

## **Alcune difficoltà degli studenti con la dimostrazione e il dimostrare al livello universitario**

### Abstract

La tesi riguarda una ricerca che ho svolto tra il 2011 e il 2020 su alcune difficoltà degli studenti universitari algerini, riguardanti la dimostrazione in matematica. La tesi presenta le seguenti fasi di ricerca:

A) Dalle mie esperienze di insegnamento della matematica all'università (iniziato nel 1998) alla formulazione e verifica della prima ipotesi sulle ragioni delle difficoltà che si manifestavano tra gli studenti. Questa ipotesi riguardava il fatto che gli studenti arrivavano all'università (dopo la riforma degli studi superiori, che aveva eliminato l'insegnamento della logica) senza alcuna preparazione alla logica e al formalismo in matematica, e trovavano già al primo anno un insegnamento e libri che fanno ampio uso dei concetti di logica e di formalismo logico. Lo studio relativo agli studenti (secondo anno) del corso di algebra ha confermato questa ipotesi ma ha anche evidenziato difficoltà di natura diversa da quelle espresse in precedenza. Presentando i risultati del primo studio ad una conferenza internazionale e poi partecipando ad altre conferenze internazionali, mi sono resa conto che molte delle difficoltà dei miei studenti erano comuni alle difficoltà incontrate in molti altri paesi, e non erano quindi specifiche della situazione algerina. Ho quindi deciso di allargare la mia ricerca, esplorando in modo ampio e approfondito le soluzioni di esercizi prodotti dagli studenti universitari quando si occupano di attività matematiche legate alla dimostrazione.

B) Nella seconda fase della ricerca ho condotto un'indagine sperimentale con studenti del terzo anno che frequentavano un corso di analisi complessa, proponendo tre prove scritte, ciascuna composta da tre domande che richiedevano una dimostrazione (come: costruire una dimostrazione semplice facendo riferimento a una definizione, stabilire se un'affermazione è vera, trovare un contro esempio, dimostrare di nuovo una proprietà già dimostrata a lezione ...). L'analisi attenta di oltre 3x3x99 produzioni degli studenti aveva messo in evidenza una significativa differenza tra i testi (delle dimostrazioni) prodotti dagli studenti nel caso di domande che richiedevano una procedura già nota e utilizzata in precedenza, (queste domande saranno chiamate in seguito 'esercizi di dimostrazione' – in cui “esercizi” fa riferimento a Schoenfeld), e i testi prodotti dagli studenti quando si trattava di costruire una dimostrazione senza poter fare riferimento a precedenti esempi di dimostrazioni o procedure note (in seguito detti 'problemi di dimostrazione', sempre con riferimento a “problemi” secondo Schoenfeld). Questi ultimi testi apparivano disorganizzati, simili a bozze e privi di collegamenti tra un'affermazione e l'altra, ed erano difficili (per me, ma anche per chiunque) da interpretare non solo per quello che c'era scritto ma anche per quanto riguarda il ragionamento seguito dall'autore della dimostrazione. Questo mi ha spinto a cercare nella letteratura i possibili strumenti per analizzare (a partire dai testi prodotti dagli studenti) le difficoltà degli studenti nel costruire dimostrazioni per risolvere “problemi di dimostrazione”, e per interpretare le ragioni di tali difficoltà.

C) Nella terza fase della ricerca ho ipotizzato che (tra le possibili ragioni delle difficoltà degli studenti) vi fossero,

- oltre alle lacune riguardanti gli aspetti logico-linguistici dell'attività matematica,
- il contratto didattico teorizzato da G.Brousseau (in particolare, la possibile dipendenza dello studente da ciò che lui pensa che l'insegnante si aspetti da lui),
- la scarsa padronanza dei concetti matematici (in riferimento alla teoria di G. Vergnaud sui campi concettuali) necessaria per costruire la dimostrazione,
- e la debole padronanza della natura della prova a livello meta, in particolare: distinzione e significato dell'ipotesi e della tesi, struttura deduttiva della prova, ecc., quella che in breve viene chiamata "meta-conoscenza della prova").

- Ho anche ipotizzato che gli studenti avessero scritto la dimostrazione seguendo il loro ragionamento durante la sua costruzione, senza distinguere il processo di produzione della dimostrazione dal prodotto finale di quel processo (cioè il testo della dimostrazione).

Queste ipotesi sono state alla base di un'indagine sperimentale condotta con lo stesso gruppo di studenti considerato nella fase (B). Ho loro proposto una quarta prova, che comprendeva solo problemi di dimostrazione e ho analizzato i loro testi prodotti secondo le 5 ipotesi che avevo assunto. I risultati ottenuti hanno confermato che le ipotesi formulate erano tutte plausibili per interpretare le difficoltà degli studenti nella stesura del testo finale della dimostrazione.

In diversi casi, tuttavia, non è stato facile individuare quale fosse il motivo principale delle difficoltà incontrate, e se, e anche come, le presunte ragioni delle difficoltà fossero correlate tra loro (in particolare, per quanto riguarda il rapporto tra contratto didattico e assenza della meta-conoscenza corretta della dimostrazione, o presenza di una meta-conoscenza erronea, e per quanto riguarda l'impatto delle difficoltà logico-linguistiche sulla costruzione della dimostrazione).

D) Seguendo un approccio abituale di ricerca in didattica della matematica (in cui ricerche quantitative e qualitative sui testi prodotti dagli studenti sono seguite da interviste ad alcuni di loro per approfondire lo studio del problema di ricerca affrontato), ho quindi deciso di intervistare un campione rappresentativo di 14 studenti con colloqui semi-strutturati, basati su dodici domande sulle cinque ipotesi dello studio precedente, con particolare attenzione al possibile ruolo del contratto didattico, alla consapevolezza degli studenti della meta-conoscenza della prova e sulle difficoltà linguistiche (considerando anche il fatto che la lingua ufficiale dell'insegnamento della matematica a livello universitario è il francese mentre gli studenti si esprimono comunemente nel dialetto algerino, e hanno utilizzato l'arabo classico nello studio della matematica prima dell'università). L'analisi delle interviste ha fornito elementi interessanti per ipotizzare, in particolare, una correlazione tra la scarsa padronanza della meta-conoscenza della dimostrazione da parte di parecchi studenti, e la loro dipendenza dalle presunte aspettative del docente. L'analisi ha inoltre fornito elementi per ipotizzare un altro motivo di difficoltà legato alla scarsa padronanza della lingua francese da parte di molti studenti. In tal modo l'attenzione si è spostata dall'analisi delle carenze relative alla padronanza della logica e del formalismo logico (oggetto del primo studio - cfr. A) ai problemi relativi alle modalità di espressione delle strutture logiche di interesse per la matematica nelle diverse lingue (quella comunemente parlata, cioè il dialetto algerino, quella ufficialmente usata a scuola, cioè l'arabo classico, e quella ufficialmente usata all'università, cioè il francese).

E) Sulla base dei risultati di precedenti ricerche, ed in particolare delle considerazioni sopra delineate, ho condotto due ulteriori studi:

E1) Come la meta-conoscenza della dimostrazione si lega con le pratiche degli studenti e le loro difficoltà con la dimostrazione.

E2) In che modo gli studenti imparano la matematica all'università nonostante la mancanza di una adeguata padronanza della lingua francese.

F) La ricerca svolta ha suggerito anche altri quesiti di ricerca, tra i quali per me i più significativi sono:

- Quale è la padronanza dei concetti da parte degli studenti, a livello degli invarianti operatori, necessaria per fare le dimostrazioni, in particolare nel caso della matematica avanzata (università)?

- Gli studenti costruiscono autonomamente un'autentica meta-conoscenza della dimostrazione quando sono indipendenti dalle aspettative dei loro insegnanti? Oppure gli studenti diventano indipendenti dalle aspettative dei loro insegnanti quando costruiscono meta-conoscenze autentiche attraverso la loro personale pratica del dimostrare?

Si tratta di domande di ricerca non ancora oggetto di ricerca da parte mia.

## NOTA

I risultati della ricerca A sono stati pubblicati negli Atti di (CERME 8, 2013), i risultati delle ricerche C e D sono stati pubblicati su Educational Studies in Mathematics. I risultati delle ricerche su E1 ed E2 sono stati pubblicati, rispettivamente, negli Atti di CERME10 (2017), e CERME11 (2019) e un'altra parte dello studio di E2 negli Atti di (ETC7, 2020).

Sulla base dei risultati delle ricerche su E1 ed E2 sto sviluppando due ricerche, che riguardano:

- (in collegamento con E1): l'approfondimento del problema teorico riguardante la natura della meta-conoscenza sulla dimostrazione, con riferimento alla teoria dei campi concettuali di Vergnaud e alla possibilità di considerare la meta-conoscenza della dimostrazione come un "concetto" secondo Vergnaud. Alcuni risultati preliminari (con applicazioni del lavoro teorico all'analisi di dimostrazioni prodotte dagli studenti) sono stati presentati a CERME-12 (2022)
- (in collegamento con E2): indagini sulla consapevolezza degli insegnanti di matematica del liceo a proposito delle difficoltà degli studenti con gli aspetti logico-linguistici delle attività di ragionamento degli studenti, in relazione alla loro scarsa padronanza dell'arabo classico, e del francese (nel successivo passaggio all'università); e indagini effettuate su gruppi di studenti mentre cercano di risolvere insieme problemi piuttosto impegnativi di Analisi Matematica all'università, per accertare le lingue da loro utilizzate nel costruire la soluzione dei problemi e nell'esporsi in forma scritta. I risultati riguardanti l'indagine sugli insegnanti saranno esposti a ETC-12 in settembre.

Entrambe le ricerche saranno oggetto, a breve, di articoli per riviste internazionali di didattica della matematica.