanza.

5.10 Riflessioni sul primo disegno

Nelle sperimentazioni di questo primo disegno si è rivelato complesso per l'esperto/docente riuscire a gestire e portare a termine l'intera attività. La gestione contemporanea di tutti i gruppi ha comportato difficoltà oggettive dell'esperto nel tentativo di seguire attivamente le interazioni all'interno di ciascun gruppo in azione nelle diverse fasi precedenti la discussione finale sul Forum. La gestione parallela dei gruppi si è rivelata di ostacolo al progredire dell'azione congiunta dell'insegnante con i diversi gruppi. L'opportunità di permettere all'esperto di lanciare in un gruppo stimoli provenienti da interventi di altri gruppi, da lui considerati significativi, è stata impedita dall'organizzazione didattica.

Allo stesso tempo, anche per gli studenti, alcune scelte dell'organizzazione didattica sono state di ostacolo all'avanzamento all'interno della storia. Tra queste, la scelta di una piattaforma con cui non erano familiari e che prevedeva una Chat funzionale dal punto di vista del ricercatore ma molto lontana e poco attraente rispetto agli strumenti di comunicazione sincrona che gli studenti usano abitualmente nel loro quotidiano, li ha portati a uscire dalla piattaforma e attivarsi autonomamente creando dei gruppi whatsapp per scambiarsi idee in maniera più immediata e capire come procedere.

Anche la formulazione delle quaterne di numeri nel quesito iniziale ha rallentato la fase esplorativa di individuazione della "regolarità" e argomentarla. Queste condizioni insieme alla difficoltà di inserimento dell'intero percorso nelle pratiche scolastiche ordinarie, dovuto anche al tempo di sperimentazione rispetto all'anno scolastico, ha probabilmente impedito ad alcuni gruppi di riuscire a percorrere la storia fino alla fine.

I problemi sorti ci hanno portato a ridimensionare lo sviluppo del problema matematico, limitandoci al solo caso dei numeri naturali, senza arrivare fino all'approccio alla densità e alla generalizzazione, e a concentrarci sul disegno dell'organizzazione didattica.

Inoltre le osservazioni derivanti dalla sezione 5.9.1 ci hanno suggerito di apportare delle modifiche al disegno, prevedendo la possibilità di un coinvolgimento dell'esperto non solo in fase di discussione finale, ma anche durante i momenti di interazione tra gli studenti, per mediare relativamente alla validità dell'argomentazione matematica e al modo in cui essa viene espressa.

Queste riflessioni ci hanno suggerito di apportare delle modifiche, nell'ottica dell'Expansive Learning e dell'obiettivo primario della ricerca rispetto alla possibilità di riproducibilità e di diffusione nelle pratiche scolastiche ordinarie del DIST-M.

6 Secondo Disegno

Il secondo disegno nasce da riflessioni che riguardano il ripensamento dell'argomentazione come caso particolare di problem solving, che ha portato a una ridefinizione dei ruoli, e al ripensamento della modalità di partecipazione degli studenti.

6.1 Inside-out: viaggio nella mente di un problem-solver

Pensando a quello che i matematici fanno durante un processo di problem solving, abbiamo identificato alcune fasi rilevanti (sebbene la lista non è da intendersi né univocamente determinata né esaustiva):

- a. cercano percorsi, cercano di trovare una strada;
- b. si organizzano, scelgono strategie;
- c. se si sentono frustrati o bloccati, cercano di ritrovare la calma;
- d. cercano un'intuizione o chiedono aiuto a un esperto o a qualche altra fonte (libri, articoli, ecc.);
- e. si interrogano: la strategia funziona o no?
- f. cercano dimostrazioni per le loro congetture;
- g. quando pensano di aver trovato qualcosa di convincente, cercano di presentare la loro soluzione in una "copia pulita".

Questo processo non è necessariamente lineare; può passare attraverso le fasi più volte, saltarne alcune o percorrerle in maniera non sequenziale.

In queste fasi è possibile identificare interazioni tra diverse "voci", cioè forme di pensiero e di discorso che rappresentano il punto di vista di un personaggio (Bartolini Bussi, 1996). Ogni voce rappresenta una funzione cognitiva necessaria per un problem solver di successo. Il processo è naturalmente collaborativo tra le varie voci esistenti e operanti all'interno della persona. Mentre comunichiamo con noi stessi, le "varie parti di noi" (cioè le varie funzioni cognitive) che entrano in gioco nel problem solving, stanno effettivamente comunicando tra loro. Pertanto, in linea con la cornice dello storytelling del progetto, abbiamo modellato tale processo come una collaborazione tra personaggi, ognuno dei quali assume il ruolo di una funzione cognitiva. Le funzioni cognitive nel processo argomentativo matematico diventano personaggi del problema-storia. Attraverso la personificazione, queste funzioni acquistano importanza. L'idea è in sintonia con Liljedahl (2007), secondo cui la separazione delle diverse "persone" facilita il loro accesso al reale processo di risoluzione dei problemi in cui sono impegnati. Inoltre, l'influenza che esercita su tale processo avviene a livello metacognitivo, migliorando in modo cruciale le competenze di problem solving degli studenti. Nel nostro caso, le "persone" sono diventati i personaggi della storia, definiti secondo le funzioni cognitive che entrano in gioco durante il problem solving (i ruoli rappresentati dai personaggi della storia) e le loro azioni sono guidate da come queste funzioni entrano in gioco nel problem solving.

6.2 I nuovi ruoli: i personaggi e le funzioni cognitive del problem solving

Abbiamo individuato quattro ruoli, corrispondenti alle funzioni cognitive necessarie per gestire, e avere successo, nell'attività di problem solving collaborativo, e ognuno di essi corrisponde a un personaggio, che andiamo di seguito a descrivere.

I ruoli di Boss, Peste e Blogger, già previsti nel primo disegno, sono stati reinterpretati come funzioni cognitive che entrano in gioco durante il processo di problem solving. E' stato introdotto il ruolo di Promoter, non presente nel primo disegno, che rappresenta la funzione cognitiva legata all'intuizione, essenziale nel processo di problem solving.

Boss svolge la funzione cognitiva di organizzare l'intero processo di risoluzione, corrispondente alle azioni b. e c. nell'elenco precedente. Boss tiene il filo di ciò che sta accadendo, sceglie le strategie e si muove verso l'obiettivo. Il contributo di Boss è anche affettivo: essere rassicurante e riportare la calma nel caso in cui il processo si sia arenato a causa della sopraggiunta frustrazione o di altre emozioni negative. Si prende, quindi, cura del gruppo assicurandosi che tutti partecipino al processo.

Peste è la mente critica, che insinua dubbi, formula giudizi e mette in discussione ciò che è già stato prodotto da altri. Peste mette anche in discussione e cerca dimostrazioni per le congetture (e. e f. nell'elenco precedente). Infine, fa obiezioni o risponde alle obiezioni degli altri.

Blogger ha il compito di produrre un testo, ossia il risultato delle congetture e delle dimostrazioni, che può essere informale, come in una presentazione ai colleghi, o più formale, secondo gli standard matematici correnti (Boero, 1999). Questa funzione cognitiva corrisponde alla sistemazione in "copia conforme" del percorso risolutivo, una volta trovata una soluzione convincente (g. nell'elenco precedente). Il ruolo di Blogger è importante non solo a livello comunicativo ma anche a livello metacognitivo. La scrittura promuove la consapevolezza e supporta anche i processi di controllo e revisione.

Promoter è l'esploratore, necessario per avviare il processo di problem solving cercando percorsi, cercando di trovare una via (a. nell'elenco precedente) e, in caso di impasse, cercando un'intuizione o l'aiuto di un esperto o di un'altra fonte (d. nell'elenco precedente). Una buona dose di creatività è presente in tutti i ruoli, ma a Promoter appartiene il compito specifico di cercare l'idea che sblocca la situazione. Fornendo intuizioni, Promoter produce una riconfigurazione del campo percettivo, attraverso la quale i dati in gioco vengono visti sotto una luce diversa e viene prodotta una nuova immagine creativa.

Due ruoli (Boss e Blogger) sono legati all'efficacia della collaborazione e gli altri due (Promoter e Peste) garantiscono il progresso e la validità del processo di problem solving. Boss, Peste e Blogger si concentrano sui singoli passi; Promoter presta attenzione al processo più ampio, per valutarlo olisticamente e facilitarne l'avanzamento.

Il controllo sulla validità dell'argomentazione matematica e il modo in cui essa viene espressa non possono essere lasciate solo a Peste, che potrebbe non conoscere i criteri per considerare un argomento come valido ed espresso in forma matematicamente accettabile. C'è, quindi, la necessità di un mediatore che applichi i criteri di argomentazione ed espressione e che indichi quali sono le intuizioni valide. Tale necessità è emersa, come anticipato nelle Conclusioni del primo disegno (cfr. sezione 5.10), dall'analisi delle varie sperimentazioni. In realtà il ruolo di esperto era già presente nel primo disegno, ma il suo intervento era limitato soltanto al Forum per mediare la discussione tra pari senza poter intervenire negli scambi di discussione che il gruppo di studenti aveva in Chat.

In questo disegno, l'esperto, identificato da *Guru*, utilizza una Chat privata con il Promoter, attraverso la quale può chiedere a quest'ultimo (che funge da interfaccia con l'intero gruppo), di chiarire meglio quanto viene detto nelle varie discussioni al fine di migliorare la comunicazione. Osservando la discussione in Chat, Guru può decidere di intervenire nei momenti di impasse, così da permettere agli altri personaggi di fare ulteriori progressi. Oltre ad essere un mediatore, assume quindi anche il ruolo

di “saggezza”, a cui ci si rivolge quando si incontrano delle difficoltà. La comunicazione privata tra Promoter e Guru è, dunque, bidirezionale:

- il canale Promoter → Guru implementa la funzione cognitiva di Guru della “saggezza”, alla quale Promoter può rivolgersi in caso di difficoltà;
- il canale Guru → Promoter è utilizzato da Guru per interagire con Promoter e, dunque, indirettamente con il gruppo per mediare relativamente alla validità delle argomentazioni matematiche prodotte dagli studenti e al modo in cui esse vengono espresse o formulate.

In questo modello “mentale”, il ruolo di Smanettone, ossia di esperto informatico, non ha più senso di esistere: gli studenti che assumono i ruoli sopra descritti (Boss, Peste, Blogger e Promoter) hanno anche il compito di aiutare i compagni nell’utilizzo degli strumenti informatici.

6.3 Nuovo script di secondo livello: lo schema dell’episodio

Ogni episodio evolve secondo lo schema in Figura 6.1. All’inizio gli studenti lavorano tra loro, senza un intervento esplicito dell’esperto. Tuttavia Guru è presente in background a due livelli: da un lato, potendo osservare quanto accade nelle interazioni tra pari, sceglie di fornire loro, attraverso il canale di comunicazione privilegiato che ha con Promoter, qualche suggerimento quando il gruppo è in una situazione di stallo; dall’altro lato, se il gruppo si rende conto di non avere al suo interno altre risorse da mettere in gioco per la risoluzione del problema, può rivolgersi a Guru (nella sua veste di ‘saggezza’) per chiedere aiuto, attraverso Promoter.

La fase di lavoro tra pari ha l’obiettivo di arrivare ad un prodotto condiviso da tutti i membri, che diventa oggetto di discussione e confronto esplicito con l’esperto in una fase successiva, aperta a tutti i membri del gruppo. Questa seconda fase serve a sistematizzare quanto prodotto dai pari, e permette di passare all’episodio successivo.

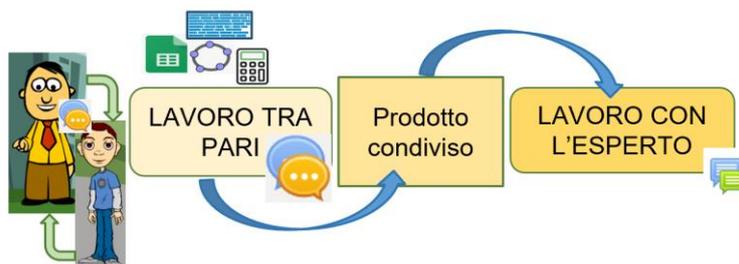


Figura 6.1. Lo schema di ogni episodio

6.4 La nuova modalità di partecipazione: Attori e Osservatori

L’obiettivo educativo del modello ideato è che la pratica sociale favorisca l’appropriazione dei ruoli da parte degli studenti, muovendosi nel tempo verso l’interiorizzazione. Questo implica non solo riflettere sulle azioni appropriate ad ogni ruolo, ma anche riflettere su quelle azioni.

Il modello è pensato affinché gli studenti partecipino alla storia con due diverse modalità. Per ciascun episodio:

- un gruppo agisce come Attori: ogni studente del gruppo assume il ruolo di uno dei personaggi sopra descritti (cfr. sezione 6.2);

- gli altri gruppi agiscono come Osservatori attivi e consapevoli degli Attori della storia: ogni studente si incarica di osservare un personaggio specifico della storia e riflette su come il personaggio osservato si comporta rispetto sia al problema matematico che al ruolo che sta giocando.

Nel problem solving collaborativo non strutturato gli studenti spesso rimangono nel ruolo in cui si sentono più a loro agio. Nel modello proposto, invece, ruotano sia i gruppi di Attori e Osservatori, sia i ruoli all'interno di ciascun gruppo. Ad esempio, se nel primo episodio un gruppo ha giocato come Attori, nel secondo episodio giocherà come Osservatori e un gruppo che ha giocato da Osservatori giocherà come Attori. Inoltre, se uno studente ha giocato da Boss nel primo episodio, giocherà da Osservatore di un ruolo diverso da Boss nel secondo episodio. In questo modo, ciascuno studente fa esperienza (da Attore o da Osservatore) di tutte le funzioni cognitive, e ciò può portare all'appropriazione di tali funzioni da parte di ciascuno. Questo contribuisce a fare emergere queste funzioni come risorse interne all'individuo (cfr. sezione 2.2.3) e a contribuire allo sviluppo dell'identità dello studente di matematica (Albano, Coppola & Dello Iacono, 2021).

Inoltre, gli studenti hanno la possibilità di osservare come viene svolto il ruolo di Guru e, ad un certo punto, potrebbero assumerlo e, dunque, appropriarsene. Il ruolo di Guru, quindi, dovrebbe progressivamente svanire e i pari dovrebbero assumere la responsabilità di Guru.

Val la pena di sottolineare il duplice valore degli Osservatori. In primo luogo, la presenza degli Osservatori rende la corralità della storia matematica: infatti quando si trovano a giocare come Attori, in un nuovo episodio, conoscono già il processo matematico avvenuto negli episodi precedenti, e questa consapevolezza gli viene dal ruolo di Osservatore. In secondo luogo, favorisce un apprendimento significativo e consapevole: il ruolo di Osservatore favorisce la riflessione sulle azioni proprie e degli altri, guardandole da un punto diverso, in cui si immedesimano e nello stesso tempo sono distaccati, passando a una *riflessione nell'azione*.

Il modello è pensato affinché gli studenti lavorino in gruppi di quattro e ciascuno assuma uno dei ruoli descritti nella sezione precedente (Boss, Peste, Blogger, Promoter). In caso di gruppi da 5 studenti, il ruolo che viene duplicato è quello di Peste (o di Osservatore Peste) essendo tale ruolo necessario per favorire la produzione di congetture, argomentazioni e contro-argomentazioni all'interno del gruppo, necessarie per giungere alla formalizzazione matematica e, dunque, alla dimostrazione.

6.5 Riflessione in itinere sui ruoli

Ogni studente compila il proprio diario di bordo personale.

Il diario di bordo personale è un vero e proprio diario di viaggio lungo tutta la storia, dove allo studente viene chiesto di appuntare le proprie riflessioni e considerazioni per ogni episodio, sia che egli abbia giocato come Attore che come Osservatore (Figura 6.2). Il diario è suddiviso in tanti capitoli quanti sono gli episodi della storia.

ARRIVANO GLI ALIENI!



Diario di bordo di:

Stai partecipando a una storia come attore o come osservatore. Questo è il tuo diario di viaggio lungo la storia, dove ti chiediamo di appuntare le tue riflessioni e considerazioni per ogni episodio. Puoi andare a ogni episodio cliccando sui link qui sotto e nella pagina che apre troverai alcune domande guida.

Vai all'episodio corrente (con un click sul link qui sotto):

[Arrivano gli alieni 1](#)

[Arrivano gli alieni 2](#)

[Arrivano gli alieni 3](#)

[Arrivano gli alieni 4](#)

[Arrivano gli alieni 5](#)

Figura 6.2. Il diario di bordo personale

In ogni episodio lo studente deve esplicitare se ha giocato come Attore o come Osservatore: nel primo caso quale è stato il ruolo ricoperto, se invece ha giocato da Osservatore quale ruolo ha osservato. A titolo esemplificativo, nella Figura 6.3. che segue, è riportato il diario di bordo personale riferito al primo episodio della storia.

Arrivano gli alieni - Episodio 1

A causa di un guasto alla navicella, un gruppo di alieni si trova costretto ad atterrare sulla Terra e invia un messaggio. La macchina costruita da Federico ...riceve il messaggio e i quattro amici chiedono a zio Gianmaria di aiutarli a...decifrare il messaggio dagli alieni



<p>In questo episodio ho giocato come (attività e ruolo): <i>(mettere una X al posto del puntino giusto)</i></p>	
<p>(.) Protagonista Boss (.) Protagonista Promoter (.) Protagonista Blogger (.) Protagonista Peste</p>	<p>(.) Osservatore Boss (.) Osservatore Promoter (.) Osservatore Blogger (.) Osservatore Peste</p>
<p style="text-align: center;">Sono stato Attore:</p> <p>Descrivi come il tuo personaggio ha giocato il suo ruolo e qual è stato il suo contributo. Ritieni che gli interventi del tuo personaggio siano stati utili al raggiungimento dell'obiettivo? Perché? Avresti fatto qualcosa diversamente? Perché?</p>	<p style="text-align: center;">Sono stato Osservatore:</p> <p>Come credi che il personaggio che hai osservato abbia giocato nel suo ruolo? Qual è stato il suo contributo? Ritieni che i suoi interventi nella storia siano stati utili al raggiungimento dell'obiettivo? Perché? Cosa avresti fatto nei suoi panni?</p>
<p>Queste sono le mie riflessioni e considerazioni:</p> <div style="border: 1px solid black; height: 100px; width: 100%;"></div>	

Figura 6.3. Il diario di bordo personale per l'Episodio 1

In qualità di Attore, viene chiesto di descrivere brevemente come il personaggio ha giocato il proprio ruolo nello specifico episodio e quale è stato il suo contributo; se, quindi, gli interventi fatti siano stati utili al raggiungimento dell'obiettivo dell'episodio in questione e perché.

In qualità di Osservatore, viene chiesto di annotare come il personaggio osservato nello specifico episodio abbia giocato il proprio ruolo e quale sia stato il contributo che il personaggio ha fornito per poter raggiungere gli obiettivi dell'episodio e cosa lo studente Osservatore avrebbe fatto "nei panni" del personaggio osservato.

Lo scopo è permettere agli studenti di:

- prendere coscienza delle caratteristiche funzioni cognitive rappresentate dai personaggi;
- (a lungo termine) prendere coscienza dell'importanza del loro sviluppo come parti di se stessi.

Questi documenti che nascono come personali di ciascuno studente devono diventare patrimonio della classe, di riflessione collettiva sul processo di apprendimento globale e sulle caratteristiche e gli scopi rispetto all'apprendimento di ciascun ruolo. Questa riflessione può essere realizzata dal docente che, sulla base di un'analisi dei diari personali, orchestra una discussione di aula.

6.5 Altre modifiche rispetto al primo disegno

Alcune criticità emerse durante le sperimentazioni del primo disegno ci hanno spinto a fare delle piccole variazioni al "foglietto", mostrato nell'episodio 'Arrivano gli alieni 1'. È stata apportata un'ottimizzazione didattica al "foglietto", per bilanciare la presenza e la mancanza di dati ("buchi"):

abbiamo implementato un foglietto con 3 righe complete piene, una riga con un dato mancante nella colonna (sinistra) delle quaterne, una riga con un dato mancante solo nella colonna (destra) delle operazioni, due righe con 2 dati mancanti, uno nella colonna (sinistra) delle quaterne e l'altro in quella (destra) delle operazioni (Figura 6.4)

2	3	4	5	3	x	4	-	2	x	5
11	12	13	14	12	x	13	-	11	x	14
5	6	7	8	6	x	7	-	5	x	8
15	16		18	16	x	17	-	15	x	18
21	22	23	24	22	x	23	-		x	24
	13	14	15	13	x	14	-		x	15
10	11	12		11	x	12	-	10	x	

Figura 6.4. Il foglietto nel secondo disegno

6.6 Implementazione del secondo disegno

Ciascun episodio della storia è stato implementato come corso Moodle separato per poter “contenere” al suo interno tutti gli strumenti utili/necessari alla sua fruizione.

È stata utilizzata la Chat di Moodle per tutte le comunicazioni informali tra studenti dello stesso gruppo e per il canale privilegiato tra Guru e Promoter. Il Forum e i Questionari (opportunamente adattati per simulare l’invio di una mail, come nell’implementazione della variante del primo disegno) sono stati utilizzati per tutte le comunicazioni formali tra gli Attori e Guru. Facendo uso delle condizioni di accesso, alcune attività e risorse sono state rese visibili e disponibili solo a specifici ruoli. Per esempio, la Chat privata tra Promoter e Guru è visibile solo a Promoter.

È stato creato un nuovo ruolo Moodle (non presente tra quelli standard di Moodle) per implementare il ruolo di Osservatore (cfr. sezione 6.4), al quale è stato dato il permesso di accedere in sola lettura a tutte le Chat e ai Forum, senza poterli editare o modificare.

Sono stati implementati due ambienti digitali: uno per gli Attori e uno per gli Osservatori. All’interno dell’ambiente degli Attori, ogni studente ha a disposizione tre finestre: una costituita dal Libro, con i fumetti che delineano la storia, un’altra composta dalla Chat di gruppo dove gli studenti possono interagire informalmente, e infine il Forum, dedicato alla comunicazione tra Guru e il gruppo. Gli studenti che interpretano i personaggi di Promoter e Blogger visualizzano, inoltre, rispettivamente la Chat privata col Guru e il Questionario (che simula l’invio di una email) per poter inviare a Guru le risposte concordate all’interno del gruppo.

Gli Osservatori hanno a disposizione le stesse tre finestre degli Attori, ma in modalità di sola lettura, e un’altra finestra costituita dal diario (cfr. sezione 6.5), dove ogni Osservatore riporta le proprie annotazioni.

Infine, abbiamo implementato sia il *Diario di bordo personale* per la riflessione in itinere sui ruoli (cfr. sezione 6.2) come (link a) Documento Google, facilmente modificabile e raggiungibile con ogni dispositivo.

6.7 Sperimentazione del secondo disegno

Questo secondo disegno è stato sperimentato con una classe di 27 studenti di una classe prima del Liceo Scientifico “Mons. B. Mangino” di Pagani (SA) nel mese di maggio 2019. Gli studenti (a detta dell’insegnante) erano piuttosto motivati allo studio, affiatati, abituati a lavorare in gruppo e a proporre soluzioni in situazioni problematiche, educati alla ricerca di regolarità e all’utilizzo del linguaggio algebrico per generalizzare le regolarità osservate. Il docente della classe ha provveduto a formare 3 gruppi da 5 studenti e 3 gruppi da 4 studenti. Nei gruppi da 5 è stato duplicato il ruolo di Peste (se il gruppo ha giocato da Attori) o di Osservatore Peste (se il gruppo ha giocato da Osservatori).

La sperimentazione è avvenuta in presenza presso una struttura laboratoriale dell’Università di Salerno. Ciascun studente ha lavorato al proprio PC e comunicato con i compagni di gruppo solo attraverso gli strumenti disponibili in piattaforma. Alla sperimentazione erano presenti sia i ricercatori che il docente della classe responsabile della sperimentazione; il ruolo dell’esperto è stato giocato da un ricercatore, in collaborazione con il docente.

6.8 Alcuni risultati di analisi del secondo disegno

6.8.1 L’influenza dei ruoli nella collaborazione ai fini del raggiungimento dell’obiettivo

Negli estratti di interazioni che presentiamo di seguito, ci focalizziamo sul ruolo degli Attori per mostrare come l’interazione tra i personaggi guidata dai ruoli possa favorire il raggiungimento dell’obiettivo dell’attività e anche far emergere atteggiamenti diversi di alcuni Attori che possano fungere da modello per i pari da osservare e imitare. Lo studente, nell’osservazione e imitazione di abilità cognitive dei pari, modifica e perfeziona lo sviluppo delle proprie stesse abilità cognitive (King, 2007).

Nel seguente estratto dalla chat di gruppo (Albano, Coppola, Dello Iacono, Fiorentino, Pierri, Polo, 2020), relativo all’episodio ‘Arrivano gli alieni 2’,

Peste: dunque, in una serie di numeri consecutivi, se facciamo la differenza tra il prodotto del primo e del secondo termine che sono sempre consecutivi e tra il primo e il quarto termine che hanno 2 come differenza, il risultato sarà sempre 2.

Peste: Se fosse fatto in un altro modo non sarebbe 2

Boss: Sì, per me il ragionamento è ottimo.

possiamo notare l’emergere della congettura corretta, sebbene sostenuta da un’argomentazione debole (“Se fosse fatto in un altro modo non sarebbe 2”), che è stata approvata come un ragionamento ‘ottimo’ da un pari. Possiamo osservare lo stato d’animo collaborativo oltre al ruolo coerentemente svolto da Peste e Boss.

L’estratto che segue evidenzia che lavorare in gruppo non significa eliminare i momenti di riflessione individuale, che a volte sono addirittura necessari e arricchiscono poi la collaborazione quando si torna nel gruppo e si condivide quanto emerso dal lavoro personale:

Peste: Non ho ancora le idee chiare

Boss: ragazzi! leggete [i numeri] in verticale.....!!!!

Blogger: L'ho letto, ma sto ancora cercando di capire

Promoter: hai un'idea?

Boss: ti rendi conto che andando a poco a poco sono numeri che si susseguono; leggiamo e ci ritroviamo in chat in 5 minuti?

Promoter: ho poche idee e anche confuse, ascoltami un attimo

Peste: parla

Promoter: 2 3 4 5

Promoter: il 3 x 4

Promoter: 2 x 5

Blogger: è 2

Blogger: la prima riga della seconda colonna

Promoter: cioè i due estremi e i due centrali fanno tutti la stessa cosa

Promoter: ci sono quattro termini e i due centrali e i due estremi vengono moltiplicati e poi si sottraggono

Osserviamo che tutti gli studenti sono coinvolti nel processo di produzione della congettura. Inoltre, possiamo notare come l'intervento di Boss che suggerisce, in un momento di stallo, di rileggere e pensare da soli per cinque minuti e poi tornare in Chat, produca effetto positivo: Promoter, che era quello con 'poche idee e pure confuse' ora è quello che riesce a capire qual è la formula corrispondente alle sequenze date.

Nell'estratto di discussione tra gli Attori nella Chat di gruppo che segue (Albano, Dello Iacono & Fiorentino, 2020),

Boss: poiché nelle righe precedenti la differenza tra i numeri era uno, allora nella settima riga (l'ultima), poiché finisce con 15 e la differenza è uno, allora i quattro numeri dovrebbero essere: 12, 13, 14, 15

Boss: Quindi, sarà $12 \cdot 14 - 13 \cdot 15$. Siete d'accordo?

Peste: Ehm, scusami, io non ho capito

Boss: scusa, ho sbagliato, $13 \cdot 14 - 12 \cdot 15$

Promoter: ragazzi, siccome vedo la riga con i numeri 15, 16 e 18, siccome nella riga a destra c'è *17, secondo me il numero mancante dovrebbe essere 17, ottenendo $16 \cdot 17 - 15 \cdot 18$

Peste: prodotto dei medi meno il prodotto degli estremi?

Blogger: la riga 5 suppongo debba essere 7-8-9-10 $8 \cdot 10 - 7 \cdot 10$. Siete d'accordo? Boss, cosa ne pensi?

Peste: dobbiamo calcolare il risultato?

Blogger: ci si aspetta che troviamo i numeri mancanti

possiamo notare come Boss, nello spiegare la sua idea al gruppo commetta un errore. L'intervento tempestivo di Peste, in cerca di chiarimenti, permette a Boss di correggere la sua affermazione. L'intervento di Boss porta sia Promoter che Blogger a spiegare la loro idea sulle quaterne. Le frequenti domande di Peste, portano Blogger a tornare sulla richiesta della storia e a tenere i compagni

concentrati su quanto viene chiesto loro di risolvere. Osserviamo come i quattro amici considerano Boss il referente del gruppo, a cui si rivolgono per chiedere conferma dei propri ragionamenti.

L'estratto che segue mostra il dialogo di Gianmaria e Promoter nella loro Chat privata:

Gianmaria: ehm... come sono disposti i numeri in ogni riga? Tu e i tuoi amici avete "risolto" l'enigma? Cosa viene fuori?

Promoter: sembra che il secondo numero sia moltiplicato per il terzo meno il primo numero per il quarto. Per esempio, guardando la prima riga (15,16,17,18) abbiamo $(16 \cdot 17 - 15 \cdot 18)$

Promoter: il risultato potrebbe cambiare; dovremmo controllare il calcolo del risultato per ogni riga

Vediamo come la domanda di Gianmaria funge da secondo stimolo per Promoter e gli permetta di andare oltre quello che aveva detto nella Chat di gruppo e addirittura di capovolgere il punto di vista: il caso numerico, riportato nel gruppo, qui diventa un esempio di un enunciato generale. Inoltre, è interessante notare che Promoter, rientrando nella Chat di gruppo, non fornisce il suo enunciato generale, ma offre un suggerimento (che riferisce a Gianmaria, probabilmente per darvi autorevolezza) che diventa un secondo stimolo per il gruppo, permettendo ai compagni di uscire da una situazione di stallo, come mostrato nel seguente estratto:

Promoter: Mio zio ha suggerito di guardare se il risultato cambia da una riga all'altra

Blogger: Non capisco

Boss: forse dovremmo eseguire i calcoli mostrati in ogni riga e vedere se il risultato cambia

Peste: dovremmo controllare se il risultato è sempre lo stesso

Blogger: dovremmo calcolare l'espressione matematica?

Promoter: penso di sì

Boss: il primo è 2

Peste: sono tutti 2!

Promoter: allora, ragazzi, possiamo dire che in tutte le righe il risultato è 2

La conversazione prosegue e gli Attori riescono a scoprire la relazione di consecutività e di regolarità delle quaterne. Il raggiungimento dell'obiettivo sembra essere stato influenzato da una appropriazione del ruolo giocato dagli studenti e dalla responsabilità che ogni specifico ruolo ha comportato, ma anche dal ruolo di Gianmaria il cui operato, tra l'altro, funge da modellazione della cognizione (King, 2007).

6.8.2 Come la partecipazione da Osservatore aiuta l'appropriazione del ruolo

Gli studenti-osservatori hanno il compito di osservare il lavoro dell'intero gruppo-attore avendo cura di focalizzarsi in particolare su uno specifico personaggio. Devono riportare in un diario di gruppo le proprie osservazioni, scrivendo ognuno in un colore assegnato corrispondente al ruolo osservato nel dettaglio. Le note devono riferirsi a come il personaggio ha interpretato il ruolo associato, facendo anche un confronto ideale con quanto lo studente-osservatore immagina avrebbe fatto se si fosse trovato come Attore in quel ruolo.

Di seguito presentiamo alcuni estratti dei diari personali di autovalutazione (cfr. sezione 6.5) in cui si evidenziano gli elementi caratteristici dei diversi ruoli.

Partiamo dalle osservazioni fatte sul ruolo di Boss. Guardando al seguente estratto

Se io fossi stato nei suoi panni avrei provato ad immedesimarsi maggiormente nel personaggio, cercando di interpretarlo nel migliore dei modi, cercando di dare un supporto, un incoraggiamento maggiore alla squadra, dando e proponendo varie idee, ipotesi, coordinando al meglio i lavori svolti e aiutando la squadra...alimentando la discussione, parlando più spesso e proponendo varie cose, non sempre le stesse, così da non rendere noiosa la discussione e velocizzare anche la trama, in teoria. Non era concentrato.

si vede che lo studente riconosce in Boss qualcuno che si prende cura del gruppo anche a livello affettivo ('dare un supporto, un incoraggiamento'), e non solo a livello cognitivo ('proponendo varie idee') o gestionale ('coordinando al meglio i lavori'). Il commento in negativo 'non era concentrato' può essere interpretato in positivo come il riconoscimento del fatto che esercitare il ruolo di Boss richiede concentrazione.

A questo fa eco il commento dell'estratto seguente

Il Boss non ha svolto il suo ruolo lasciando fare al Promoter quello che era il suo compito. Ha aiutato poco nella risoluzione del problema per via della sua assenza per quasi tutta la chat. Mi rendo conto che non è un ruolo facile ma avrebbe potuto sicuramente essere più partecipe nelle conversazioni ed aiutare così il gruppo nella ricerca della soluzione.

dove leggiamo 'mi rendo conto che non è un ruolo facile', quindi si riconosce che fare Boss richiede impegno, ma allo stesso tempo entra in gioco anche la sua volizione, 'ma avrebbe potuto sicuramente essere più partecipe', che esprime la necessità di una volontà.

Per quanto riguarda Peste, l'estratto seguente

Inizialmente ha giocato bene; facendo domande ma anche contribuendo alla risoluzione del problema (sempre facendo sorgere qualche dubbio). Però alla fine ha parlato poco e le domande che faceva erano molto semplici, quindi non sorgeva alcun dubbio.

evidenzia un focus importante individuato dallo studente-Osservatore. Sposta l'accento dal 'fare domande' al 'tipo di domande' che Peste è chiamato a fare nel suo ruolo. Non può andar bene una domanda qualsiasi, dev'essere una domanda che ha uno scopo preciso: insinuare il dubbio.

Questo in positivo viene osservato in un altro episodio, dove Peste evidentemente ha giocato in maniera più adeguata il suo ruolo e lo studente-Osservatore annota il valore aggiunto delle domande di Peste. I dubbi sollevati e le domande fatte da Peste portano il gruppo a scoprire che il problema può essere risolto in più modi e l'insicurezza inizialmente suscitata diventa il motore che porta a nuove conoscenze, come leggiamo nei seguenti estratti:

Ha fatto trovare più di una soluzione con le sue domande.

Sì, facendo domande è riuscita a far trovare un'altra soluzione. I suoi compagni non essendo sicuri della prima soluzione ne hanno cercata un'altra riuscendoci.

Anche per il ruolo di Blogger, i diari degli Osservatori mettono in risalto alcune caratteristiche. Nella critica riportata nell'estratto seguente

Inoltre Blogger "ha sbagliato" nello scrivere l'e-mail, in che senso....Quest'ultimo, come dimostrato anche da ciò scritto dallo zio Gianmaria, si dimentica, trascura un'importante parte di ciò che è detto precedentemente nella discussione, ovvero che il risultato finale del "teorema", se così si può definire era 2.

si può leggere l'attenzione che Blogger deve avere all'intera discussione, per non trascurare parti importanti del discorso fatto e quindi 'ricapitolare nel modo giusto' come detto nel seguente estratto:

Sì, la maggior parte dei suoi interventi sono stati utili al raggiungimento dell'obiettivo perché è riuscito anche a ricapitolare nel modo giusto il ragionamento seguito [...]. Nei suoi panni avrei più o meno fatto lo stesso.

Nell'estratto seguente c'è un ulteriore aspetto. Sembrerebbe suggerire che Blogger non debba solo limitarsi a riportare in bella copia quello che è stato detto dal gruppo, ma che questo processo di sintesi e bella copia debba essere fatto con senso critico, cosa che invece fa solo nel momento in cui interagisce con Gianmaria, come riportato:

Credo che avendo il ruolo di Blogger avrei controllato ulteriormente la formula prima di mandare la mail, ma durante la conversazione con Gianmaria ha riconosciuto l'errore commesso proponendo la formula corretta.

Il nuovo ruolo introdotto, quello di Promoter, ha attratto particolarmente gli studenti-Osservatori che ne hanno apprezzato l'operato, soprattutto in relazione agli avanzamenti che ha portato rispetto alla comprensione e alla risoluzione del problema, come leggiamo nei tre estratti che seguono:

Promoter ha giocato bene nel suo ruolo, mostrando le sue idee e dando anche buone indicazioni ai suoi compagni. Il suo contributo è stato importante per trovare la soluzione al problema, inoltre ha anche formulato diverse domande per far capire meglio ai suoi compagni alcune cose.

Promoter ha giocato molto bene, svolgendo il suo ruolo correttamente, ha dato una grande mano alla squadra proponendo molto spesso nuove soluzioni. I suoi interventi sono stati di grande aiuto, mi ha stupito. Nei suoi panni mi sarei comportato allo stesso modo.

Sì, perché è riuscito a trovare una soluzione in una situazione di stallo.

Ci sembra interessante notare come gli studenti-Osservatori si siano fermati anche ad osservare la relazione di Promoter con Guru/Gianmaria. Nei due prossimi estratti, relativi al canale privato tra Promoter e Guru, emergono questioni relative all'uso di risorse interne o esterne alla persona (cfr. sezione (cfr. sezione 4.1)). Il primo estratto:

Ha giocato bene, forse avrei ragionato un pò di più prima di chiedere aiuto allo zio, ma per il resto è stato bravo.

sembra suggerire che Promoter si sia adagiato sulla possibilità di aiuto da parte di Guru e quindi si sia rivolto all'esterno di sé, prima di indagare a fondo sulle proprie risorse interne.

Il secondo estratto, di contro, rivela il problema opposto, sembra cioè suggerire che Promoter non abbia sfruttato le risorse esterne disponibili, quando non riusciva da solo.

Senza di lui non avrebbero trovato le 2 soluzioni, quindi il suo contributo è stato tutto sommato importante. Se fossi stato nei suoi panni avrei fatto le stesse cose perché erano davvero tutte giuste e fatte con un buon criterio logico. Promoter poteva parlare di più con Gianmaria quando voleva sapere delle spiegazioni sulla risposta, questa è stata la pecca del personaggio.

I diari degli Osservatori sembrano rivelare una ricca miniera di informazioni e riflessioni, che investe non solo come lo studente percepisce il ruolo ma anche quale sia il collegamento del ruolo rispetto al processo di risoluzione del problema. In questo senso sembra che il doppio livello di partecipazione

Attori-Osservatori possa essere un supporto didattico efficace sia a livello cognitivo sia a livello metacognitivo, favorendo lo sviluppo dei ruoli come parti di un unico sé.

6.9 Riflessioni sul secondo disegno

Le sperimentazioni realizzate e l'analisi dei dati raccolti, hanno confermato la nostra ipotesi sulla pertinenza ed efficacia del punto di vista degli Osservatori che possono riflettere sull'azione e sulle interazioni tra pari e con l'esperto, dal di fuori della storia. Efficacia che abbiamo riscontrato sia a livello cognitivo sia a livello metacognitivo, in particolare nell'analisi dei diari degli Osservatori. Inoltre l'organizzazione didattica dell'alternanza dei gruppi come attori e osservatori ha reso maggiormente efficace anche il ruolo dell'insegnante. L'interazione tra i personaggi guidata dai ruoli - sia degli studenti che dell'insegnante - ha favorito il raggiungimento dell'obiettivo dell'attività e ci ha convinto della necessità di prevedere una fase di valutazione sia della narrazione matematica che dei ruoli giocati (cfr. sezione 3.4).

7 Terzo disegno

Il terzo ciclo espansivo ha risentito di riflessioni sul processo dimostrativo che hanno portato alla ridefinizione degli episodi di narrazione matematica. Inoltre il gruppo di ricerca si è posto il problema della valutazione.

7.1 La storia: il nuovo disegno della meta-narrazione matematica

Il design dell'evoluzione della storia è stato ulteriormente raffinato collegando l'evoluzione temporale all'evoluzione del processo di dimostrazione (Albano, Coppola, Dello Iacono, Fiorentino, Pierri & Polo, 2020). Abbiamo scelto di modellare tale processo ispirandoci alle fasi di produzione di congetture e di costruzioni di dimostrazioni individuate da Boero (1999):

- (a) **Esplorare:** gli studenti sono coinvolti in una fase di indagine, a partire da una o più domande, alla fine della quali è atteso che producano un report di ciò che hanno osservato; in questa fase gli studenti esplorano la situazione problematica e cominciano ad emergere le prime congetture 'locali', ossia enunciati spesso relativi ad esempi che provengono dalla situazione in gioco, dove gli studenti riescono ad identificare delle regolarità, che talvolta cominciano a provare anche su altri esempi costruiti da loro stessi in modo da indagare se e sotto quali condizioni la regolarità continua a valere;
- (b) **Congetturare:** dopo l'esplorazione di vari casi gli studenti producono testo che generalizza quanto hanno trovato nella fase di esplorazione, ossia una congettura generale, su quanto osservato, generalmente espressa in forma verbale e scritta in modo tale che possa essere resa pubblica;
- (c) **Formalizzare:** dopo aver trovato la congettura, comincia a porsi l'esigenza di trovare degli argomenti opportuni per la sua validazione; spesso il testo prodotto nella fase precedente non è adeguato a questo scopo; nasce quindi l'esigenza di manipolare la congettura prodotta al fine di avere una formulazione funzionale alla sua dimostrazione che è oggetto del lavoro degli studenti in questa fase;
- (d) **Dimostrare:** la nuova formulazione è il punto di partenza perché gli studenti siano coinvolti nella produzione di una dimostrazione accettabile secondo gli standard matematici adeguati al livello scolastico in cui operano; sono quindi impegnati a produrre un 'calcolo ragionato', cioè una organizzazione degli argomenti in catena deduttiva e a giustificare ogni passo deduttivo.

Il racconto evolve lungo quattro episodi, che corrispondono alle fasi descritte (Figura 7.1). Tali fasi sono progettate e implementate separatamente ma, nella pratica, non sono da intendersi né strettamente separate né esperite in un flusso lineare. Sono però indispensabili nella loro interezza affinché gli studenti diventino anche consapevoli della meta-narrazione matematica, cioè che si appropriino dell'oggetto di ogni episodio, non limitandosi al solo risultato (cfr. sezione 3.4).



Figura 7.1. I quattro episodi

7.2 Riflessione e valutazione collettiva: narrazione e meta-narrazione matematica

Per inserire questo tipo di attività nella pratica ordinaria, non possiamo prescindere dal fatto che sia prevista per gli studenti anche una fase di valutazione. Naturalmente, dal momento che gli studenti hanno lavorato in gruppo, abbiamo scelto di realizzare una valutazione collettiva. Ogni gruppo di studenti torna indietro a ‘rivedere’ la storia. Questo avviene andando a riguardare fumetti, chat, diario personale. Lo scopo è permettere agli studenti di:

- prendere coscienza del ‘senso matematico’ dell’intera storia e di ogni episodio (avvio alla dimostrazione e sotto-obiettivo di ogni episodio – meta-narrazione matematica, cioè i passi da esplorazione a dimostrazione);
- creare una ‘narrazione matematica’ come racconto di un percorso che attraversa fatti matematici (Lolli, 2018) (scoperta della regolarità e delle proprietà matematiche)

Il prodotto di questa fase è la redazione collettiva da parte di ogni gruppo della ricostruzione del processo di risoluzione del problema matematico. Gli studenti vengono guidati attraverso un canovaccio reso loro disponibile mediante un documento editabile collettivamente.

Il documento presenta una parte introduttiva: *“Avete vissuto una storia, in cui degli alieni vi hanno contattato inviandovi un primo messaggio con dei dati, a partire dai quali avete cominciato a interagire con loro. Provate a ripercorrere tutta la storia per capirne il senso. Andando su ogni episodio troverete alcuni spunti di riflessione.”*

Contiene quindi un indice con le varie sezioni che gli studenti devono riempire collettivamente, una per ogni episodio, all’interno delle quali vengono forniti degli input in modo da indirizzare lo studente alla redazione delle varie sezioni (vedi Figura 7.2):

Arrivano gli alieni - Episodio 1



Ci è arrivato un foglietto dagli alieni e abbiamo osservato e trovato che ...

Arrivano gli alieni - Episodio 2



Quello che abbiamo capito del foglietto ci è servito per ...

Arrivano gli alieni - Episodio 3



Gli alieni non capivano quello che abbiamo scritto a parole e lo abbiamo trasformato..... perché.....

Arrivano gli alieni - Episodio 4



Gli alieni non sembravano convinti di quello che avevamo trovato e quindi abbiamo.....

Figura 7.2. La struttura del documento collettivo

Questo documento diventa per l'insegnante il prodotto da valutare (in termini di competenze - argomentativa e comunicativa - e di conoscenze matematiche) come valutazione di gruppo (cfr. sezione 9.2).

7.3 Autovalutazione sui ruoli

Abbiamo ritenuto importante favorire un approfondimento sul significato di ciascun ruolo rispetto alla risoluzione del problema. In particolare, è importante che gli studenti riconoscano la necessità che in una situazione di problematica ciascun individuo sia in grado di esercitare tutti quei ruoli e che la loro efficacia ai fini della risoluzione del problema sta nella loro collaborazione. Per questo motivo, in aggiunta alla riflessione in itinere (cfr. sezione 7.2), abbiamo disegnato un compito di autovalutazione, dove agli studenti vengono sostanzialmente riproposte a posteriori le stesse domande guida che comparivano nel diario personale (Figura 6.2). Lo studente può avvalersi di tutto il materiale prodotto (personale e di gruppo) durante tutto il percorso. Proprio perché le risposte dello

studente, in questo caso, sono a posteriori e ha una visione d'insieme di tutta l'attività svolta, abbiamo previsto di chiedergli esplicitamente una riflessione su come sarebbe cambiata la sua partecipazione a valle di tutta l'esperienza, sia in veste di Attore che di Osservatore.

7.4 Valutazione individuale

Oltre alla valutazione collettiva (cfr. sezione 7.2) abbiamo previsto una valutazione individuale fatta sotto forma di prosecuzione della storia, attraverso il task: “*Ora continua tu la storia...*”. Lo scopo è quello di indagare cosa lo studente ha interiorizzato dell'esperienza fatta e quali tracce esplicita.

7.5 Strumenti digitali specifici

Nello sviluppo della storia, Guru, che gestisce al momento la conoscenza matematica della classe, potrebbe accorgersi della necessità di fornire agli Attori ulteriori strumenti per agevolare le fasi di esplorazione, produzione di congetture o argomentazioni e per la loro formalizzazione. A tal fine (e in funzione della *technological literacy* della classe) il terzo disegno del DIST-M prevede che Guru possa attivare alcune risorse aggiuntive realizzate con GeoGebra e integrate all'interno di Moodle (Albano & Dello Iacono, 2019b), come fogli di calcolo o strumenti per supportare le fasi di argomentazione e formalizzazione. Queste risorse sono inizialmente nascoste e Guru può attivarle e renderle disponibili nella pagina del corso Moodle. Può comunicare al gruppo di Attori dell'avvenuta attivazione di tali risorse attraverso il canale privato con Promoter.

Più in dettaglio, nel primo episodio della storia, ossia *Esplorare* (cfr. sezione 7.1), Guru può attivare un foglio di calcolo per supportare gli studenti nella loro esplorazione alla ricerca di regolarità, i quali possono sfruttare le potenzialità della definizione e dell'uso di formule e della modalità di trascinamento riuscendo ad eseguire rapidamente molte prove su un numero alto di quaterne di numeri consecutivi. Impostando, infatti, una formula per una delle quaterne e trascinandola, gli studenti possono verificare che il risultato dell'operazione di sottrazione tra il prodotto dei medi e quello degli estremi per ulteriori quaterne sia sempre lo stesso. L'utilizzo delle formule nei fogli di lavoro, con i riferimenti alle celle del foglio, anticipa di fatto la generalizzazione della matematica attraverso l'algebra. Abbiamo reso disponibile anche un breve tutorial su come usare il foglio di calcolo (dare per scontato che gli studenti fossero in grado di usare le tecnologie in modo didatticamente significativo è un errore comune che abbiamo cercato di evitare). Lo studente può scegliere se e quando seguire il tutorial.

Nel secondo e terzo episodio della storia, ossia *Congetturare* e *Formalizzare* (cfr. sezione 7.1), Guru può attivare un tool linguistico, cosiddetto Interactive Semi-open Questions (ISQ), progettato per supportare gli studenti sia nella produzione di congetture sia nella loro formalizzazione. Una ISQ (Albano & Dello Iacono, 2019a) è un'applicazione digitale che consente allo studente di costruire una frase o un'affermazione trascinandolo tessere digitali opportunamente scelte dall'esperto (cfr. sezione 7.6).

7.6 Implementazione del terzo disegno

Per aumentare l'immersività in questo terzo disegno, l'ambiente di apprendimento prevede dei profili per ciascun personaggio, con nomi ed icone, in accordo alla rappresentazione nei fumetti. In questo modo, gli utenti interagiscono nell'ambiente virtuale sempre e solo tramite i personaggi che interpretano in quel momento. Il passaggio da un ruolo all'altro viene gestito con l'utilizzo di credenziali di accesso da comunicare a ciascuno studente ad ogni episodio. Così, accedendo alla

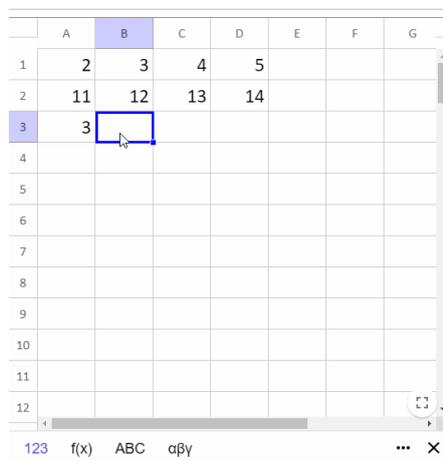
piattaforma, lo studente si trova a prendere parte alla storia nei panni del personaggio e del ruolo assegnatogli in quello specifico episodio. Moodle consente di implementare tutto questo poiché è in grado di gestire in maniera fine i profili degli utenti e le modalità di partecipazione: il docente può inserire gli utenti con i nomi e le immagini dei protagonisti della storia (ad esempio, registrando un utente come “Federico il Promoter”, con la foto del personaggio visualizzato nei fumetti).

Tutti i canali di comunicazione sono stati implementati utilizzando la Chat di Moodle. A differenza dei disegni precedenti, la discussione tra Attori e Guru prevista nella fase finale di ciascun episodio (Figura 6.1) non avviene più nel Forum ma direttamente nella Chat di gruppo.

Per la fase di *Riflessione collettiva* sulla storia (cfr. sezione 7.2) abbiamo reso disponibile a ogni gruppo un (link a) Documento Google, come già fatto per il diario di bordo personale. La compilazione di tali documenti richiede che lo studente ritorni su tutta la storia vissuta (cfr. sezione 7.2), a tal fine abbiamo reso disponibili allo studente le informazioni necessarie (fumetti, trascrizioni delle Chat e Documenti Google) tramite dei link. Queste informazioni sono state utilizzate dagli studenti anche per la fase di autovalutazione, che è stata implementata utilizzando il Questionario di Moodle.

La fase di valutazione individuale (cfr. sezione 7.4) è stata implementata utilizzando un Compito di Moodle nel quale è prevista la consegna di un testo, eventualmente corredato di immagini, che descriva una possibile continuazione della storia.

Abbiamo implementato il foglio di calcolo (che Guru può attivare nel primo episodio della storia) con l’omonima vista di GeoGebra incorporata come *iframe* in una Pagina di Moodle (Figura 7.3).



	A	B	C	D	E	F	G
1		2	3	4	5		
2		11	12	13	14		
3		3					
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							

Figura 7.3. Il foglio di calcolo

Le Interactive Semi-open Questions (ISQs) (che Guru può attivare nel secondo e terzo episodio della storia, cfr. sezione 7.1) sono state implementate incorporando applicazioni GeoGebra all’interno di Moodle (Albano & Dello Iacono, 2019a). La Figura 7.4. mostra le tessere digitali nelle due ISQs necessarie per costruire un’affermazione verbale e la sua espressione simbolica, rispettivamente nel secondo e terzo episodio.

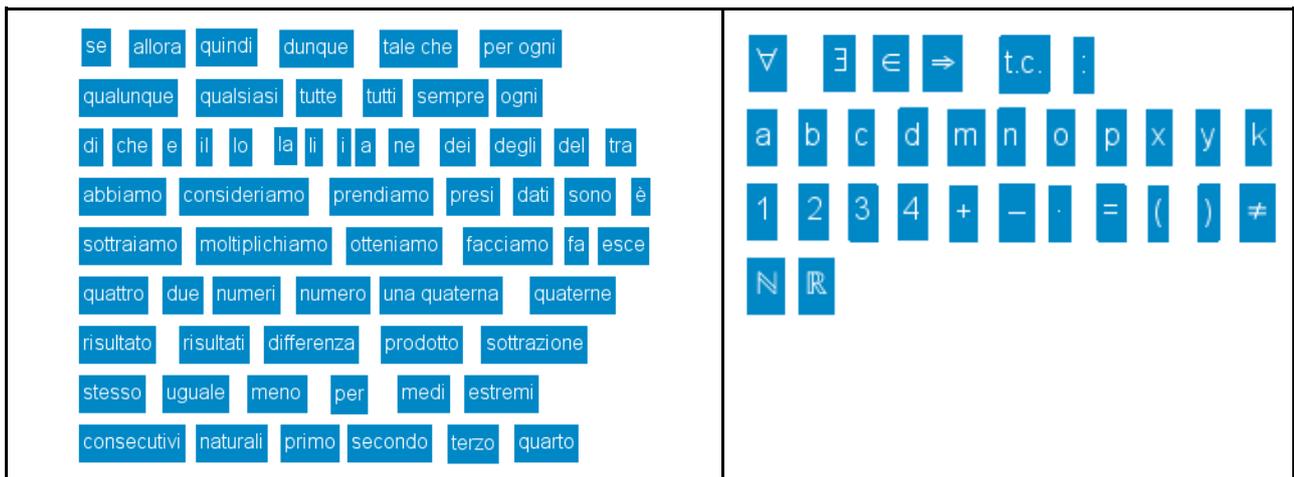


Figura 7.4. Le tessere digitali rispettivamente negli episodi *Congetturare* (sinistra) e *Formalizzare* (destra)

Sono disponibili diverse copie sovrapposte di ogni tessera digitale, in modo che lo studente possa usare la stessa tessera più volte.

Le tessere previste per il secondo episodio (Figura 7.4, sinistra) forniscono elementi linguistici appartenenti a registri evoluti (ad esempio, le espressioni “se”, “allora”, “per ogni”, “tale che” sono rappresentate da singole tessere digitali) e quindi ci aspettiamo che il loro uso nella formulazione della congettura favorisca il passaggio da registri colloquiali a registri evoluti (cfr. sezione 4.2.2). Esempi di frasi che lo studente può costruire utilizzando le tessere disponibili sono:

dati quattro numeri naturali consecutivi
 se facciamo la differenza del prodotto tra il secondo e il terzo e il
 prodotto tra il primo e il quarto esce sempre due

oppure

se prendiamo quattro numeri naturali consecutivi qualsiasi
 allora la differenza del prodotto tra il secondo e il terzo e il prodotto
 tra il primo e il quarto fa sempre due

o ancora

consideriamo una quaterna qualsiasi di numeri naturali consecutivi
 allora la differenza tra il prodotto dei medi e il prodotto degli estremi
 è sempre due

o frasi equivalenti alle precedenti.

Le tessere previste per il terzo episodio (Figura 7.4., destra) sono pensate per favorire il passaggio alla formalizzazione simbolica, arrivando a costruire ad esempio l’espressione:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1) \cdot (n+2) - n \cdot (n+3) = 2$$

La presenza di diverse lettere (Figura 7.4, destra, seconda riga) da un lato può far emergere formalizzazioni non adeguate (sequenze di lettere dell'alfabeto, cfr. sezione 4.3), da un altro lato può fornire allo studente la possibilità di scegliere di indicare il generico numero naturale con una lettera diversa da n e favorire una riflessione sulla differenza tra simbolo e significato.

La presenza del simbolo che indica i numeri reali, oltre a quello dei numeri naturali, può essere un primo stimolo per una riflessione sul significato di "consecutività" e di "numeri consecutivi" in un insieme diverso da quello dei numeri naturali (cfr. sezione 4.3).

I simboli (Figura 7.4, destra, prima riga), e in particolare i quantificatori e l'implicazione, sono stati introdotti per stimolare una riflessione sul loro significato matematico e una eventuale discussione con l'esperto.

Ovviamente, per ciascuna delle due ISQ implementate, lo studente, con le tessere digitali disponibili, può costruire frasi/espressioni che possono essere matematicamente corrette o errate, così come complete o incomplete.

7.7 Sperimentazione del terzo disegno

Il disegno, implementato secondo quanto sopra descritto, è stato sperimentato con 26 studenti frequentanti la classe seconda del Liceo "Mangino" di Pagani (SA). Il docente della classe ha provveduto a formare 2 gruppi da 5 studenti ciascuno e 4 gruppi da 4 studenti ciascuno. Nei gruppi da 5 hanno il ruolo di Peste (se il gruppo giocava da Attori) o di Osservatore Peste (se il gruppo giocava da Osservatori) è stato duplicato.

La sperimentazione, avvenuta nel periodo Gennaio 2020-Febbraio 2020, è stata avviata in presenza, in orario scolastico, presso due aule laboratoriali della scuola. Alla sperimentazione erano presenti sia i ricercatori che il docente responsabile della sperimentazione; il ruolo dell'esperto è stato giocato da un ricercatore. I primi due episodi sono stati sperimentati in presenza; per proseguire con la storia è stato concordato insieme al gruppo classe e all'esperto un orario pomeridiano in cui "ritrovarsi".

Sono stati schedulati poi altri incontri pomeridiani in modo che gli studenti, sempre interagendo a distanza, giungessero al completamento degli episodi della storia alla presenza dell'esperto.

7.8 Alcuni risultati di analisi del terzo disegno

7.8.1 Strumenti digitali come mediatori visuali

Nel seguente estratto dalla chat di gruppo (Dello Iacono, Pierri, Polo, 2021), relativo all'episodio 'Arrivano gli alieni 2', è mostrato come gli studenti provano a costruire la congettura utilizzando la ISQ (sezione 7.5), attivata opportunamente da Guru.

- Promoter: Gli ho detto "prendili in maniera consecutiva e successivamente moltiplica il secondo ed il terzo e sottraili al prodotto tra il quarto ed il primo"...mi ha detto che è un buon punto di partenza
- Promoter: Partendo da questo dove dobbiamo andare?
- Blogger: Siamo a buon punto
- Promoter: Eh ma io mi sono bloccato, come dobbiamo continuare?
- Blogger: Riassumiamo...se sottraiamo il prodotto dei medi ed estremi di 4 numeri consecutivi il risultato è sempre 2.

Promoter: No, io eviterei medi ed estremi... diciamo 4 numeri consecutivi e poi diamo un ordine

Boss: Credo che in ogni caso dobbiamo usare medi ed estremi perché sono termini matematici

Promoter: Dobbiamo capire dove arrivare

Promoter: Guru vuole darci un' app

Gli studenti, partendo dalla discussione tra Promoter e Guru, cercano di formulare la congettura, mostrando alcune difficoltà. Blogger prova a riassumere, ma il suo tentativo non è sufficiente a superare l'impasse. Guru, quindi, osservando la discussione, decide di attivare l'app delle tessere digitali (ISQ) così da indirizzare gli studenti verso la costruzione della congettura.

Il successivo estratto mostra come gli studenti usano il suggerimento fornito da Guru.

Blogger: Forse dobbiamo spiegare il teorema.

Promoter: un sacco di parole utili appaiono per spiegare la formula

Promoter: Dobbiamo ricomporre un teorema da quelle parole; l'inizio è: se prendiamo 4 numeri consecutivi.

Boss: ma questo vale solo per i numeri naturali?

Blogger: 4 numeri naturali consecutivi? il teorema dovrebbe funzionare anche con i numeri con la virgola

Boss: Penso di no

Blogger: hai ragione BOSS; penso che i numeri devono essere naturali

Promoter: allora mettiamo naturali

Boss: Come potremmo continuare l'enunciato?

Promoter: Abbiamo scritto 4 numeri naturali consecutivi... il prodotto di due numeri presi due a due?

Peste: Se facciamo: il prodotto di 4 numeri consecutivi presi due a due

Promoter: Ma tra le parole c'è una parola "prodotti"?

Blogger: Potremmo anche scrivere il resto della frase; l'app ci dà un aiuto

Peste: Se facciamo il prodotto di 4 numeri consecutivi presi due a due e poi facciamo la sottrazione dei risultati ottenuti, il prodotto è 2

Promoter: FUNZIONA!

Blogger: Aspetta scrivi tutto nel gruppo

Promoter: Se prendiamo quattro numeri naturali consecutivi e facciamo il prodotto due a due e sottraiamo i due numeri ottenuti, il risultato è due.

Dagli estratti sopra mostrati, sembra che l'ISQ agisca come mediatore visuale. Nel discorso evoluto della matematica, i mediatori visuali sono artefatti simbolici come, ad esempio, espressioni algebriche, tabelle o grafici che costituiscono il discorso stesso (Sfard, 2008). Tali mediatori possono influenzare la comunicazione degli studenti ed è quello che sembra essere accaduto nel momento in cui gli studenti visualizzano le tessere digitali e iniziano a utilizzarle per costruire la congettura. Dagli stralci si evince, infatti, come gli studenti, una volta visualizzata la app con le tessere digitali (Figura

7.4) avviano una discussione sulla validità della formula per i numeri non naturali, probabilmente grazie all'osservazione da parte di Boss della presenza della tessera "naturali". Dopo aver raggiunto un accordo, gli studenti continuano a costruire la congettura per mezzo delle tessere digitali, ma non riescono ad esplicitare il loro pensiero a causa della mancanza di alcune tessere (ad esempio la tessera "prodotti"). Blogger, tuttavia, considera l'app come un supporto e quindi suggerisce al gruppo di completare la formulazione della congettura con parole proprie. Alla fine della discussione il gruppo riesce a produrre una congettura. Sembra che l'ISQ sia stata in grado di influenzare il modo in cui gli studenti comunicano tra loro e, in particolare, di supportarli nella costruzione e formulazione delle loro congetture.

7.8.2 L'interazione tra i pari e con il docente nella fase di esplorazione

Abbiamo preso in considerazione le chat del primo episodio con lo scopo di analizzare i pattern delle interazioni degli studenti con il docente nella fase di esplorazione e di validare un modello di analisi di reti complesse (Polo e altri 2021) diverso da quello utilizzato nel primo prototipo che non permetteva di analizzare le Chat. I dati delle Chat degli studenti attori e docenti sono riportati secondo l'ordine temporale restituito dalla piattaforma Moodle che fornisce informazioni sull'ora di ogni messaggio scritto nella chat e permette di identificare anche il ruolo dell'autore. L'episodio in esame è relativo alla fase iniziale dell'esplorazione ed è avvenuto tra le 12:20 e le 13:30 durante l'orario scolastico. Nello scambio dei primi messaggi nella chat si riconosce il ruolo di Peste nel promuovere e mettere in discussione la risoluzione del problema matematico e l'azione corale nella interpretazione del messaggio inviato dagli Alieni.

La matrice dei dati, risultata di dimensione 27×31 , è costruita per implementare l'algoritmo che consiste nell'applicazione del problema della seriazione all'analisi delle reti sociali. La seriazione è un fondamentale problema di ordinamento combinatorio, il cui obiettivo è quello di trovare il miglior riordinamento di un insieme di unità, secondo una data funzione di correlazione, in modo che gli elementi con maggiore somiglianza siano vicini tra loro nella sequenza risultante. Le righe rappresentano i partecipanti (26 alunni e l'insegnante); le colonne definiscono il ruolo per ciascun partecipante di ciascun gruppo nell'ordine Peste, Blogger, Boss e Promoter e forniscono la frequenza delle diverse tipologie di interventi degli alunni e del docente distinte in interazioni principali legate al problema matematico e secondarie, di tipo sociale. Utilizzando la matrice di dati abbiamo costruito la matrice di similarità e quindi, applicando l'algoritmo spettrale, abbiamo ottenuto l'albero PQ, mostrato in Figura 7.5, di tutte le permutazioni ammissibili delle foglie, ovvero dei partecipanti.

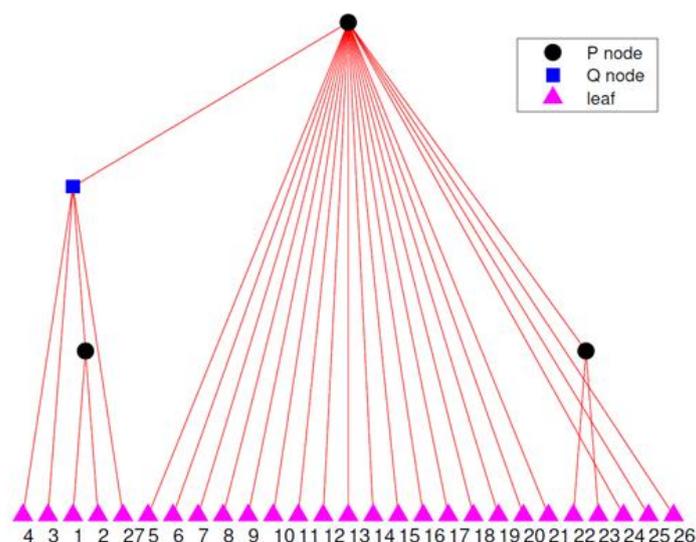


Figura 7.5. L'albero PQ rappresentazione delle interazioni tra tutti i partecipanti

Osservando la struttura dell'albero, si può notare che i nodi foglia etichettati come gli studenti che hanno agito come attori e l'insegnante (la sequenza 4, 3, 1, 2, 27), sono isolati dagli altri che rappresentano gli Osservatori. Nello specifico, i nodi che rappresentano i partecipanti sono figli di un nodo Q caratterizzato dal fatto che rappresenta sia l'ordinamento destro che sinistro delle sue foglie etichettate come nodo nel grafico. Il nodo P, figlio del nodo Q, rappresenta la classe di equivalenza di tutte le permutazioni delle sue foglie. In termini di pattern di comportamento ciò significa che Peste e Blogger hanno una maggiore somiglianza tra loro rispetto agli indicatori scelti di interazioni sul problema matematico con gli altri studenti e con il docente. La separazione dei due rami dell'albero mostra che il gruppo degli Attori, i primi 4 studenti, interagisce solo con il docente mentre gli altri studenti, che sono gli Osservatori in questa fase della sperimentazione, non interagiscono né tra loro né con il primo gruppo e il docente. In termini di teoria dei grafi, gli indici corrispondenti agli Attori e all'insegnante possono fornire una componente connessa del grafo sottostante, cioè un insieme di vertici che sono collegati tra loro e non sono collegati a vertici aggiuntivi nel resto del grafo. I due osservatori 22 e 23 corrispondono a due studenti del gruppo che hanno lo stesso ruolo.

I risultati ottenuti mostrano che l'algoritmo spettrale fornisce un risultato ragionevole in termini di permutazioni ammissibili per gli indici dei nodi che rappresentano i ruoli assegnati. Sebbene la dimensione del campione esaminato non sia molto ampia, la struttura dell'algoritmo permette di confermare che anche per dimensioni più ampie, il gruppo dei partecipanti Attori dovrebbe essere separato dagli Osservatori in quanto individua una componente connessa. Inoltre, da un punto di vista numerico, la dimensione della matrice di similarità non costituisce un problema in quanto l'algoritmo spettrale (Concas e altri, 2019) si basa sul calcolo di un autovettore e a tal fine il toolbox con cui è implementato l'algoritmo prevede la possibilità di scegliere tra una scala ridotta e una implementazione su larga scala e, per migliorare le prestazioni in caso di problemi su larga scala, viene fornita anche una versione parallela del metodo.

Abbiamo inoltre avuto conferma di come, con due strumenti e modelli matematici diversi, l'analisi delle reti complesse in ambito DIST-M possa valere potenziale lente di analisi che consentire

l'identificazione di pattern di comportamenti, siano essi didattici o interpersonali, che si vogliono esaminare da un punto di vista semantico una volta individuati. L'indagine sui dati delle Chat dei gruppi di Osservatori e degli episodi successivi al primo, ancora in fase di elaborazione potrebbero dare ulteriori informazioni su potenziali dissomiglianze nel comportamento degli studenti quando assumono ruoli diversi o posizioni diverse rispetto all'essere Attori o Osservatori.

8 Re-inquadramento dispositivo didattico

8.1 Il dispositivo didattico come intervento formativo

Il dispositivo didattico progettato si inserisce nel filone degli interventi formativi.

All'inizio i ricercatori hanno in mente solo una cornice entro cui si colloca il problema che i partecipanti dovranno affrontare. Più precisamente hanno in mente: a) un macro-obiettivo prioritario, legato alla scelta della competenza matematica su cui focalizzarsi, che inizialmente è stato descritto semplicemente come *supportare lo sviluppo di competenze argomentative*; b) un obiettivo più specifico relativo al particolare problema matematico scelto, inizialmente descritto come *uso dell'algebra come strumento di generalizzazione*.

La scelta di usare la storia come canovaccio su cui i partecipanti (studenti e docenti) costruiscono la loro improvvisazione, che si concretizza nella definizione di un opportuno script, lascia loro autonomia nello sviluppo del percorso in modi e con contenuti che non sono totalmente essere noti a priori.

Tutti i partecipanti affrontano un oggetto problematico: dal lato studenti consiste nel quesito matematico che viene presentato in modo tale da generare un "conflitto cognitivo" e quindi una discussione tra gli studenti e col docente; dal lato docenti l'oggetto problematico è il ruolo stesso di docente, nel personaggio del Guru, e quindi tutte le questioni che riguardano come dovrà agire l'insegnante rispetto alla narrazione matematica prodotta dagli studenti, cioè le scelte di gestione sia all'interno della storia, sia all'esterno della storia (in classe). Il docente potrà essere aiutato da un'analisi a priori, ma questa potrebbe essere completamente disattesa.

Va anche osservato che l'oggetto problematico è immerso nelle attività vitali dei partecipanti. Dal lato studenti, questa immersione nasce dal fatto che essi sono personaggi della storia quando sono Attori e quindi il loro apporto serve alla continuazione della storia, ed è legato alla corralità della storia quando sono Osservatori. Dal lato docente, l'immersione è legata alla professionalità dell'insegnante.

Dal punto di vista del processo, la progettazione fatta è tale che la narrazione matematica viene costruita attraverso continui processi di negoziazione dei contenuti che determinano il corso della storia (deviazioni, velocità, ordine degli episodi, etc.). Questi processi di negoziazione vengono supportati dall'uso del principio di doppia stimolazione, che tende a favorire l'assunzione di responsabilità del processo sia negli studenti attraverso l'offerta di ulteriori stimoli finalizzati al raggiungimento autonomo dell'obiettivo dell'attività in gioco sia nei docenti a cui è lasciata la libertà di intervento (ad es. su cosa e quando intervenire e quali ulteriori stimoli offrire). Nel caso degli studenti alcuni stimoli sono progettati a priori (foglio di calcolo, tessere linguistiche digitali, etc.), nel caso dei docenti la doppia stimolazione è stata lasciata accadere spontaneamente, i docenti hanno avuto discrezionalità di movimento a seconda dell'evoluzione della situazione e dello specifico gruppo di studenti in gioco, sviluppando da sé stessi la loro autonomia, a partire dalle analisi a priori e dagli incontri di formazione con i ricercatori.

Dal punto di vista dei risultati il dispositivo DIST-M non si pone come soluzione standardizzata che funziona nello stesso modo anche in altri contesti. È piuttosto una metodologia in cui alcuni elementi risultano essere potenzialmente trasferibili e utilizzabili per la progettazione di soluzioni DIST-M specifiche per diversi contesti (es. competenze diverse da quella argomentativa) e per diversi

contenuti matematici (es. geometria). Questi elementi aprono una nuova pista di ricerca, su cui stiamo lavorando, volta alla definizione di un meta-modello.

Il ruolo dei ricercatori in questi interventi non è stato quello di voler tenere sotto controllo tutte le variabili. Per questo i docenti sono stati lasciati liberi di giocare in autonomia il ruolo di Guru e sono stati supportati con discussioni e confronti in cui sono state negoziate delle linee di azione, e non sono state date ‘regole’. Il nostro scopo col loro coinvolgimento nelle sperimentazioni e nel progetto PRIN è stato quello di provocare un processo trasformativo del loro ruolo di insegnanti.

8.2 Il dispositivo didattico e i sistemi di attività

Tutto il dispositivo si inquadra nella Teoria dei Sistemi di Attività. (cfr. sezione 1.1.2). Ogni episodio della storia può essere visto come un sistema di attività, il cui oggetto va a sovrapporsi parzialmente con l’oggetto degli altri episodi. Pertanto l’intera storia può essere vista come una costellazione di sistemi di attività (cfr. Figura 1.4).

Ogni episodio evolve secondo uno stesso script. Questo in termini del triangolo di Engeström significa che alcuni elementi restano invariati:

- il soggetto che è ciascuno degli studenti del gruppo Attore o del gruppo Osservatore;
- la comunità che è il gruppo dei cinque personaggi della storia (4 studenti e docente);
- le ‘regole’ che regolano il rapporto del soggetto con la comunità sono rappresentate dai ruoli nella storia/funzioni cognitive nel processo;
- la divisione del lavoro che corrisponde alla collaborazione (tra pari o asimmetrica) all’interno della comunità (studenti e insegnanti) guidata dalle azioni caratterizzanti i vari ruoli;
- alcuni mediatori che il soggetto utilizza per il raggiungimento dell’oggetto (strumenti digitali generalisti - ad es. chat, forum o fumetti, strumenti digitali specifici - ad es. tessere digitali, linguaggio verbale, linguaggio algebrico).

Osserviamo che lo script di ogni episodio è sostanzialmente impostato come processo dialogico a più voci e a più livelli: un livello orizzontale in cui ci sono le voci dei pari che danno luogo a un dibattito e a negoziazioni, un livello verticale in cui si aggiunge la voce dell’esperto che orchestra una discussione matematica, un livello opzionale obliquo in cui la voce dell’esperto interviene o viene interpellata attraverso un pari “privilegiato” e fornisce un secondo set di stimoli. Le regole che mediano la relazione soggetto-comunità, secondo cui gli interventi degli studenti nel discorso sono guidati dai ruoli che essi interpretano all’interno della storia, a cui soggiacciono le funzioni cognitive del problem solving, strutturano e favoriscono il processo di dibattito e negoziazione con voci multiple.

I sistemi di attività corrispondenti ai diversi episodi differiscono principalmente per l’oggetto, che è l’obiettivo dello specifico episodio che a sua volta si concretizza in uno specifico risultato (congettura, formalizzazione e così via). I diversi sistemi di attività però concorrono a produrre un risultato più globale che è l’argomentazione come processo (Boero 1999).

Nell’episodio di valutazione collettiva si realizza un apprendimento espansivo con un movimento da azioni ad attività: si passa dalle azioni che il gruppo fa in ciascun episodio al senso di quell’episodio (cioè attività che quell’episodio rappresenta), ripercorrendo la storia, passano (o si spera che passino

- eventualmente anche con un supporto successivo del docente) dalle *azioni* di ogni episodio all'*attività* di quell'episodio (cfr. sezione 1.2.1). È questo il momento in cui gli studenti interpretano le azioni svolte durante l'attività in un'ottica sistemica e diventano (o si auspica o si supportano a diventare consapevoli del significato (sense come object) degli episodi come esplorare, congetturare, formalizzare e dimostrare. In questo senso, 'l'attività di apprendimento [espansiva] è un'attività che produce attività' (Engeström, 1987, in Engeström & Sannino 2010, p.4): lo studente prende coscienza e, col tempo e la pratica sociale, interiorizza uno script di attività dimostrativa.

8.3 Il dispositivo didattico e i principi cardine dell'*expansive learning*

La progettazione del dispositivo didattico ha inglobato i due principi cardine dell'*expansive learning*: la doppia stimolazione e l'ascesa dall'astratto al concreto.

Il principio della doppia stimolazione è sostanzialmente alla base di tutto il disegno del DIST-M. In alcuni casi è progettato a priori, ad esempio interviene nella comunicazione che appare nei fumetti, dove ogni rilancio è uno stimolo che orienta e produce un effetto (indiretto). In altri casi è lasciato alla gestione autonoma di Guru (insegnante). Questo può avvenire in forma implicita (nascosta) quando ad esempio Guru prende l'iniziativa di contattare Promoter, nel loro canale di comunicazione privato, per fornire ulteriori input (domande, strumenti, etc.) che il gruppo può utilizzare per reinterpretare la soluzione problematica e uscire da momenti di empasse del processo risolutivo. Naturalmente avviene in forma esplicita durante la discussione matematica orchestrata nella parte finale di ciascun episodio. La possibilità per il docente di osservare discretamente tutto quanto fatto dagli studenti e l'asincronicità dei suoi interventi, cioè la scelta del momento in cui intervenire, gli permette di poter andare avanti e indietro sul processo di apprendimento in corso degli studenti e di poter rifletterci sopra, e quindi fornire nuovi stimoli ponderati.

Alla base dell'evoluzione della storia si può riconoscere un processo di ascesa dall'astratto al concreto che si muove su diversi livelli. Rispetto allo specifico problema matematico, si possono riconoscere alcune azioni epistemiche o di apprendimento individuate da Davydov (cfr. sezione 1.2.3): gli studenti sono impegnati in un compito specifico (che coinvolge quaterne specifiche) e lo trasformano per far emergere una relazione universale dell'oggetto in studio (fanno prove su nuove quaterne e replicano su queste la relazione osservata nelle quaterne specifiche), poi lavorano alla sua modellazione che può essere fatta in diverse forme (verbale, algebrica), trasformano il modello in maniera funzionale allo studio più 'puro' dell'oggetto di studio che ne permette quindi la dimostrazione. Successivamente vengono costruiti nuovi compiti in cui il modello costruito viene generalizzato (interi pari e interi dispari, progressioni, ...). Il processo di ascesa dall'astratto al concreto viene supportato dall'insegnante, ma talvolta può emergere dalle contraddizioni interne alla situazione. Ad esempio può capitare (è capitato) che un gruppo di studenti si accorga da solo che le lettere usate per la formalizzazione della congettura non sono adeguate allo scopo - non necessariamente lo scopo della dimostrazione, ma anche solo allo scopo della comunicazione.

8.4 Il dispositivo didattico e l'orchestrazione

Nel nostro progetto prendiamo in considerazione due diverse accezioni di orchestrazione: una riferita agli ambienti tecnologici general purposes, integrata con elementi che vengono dalla ricerca disciplinare, e una riferita alla discussione matematica (Bartolini Bussi, Boni, & Ferri, 1995) per quanto riguarda il coordinamento delle voci che emergono durante i processi di problem solving.

8.4.1 L'orchestrazione tecnologica

Il nostro approccio all'orchestrazione tecnologica integra i modelli di Kollar & Fischer (2013) e di Drijvers e colleghi (2009), che risultano essere compatibili. Come nel caso di Kollar & Fischer e a differenza di Drijvers, l'orchestrazione non ha come scopo quello di supportare la genesi strumentale degli studenti. Gli artefatti tecnologici utilizzati sono generalisti, non incorporano conoscenze matematiche di per sé e come tali non richiedono la costruzione di particolari e opportuni schemi di uso da parte degli studenti. Nel nostro caso, la prima fase di orchestrazione, che prevede la definizione di uno scenario didattico, è gestita da ricercatori e insegnanti in collaborazione e non prevede una determinazione completa a priori di come verranno utilizzate le risorse dall'insegnante e dagli studenti. Questa fase integra anche l'orchestrazione delle diverse modalità sociali di apprendimento che entrano in gioco nei diversi momenti delle attività (Weinberger & Papadopoulos, 2016). Una seconda fase di orchestrazione, che va a riferirsi più specificamente a come calare nella classe lo scenario definito, tiene conto di quelli che Dillenbourg (2013) chiama vincoli estrinseci. Una terza fase di orchestrazione, che si riferisce alla fase di fruizione dell'attività, tiene conto anche della possibilità di una gestione da parte dell'insegnante non del tutto predefinita ma dettata dalla contingenza.

Il modello integrato di orchestrazione che viene fuori nel nostro caso, dunque, prevede:

- *definizione dello scenario*: descrizione sistemica dell'attività, sulla base del modello di Engeström (cfr. sezione 1.1.2);
- *trasposizione didattica dello scenario*: adattamento dell'attività da parte dell'insegnante tenendo conto dei vincoli della classe (ad esempio, possibilità di usare determinati strumenti, tempi scolastici, esigenze curriculari, etc...);
- *realizzazione dello scenario*: messa in opera dell'attività trasposta da parte dell'insegnante, che può anche prendere decisioni e fare scelte ad hoc e run-time durante lo svolgimento dell'attività.

Val la pena di sottolineare che l'orchestrazione della tecnologia risulta essere chiave nel permettere a docenti e studenti di vivere un'esperienza 'aumentata' in cui gli studenti-Ossevatori oltre ai docenti possono seguire in tempo reale quello che accade, permettendo di rendere visibile quello che altrimenti sarebbe invisibile.

8.4.2 L'orchestrazione di voci multiple

Il nostro approccio all'orchestrazione delle diverse voci che emergono nel corso dell'attività fa riferimento alla discussione matematica (Bartolini Bussi, Boni & Ferri, 1995), secondo cui il docente guida i suoi studenti nella costruzione della conoscenza matematica a vari livelli monitorando le interazioni tra loro e stimolando la verbalizzazione e le discussioni generali. In questo processo di orchestrazione, ci sono due momenti importanti per l'insegnante: un'analisi a priori e una a posteriori. Questo si adatta bene al doppio ruolo dell'insegnante nel DIST-M. L'analisi a priori riguarda l'organizzazione delle interazioni. Nel nostro lavoro questo si realizza con la progettazione delle attività che si concretizzano negli episodi della storia, con particolare attenzione al ruolo del Guru/insegnante all'interno della narrazione e a come può interagire e intervenire nel flusso del processo di problem-solving. Nell'analisi a posteriori, grazie all'accesso alle chat e ai documenti redatti individualmente e in gruppo, l'insegnante può analizzare tutte le discussioni svolte lungo la storia, estrarre alcuni punti chiave e trattarli nuovamente in classe, orchestrando così nuove discussioni matematiche.

9 Il ruolo del docente

9.1 L'esperienza 'aumentata' del docente nel DIST-M

Ci sembra interessante soffermarci sul ruolo del docente all'interno del DIST-M, anche per indagare quale ruolo può giocare la tecnologia nella progettazione di attività complesse di insegnamento/apprendimento e come questo impatti sulla visione del gruppo classe da parte dell'insegnante.

Il docente all'interno del DIST-M svolge un duplice ruolo, infatti è sia "insegnante di classe" che personaggio immerso nella storia insieme agli studenti. L'insegnante, infatti, gioca il ruolo di Guru, l'esperto, che agisce come mediatore, supportando il processo di problem-solving, rispecchiando e rilanciando le idee e le intuizioni degli studenti e intervenendo nei (soli) momenti di impasse. L'insegnante/Guru dunque incarna il ruolo della "saggezza" e rappresenta per gli studenti una fonte di conoscenza a cui possono attingere quando necessario.

Dal momento che l'insegnante può osservare ciò che accade durante il lavoro tra pari in tempo reale, attraverso il suo accesso in tempo reale alle chat room dove gli studenti stanno lavorando, quando gli studenti si trovano in una situazione di stallo e non hanno risorse interne per superarla, l'insegnante può decidere di intervenire e offrire supporto. Può decidere di farlo in due modi, con un intervento implicito, attraverso il canale di comunicazione privilegiato con uno dei membri del gruppo, o attraverso uno strumento tecnologico, aggiunto tempestivamente all'ambiente digitale. Infatti, il docente può personalizzare il processo di insegnamento/apprendimento, a seconda dell'evoluzione del lavoro di gruppo, di come rispondono i ragazzi in un determinato gruppo classe, introducendo alcuni strumenti opzionali, come fogli di calcolo, applicazioni CAS o tessere digitali (Albano & Dello Iacono, 2019a), per sostenere il processo di problem-solving degli studenti.

Tuttavia, i benefici del setting tecnologico non si limitano a questa possibilità e alla (qualità delle) interazioni che avvengono durante l'attività. Quello che riteniamo molto interessante esplorare è come la tecnologia possa supportare l'insegnante nel tracciare il processo di problem-solving degli studenti, supportando una migliore orchestrazione delle discussioni matematiche e permettendo una visione in "realtà aumentata" dell'intero processo, che l'insegnante può sfruttare anche oltre la fine dell'attività.

La risoluzione di problemi matematici è un processo la cui complessità raramente emerge dal considerare il solo risultato. Questo è vero sia per i matematici professionisti che per gli studenti, che spesso mostrano all'insegnante solo il passo/risultato finale, appianando il percorso che ha portato fin lì, perdendo la ricchezza dell'esperienza, delle difficoltà incontrate e del loro superamento (Liljedahl, 2007). Nel nostro caso si vede come il potenziale dell'orchestrazione tecnologica permette di far emergere quel percorso. L'insegnante, infatti, può accedere a tutte le chat, i diari e diari di bordo personali e a tutti gli strumenti di reporting della piattaforma e dunque ottenere un resoconto realistico (scritto) di tutti i tentativi, gli sforzi, le direzioni intraprese dagli studenti lungo i diversi episodi del loro "viaggio". Il docente ad esempio può "spiare" tutti i messaggi delle chat, osservando così senza essere visto le interazioni tra gli studenti e la formazione e lo sviluppo delle idee. Tutto ciò può supportare il docente nel passaggio da una valutazione dei prodotti degli studenti all'osservazione e alla gestione dei loro processi di apprendimento. I dati raccolti e osservati danno l'opportunità, infatti, di rilevare tempestivamente errori e misconcetti, e al tempo stesso di scegliere a cosa dare peso in tempo reale, per supportare (e non interrompere) il flusso di risoluzione del problema e cosa invece riprendere e approfondire successivamente, al di fuori delle attività della storia. L'accesso asincrono

a posteriori ai dati può offrire dunque all'insegnante elementi per progettare nuove attività e discussioni matematiche più efficaci in classe.

Dunque, quello che ci sembra importante sottolineare è il vantaggio, ad un livello meta-cognitivo, che l'insegnante può sfruttare: quello di andare "avanti e indietro" lungo i dati della chat per recuperare e approfondire qualsiasi pezzo di conoscenza matematica e riflettere, con o senza i suoi studenti, sull'intero processo avvenuto e sull'evoluzione delle loro conoscenze.

9.2 Il coinvolgimento di docenti e studenti

L'aspetto immersivo del digital storytelling influenza il coinvolgimento e l'atteggiamento degli studenti verso l'apprendimento della matematica, generando talvolta un profondo cambiamento nel loro atteggiamento abituale in classe (Albano, Pierri, & Polo, 2019 e Ascione, Deiana, Pierri, & Polo, 2019). Nella sperimentazione del primo disegno, la scelta del ruolo era negoziata dall'insegnante con gli studenti e ciò ci ha permesso di avere un punto di vista privilegiato di analisi degli aspetti affettivi che influiscono nell'apprendimento, ovvero su se e come questi elementi possono influenzare i cambiamenti di atteggiamento nei confronti della matematica ma anche della partecipazione attiva nelle interazioni con il docente con i pari.

Per analizzare il coinvolgimento degli studenti e il loro atteggiamento, nell'ottica di un intervento formativo e di coinvolgimento attivo dei docenti/sperimentatori, abbiamo condotto un'intervista strutturata al docente a conclusione della prima sperimentazione. Riportiamo la voce del docente estratte dal testo scritto dell'intervista nella descrizione del suo percepito sui cambiamenti di atteggiamento di alcuni studenti, in particolare sul cambiamento di Ivana che nel suo gruppo aveva il ruolo di Blogger e che non era tra i comportamenti che l'insegnante si aspettava

Ricercatore: hai notato che gli studenti sono coinvolti nelle attività digitali più di quanto non lo siano generalmente nelle attività in classe?

Docente: Dopo l'esperienza con il digital interactive storytelling, ho notato un cambiamento nel modo in cui alcuni studenti si sono relazionati con me. In particolare, ci sono stati ottimi risultati dal punto di vista motivazionale e dal punto di vista emotivo: vedi ad esempio Maria, Ivana, Rosaria la cui interazione e l'impegno in piattaforma hanno avuto effetti positivi non solo sul loro avanzamento ma anche sul modo in cui si rapportano alla matematica. Nel caso di Ivana, ad esempio, la ragazza inizialmente si rifiutava di interagire con me, dopo che le avevo chiesto di risolvere un esercizio alla lavagna. Alla fine di questa esperienza, si è offerta spontaneamente di farlo, dimostrando che non aveva più paura della matematica. Inoltre Maria mi ha detto: "Prof, ho scoperto un'altra matematica".

Ricercatore: I ruoli che gli studenti hanno scelto, rispecchiano quelli che ti aspetteresti che scelsero? Hai trovato sorprese rispetto ai ruoli che normalmente ricoprono in classe?

Docente: Il ruolo scelto da Ivana è stata una sorpresa poiché è sempre stata una ragazza introversa

Ricercatore: Per coinvolgere gli studenti nelle attività online, hai usato l'arma della valutazione?

Docente: Ho sempre detto agli studenti che l'attività della piattaforma è importante ma non è mai stata utilizzata come attività di valutazione. Valuto complessivamente ogni studente non solo per il singolo compito o domanda, ma per il modo in cui partecipa alle attività (in classe o a casa), la sua presenza e attenzione

Ricercatore: Quanto hai dovuto intervenire per notificare gli interventi e quindi per attirare l'attenzione degli studenti sull'evoluzione della storia?

Docente: Alcuni gruppi sono andati avanti spontaneamente, altri invece perché sono stati da me sollecitati; su 5 gruppi possiamo dire che 3 hanno lavorato indipendentemente e 2 hanno avuto dei problemi sia tecnici che di tempo e per questi si è reso necessario il mio intervento). Purtroppo l'ultimo episodio è stato visto solo dopo la chiusura della scuola, perché gli studenti pensavano che l'attività fosse finita. Tuttavia, vorrei sottolineare che gli studenti, anche senza che fossero coinvolti con la valutazione e oltre, hanno comunque continuato a interagire con la piattaforma perché curiosi dell'evoluzione della storia.

A conclusione di tutte le sperimentazioni, è stato proposto un questionario alle docenti, Gabriella, Piera e Rossella, che hanno sperimentato le attività del DIST-M giocando il ruolo di Guru. In particolare, Piera ha giocato il ruolo di Guru in una sua classe ed è l'unica che ha sperimentato tutti i disegni. Gabriella e Rossella hanno giocato il ruolo di Guru ognuna nella classe dell'altra.

Il questionario è stato pensato per favorire il racconto della propria esperienza da parte delle insegnanti. Le domande mirano in particolare a far emergere alcuni temi ritenuti interessanti e cruciali per riflettere sulle esperienze fatte e sui futuri sviluppi, come l'inserimento delle attività del DIST-M nelle pratiche didattiche curriculari, l'efficacia rispetto agli obiettivi, il coinvolgimento dei ragazzi, il ruolo del docente, gli aspetti positivi e le criticità.

Il questionario prevede le seguenti domande:

- 1) Hai usato il DIST-M in una sperimentazione. Lo useresti a regime nella pratica ordinaria? Perché?
- 2) A che scopo useresti pratiche DIST-M? Come le collocheresti rispetto al curriculum?
- 3) Durante la sperimentazione, hai gestito ogni gruppo a sé stante o hai sfruttato il lavoro di un gruppo come risorsa didattica per un altro gruppo?
- 4) Come hai sfruttato o pensi sia possibile sfruttare nella pratica ordinaria il fatto di avere accesso al lavoro e alle chat degli studenti in tempo reale o in differita?
- 5) In riferimento alla sperimentazione in cui hai giocato il ruolo di Gianmaria per la classe di un'altra docente, cosa pensi dell'esperienza di "esperto" per una classe che non si conosce?
- 6) Quali vantaggi e quali svantaggi trovi nell'esserlo per studenti delle tue classi?
- 7) Come hanno accolto i tuoi studenti l'esperienza?
- 8) Hai fatto fare ai ragazzi una valutazione dell'esperienza? Perché? Se sì, quali informazioni hai raccolto?
- 9) Quali potenzialità e limiti oppure differenze individui tra l'uso in aula e l'uso a casa del DIST-M?
- 10) Quali potenzialità e limiti individui nell'essere Attori e nell'essere Osservatori (sia dal punto di vista tuo di docente sia per quello che hai osservato negli studenti, sia singolarmente che come gruppo)?
- 11) Ripensando a come hai svolto l'esperienza cosa modifichereesti? (eventualmente, esplicita brevemente come)
- 12) L'esperienza ti ha fatto riflettere sul tuo ruolo docente? In che termini?
- 13) Altre tue riflessioni...

Riportiamo alcuni temi emersi dalle risposte di Gabriella e Piera.

La possibilità di integrare le attività di un DIST-M nella pratica didattica ordinaria viene vista in modo favorevole dalle docenti che lo hanno sperimentato. Ad esempio Piera dice che attività di questo tipo si prestano a:

creare contesti in cui lo studente si mette in gioco senza avere timore di essere valutato. (Piera)

Tuttavia per rendere l'inserimento efficace

occorrerebbe avere un ventaglio di storie che possano andare ad intersecarsi con lo sviluppo delle attività curriculari in maniera da essere di supporto alla comprensione dei concetti che via via vengono affrontati. (Piera)

Inoltre entrambe trovano che il tipo di attività possa essere utile per abituare i ragazzi a lavorare in gruppo e per supportare il loro sviluppo di competenze comunicative e argomentative. Ad esempio secondo l'esperienza di Gabriella gli studenti del biennio della scuola secondaria di secondo grado non sono abituati ad argomentare e queste attività possono essere usate

per abituare gli studenti ad argomentare e a lavorare in gruppo. (Gabriella)

Piera ha sperimentato anche l'ultima versione del modello che prevede la partecipazione degli studenti come Attori e come Osservatori. A questo proposito ha dichiarato che gli studenti che giocavano come Osservatori hanno messo in campo *“un notevole senso critico”*, esprimendo

le loro valutazioni in maniera serena e spontanea, forse perché, da un lato non si sono sentiti giudicati nel loro ruolo di spettatori, dall'altro si sono sentiti Attori nel processo di valutazione. (Piera)

Interessanti sono le osservazioni riguardo al valore aggiunto delle attività e degli strumenti tecnologici per il docente:

Leggere i commenti degli studenti consente innanzitutto di intravedere, attraverso le risposte, i loro processi di pensiero, si riesce a capire la motivazione di un ragionamento eventualmente errato e, non meno importante, si riesce anche a capire chi tra gli studenti è maggiormente coinvolto nella risoluzione dei problemi da risolvere. (Piera)

Anche Gabriella a proposito della possibilità di accedere alle chat in differita afferma che

sarebbe interessante nella pratica ordinaria anche in tempo reale per seguire 'a caldo' il lavoro degli studenti, le eventuali difficoltà e guidarli nella risoluzione laddove necessario, cercando però di essere una guida discreta, intervenendo solo se richiesto dagli studenti e per sbloccare situazioni di stallo. (Gabriella)

Aggiunge che anche l'accesso a posteriori ai dialoghi tra i ragazzi può essere utile per ricostruire i loro ragionamenti, il modo in cui sono arrivati a determinati risultati e riprendere così i punti cruciali nelle discussioni in classe. Inoltre questa esperienza ha portato ad una riflessione anche più generale sul ruolo del docente come *“facilitatore e guida”*, *“essere esperto”* - aggiunge Gabriella- *“non significa fornire i contenuti ma guidarli nella scoperta”*

Per quanto riguarda il coinvolgimento dei ragazzi, entrambe scrivono che gli studenti hanno partecipato con interesse e l'aver lavorato in gruppo e giocando ogni volta un ruolo diverso è stata una esperienza positiva, al di là di qualche problema iniziale dovuto alla non familiarità dei ragazzi

con gli strumenti di Moodle. In particolare, Piera racconta che gli studenti della classe che ha partecipato alla sperimentazione del disegno 2 hanno apprezzato la distinzione tra il ruolo di attore e quello di osservatore e

si sono molto incuriositi relativamente al ruolo di Gianmaria (Piera)

non sospettando che dietro a questo personaggio potesse esserci la loro stessa insegnante. L'immersione in una storia ha motivato i ragazzi, ai quali è piaciuto -riportando le parole di uno di loro "*mischiare la matematica con delle storie*".

Per sfruttare appieno le potenzialità di una simile attività nell'attività curricolare, le insegnanti suggeriscono di pensare di modificare i tempi, di lavorare ancora di più sulla grafica e sull'aspetto interattivo. Gabriella conclude suggerendo che l'esperienza dei DIST-M potrebbe diventare ancora più significativa

se gli studenti vengono coinvolti anche nella costruzione della storia (Gabriella)

facendo diventare loro stessi

creatori di storie, suddivisi in diversi gruppi e ciascun gruppo propone poi la rispettiva storia agli altri. (Gabriella)

Il confronto continuo con il docente si conferma uno strumento di ricerca interessante perché permette di riflettere in itinere durante l'intervento formativo, su altre variabili significative, come ad esempio il rapporto del docente e degli studenti con la valutazione. Come abbiamo evidenziato nelle sezioni 3.4 e 7.2, la relazione con la valutazione e il suo ruolo è risultato essere uno dei punti cardine dell'evoluzione dei disegni per la nostra ricerca tanto da entrare esplicitamente nell'ultimo disegno con un posto specifico, nella organizzazione didattica e rispetto alla narrazione della storia, che risulta un altro interessante tema aperto di ricerca.

9.3 Una riflessione sull'episodio di valutazione collettiva

La docente-ricercatrice Piera è l'unica che ha sperimentato la versione del DIST-M che comprende anche l'episodio di valutazione collettiva (cfr. sezione 7.2.). Le abbiamo chiesto alcune considerazioni a riguardo, che riportiamo, insieme ad alcuni esempi di feedback e valutazione da lei fatti sul lavoro dei ragazzi.

Innanzitutto, c'è da premettere che Piera già nella sua pratica didattica utilizza spesso come strumento di valutazione attività fatte in gruppo, su diverse tipologie di compiti, sia in matematica che in fisica (ad esempio, su un esperimento di fisica, un'attività laboratoriale in matematica o semplicemente un approfondimento su un argomento). Il lavoro di gruppo viene abitualmente valutato con griglie di valutazione sia relativamente al contenuto disciplinare, sia sull'utilizzo di eventuali artefatti (strumenti digitali, prodotti multimediali), sia relativamente alla gestione del gruppo.

Il processo valutativo di solito si realizza con la consegna del lavoro da parte del gruppo, la discussione del prodotto da parte del gruppo, osservazioni e feedback da parte della docente e successive eventuali modifiche o integrazioni da parte degli studenti.

Un'altra pratica è quella di far valutare il lavoro di un gruppo da un altro gruppo e capita che in qualche caso gli studenti siano particolarmente "severi" nel valutare il lavoro dei propri compagni. In genere

gli studenti che si mostrano critici sono anche quelli maggiormente interessati e coinvolti nelle attività.

Proprio in quest'ultima pratica ben si inserisce la duplice modalità con cui gli studenti, a turno, giocano i ruoli lungo le attività del DIST-M, ovvero attori/osservatori. Piera ha osservato - come riportato anche nelle risposte al questionario - che spesso gli studenti osservatori risultavano molto critici nei confronti dei compagni attori. Questa alternanza può essere molto utile, dal momento che gli osservatori, nel valutare, dimostrano comunque competenze acquisite o meno, e peraltro, nel valutare, imparano.

Un punto importante riguarda la possibilità di avere accesso alle chat, a posteriori, e questo si collega a quanto abbiamo osservato nella sezione 8.4.1 a proposito dell'informazione aumentata.

Piera ha affermato che leggere le chat è stato importante ed ha sostituito, in questo caso, quella che di solito è la discussione in classe, in presenza, girando tra i banchi.

Ai fini della valutazione il valore aggiunto di poter accedere, attraverso le chat, al processo che ha portato ad una decisione piuttosto che un'altra ha dato la possibilità di avere maggiori informazioni per ogni singolo studente, dal momento che c'è traccia di tutto quello che ogni studente ha scritto. Dunque, c'è l'opportunità di intervenire laddove un componente del gruppo appare in maggiore difficoltà e di dare feedback più mirati (e conseguentemente di valutare).

9.3.1 Esempi di feedback e valutazione di gruppo

Riportiamo alcuni esempi di restituzione dei protocolli agli alunni da parte della docente, che sono stati dati in forma di ulteriori "secondi" stimoli - in linea con il principio della doppia stimolazione- per ogni episodio per due gruppi. Alla fine degli episodi, c'è la valutazione del lavoro di gruppo complessiva fatta dalla docente.

Valutazione del primo gruppo.

Arrivano gli alieni - Gruppo 1

Episodio 1

Ci è arrivato un foglietto dagli alieni e abbiamo osservato e trovato che...

I numeri scritti in successione nelle righe della parte sinistra del foglietto erano quattro numeri consecutivi mentre a destra c'erano delle operazioni che poi abbiamo scoperto essere la sottrazione del prodotto degli estremi dal prodotto dei medi, il cui risultato era sempre 2 e abbiamo trovato la formula $(x+1)*(x+2)-(x)*(x+3)=2$

Feedback (a cura del docente): Avrei detto: abbiamo congetturato che...e abbiamo proposto la formula....

Episodio 2

Quello che abbiamo capito del foglietto ci è servito per...

tradurre la formula utilizzata nel primo episodio in teorema utilizzando un'applicazione che ci è stata fornita con dei suggerimenti per poter comporre una frase in base alle osservazioni precedenti. Inoltre abbiamo notato che mancavano alcune parole per formulare la frase e successivamente, con l'aiuto di Gianmaria siamo riusciti a completarla.

Feedback (a cura del docente): Manca l'enunciato del teorema che avete formulato

Episodio 3

Gli alieni non capivano quello che abbiamo scritto a parole e lo abbiamo trasformato... perché...

Abbiamo trasformato il teorema precedente in una formula. inizialmente abbiamo pensato di sostituire i binomi con delle lettere (k,y,z) ma ci è stato sconsigliato poiché non è facile ricordarsi a quale binomio fanno riferimento le lettere, quindi il teorema dell'episodio precedente è stato sostituito con la formula $(x+1)*(x+2)-(x)*(x+3)=2$

Feedback (a cura del docente): che intendete per “sostituire i binomi con delle lettere?” e cosa intendete con “il teorema è stato sostituito con la formula...”? io avrei detto che la formula traduce l'enunciato del teorema

Episodio 4

Gli alieni non sembravano convinti di quello che avevamo trovato e quindi abbiamo...

Svolto le operazioni tra i binomi utilizzando la proprietà distributiva e abbiamo scoperto che anche non sostituendo le lettere il risultato è sempre 2.

$$(x+1)*(x+2)-(x)*(x+3)=$$

$$x^2+2x+x+2-x^2-3x=$$

$$= 2$$

Feedback (a cura del docente): Come mai queste operazioni dimostrano che il teorema è valido? Avrei aggiunto $\forall x \in \mathbf{N}$

La valutazione finale della docente è:

Per gli allievi di questo gruppo, dopo aver letto anche le chat con cui hanno interagito tra loro e con Gianmaria, direi che gli studenti hanno sostanzialmente compreso il focus dell'attività. Hanno mostrato di essere in grado di accorgersi di una regolarità e anche di essere in grado di formulare una congettura attraverso il linguaggio algebrico. Hanno mostrato di utilizzare l'espressione algebrica per quella che è e sembrano essere consapevoli che essa dimostra la congettura dal momento che il valore dell'espressione ridotta in forma normale è indipendente dal valore della variabile scelta. Ovviamente manca un po' di precisione nel linguaggio utilizzato, forse perché abituati più a discutere oralmente che a produrre resoconti in forma scritta.

Valutazione del secondo gruppo.

Arrivano gli alieni - Gruppo 2

Episodio 1

Ci è arrivato un foglietto dagli alieni e abbiamo osservato e trovato che...

i numeri scritti in successione nelle righe della parte sinistra del foglietto erano quattro numeri consecutivi mentre a destra c'erano delle operazioni che poi abbiamo scoperto essere la sottrazione del prodotto del terzo per il secondo dal prodotto del primo per il quarto, il cui risultato era sempre 2 e abbiamo trovato la formula cui siamo partiti: $(x+1)*(x+2)-x*(x+3)=2$

Feedback (a cura del docente): Avrei detto: abbiamo congetturato che...e abbiamo proposto la formula....

Episodio 2

Quello che abbiamo capito del foglietto ci è servito per...

Creare un teorema. Poi abbiamo tradotto il tutto a parole in: “Prendiamo 4 numeri consecutivi, facciamo il prodotto di secondo e terzo e primo e quarto, sottraendoli, il risultato sarà sempre 2”

Feedback (a cura del docente): Più che il teorema, l’enunciato, o una congettura...diventa teorema dopo che lo abbiamo dimostrato; poi abbiamo tradotto il tutto...tutto cosa? L’enunciato (non il teorema) è corretto, comunque.

Episodio 3

Gli alieni non capivano quello che abbiamo scritto a parole e lo abbiamo trasformato... perché...

Per farci comprendere meglio abbiamo trasformato la formula in un’equazione, perchè così x può essere un qualsiasi numero e $x+1$ il suo consecutivo ecc...; alla fine abbiamo ottenuto l’equazione: $(x+1)*(x+2)-(x)*(x+3)=2$ con x appartenente ad \mathbb{N}

Feedback (a cura del docente): che intendete con “trasformare la formula in equazione?”; solo nelle equazioni la x può assumere qualunque valore? Come siete arrivati alla condizione sui numeri naturali?

Episodio 4

Gli alieni non sembravano convinti di quello che avevamo trovato e quindi abbiamo...

Risolto l’equazione $(x+1)*(x+2)-(x)*(x+3)=2$; svolgendo i calcoli e successivamente semplificando i numeri opposti, rimane solo 2.

Feedback (a cura del docente): Se fosse un’equazione, come dite, il fatto che rimane solo 2 cosa significa relativamente alle soluzioni dell’equazione? Perché pensate di aver convinto gli alieni in questo modo? Non avete forse semplicemente trasformato l’espressione da cui siete partiti e ottenuto il valore 2...che vi dà un’informazione...quale? è questa informazione che dovrebbe convincere gli alieni, siete sicuri che li avreste convinti altrimenti?

La valutazione finale della docente è:

Per gli allievi di questo gruppo, dopo aver letto anche le chat con cui hanno interagito tra loro e con Gianmaria, si evince che gli studenti si sono certamente accorti della regolarità, sono riusciti a formulare una congettura attraverso il linguaggio algebrico e hanno correttamente enunciato il teorema. Poi però, hanno pensato che la presenza del segno = rendesse l’uguaglianza un’equazione e pertanto hanno utilizzato il linguaggio adatto alle equazioni. Pur mostrando di saper gestire le operazioni tra polinomi, dimostrano di non aver ben chiara la distinzione tra espressione algebriche ed equazione. Non credo siano consapevoli del fatto che l’uguaglianza trovata dimostri il teorema. Credo invece che si siano accontentati del “risultato”.

10 Sintesi e sviluppi futuri

10.1 L'architettura metodologica del DIST-M

L'architettura metodologica si sviluppa attorno a una storia digitale, in forma di fumetto, che evolve lungo episodi e ruota intorno a cinque personaggi animati (quattro adolescenti e un adulto, zio di uno degli adolescenti) che si trovano ad affrontare problemi matematici nati in maniera spontanea dalla storia stessa.

Ogni studente è un personaggio della storia e, all'interno di essa, ha un ruolo e azioni da svolgere, talvolta da solo, talvolta in collaborazione con altri. A differenza di quanto succede nelle pratiche diffuse, lo studente non è né colui che ascolta e riproduce una storia né colui che ne inventa una nuova. In analogia a quello che accade nella Commedia dell'Arte italiana, sulla base di un canovaccio ne diventa protagonista, assumendo il ruolo di uno dei personaggi, determinandone la sceneggiatura su improvvisazione. In tal modo, gli studenti, interagendo tra loro, orientano lo sviluppo della storia. Lo stesso vale per il ruolo di mediatore dell'esperto, anch'egli personaggio della storia, che si muove sulla base degli stimoli/risposte/silenzi degli altri attori avendo anche la possibilità di introdurre supporti tecnologici predisposti a priori.

Il focus dell'architettura metodologica non è solo su chi agisce nella storia, ma anche su chi riflette sull'azione, guardando la storia dall'esterno. Le azioni del docente e degli studenti evolvono sui seguenti tre livelli interconnessi.

La narrazione matematica

Il contesto entro cui nasce e si sviluppa il problema matematico evolve attraverso varie fasi di azione (corrispondenti ad altrettanti episodi della storia) con precisi obiettivi, fondamentali per la costruzione delle competenze argomentativa e comunicativa e di avvio alla dimostrazione matematica:

- Esplorazione: osservare e produrre una descrizione sintetica di quanto trovato;
- Congettura: raffinare la formulazione della descrizione precedente;
- Formalizzazione: manipolare la congettura per aprire la strada alla dimostrazione;
- Dimostrazione: individuare e organizzare argomenti in una appropriata catena deduttiva, giustificando ogni passo della deduzione;
- Riflessione: riguardare la storia vissuta anche dal punto di vista del percorso matematico.

Nella pratica didattica queste fasi possono essere intese non come totalmente separate né da seguire per forza in modo lineare, a seconda delle scelte del docente in base al contesto e alle reazioni della classe. La loro totalità tuttavia dovrebbe supportare la consapevolezza negli studenti dell'intera meta-narrazione matematica.

Role-playing

All'interno di ciascun episodio della storia, il lavoro dei personaggi è regolato da specifici ruoli assunti dagli studenti: Boss (organizzatore del gruppo e dell'articolazione del lavoro - interazione e relazione sociale nel lavoro); Blogger (verbalizzatore e relatore - memoria e comunicazione); Peste (avvocato del diavolo - pensiero critico/costruttivo); Promoter (iniziatore e animatore dello svolgimento del compito - intuizione e conoscenza). Ad essi si affianca un personaggio che ha un ruolo asimmetrico rispetto al gruppo dei pari, l'esperto (l'adulto della storia), il quale interviene sia nei momenti di lavoro tra pari, se necessario, sia in momenti dedicati esplicitamente al confronto tra pari ed esperto. Il ruolo è importante in quanto garantisce la produttività del gruppo, fa da guida e facilitatore.

L'esperto ha, inoltre, un canale privilegiato di interazione con Promoter, per supportarlo nell'avvio della fase di problem solving o in momenti di stallo. La sua mediazione riguarda sia la matematica sia la comunicazione. Nel rapporto tra Promoter ed esperto le due direzioni non riguardano lo stesso contenuto: da un lato - Promoter verso Esperto - l'esperto ha una funzione cognitiva (ricorso alla saggezza, sapienza, esperienza); dall'altro lato - Esperto verso Promoter - l'azione dell'esperto riguarda anche l'organizzazione didattica (ruoli giocati, utilizzo di varie app opzionali all'interno del disegno).

Attori/Osservatori

Gli studenti sono suddivisi in gruppi da quattro. Tutti i gruppi partecipano alla storia, in modo tale che per ogni episodio:

- o un gruppo, a turno, si immerge nel canovaccio e costruisce la propria storia vivendola da Attore, e ogni studente del gruppo assume il ruolo di uno dei personaggi;
- o tutti gli altri gruppi sono Osservatori (attraverso l'ambiente computer-based) del lavoro del gruppo di Attori; ciascuno studente prende in carico l'osservazione di un personaggio specifico della storia e riflette su come questi si muove sia rispetto al problema matematico sia rispetto al ruolo del personaggio. Le osservazioni sono guidate da una griglia di elaborazione di un diario personale.

Ogni studente, al cambio di episodio, è Attore/Osservatore di un personaggio diverso, in modo che alla fine del percorso ognuno abbia sperimentato tutti i ruoli. A conclusione della storia, è previsto un compito individuale di autovalutazione in cui riflettere sulla propria partecipazione nei ruoli assunti. Il compito funge da autovalutazione, anche sul piano metacognitivo e affettivo.

Nella globalità del DIST-M, il focus è sugli Osservatori, dal momento che ogni studente gioca una volta da Attore e tutte le restanti volte da Osservatore. I gruppi di Osservatori sono importanti nel contesto della storia perché gli studenti attraverso l'osservazione acquisiscono l'esperienza dei processi precedenti. Vivendoli dall'esterno possono coglierli meglio e allo stesso tempo possono essere più acuti rispetto agli attori proprio perché vivono già in fase di riflessione.

Ogni episodio evolve secondo uno stesso schema. All'inizio gli studenti lavorano tra loro, senza un intervento esplicito dell'esperto. Tuttavia Guru è presente in background a due livelli: da un lato,

potendo osservare tutto quanto accade nel gruppo dei pari, se si accorge che questi hanno bisogno di aiuto, può fornirglielo per via di un canale privilegiato di comunicazione con il promoter; dall'altro lato, se il gruppo si rende conto di non avere al suo interno altre risorse da mettere in gioco per la risoluzione del problema, può rivolgersi a Guru (nella sua veste di 'saggezza') per chiedere aiuto, attraverso il Promoter. La fase di lavoro tra pari ha l'obiettivo di arrivare a un prodotto condiviso da tutti i membri, che diventa oggetto di discussione e confronto esplicito con l'esperto in una fase successiva. Questa seconda fase serve a sistematizzare e istituzionalizzare quanto prodotto dai pari, e permette di passare all'episodio successivo. Al termine di tutti gli episodi, ogni gruppo di studenti torna indietro a 'rivedere' la storia, e ricostruisce collettivamente il racconto del processo di risoluzione del problema matematico. Questo racconto diventa per l'insegnante il prodotto da valutare (in termini di competenze - argomentativa e comunicativa - e di conoscenze matematiche) come valutazione di gruppo.

10.2 Il ruolo della tecnologia

Le tecnologie (e la capacità di usarle in modo competente), soprattutto nell'ambito delle pratiche scolastiche nell'attuale era digitale, non dovrebbero essere (più) meramente funzionali al raggiungimento di qualche obiettivo didattico ma, piuttosto, considerate competenze e strumenti abilitanti, mancando i quali alcuni degli scenari didattici non solo sarebbero irraggiungibili, ma anche più difficili da immaginare e, quindi, da realizzare. Il design didattico tradizionale, infatti, prevede la progettazione "astratta" di tutti gli interventi e la pianificazione di tutte le interazioni tra i vari attori coinvolti, delegando alla fase successiva (e, verosimilmente, ad altre persone) la realizzazione della user experience con qualche strumento "idoneo". In questo passaggio, alcune delle potenzialità didattiche delle tecnologie usate (o potenzialmente usabili) potrebbero andare perse. Può infatti accadere che la piena realizzazione delle potenzialità semiotiche di uno strumento utilizzato suggerisca un parziale ripensamento dell'attività didattica che implementa e che tale opportunità passi completamente inosservata. Al contrario, una buona conoscenza delle tecnologie che si intendono utilizzare può favorire una progettazione didattica più completa/approfondita sin dall'inizio, cogliendo in anticipo le sfumature e le opportunità educative in ogni fase, consentendo così il pieno controllo dell'intero processo, dall'ideazione alla sperimentazione didattica e alla validazione finale. Solo in tal modo si riesce a sfruttare appieno il potenziale delle tecnologie che, in ambito didattico, si traduce nella possibilità di implementare pratiche potenzialmente più efficaci in termini di coinvolgimento degli studenti e di risultati attesi.

In concreto, nel DIST-M il coinvolgimento degli studenti avviene su più piani:

- sul piano emotivo e motivazionale, immergendo tutti gli studenti in una storia adeguatamente supportata dall'ambiente di apprendimento appositamente configurato;
- sul piano cognitivo, come una "sfida" in grado di:
 - richiamare conoscenze pregresse e tale da generare nuova conoscenza (e approfondimento) in maniera collaborativa ed individuale,
 - sviluppare competenze argomentative, mediante l'uso di più canali comunicativi in grado rappresentare e supportare più registri linguistici, favorendone al contempo l'evoluzione;

- sul piano metacognitivo, attraverso i ruoli, portando a galla le abilità tipiche del “fare matematica” con la possibilità di riflettere sulle attività svolte in modo cosciente.

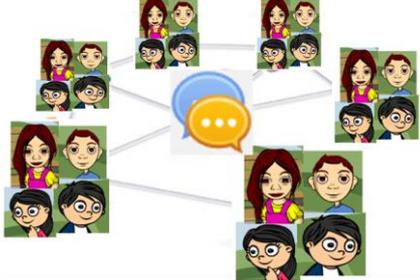
La tecnologia permette di intervenire su ciascuno di questi piani e di realizzare un’attività didattica autenticamente inclusiva. Tutti gli studenti della classe vivono la medesima esperienza, da ogni punto di vista e ruolo, contribuiscono attivamente alla storia, hanno la possibilità di osservare e di ritornare sui propri passi, di riflettere sui ruoli e sulle abilità coinvolte, in itinere e dopo. Tutto ciò è possibile solo grazie ad un buon supporto tecnologico, l’unico in grado di raccogliere, registrare e rendere disponibili a studenti e docenti i tanti flussi paralleli che, inevitabilmente, finirebbero per confondersi e lasciare ben poca traccia in uno scenario didattico tradizionale.

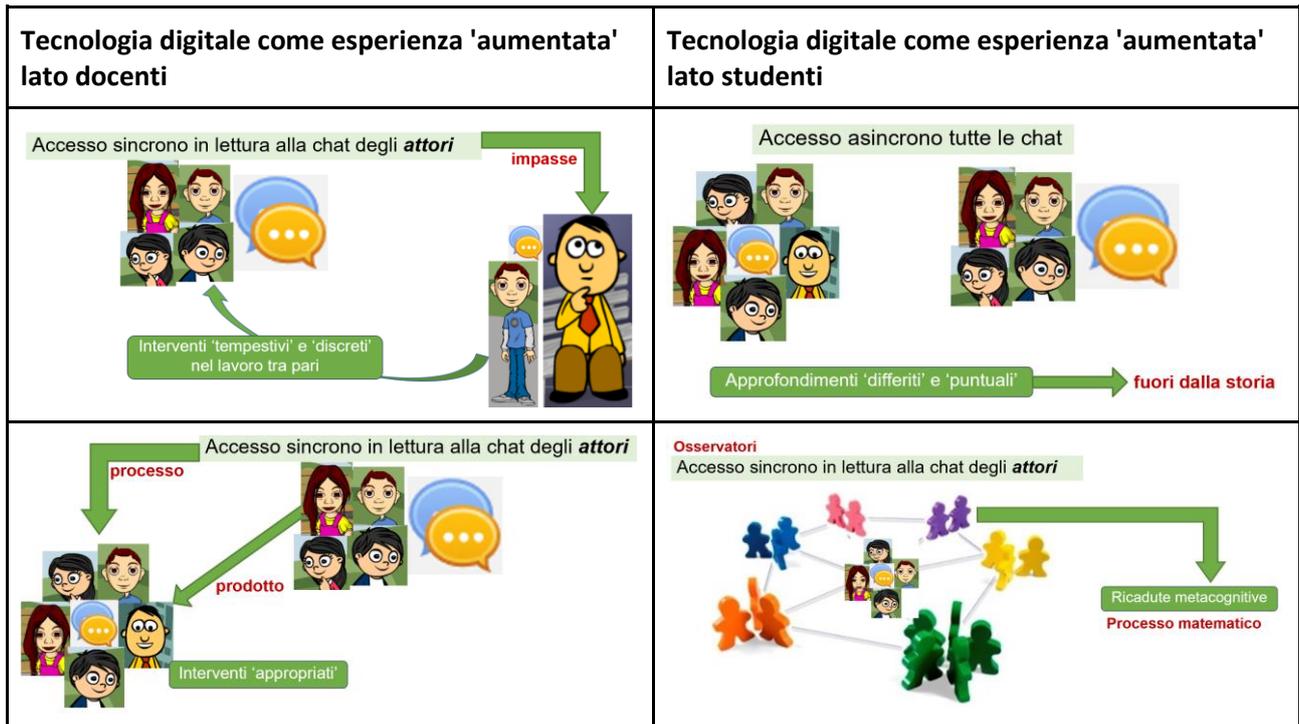
In generale, va anche detto che la tecnologia non è mai completamente neutra, nel senso che non tutti gli strumenti tecnologici sono veramente intercambiabili. Se si desidera cogliere ogni opportunità didattica ed implementare anche le sfumature di senso e significato, allora è necessario rivolgere lo sguardo verso quegli strumenti che sono in grado di tradurre tutto questo in pratica. Questo, fondamentalmente, è stato il motivo alla base della nostra scelta di adottare Moodle come piattaforma per l’implementazione del DIST-M. Moodle, infatti, dispone di tutto il necessario per implementare le attività di apprendimento e gestire le interazioni tra studenti e con l’esperto. Abbiamo quindi selezionato accuratamente gli strumenti più idonei offerti dalla piattaforma e li abbiamo adeguatamente configurati per soddisfare le esigenze educative di ogni fase progettuale del DIST-M. Tuttavia, nello sviluppo della storia, l’esperto potrebbe accorgersi della necessità di fornire agli studenti ulteriori strumenti per agevolare le fasi di esplorazione, produzione di congetture o argomentazioni e per la loro formalizzazione. A tal fine (e in funzione della *technological literacy* della classe) il disegno del DIST-M prevede che l’esperto possa attivare alcune risorse aggiuntive, come fogli di calcolo o strumenti per la costruzione di argomentazioni e dimostrazioni (cfr. sezione 7.5).

Le piattaforme di e-learning (Moodle in particolar modo, ma anche le altre ove si riesca a riprodurre le funzionalità descritte nei paragrafi precedenti) si rivelano uno strumento più utile e sensibile del previsto. Infatti, il “cruscotto” (dashboard) offerto dagli strumenti di reportistica della piattaforma fornisce una visione dell’esperienza in “realtà aumentata” che amplifica la capacità di analisi e di intervento del docente, il quale può osservare tutte le interazioni degli studenti nella piattaforma e ogni singola comunicazione tra i partecipanti (Polo, Dello Iacono, Fiorentino & Pierri, 2019). Ad esempio, per restare sul tema della comunicazione, la disponibilità di tutti i messaggi delle chat permette di ottenere qualcosa di pressoché impossibile con strumenti tradizionali, ossia di osservare la formazione delle idee di ogni studente e dei prodotti di tutti i gruppi. Questo aiuta l’insegnante a passare dalla valutazione dei prodotti all’osservazione e alla gestione dei processi di apprendimento, consentendogli di essere più efficace anche nelle discussioni a posteriori dei risultati ottenuti. Infatti, i dati in piattaforma permettono di rilevare tempestivamente errori e misconcezioni, suggerendo quali argomenti riprendere o approfondire (anche) al di fuori dell’attività (Albano, Coppola & Fiorentino, 2021).

10.3 Quadri sinottici del DIST-M

Gli elementi caratterizzanti il DIST-M sono stati riassunti sinotticamente come segue.

<p>Narrazione come contesto del problem-solving</p>	<p>Narrazione come racconto di un percorso matematico</p>
 <p>I fumetti che agiscono come il canovaccio nella Commedia dell'Arte</p>	 <p>Studenti e docente co-costruiscono la narrazione matematica</p>
<p>Personaggi della storia come ruoli per strutturare l'apprendimento collaborativo</p>	<p>Personaggi della storia come personificazione di funzioni cognitive del problem solving</p>
	
<p>Tecnologia digitale per permettere accesso immersivo al contesto</p>	<p>Tecnologia digitale per permettere accesso riflessivo al percorso matematico</p>
 <p>Tutti gli studenti e il docente 'entrano' nella storia. Un gruppo di 4 studenti a turno, insieme al docente, prende il posto dei personaggi della storia e 'vive' un episodio come Attori.</p>	 <p>Gli studenti non Attori, in gruppi da 4, prendono il posto dei personaggi della storia e 'vivono' gli episodi come Osservatori.</p>



10.4 Verso un meta-modello

T O BE CONTINUED...

Bibliografia

- Albano, G. (2018). Digital Interactive Storytelling in Matematica. In L. Giacardi, M. Oggero, C. Sabena (Eds.) *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2017-2018*, (pp. 199-214). L'ARTISTICA EDITRICE Savigliano (CN).
- Albano, G., Coppola, C., Dello Iacono, U. (2021). What does *Inside Out* mean in problem solving?. *For the Learning of Mathematics*, 41(2).
- Albano, G., Coppola, C., Fiorentino, G. (2021). The Role of Teacher in DIST-M Activities. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 28(3), 163-170.
- Albano, G., Coppola, C., Dello Iacono, U., & Pierri, A. (2020). Online discursive interactions concerning mathematical issues within digital interactive storytelling. In J. Ingram, K. Erath, F. Rønning, A. Schüler-Meyer (Eds.), *Proceedings of the Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom*, (pp. 123-130). Montpellier, France.
- Albano, G., Coppola, C., Dello Iacono, U., Fiorentino, G., Pierri, A., Polo, M. (2020). Technology to enable new paradigms of teaching/learning in mathematics: the digital interactive storytelling case. *Journal of e-learning and Knowledge Society*, 1, 65-71.
- Albano, G., Coppola, C., Fiorentino, G., & Polo, M. (2019). Digital Interactive Storytelling in matematica: quale funzione didattica per la tecnologia? *Atti del XXI Convegno UMI, Pavia, 2-7 settembre 2019*.
- Albano, G., Dello Iacono, U., Fiorentino, G.(2020). A Technological Storytelling Approach to Nurture Mathematical Argumentation. In H. Chad Lane, S. Zvacek, & J. Uhomobhi (Eds.), *Proceedings of the 12th International Conference on Computer Supported Education (CSEDU 2020) - Volume 1*, (pp. 420-427).
- Albano G., Dello Iacono U. (2018). DIST-M: scripting collaboration for competence-based mathematics learning. In: Silverman J., Hoyos V. (Eds). *Distance Learning, E-Learning and Blended Learning of Mathematics*, (pp. 115-131). Cham:Springer.
- Albano, G., & Dello Iacono, U. (2019a). A scaffolding toolkit to foster argumentation and proofs in mathematics: some case studies. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 16(1), 4.
- Albano, G., & Dello Iacono, U. (2019b). GeoGebra in e-learning environments: a possible integration in mathematics and beyond. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*, 10(11), 4331-4343.
- Albano, G., Dello Iacono, U., Romano, P. (2019). Attori e osservatori nel Digital Interactive Storytelling in Matematica. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics)*, n.2 Numero speciale n.5, 91-92.

- Albano, G., Dello Iacono, U., Fiorentino, G. (2016). An online Vygotskian learning activity model in mathematics. *Journal of e-Learning and Knowledge Society (Je-LKS)*, 12(3), 159-169.
- Albano, G., Fiorentino, G., Dello Iacono, U., Polo, M. (2018). Designing mathematics learning activities in e-environments. In H.G. Weigand, A. Clark-Wilson, A. Donevska-Todorova, E. Faggiano, N. Grønbaek & J. Trgalova (Eds.), *Proceedings of the Fifth ERME TOPIC CONFERENCE (ETC 5) on Mathematics Education in the Digital Age (MEDA)*, (pp. 3-10). University of Copenhagen, Denmark.
- Albano, G., Pierri, A., Polo, M. (2019). Engagement in mathematics through digital interactive storytelling. In Jankvist, U. T., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11)*, (pp. 1550-1557). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute.
- Albano, G., Pierri, A., Polo, M. (2021). Immersing in a digital storytelling in mathematics: the students' reflective action. To appear in *Proc. of Contemporary Mathematics Education (CME'21)*
- Arzarello, F., & Soldano, C. (2016). Da Peirce a Hintikka (senza dimenticare Dewey): la logica dell'indagine in classe. *Educare alla razionalità. In ricordo di Paolo Gentilini, Atti del Convegno di Sestri Levante*, 9-11.
- Ascione, R., Deiana, G., Pierri, A., & Polo, M. (2019). Digital Interactive Storytelling in Matematica: l'engagement di docenti e studenti. In B.D'AMore, S.Sbaragli (Eds.) *Didattica della matematica e professionalità docente* (pp. 135-137), Pitagora Editrice (Bo).
- Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*. Centro documentazione educativa.
- Bartolini Bussi M.G., (2001). Ricerca in didattica della matematica: alcuni studi italiani, Bollettino U.M.I., *La Matematica nella Società e nella Cultura*, Serie VIII, Vol. IV-A, 2001, 117-150.
- Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, second revised edition (pp. 746-783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Bartolini Bussi, M.G. (1996). Mathematical discussion and perspective drawing in primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 31(1-2), 11-41.
- Bachtin, M. M. (1982). *The dialogic imagination: Four essays*. Austin: University of Texas Press.
- Benkler, Y. (2006). *The wealth of networks: How social production transforms markets and freedom*. New Haven: Yale University Press.

- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. In *International newsletter on the teaching and learning of mathematical proof* (July/August 1999).
- Brown, A. L. (1992). Design experiments: Theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *The journal of the learning sciences*, 2(2), 141-178.
- Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible worlds*. Harvard University Press.
- Collins, A. (1992). Toward a design science of education. In f education. In E. Scanlon, & T. O'Shea (Eds.) *New directions in educational technology*, (pp. 15-22). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Concas, A., Fenu, C., Rodriguez, G. (2019). PQser: a Matlab package for spectral seriation. *Numer. Algorithms*, 80(3), pp. 879-902
- Dello Iacono, U., Pierri, A., Polo, M. (2021). An online collaborative approach for fostering argumentative thin in mathematics. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 28(3), 153-162.
- Dillenbourg, P. (2013). Design for classroom orchestration. *Computers & Education*, 69, 485–492.
- Di Martino, P., Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: A bridge between beliefs and emotions. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 43, 471-482.
- Drijvers, P., Doorman, D., Boon, P., & van Gisbergen, S. (2009). Instrumental orchestration: theory and practice. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, F. Arzarello (Eds.). *Proceedings of CERME 6*, (pp. 1349-1358). Lyon France.
- Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.
- Engeström, Y. (1999). Expansive visibilization of work: An activity-theoretical perspective. *Computer Supported Cooperative Work*, 8, 63–93.
- Engeström, Y. (1999b) Activity Theory and individual and social transformation. In Y. Engeström, R. Miettinen & R.L.Punamäki (Eds.) *Perspectives on Activity Theory*, Cambridge University Press (462 p.), pp.19-38.
- Engeström, Y., & Sannino, A. (2010). Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. *Educational research review*, 5(1), 1-24.
- Engeström, Y. (2011). From design experiments to formative interventions. *Theory & Psychology*, 21(5), 598-628.
- Ferrari, P.L. (2021). *Educazione Matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e comunicare matematica in classe*. UTET Università, Torino.
- Gholamazad, S., Liljedahl, P., & Zazkis, R. (2003). One line proof: What can go wrong? In N.A. Pateman, B.J. Dougherty, & J.T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th conference of the*

- International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th PME-NA conference*, Vol. 2, (pp. 437–444). Honolulu, USA: University of Hawai'i.
- Kaptelinin, V. (2014). Activity Theory. In Mads Soegaard & Rikke Friis Dam (Eds) *Encyclopedia of Human-Computer Interaction*, Chp. 16. Aarhus, Denmark: The Interaction-Design.org Foundation
- Kaptelinin, V., & Nardi, B. A. (2006). *Acting with technology: Activity theory and interaction design*. MIT press.
- , A. (2007). Scripting collaborative learning processes: A cognitive perspective. In F. Fischer, I. Kollar, H. Mandl, & J. Haake (Eds.), *Scripting computer-supported collaborative learning: Cognitive, computational and educational perspectives* (pp. 13–37). Springer.
- Kollar & Fisher (2013) Orchestration is nothing without conducting – But arranging ties the two together! A response to Dillenbourg (2011). *Computers & Education*, 69, 507–509
- Iannece, D., Romano, P. (2008). What does it mean to have a “scientific approach” for a teacher? A reflection. In M. Kourkoulos & C. Tzanakis (Eds.) *Proceedings of the 5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, Department of Education, University of Crete, Rethymnon, Greece.
- Leont'ev, A.N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Liljedahl, P. (2007). Persona-based journaling: Striving for authenticity in representing the problem-solving process. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5(4), 661-680.
- Lolli, G. (2018). *Matematica come narrazione*. Raccontare la matematica, Il Mulino.
- Magenes, A. & Maracci, A. (2015). Le competenze nella soluzione di problemi di matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. Vol.38 A-B N.5.
- Marsico, G., Mollo, M., Albano, G., Pierri A. (2019). Digital Storytelling and Mathematical Thin: An educational Psychology Embrace. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 7(6), 36-44.
- Mellone, M., Tortora, R. (2015) Ambiguity as a cognitive and didactic resource. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME9)*, (pp. 1434-1439). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.
- MIUR (2010). Indicazioni Nazionali degli obiettivi specifici di apprendimento per i licei. https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf
- MIUR (2012). Indicazioni Nazionali per la Scuola dell'Infanzia e per il Primo Ciclo di Istruzione. <http://www.indicazioninazionali.it/2018/08/26/indicazioni-2012/>
- Morselli, D. (2019). L'attualità degli studi di matrice vygotskijana e il loro contributo alla ricerca educativa. *FORMAZIONE & INSEGNAMENTO. Rivista internazionale di Scienze dell'educazione e della formazione*, 17(1), 39-58
- Needleman, M. (2007). Web 2.0/Lib 2.0—What is it?(If it's anything at all). *Serials Review*, 33(3), 202-203.

- Niss, M. A. (2003). Quantitative literacy and mathematical competencies. In *Quantitative literacy: Why numeracy matters for schools and colleges* (pp. 215-220). National Council on Education and the Disciplines
- Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9–28.
- OECD, P. (2015). draft mathematics framework, 2013.
- Pellerey M. (1998). *L'agire educativo. La pratica pedagogica tra modernità e postmodernità*. LAS.
- Pellerey, M. (2004). *Le competenze individuali e il portfolio*. Firenze: La Nuova Italia.
- Pellerey M. (2011). L'approccio per competenze è un pericolo per l'educazione scolastica ?, *Scuola Democratica* n. 2, Nuova serie. Retrieved from https://pellerey.unisal.it/sd_1_approcc_un_pericolo.pdf
- Pesci, A. (2004). Insegnare e apprendere cooperando: esperienze e prospettive, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 27 A-B n. 6, 637-670.
- Pesci A. (2009). Cooperative learning and peer tutoring to promote students' Mathematics education. In L. Paditz, A. Rogerson (Eds.). *Proceedings of the 10th International Conference "Models in Developing Mathematics Education". The Mathematics Education into the 21st Century Project*, (pp. 486-490). Dresda: Dresden University of Applied Sciences.
- Polo, M., Dello Iacono, U., Fiorentino, G., & Pierri, A (2019). A Social Network analysis approach to a digital interactive storytelling in mathematics. *Journal of e-learning and Knowledge Society*, 15(3), 239-250.
- Sannino, A. (2011). Activity theory as an activist and interventionist theory. *Theory & Psychology*, 21(5), 571-597.
- Sannino, A. (2015). The principle of double stimulation: A path to volitional action. *Learning, culture and social interaction*, 6, 1-15.
- Schank, R., & Abelson, R. (1977). *Scripts, plans, goals and understandings*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Sensevy, G., Schubauer-Leoni, M. L., Mercier, A., Ligozat, F., & Perrot, G. (2005). An attempt to model the teacher's action in the mathematics class. In *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom* (pp. 153-181). Springer, Boston, MA.
- Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique* (p. 800). De Boeck.
- Sensevy, G. (2012). About the joint action theory in didactics. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 15(3), 503-516.

- Sfard, A. (1998). On two metaphors of learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4–13.
- Sfard, A. (2001). Learning mathematics as developing a discourse. In R. Speiser, C. Maher, C. Walter (Eds), *Proceedings of 21st Conference of PME-NA*, (pp. 23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for science, mathematics, and Environmental Education.
- Sfard, A. (2008). *Thin as communicating: Human development, development of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20-26.
- Tortora, R. (2012). Numeri consecutivi ovvero elogio dell'ambiguità. Presentazione al convegno SFIDA 37, Seminario Franco-Italiano di Didattica dell'Algebra.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281-307.
- Vygotskij, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.
- Vygotskij, L. S. (1987). Thin and speech. In R. W. Rieber, & A. S. Carton (Eds.). *The collected works of L.S. Vygotskij. Vol. 1: Problems of general psychology*. New York: Plenum, pp. 39–285.
- Weinberger, A., & Papadopoulos, P.M. (2016). Orchestration of Social Modes in e-Learning. *Proc. of the 10th International Conference on e-Learning*. International Association for Development, IADIS, 2016. p. 219-222.
- Weinberger, A., Kollar, I., Dimitriadis, Y., Mäkitalo-Siegl, K., & Fischer, F. (2009). *Computer-supported collaboration scripts: Perspectives from educational psychology and computer science*. In N. Balacheff, S. Ludvigsen, T. de Jong, A. Lazonder, & S. Barness (Eds.), *Technology-enhanced learning* (pp. 155–173). Springer.
- Wertsch, J.V. (1981). Trends in Soviet cognitive psychology. *Storia e critica della psicologia*.
- Zan, R. (2012). La dimensione narrativa di un problema: il modello C&D per l'analisi e la (ri)formulazione del testo. Parte I-II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. Vol.35 A N.4
- Zucchermaglio C. (1996). *Vygotskij in azienda*. Roma: Carocci.