Matematica e linguaggio
quadro teorico e idee per la didattica

1. Introduzione

Questo libro è originato dall'esigenza di sistemare in forma organica e accessibile i materiali presentati nella XXI sessione del Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica che ha avuto luogo a Pisa dal 5 al 7 febbraio 2004. Poiché in quella occasione la maggior parte degli esempi illustrativi era riferita al livello universitario, è stato necessario aggiungere esempi relativi a fasce d'età più giovani. Gli esempi originali sono stati in gran parte conservati, come pure il quadro teorico, per non venir meno alle esigenze di organicità menzionate sopra. Alcuni punti del quadro teorico e alcuni degli esempi a livello universitario non sono probabilmente indispensabili per la comprensione delle motivazioni e degli scopi delle attività didattiche illustrate per la fascia 6-14.

La ricerca è nata dalle convinzioni che mi sono formato a proposito delle difficoltà degli studenti di diversi livelli scolari e dei legami di queste con il linguaggio. È stata influenzata e anche stimolata dall'insoddisfazione nei confronti di punti di vista e atteggiamenti nei confronti dei linguaggi (talvolta reciprocamente contrapposti) abbastanza diffusi fra i matematici o i ricercatori in educazione matematica. Più precisamente, ho sentito l'esigenza di tener conto di due aspetti apparentemente divergenti: la specificità della matematica e del suo linguaggio e il ruolo del contesto (spazio, tempo, persone, …) nella comunicazione matematica. A mio giudizio sono poco interessanti e produttive sia le impostazioni che ignorano o distorcono le funzioni che i linguaggi specifici della matematica hanno svolto nella storia e nella cultura, sia quelle che sottovalutano il fatto che i processi di insegnamento e apprendimento matematico avvengono tra persone in carne e ossa e non fra menti astratte o automi.

Il linguaggio non è soltanto una sorgente di difficoltà ma gioca un ruolo fondamentale nei processi di apprendimento. Quale sia quel ruolo è oggetto di discussioni vivaci. Nella sezione successiva saranno confrontate alcune delle posizioni contrapposte di ricercatori attivi in educazione matematica. In ogni caso, le potenzialità di lavori integrati lingua-matematica con gli alunni di scuola primaria e secondaria sono notevoli e in buona parte inesplorate. Questo aspetto verrà affrontato soprattutto nella seconda parte del libro.

Le questioni relative al linguaggio sono rese ancor più significative e urgenti dall'esigenza che è destinata inevitabilmente a generalizzarsi, di insegnare matematica ad alunni provenienti da gruppi linguistici diversi. Questo tema, anche se in Italia non è stato ancora affrontato a fondo, è ampiamente studiato all'estero da numerosi ricercatori in psicologia dell'educazione matematica.

Da un punto di vista più specifico, i principali obiettivi della ricerca illustrata in questo libro sono due.

In primo luogo vi è l'esigenza di elaborare strumenti per identificare e interpretare diversi comportamenti linguistici che influenzano pesantemente le prestazioni in matematica. Si vedrà che per fare questo non è sufficiente studiare alcune proprietà specifiche del simbolismo o del lessico matematico, ma è necessario prendere in considerazione gli usi del linguaggio verbale nel suo complesso e delle rappresentazioni figurali nella pratica matematica; nel caso della componente verbale, sarà necessario prendere in considerazione non solo singole espressioni ma testi più lunghi. Per formulare e verificare ipotesi credibili sulle origini delle difficoltà e sulle funzioni dei linguaggi (e in particolare del linguaggio matematico) nell'apprendimento, nel seguito verranno utilizzati risultati e costruzioni della linguistica.

In secondo luogo vi è l'esigenza di trarre le conseguenze delle analisi e giungere a definire e progettare attività didattiche mirate allo sviluppo di competenze linguistiche adeguate per la matematica e al superamento della separazione fra educazione linguistica e scientifica.

Lo studio delle caratteristiche specifiche del linguaggio matematico è ben introdotto dalle riflessioni di Giovanni Vailati (1908) sulla 'grammatica dell'algebra'. Di questa Vailati mette in luce l'importanza per la psicologia dell'apprendimento matematico e l'opportunità di studiarla in relazione al contesto matematico. Vailati conclude l'articolo sostenendo in modo chiaro l'opportunità di un approccio al linguaggio dell'algebra basato sull'interpretazione dei testi e sugli usi e l'esigenza di superare la tradizionale distinzione fra materie letterarie e scientifiche.

> Va diventando sempre più un luogo comune, nelle discussioni sull'ordinamento degli studi nelle nostre scuole secondarie, il lamento sui danni derivanti, allo studio delle lingue antiche o moderne, dell'impiego di metodi troppo «grammaticali» o «filologici», dalla troppa parte, cioè, che è fatta ordinariamente, nei primi stadi dell'insegnamento, all'enumerazione delle regole grammaticali, in confronto allo scarso tempo e alla minor cura dati invece agli esercizi di interpretazione e di conversazione.

> A questo che si ritiene comunemente essere un difetto particolare dell'insegnamento delle lingue, fanno riscontro, a mio parere, dei difetti non solo analoghi, ma addirittura identici in quella parte dell'insegnamento scientifico che ha per scopo di fare acquistare agli alunni la capacità di servirsi delle notazioni dell'algebra.
>
> Promuovere un chiaro riconoscimento di questa specie di solidarietà tra due rami d'insegnamento che la tradizionale distinzione delle «materie» in letterarie e scientifiche tende a far riguardare come eterogenei e privi di qualsiasi rapporto tra loro equivale a render possibile, tra i cultori dei due ordini di disciplina, uno scambio d'idee che non mancherebbe di riuscir fecondo di eguali vantaggi per ambedue le parti[1].

Uno studio di questo tipo sarà quello che cercherò di fare nel resto di questo libro.

2. Matematica, semiotica, linguaggi

Le posizioni circa i rapporti fra linguaggi e apprendimento della matematica sono svariate. Per capire meglio i temi in gioco può essere utile una breve panoramica, limitata ad autori contemporanei e al settore dell'educazione matematica.
Una posizione estrema è quella di Usiskin (1996) per cui la matematica è una lingua e può essere appresa con le tecniche di immersione totale attraverso cui si apprendono usualmente le lingue straniere[2]:

> "Poiché la matematica è una seconda lingua viva, per molti studenti, come minimo dovremmo insegnare la matematica come insegnamo le lingue straniere - in contesto, cominciando più presto che si può e immergendo gli studenti nel linguaggio." [3]

Questa posizione, che muove da un'interpretazione dei linguaggi apparentemente appiattita sulla dimensione grammaticale, non ha probabilmente una grande rilevanza sul piano della ricerca ma corrisponde a luoghi comuni ampiamente diffusi[4]. Essa da un lato sottovaluta la stessa complessità dei processi di apprendimento delle lingue straniere, che mettono comunque in gioco aspetti come il contesto e la cultura. Dall'altro trascura diverse peculiarità della matematica e del suo linguaggio e verrà confutata, direttamente o indirettamente, dalle considerazioni che saranno sviluppate nel seguito del libro.
Un punto importante, su cui si registrano divergenze nette, è il rapporto fra conoscenza e rappresentazione, tra *noesis* e *semiosis*. Strettamente legata a questa è la questione dei rapporti fra sviluppo del pensiero e processi di comunicazione. Una quadro molto articolato è quello di Duval (1995, 2000). Per Duval non c'è *noesis* senza *semiosis*:

> "L'analisi dei problemi di apprendimento della matematica e degli ostacoli con i quali gli studenti si scontrano regolarmente porta a riconoscere dietro la seconda ipotesi una legge fondamentale del funzionamento cognitivo del pensiero: non c'è *noesis* **senza *semiosis***, senza cioè il ricorso a una pluralità almeno potenziale di sistemi semiotici, ricorso che comporta il loro coordinamento da parte del soggetto stesso." [Duval, 1995, p.5, enfasi come nell'originale] [5]

Secondo Duval, le rappresentazioni semiotiche sono fondamentali in matematica da diversi punti di vista. Prima di tutto consentono l'applicazione di trattamenti: gli algoritmi lavorano sulle rappresentazioni, non

---

[1] Vailati (1908, p.110)

[2] Di tutti i brani che esemplificano le opinioni di ricercatori autorevoli espresse in lingua straniera è riportata la traduzione italiana nel corpo del testo e l'originale in nota. Degli altri brani tratti da pubblicazioni in lingua straniera (descrizioni di ricerche o di attività didattiche, …) è riportata soltanto la traduzione italiana. Tutte le traduzioni sono dell'autore di questo libro.

[3] "Because mathematics is a living second language, for most students, at a minimum we should teach mathematics as we do living foreign languages - in context, starting as early as we can and immersing students in the language" [Usiskin, 1996, p.242].

[4] È abbastanza diffusa la pratica retorica di accostare matematica e linguaggio, senza peraltro esplicitare in modo credibile le ragioni degli accostamenti, magari facendosi scudo della famosa metafora galileiana. Un esempio è il libro di Devlin (2000), che, benché intitolato 'The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible', non fa alcun riferimento esplicito né a linguaggi né a funzioni linguistiche della matematica, tranne un fugace cenno alla notazione algebrica. Questo naturalmente è un giudizio sul titolo del libro, non sul suo contenuto.

[5] "L'analyse des problèmes de l'apprentissage des mathématiques et des obstacles auxquels les élèves se heurtent régulièrement conduit à reconnaître derrière la seconde hypothèse une loi fondamentale du fonctionnement cognitif de la pensée: il n'y a pas de *noésis* **sans *sémiosis***, c'est-a-dire sans le recours à une pluralité au moins potentielle de systèmes sémiotiques, recours qui implique leur coordination pour le sujet lui-même."

direttamente sui concetti[6]. Le usuali tecniche di calcolo scritto delle operazioni aritmetiche, ad esempio, funzionano con la notazione posizionale in base dieci e, più in generale, in qualunque base. Non funzionano se i numeri sono rappresentati con la notazione degli antichi Romani o con configurazioni di punti. In secondo luogo, le rappresentazioni mentali, che Duval distingue da quelle semiotiche, sono il risultato di processi di interiorizzazione di queste ultime[7]. La disponibilità di più sistemi semiotici permette diverse rappresentazioni di uno stesso ‘oggetto’, il che arrichisce le capacità cognitive dei soggetti e le loro rappresentazioni mentali, oltre a offrire migliori opportunità di trattamento. La disponibilità di diversi modi per rappresentare i numeri (che è parte essenziale di molte positive esperienze di insegnamento dell’aritmetica) svolge infatti funzioni cognitive, in quanto offre la possibilità di separare l’idea di numero dalle singole rappresentazioni e di metterne in luce diversi aspetti[8]. Consente inoltre di adottare i trattamenti più economici. Ad esempio, la rappresentazione di un numero razionale come frazione di interi può rendere più agevoli moltiplicazioni o divisioni, mentre la sua rappresentazione come allineamento decimale (finito o periodico) può facilitare somme e differenze e mettere in luce le proprietà di ordinamento.
Insieme con diversi linguisti ed epistemologi di lingua francese, Duval osserva che la creazione di sistemi di rappresentazione specifici è un passaggio comune nello sviluppo di tutte le scienze. Questa riflessione è stata sviluppata in modo particolare da Granger[9], per cui ciascuna scienza tende a usare linguaggi specifici (come, nel caso della matematica, le notazioni simboliche) per esprimere i propri risultati. La componente verbale non viene eliminata ma assume prevalentemente funzioni metalinguistiche[10].
Su posizioni opposte, almeno per alcuni aspetti, si colloca la scuola di Lakoff[11], per cui l'attività linguistica è il riflesso di quella cognitiva e dipende strettamente da questa. La posizione di Lakoff quale risulta dalle opere più recenti è molto complessa e non facile da schematizzare. Pur collocandosi in un quadro cognitivista[12], egli muove dalla critica di alcuni aspetti delle teorie di Chomsky, rifiutando fra l’altro l'indipendenza della grammatica da fattori come significati, contesti, cultura, esperienza corporea, metafore. La differenza rispetto alle altre teorie che contengono affermazioni simili (come, nel caso dell’educazione matematica, quelle di Sfard o di Radford) sta principalmente nel fatto che per lui i linguaggi sono manifestazioni di superficie di processi cognitivi profondi. Quindi secondo questo orientamento è possibile separare i concetti dalla loro forma linguistica e un linguaggio riflette una cultura ma apparentemente non gioca un ruolo autonomo nel determinarla. Nei lavori citati non ho trovato passaggi in cui lui o i suoi collaboratori mostrino interesse per le rappresentazioni semiotiche o attribuiscano esplicitamente a linguaggi e comunicazione in quanto tali influenze sulla cultura o sullo sviluppo del pensiero. In particolare, una metafora non appartiene, come per gran parte dei linguisti[13], alla sfera linguistica, ma a quella cognitiva, e quindi non dipende dalle caratteristiche del linguaggio in cui è formulata:

[6] Per un’analisi approfondita del ruolo delle notazioni in matematica, da una prospettiva che tiene conto degli sviluppi della matematica degli ultimi decenni e del dibattito epistemologico, si veda il libro di Lolli (1996).

[7] Il riferimento d'obbligo è Vygotskij (1992)

[8] Per una discussione sul ruolo delle rappresentazioni nel primo apprendimento aritmetico compatibile con questa impostazione si veda Dapueto, Ferrari & Rogantin (1986).

[9] 1979. p.21-47.

[10] I rapporti fra la componente verbale e quella simbolica del linguaggio matematico sono comunque complessi e delicati e verranno discussi in una sezione successiva.

[11] A questo proposito faccio riferimento a Lakoff (1987), Lakoff & Johnson (1999), Lakoff & Núñez (1997), Lakoff & Núñez (2000), Núñez, Edwards & Matos (1999). Sono numerose anche le le recensioni e le reazioni alle opere di Lakoff & Núñez, come ad esempio Auslander (2001), Dubinsky (1999), Gold (2001), Goldin (2001), Lolli (2002, 2003), Madden (2001), Paulos (2001), Presmeg (2002), Schiralli & Sinclair (2003), nelle quali i lavori vengono esaminati (e, in quasi tutti i casi, criticati) da una grande varietà di punti di vista.

[12] Lakoff & Johnson (1999) definiscono la loro posizione ‘cognitivismo di seconda generazione’.

[13] Si veda ad esempio Eco (1984, pp.141 e segg.), o Napoli (1995).

> "A differenza degli studi tradizionali sulla metafora, il punto di vista contemporaneo dell'embodiment vede le metafore concettuali come qualcosa che sta non nelle parole, ma nei pensieri. Le espressioni linguistiche metaforiche sono quindi soltanto manifestazioni di superficie del pensiero metaforico."[14]

È evidente che, se si ritiene che le rappresentazioni semiotiche (alla base della comunicazione) siano fenomeni di superficie, è difficile attribuire alla comunicazione un ruolo rilevante nello sviluppo del pensiero e quindi nell'educazione.

Tra le teorie che, al contrario, attribuiscono grande peso alla comunicazione in matematica vi sono le interpretazioni della 'matematica come discorso', espresse di recente con chiarezza da Anna Sfard:

> "Il principio basilare dell'approccio comunicativo allo studio della cognizione umana è che il pensiero può essere concettualizzato come un caso di comunicazione, vale a dire come comunicazione con sé stessi. Infatti, il nostro pensiero è chiaramente uno sforzo dialogico con il quale informiamo noi stessi, discutiamo, poniamo domande, e aspettiamo la nostra risposta. La concettualizzazione del pensiero come comunicazione è una conseguenza quasi inevitabile della tesi delle origini intrinsecamente sociali di tutte le attività umane. Chiunque creda, come Vygotsky, nella priorità evolutiva del discorso comunicativo pubblico sul discorso interiore privato (e.g. Vygotsky, 1987) deve anche ammettere che sia che si consideri la filogenesi, sia l'ontogenesi, il pensiero sorge come versione privata modificata della comunicazione interpersonale."[15]

> "L'apprendimento della matematica può ora essere definito come un'iniziazione al discorso matematico, cioè, iniziazione a una speciale forma di comunicazione nota come matematica." [16]

Anche Sfard attribuisce un ruolo rilevante alle metafore, ma la sua interpretazione è lontana da quella espressa da Lakoff, Núñez e i loro collaboratori:

> "Di fatto, alcuni sembrano parlare di metafore esattamente come altri ricercatori parlerebbero di *modelli mentali*. In quest'ultimo approccio il linguaggio non deve giocare un ruolo rilevante. Dal momento che, comunque, il linguaggio è il mezzo attraverso il quale la metafora viene posta in essere e influenza la nostra attività di pensiero, io vedo il discorso sulla metafora inseparabile dal discorso sul linguaggio. È il modo in cui parliamo, il modo in cui trasferiamo espressioni linguistiche da un contesto all'altro, che plasma il nostro modo di guardare il mondo." [17]

Posizioni di questo tipo hanno dato origine a un ampio spettro di ricerche e di idee didattiche. Una posizione che suggerisce interpretazioni profonde e spunti di ricerca originali è quella di Radford, che rifiuta la contrapposizione tra espressione e contenuto (o, anche, fra struttura di superficie e struttura profonda). Secondo Radford i quadri teorici che adottano tali contrapposizioni sono inadeguati per diversi motivi, soprattutto perché interpretano la relazione soggetto/oggetto come non mediata culturalmente, e la costruzione del significato appare il risultato della relazione fra il soggetto isolato e un oggetto a-storico. Radford assume invece due idee fondamentali.

> "La prima è l'idea di Vygotskij per cui il nostro funzionamento cognitivo è intimamente legato e *influenzato* dall'uso dei segni. Di conseguenza c'è un passaggio teorico da ciò che i segni *rappresentano* a ciò che i segni ci *consentono* di fare. La seconda idea sulla quale è basato il mio quadro ha a che fare con il significato dei segni e

---

[14] "Unlike traditional studies on metaphor, contemporary embodied views don't see conceptual metaphors as residing in words, but in thoughts. Metaphorical linguistic expressions thus are only surface manifestations of metaphorical thought." [Núñez *et al.*, 1999, p.52]

[15] "The basic tenet of the communicational approach to the study of human cognition is that thinking may be conceptualized as a case of communication, that is, as one's communication with oneself. Indeed, our thinking is clearly a dialogical endeavor, where we inform ourselves, we argue, we ask questions, and we wait for our own response. The conceptualization of thinking as communication is an almost inescapable implication of the thesis on the inherently social origins of all human activities. Anyone who believes, as Vygotsky did, in the developmental priority of communicational public speech over inner private speech (e.g. Vygotsky, 1987) must also admit that whether phylogenesis or ontogenesis is considered, thinking arises as a modified private version of interpersonal communication." [Sfard, 2001, p.26]

[16] "Learning mathematics may now be defined as an initiation to mathematical discourse, that is, initiation to a special form of communication known as mathematical." [*ibidem*, p.28]

[17] "Indeed, some people seem to be talking about metaphors in much the same way as other researchers talk about *mental models*. In this latter approach language does not have to play a prominent role. Since, however, language is the medium through which metaphor comes into being and influences our thinking, I view the discourse on metaphor as inseparable from the discourse on language. It is the way we speak, the way we transplant linguistic expressions from one context to another, which shapes our way of looking at the world." [Sfard, 1997, p.343]

> sottolinea il fatto che i segni *con* cui l'individuo agisce e *in* cui l'individuo pensa appartengono a sistemi simbolici culturali che trascendono l'individuo in quanto individuo. I segni hanno quindi una doppia vita. Da un lato, funzionano come strumenti che permettono agli individui di impegnarsi nella prassi cognitiva. Dall'altro, sono parte di quei sistemi che trascendono l'individuo e attraverso cui si oggettivizza una realtà sociale. I segni-strumenti con cui l'individuo pensa sembrano allora inquadrati da significati sociali e regole di uso e forniscono all'individuo i mezzi sociali di oggettivizzazione semiotica." [enfasi come nell'originale] [18]

Anche la posizione di Radford, che sottolinea la funzione strumentale dei segni e la loro 'doppia vita' (sul piano individuale e su quello sociale) è lontana da quella di Lakoff e Núñez. Un fattore di confusione risiede nella diversa interpretazione di 'cultura' adottata da questi autori. Questo influenza anche gli atteggiamenti nei confronti dei fenomeni sociali, e in particolare di quelli linguistici. Può essere istruttiva la lettura dei lavori di Bruner (ad esempio, 1990) il quale analizza lucidamente i legami tra apprendimento e cultura e interpreta quest'ultima in un'accezione molto ampia, che va ben oltre le interpretazioni cognitiviste a cui sembrano più legati Lakoff e i suoi collaboratori. Per Bruner anche il significato non è indipendente dai linguaggi condivisi ma è mediato culturalmente e dipende dall'esistenza preliminare di un sistema simbolico condiviso." [19]

Sul versante opposto, oltre alla scuola di Lakoff già citata, il punto di vista secondo cui lo sviluppo del pensiero è preliminare ai processi di comunicazione è espresso con molta chiarezza da Dubinsky (2000). Dubinsky critica sia le posizioni di Lakoff, che giudica sterili sul piano pedagogico e inadeguate sul piano cognitivo, sia quelle di Sfard, che giudica inadatte a spiegare i processi di sviluppo del pensiero matematico avanzato.

> "Forse la principale divergenza che ho con questi autori si appoggia sull'opinione di Sfard che "… il modo in cui parliamo … plasma il nostro modo di guardare il mondo." La mia esperienza e ricerca suggerisce che è il contrario." [20]

> "Sebbene l'idea di usare metafore per creare concetti matematici nelle menti degli individui sia molto attraente in quanto può dare alla matematica un profumo estetico letterario, rimango convinto che il linguaggio è uno strumento il cui valore reale è l'espressione di idee che un individuo ha già costruito. Non penso che ci siano ragioni per credere che esso sia abbastanza potente per essere utile nella creazione di qualcosa in più dei concetti matematici più semplici." [21]

In questi passaggi Dubinsky accomuna le posizioni di Lakoff e Núñez e di Sfard come se entrambi i punti di vista attribuissero grande importanza al linguaggio verbale. In effetti questo è palese solo per Sfard. Dubinsky distingue tra il linguaggio verbale, che secondo lui ha un ruolo secondario nella concettualizzazione, e il formalismo matematico, che può invece favorire la costruzione dei concetti matematici avanzati, attraverso processi costruttivi di manipolazione simbolica.

Posizioni di rifiuto o disinteresse nei confronti delle pratiche didattiche basate sulla comunicazione (e di sottovalutazione delle funzioni e delle potenzialità del linguaggio verbale) sono latenti (anche se non sempre dichiarate esplicitamente) in molti ambienti matematici. In particolare, capita spesso di vedere equiparati, ad esempio in sede di valutazione, comportamenti legati a mancanza di conoscenze o cattiva concettualizzazione ad altri riconducibili a problemi di comunicazione.

---

[18] "The first one is the Vygotskian idea according to which our cognitive functioning is intimately linked, and *affected* by, the use of signs. ... As a result, there is a theoretical shift from what signs *represent* to what they *enable* us to do. The second basic idea on which our framework is based deals with the meaning of signs and stresses the fact that the signs *with* which the individual acts and *in* which the individual thinks belong to cultural symbolic systems which transcend the individual *qua* individual. Signs hence have a double life. On the one hand, they function as tools allowing the individuals to engage in cognitive praxis. On the other hand, they are part of those systems transcending the individual and through which a social reality is objectified. The sign-tools with which the individual thinks appear then as framed by social meanings and rules of use and provide the individual with social means of semiotic objectification." [Radford, 2000, p.240-241]

[19] Bruner, 1990, p.69

[20] "Perhaps the fundamental difference I have with these authors rests on Sfard's contention that "... the way we speak ... shapes our way of looking at the world." My experience and research suggests that it is the other way around." [Dubinsky, 2000, p.221]

[21] "Although the idea of using metaphors to create mathematical concepts in the minds of individuals is very attractive in that it can give mathematics an aesthetic literary flavor, I remain convinced that language is a tool whose real value is the expression of ideas which an individual already has constructed. I do not feel there is any reason to believe that it is powerful enough to be useful in creating more than the simplest mathematical concepts." [*ibidem*, p.238]

Nel seguito dell'esposizione si vedrà che le mie posizioni sono molto più vicine a quelle di Duval, Radford e Sfard rispetto a quelle di Dubinsky e, soprattutto, di Lakoff e Núňez. È evidente che se si assume che il pensiero è una forma di comunicazione, allora la qualità del linguaggio influenza la qualità del pensiero e la competenza linguistica assume un'importanza decisiva. Tuttavia il quadro che presento nelle prossime sezioni non ha bisogno di ipotesi così forti. Io spero infatti che il mio lavoro possa essere utile anche a chi non aderisce a tesi di questo tipo e ritiene che il linguaggio serva a esprimere e comunicare concetti già costruiti, o a chi non ha idee definite al proposito. In ogni prospettiva le difficoltà di comunicazione sono da considerarsi gravi e tali da ostacolare pesantemente i processi di apprendimento e di valutazione scolastica.

3. Comportamenti e difficoltà: un primo esame

In questa sezione delineo le questioni principali affrontate nel resto del libro e cerco di spiegare e giustificare il quadro teorico illustrato nelle successive sezioni. In particolare presento l'interpretazione delle difficoltà linguistiche che ho rilevato nel corso della mia esperienza di insegnamento e di ricerca. Questo richiede ovviamente l'analisi delle funzioni che il linguaggio esercita nei processi di insegnamento e di apprendimento della matematica.

Per illustrare le mie posizioni mi servo di alcuni esempi. L'interpretazione dei comportamenti che vi si ritrovano non è quasi mai univoca. L'interpretazione che basata sui fattori linguistici è spesso in concorrenza con altre, come ad esempio quella, comune fra i matematici, che attribuisce, in forma più o meno sofisticata, tutte le difficoltà a lacune sui contenuti. Un altro modello diffuso, in questo caso soprattutto fra gli esperti in educazione matematica, è quello di cercare interpretazioni 'ad hoc', caso per caso, pescando da una pluralità di fattori quelli che di volta in volta si ritengono determinanti. Il fatto che interpretazioni di entrambi questi tipi siano palesemente insufficienti non deve indurre ad adottare un modello interpretativo alternativo in modo esasperato, come talvolta è accaduto nel settore dell'educazione matematica. Non intendo quindi usare esclusivamente interpretazioni linguistiche per spiegare tutte le difficoltà in matematica e sono consapevole che vi sono difficoltà legate a fattori diversi dal linguaggio.

È fuori di dubbio, e non è necessario dare esempi, che alcune difficoltà siano ascrivibili prevalentemente a lacune nelle conoscenze o nella concettualizzazione. In altri casi diverse interpretazioni sono possibili. Se uno studente scrive in un compito una formula come

$$(x+2)^2 = x^2+4$$

il suo comportamento può essere interpretato come mancanza di conoscenze di algebra, se ad esempio si pensa che abbia consapevolmente applicato una regola che ritiene corretta, oppure come inaccuratezza linguistica, se ad esempio si pensa che conoscesse la corretta regola per il quadrato di un binomio, e magari intendesse applicarla ma che non abbia controllato adeguatamente il testo prodotto. Questa seconda interpretazione può mettere in gioco altri fattori, come l'atteggiamento del soggetto nei confronti dei testi scritti e delle loro funzioni, e, in generale, della matematica.

In altri casi è ancora più difficile interpretare i comportamenti in termini di mancanza di conoscenze. Il numero enorme e crescente di errori di segno che trovo nei compiti scritti di molti studenti universitari può difficilmente essere spiegato soltanto in termini di mancanza di conoscenze di aritmetica. Molto più realisticamente si può pensare che il controllo di quegli studenti sulle loro produzioni scritte sia estremamente basso; in questo caso si tratterebbe di un problema di linguaggio (e di atteggiamenti nei confronti dei testi prodotti) piuttosto che di conoscenze.

Gli intrecci fra difficoltà linguistiche e questioni relative a convinzioni e atteggiamenti, talvolta anche emozioni, dei soggetti nei confronti della matematica e del linguaggio stesso si verificano in continuazione. Le convinzioni degli studenti sulla matematica e sul linguaggio (come quelle secondo cui in matematica i linguaggi sono poco importanti, o il controllo dei testi prodotti è un'operazione di scarso valore) influenzano pesantemente le prestazioni e si collegano spesso ad atteggiamenti poco produttivi. Le rappresentazioni usate per comunicare in matematica suscitano anche emozioni che pure influenzano gli atteggiamenti: un sistema simbolico, ad esempio, offre di solito emozioni gradevoli quando si riesce a controllarlo e a usarlo per i propri scopi, sgradevoli in caso contrario. Anche se cercherò quando opportuno di richiamare l'attenzione su questi intrecci, che sono a mio avviso di estremo rilievo, in questo libro saranno soprattutto approfonditi gli aspetti linguistici. Gli aspetti relativi a convinzioni, emozioni e atteggiamenti sono stati studiati da diversi ricercatori e ai loro lavori[22] si rimanda.

---

[22] Si vedano ad esempio i lavori di Zan (2000a,b,c,d,e) e di Di Martino & Zan (2001), che contengono anche più ampie indicazioni bibliografiche.

L’interpretazione di un testo non è un’operazione di pura e semplice decodificazione ma, più o meno esplicitamente, richiede *inferenze* di vario tipo. I soggetti davanti a un testo (orale o scritto) generalmente si sforzano di dargli comunque un senso, ne afferrino o meno gli scopi o il significato complessivo. Nel riquadro che segue vediamo un esempio, tratto da Ferrari (2003).

Problema

Completa il testo che segue, in modo che il significato sia ragionevole, scegliendo fra le misure scritte in fondo:

“ Ci sono quattro bambini che giocano. La più alta è Roberta: la sua statura è 1m e 10 cm. Anche Massimo è alto più di un metro: la sua statura è ___________. La statura di Antonio, invece, è ____________. La più piccola di statura è Carla, che è alta _________”.

1m e 20 cm   1m e 5 cm   90 cm   10 cm   85 cm

Problemi di questo tipo richiedono l’interpretazione globale del testo: per rispondere non basta interpretare singole frasi o parole ma occorre coordinare l’interpretazione di più frasi e svolgere delle inferenze, cioè dei ragionamenti, non necessariamente deduttivi, per ricavare informazioni che non sono date esplicitamente. Le attività descritte sembrano alla portata di alunni relativamente giovani, purché siano in grado di controllare i significati in gioco. Questo problema in questa formulazione è stato proposto a diverse classi, dalla III elementare alla III media. La maggioranza degli alunni è riuscita a risolverlo adeguatamente, utilizzando non solo i dati forniti esplicitamente e le proprietà matematiche collegate (ad esempio, le proprietà degli ordinamenti) ma anche svolgendo inferenze sulla base dei dati ricavabili dalle loro conoscenze di tipo generale (ad esempio, non esistono bambini alti 10 cm) o da proprietà comuni dei testi che portano a ipotesi implicite sulla loro coesione (ad esempio, da nessuna parte del testo è detto che Massimo è uno dei quattro, lo si ricava con un’inferenza basata sull’ipotesi che il testo sia coeso, cioè che ci sia un legame semantico fra le frasi che lo compongono). I pochi alunni che non sono riusciti a risolvere il problema, attribuendo a Carla la statura di 10 cm, hanno probabilmente ritenuto di associare alla bambina più piccola la misura numerica più piccola (utilizzando ‘piccola’ come parola-chiave svincolata dal resto del testo). È interessante la motivazione data alla scelta di scartare la misura ’10 cm’ da un’alunna segnalata con gravi difficoltà di memorizzazione e astrazione. L’alunna si è appartata per misurare accuratamente una matita e si è poi rivolta all’insegnante: *“Maestra, questa matita è 10 centimetri, e un bambino non può essere come una matita!”*. Apparentemente, il dato enciclopedico ‘non esistono bambini alti 10 cm’ per questa bambina si è spezzato in un dato più concreto (‘non esistono bambini alti come una matita’) e nell’attività pratica di misura.

Dall’esperienza didattica emerge chiaramente che le difficoltà non riguardano le sole notazioni simboliche (ampiamente studiate nel quadro delle ricerche sul primo apprendimento algebrico) ma mettono in gioco anche la *componente figurale*[23] e, in modo particolare, quella *verbale*. Anche la componente *gestuale* ha un ruolo non secondario nei processi di apprendimento. Nel quadro teorico dovranno essere considerate tutte le componenti del linguaggio matematico, anche se in questo studio quella gestuale sarà toccata solo marginalmente.

Inoltre le difficoltà non riguardano soltanto il lessico o la sintassi, ma anche l’organizzazione dei testi, le loro funzioni e la loro adeguatezza. Nel riquadro che segue vediamo un esempio tratto da Ferrari (2003).

[23] In genere preferisco usare ‘figurale’, in quanto ‘visuale’ e ‘grafico’ a rigore si riferiscono anche a testi scritti.

Problema
Collega con un tratto di penna ciascuna frase di sinistra con la frase o le frasi di destra che hanno significato equivalente:

a) Non tutti gli operai della fabbrica sono italiani	a') Tutti gli operai della fabbrica sono stranieri
	b') Alcuni operai della fabbrica sono italiani
b) Nessun operaio della fabbrica è italiano	
	c') Tutti gli operai della fabbrica sono italiani
c) Non tutti gli operai della fabbrica non sono italiani	d') Alcuni operai della fabbrica sono stranieri

Prove di questo tipo sono state assegnate a svariati campioni, dalla scuola media inferiore all'università. In tutti i campioni (compresi gli universitari) la maggior parte dei soggetti ha operato adeguatamente a proposito dell'enunciato b), ma molti hanno associato ad a) entrambi gli enunciati b'), d'). Lo stesso è accaduto per c). Gli esiti di questa prova sono stati influenzati abbastanza poco dall'età e dal livello scolare dei soggetti.
Rispetto a b), l'enunciato a') è equivalente dal punto di vista sia dell'interpretazione quotidiana sia di quella matematica. Per gli enunciati a), c) la situazione è meno semplice. Dal punto di vista matematico, se si assumono i significati usuali delle parole, d') è l'equivalente di a). Dallo stesso punto di vista, b') non è equivalente ad a), e nemmeno una sua conseguenza logica. Tuttavia è una sua implicatura conversazionale[24]: se viene affermato a) e si suppone che l'affermazione sia appropriata al contesto e agli scopi comunicativi, allora si può ritenere che sia vero b'), perché in caso contrario l'affermazione a) resterebbe vera ma sarebbe inadeguata dal punto di vista comunicativo, comunque meno appropriata, ad esempio, di a'). In altre parole, la risposta viene ricavata dal fatto che sia stata usata a) invece di a'). Il legame che alcuni alunni riconoscono tra a) e b') non sta quindi nel contenuto di a) (quale ricavabile dall'interpretazione basata su grammatica e dizionario) ma nella sua relazione con il contesto, in particolare dall'ipotesi che lo scrivente stia comportandosi in modo cooperativo.
Considerare le funzioni dei testi e le loro proprietà globali significa anche tener conto dei contesti (spazio, tempo, partecipanti, ruoli, scopi, …) in cui i testi sono prodotti o interpretati. Una classe ampia di difficoltà riguarda il passaggio fra testi prodotti in conformità agli usi matematici e testi prodotti in base all'esigenza di comunicare e operare in altri contesti, come quelli quotidiani. In molti casi gli studenti non si rendono conto del passaggio da un tipo di uso all'altro (ciascuno con i propri scopi e le proprie forme espressive), e applicano modi espressivi tipici dello stile colloquiale in ambito matematico, con risultati insoddisfacenti. Il quadro teorico dovrà quindi essere in grado di individuare le differenze rilevanti fra i diversi tipi di uso del linguaggio. Se nell'interpretare un testo vengono, come di fatto accade, utilizzati riferimenti alla sua adeguatezza, questo mette inevitabilmente in gioco i ruoli delle persone che prendono parte allo scambio, in quanto l'adeguatezza del testo dipende evidentemente dai partecipanti allo scambio. La rappresentazione di idee matematiche, sistemate o in formazione, è praticata all'interno di comunità umane; i linguaggi devono quindi svolgere anche funzioni tipiche dell'interazione fra umani, ad esempio per intrattenere le relazioni interpersonali. Anche queste ultime funzioni divergono abbastanza nettamente rispetto a quelle legate alla rappresentazione delle conoscenze matematiche e al trattamento. Questa divergenza di funzioni si manifesta continuamente nella pratica didattica, per cui usi adeguati rispetto alle esigenze matematiche (come chiamare 'rettangolo' un quadrato o affermare che 2 è minore o uguale di 1000), possono risultare inadeguati rispetto a quelle colloquiali.

[24] Un'*implicatura* è quella parte di informazione ricavabile da un testo che non deriva dal suo contenuto proposizionale ma dall'ipotesi che il testo sia adeguato al contesto; per maggiori informazioni vedere il glossario.

Se si intende sviluppare un'analisi del linguaggio matematico che non si focalizzi soltanto su aspetti come il lessico o l'uso delle lettere, ma prenda in esame il suo funzionamento nei contesti rilevanti per l'educazione matematica è necessario adottare strumenti tipici della *pragmatica*, cioè della sottodisciplina della semiotica che studia le relazioni fra i sistemi di segni e i loro usi. In particolare si sono rivelate utili idee e costruzioni della *linguistica funzionale,* che è l'orientamento che considera le forme linguistiche alla luce delle funzioni che svolgono.
L'idea di utilizzare idee della pragmatica per interpretare difficoltà legate al linguaggio matematico non è nuova anche se i risultati sono poco noti. Vediamo un esempio.
Un filone di ricerca abbastanza popolare consiste nei tentativi di spiegare gli errori nell'interpretazione di frasi condizionali. Molti soggetti, di diversi livelli di età e di competenza matematica si trovano a disagio davanti a costruzioni condizionali, del tipo "Se A allora B" nei casi in cui A è falsa o B è vera indipendentemente da A, o comunque in assenza di chiari legami semantici tra A e B.
Come è noto, l'interpretazione matematica di "Se A allora B" (in simboli "$A\Rightarrow B$") è quella vero-funzionale determinata dalle tavole di verità, con le interpretazioni ovvie dei simboli v ('vero') e f ('falso').

A	B	$A\Rightarrow B$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

In base a questa interpretazione, di ciascun enunciato viene presa in esame soltanto la verità o falsità, in funzione delle verità o falsità degli enunciati che lo compongono.
Diversi ricercatori[25] hanno proposto ipotesi per spiegare le difficoltà menzionate sopra. La spiegazione per cui i soggetti interpretano "Se A allora B" come se fosse "A se e solo se B" ha goduto di una certa popolarità in passato. Un'analisi delle difficoltà che tenga conto dei contesti in cui queste si verificano mette in luce l'inutilità delle proposte di interpretazioni vero-funzionali alternative di enunciati la cui adeguatezza è inevitabilmente valutata in base al contesto. Il rifiuto di molti soggetti verso alcuni esempi di enunciati condizionali non è probabilmente tanto un'affermazione della loro falsità quanto l'espressione di dubbi sulla loro adeguatezza in relazione al contesto. A questo proposito è illuminante l'interpretazione di Rumain *et al.* (1983), che attribuisce le anomalie nell'interpretazione di frasi condizionali all'applicazione di *schemi conversazionali*, cioè di modelli di interazione verbale regolati in base al Principio di Cooperazione di Grice (1975), discusso nel seguito, piuttosto che in base alla semantica vero-funzionale basata sulle tavole di verità. Idee analoghe sono state utilizzate, in diversi contesti, da Trognon (1997) e Jean Caron (1979, 1997)[26]. Recentemente, anche Sfard e Radford hanno utilizzato idee e costruzioni della pragmatica in relazione all'apprendimento matematico. In particolare Sfard (2000b) ha utilizzato strumenti di analisi testuale di tipo pragmatico (come l'analisi focale) per identificare alcuni passaggi della transizione fra processo e oggetto. Radford (2000) fa riferimento all'uso di riferimenti deittici[27] nei processi di astrazione relativi alla soluzione di alcuni problemi da parte di alunni della fascia 11-14. Lo stesso autore (2002) utilizza inoltre strumenti di analisi testuale per interpretare le difficoltà da parte di alunni di scuola primaria nel passaggio da testi verbali a equazioni che rappresentano le relazioni aritmetiche descritte nelle storie.
Inoltre, in educazione matematica è fondamentale non solo la rappresentazione di idee in quanto prodotti stabili e adeguatamente sistemati, ma anche quella di idee provvisorie, in formazione, come supporto al pensiero e ai processi di comunicazione. Come vedremo, queste due situazioni richiedono risorse linguistiche diverse, e quindi anche la consapevolezza metalinguistica per passare da un tipo di linguaggio all'altro.

---

[25] Questo è un tema ampiamente discusso in letteratura, dai lavori classici di O'Brien *et al.*(1971) al recente lavoro di Hoyles & Küchemann (2002).

[26] Il volume edito da Bernicot *et al.* (1997) contiene diversi saggi sulle influenze degli schemi conversazionali nei processi di comunicazione e cognitivi.

[27] Un riferimento deittico richiede, per essere interpretato, conoscenze sul contesto di situazione (spazio, tempo, partecipanti, …) in cui il testo è stato prodotto. Le parole usate per realizzare tale riferimento (e.g., 'questo', 'oggi', 'tu') sono dette *indicali*. Lo studio dei riferimenti deittici è un classico tema di ricerca della pragmatica.

4. Quadro teorico

Inizio con qualche chiarimento terminologico. La *semiotica* è la disciplina che studia tutti i sistemi di segni, quelli che sono lingue e quelli che non lo sono. La *linguistica* studia le lingue, cioè i sistemi semiotici umani, storicamente determinati, dotati di caratteristiche speciali[28]. Come anticipato, questo quadro teorico utilizza diversi strumenti della pragmatica e della linguistica funzionale.

Linee generali

I temi classici della pragmatica sono gli *indicali*, gli *atti linguistici*, la *cooperazione comunicativa*. Si dà il caso che tutti questi temi siano collegati a punti critici della ricerca sull'apprendimento matematico. Mettere in luce tali collegamenti costituisce un'ulteriore motivazione per l'interesse nei confronti della pragmatica.

Indicali

Il passaggio da un testo verbale a un'equazione algebrica crea diverse difficoltà che sono state ampiamente studiate dalla ricerca sull'apprendimento matematico[29]. Fra i fenomeni *analgebrici* studiati da H.Bloedy-Vinner ve ne sono alcuni che dipendono dall'attribuire impropriamente funzioni di indicali (deittiche) alle lettere utilizzate nella messa in equazione. Vediamo un esempio tratto dallo studio di Bloedy-Vinner (1996); la traduzione è mia. Il campione era costituito da studenti dei corsi di preparazione all'università. Agli studenti era richiesto di scrivere equazioni che traducessero il problema ma non di risolverle.

> **Problema** Prima della partita Tal aveva il triplo delle bilie di Gadi. Durante la partita Tal ha perso metà delle sue bilie a favore di Gadi, e alla fine il numero delle bilie di Gadi supera di 12 il numero di bilie di Tal.

Le relazioni espresse (esplicitamente o implicitamente) dal problema sono:

(a) Prima della partita Tal aveva il triplo delle bilie di Gadi.
(b) Tal ha perso metà delle sue bilie.
(c) Gadi ha vinto metà delle bilie di Tal.
(d) Alla fine il numero delle bilie di Gadi supera di 12 il numero di bilie di Tal.

Tra i diversi comportamenti degni di nota (fra cui gli errori di inversione), l'autrice rileva anche il seguente:

> In 19 risposte si è rivelata una nuova forma di errore analgebrico: una lettera o un'espressione denotano il numero di bilie di un bambino, e sono pensate come se cambiassero con l'evoluzione della storia, senza eseguire alcuna operazione algebrica su di esse. Le stesse lettere sono usate per tradurre (a) e (d), mentre (b) e (c) sono pensate come se 'accadessero automaticamente', magari scrivendo le parole 'prima' e 'dopo' vicino alle equazioni.

Questo può essere spiegato anche in chiave linguistica osservando che nel linguaggio verbale, com'è ovvio, gli indicali vengono aggiornati automaticamente al variare del contesto. Quindi un'espressione come 'il numero delle bilie di Tal' (che è un indicale in quanto la sua denotazione dipende dal tempo in cui è prodotta, oltre che da Tal) è adeguata a rappresentare il numero delle bilie possedute da Tal sia prima della partita (36) sia dopo la partita (18). L'espressione rimane invariata, ma la sua denotazione cambia. Lo stesso non accade per le lettere nel simbolismo algebrico. Se, per mettere in equazione la relazione iniziale del problema, il termine 'il numero delle bilie di Tal' viene rappresentato da una lettera, supponiamo x, lo stesso termine alla fine della partita non può essere rappresentato da x, ma è necessario aggiornare 'manualmente' la rappresentazione e usare $\frac{x}{2}$. Questa esigenza è determinata dalla semantica dei linguaggi del I ordine (quelli studiati dalla logica matematica), per i quali l'interpretazione di una lettera non dipende da parametri contestuali, come il tempo.

In questo senso, il linguaggio algebrico è, a rigore, sprovvisto di indicali. L'uso informale di lettere può far ritenere impropriamente che una variabile abbia un funzionamento simile a quello di un indicale[30].

---

[28] Per dettagli si veda il glossario alle voci *lingua* e *semiotica*.

[29] Uno degli temi più discussi è il cosiddetto 'reversal error' (errore di inversione). Per maggiori informazioni e riferimenti bibliografici si veda il lavoro di Pawley e Cooper (1997), che contiene una rassegna sul tema, oltre al già citato Radford (2002).

[30] Il ruolo del linguaggio nella transizione fra aritmetica e algebra è stato studiato anche da Malara & Navarra (2003a,b), a cui si rimanda anche per una più ampia bibliografia su quel tema. Idee didattiche collegate sono state illustrate da Navarra & Giacomin (2003a,b,c,d,e,f).

Proposizioni e atti linguistici

La distinzione fra *proposizione* e *atto linguistico* è dovuta ad Austin (1962) e prende le mosse dalla constatazione che esistono modi (come l'imperativo) ed espressioni verbali (come 'giuro', 'voglio', 'pagherò') che sono equivalenti ad azioni, piuttosto che a proposizioni vere o false. Questo vale anche per frasi dichiarative: una frase come "piove" a seconda delle circostanze può essere la constatazione pura e semplice di uno stato di cose o avere un significato molto vicino a "prendi l'ombrello!". Austin definisce proposizione quell'aspetto del significato di una frase che consente di identificare i referenti e stabilire se la frase è vera o falsa. Un atto linguistico riguarda anche le frasi non dichiarative (interiezioni, ordini, domande, ...) e include il fatto di produrre proprio quella frase (o quel testo) in quelle circostanze; oltre a una proposizione esprime quindi atteggiamenti, convinzioni, impegni, azioni del parlante (*illocuzione*) e cerca di modificare atteggiamenti, convinzioni, comportamenti del ricevente (*perlocuzione*).

In matematica capita spesso che costruzioni definite come proposizioni svolgano le funzioni di atti linguistici.

Ad esempio, nei corsi di Logica Matematica, ma anche in molti libri di testo di scuola secondaria, il connettivo '$\Rightarrow$' viene usualmente introdotto attraverso la sua tavola di verità (riportata nella precedente sezione) o attraverso descrizioni verbali del tipo:

> Se A, B sono proposizioni allora $A \Rightarrow B$ è una proposizione che è vera nei casi in cui A è falsa oppure B è vera.

Così si è definita una proposizione (logici e linguisti usano lo stesso termine non casualmente). Ma quando un insegnante scrive alla lavagna '$A \Rightarrow B$' molto spesso non si limita a rappresentare una proposizione ma pratica un atto linguistico, con il quale esprime la propria convinzione che la proposizione descritta da '$A \Rightarrow B$' sia vera e che sia rilevante ai fini del ruolo che sta svolgendo (illocuzione) e cerca di convincere gli studenti di tutto questo (perlocuzione). In altre parole, il suo scopo non è rappresentare un nuovo enunciato costruito a partire da A e B, ma esprimere (le sue convinzioni su) una relazione fra gli enunciati A e B.

Altro esempio: in molti testi di matematica è frequente trovare espressioni simboliche inserite all'interno di testi verbali con o senza virgolette. Consideriamo le frasi seguenti:

> "Cerchiamo le soluzioni dell'equazione $2x = 7$."
>
> "… se $x = 3{,}5$ allora $2x = 7$."

Nella prima occorrenza la scrittura $2x=7$ è la rappresentazione neutrale di una proposizione, e il testo non prende posizione sulla sua verità, mentre nel secondo caso la scrittura assume il valore di atto linguistico, con illocuzione (l'autore del testo è convinto che, se x=3,5, $2x$ è davvero uguale a 7) e perlocuzione (l'autore cerca di convincere della stessa cosa gli studenti). Nel primo caso '=' è citato come un simbolo di un linguaggio del I ordine, mentre nel secondo fa le veci di un verbo della lingua italiana. Nell'esempio riportato, la differenza di funzioni tra le due espressioni non è marcata se non dall'apposizione 'equazione' nella prima occorrenza.

In questi esempi la distinzione fra proposizione e atto linguistico è collegata a quella fra linguaggio e metalinguaggio. Se linguaggio e metalinguaggio sono tenuti separati, allora gli enunciati matematici (e.g., le formule dell'aritmetica o dell'algebra) possono essere trattati come proposizioni lasciando ai commenti metalinguistici le funzioni di illocuzione e perlocuzione. Se invece si utilizza, come spesso accade, un solo piano linguistico, allora è inevitabile che gli enunciati matematici vengano caricati di aspetti non proposizionali.

Cooperazione e implicature

In questo quadro si assume che i testi vengono interpretati non solo scomponendo i testi in base alle regole della grammatica e applicando le proprie conoscenze lessicali (il *dizionario*) ma anche sviluppando *inferenze* con cui il ricevente si sforza di esplicitare le informazioni implicite nel testo, utilizzando le sue conoscenze (l'*enciclopedia*)[31], ma anche le sue convinzioni, sull'emittente, sull'argomento del messaggio, sul contesto in cui è stato prodotto e facendosi influenzare dalle emozioni che il testo gli suscita. Vediamo come esempio un brano tratto da un libro di matematica[32], riportato testualmente.

> Un numero naturale n può essere espresso in una base $\beta>1$, $\beta\in\mathbb{N}$, nella forma
>
> $$n = c_k\beta^k + c_{k-1}\beta^{k-1} + \ldots + c_1 b + c_0,$$

---

[31] A questo proposito si veda Eco (1984). Lo stesso autore ha prodotto diversi studi sulla cooperazione interpretativa nei testi narrativi, come ad esempio (1979).

[32] Il brano è tratto da Naldi *et al.* (2003, p.5).

> dove c_i sono interi compresi fra 0 e $\beta-1$, l'indice i sta ad indicare la posizione (la rappresentazione sarà unica se supponiamo $c_k \neq 0$). La base usualmente adottata è la base $\beta=10$ e le cifre c_i, $i = 0, ..., k$ sono dette cifre decimali.
> I numeri naturali possono essere rappresentati geometricamente come punti su una retta. A tale scopo si fissa un punto O sulla retta, che associeremo al numero 0, e un secondo punto P diverso da O che associeremo al valore 1. Il verso di percorrenza positivo della retta è quello che porta dal punto O al punto P, mentre la lunghezza del segmento OP, che indicheremo con $\overline{OP}$, viene presa come unità di misura. Riportando i "multipli" del segmento OP sulla retta, secondo il verso positivo, otteniamo i numeri naturali.

Come per gran parte dei testi matematici, i lettori hanno molto lavoro da fare per interpretare questo brano. È possibile che la scrittura simbolica della seconda riga (non preceduta da alcun esempio) susciti in loro emozioni diverse, in molti casi negative. Come spesso accade, questo testo è pieno di passaggi la cui comprensione richiede qualche ragionamento o l'applicazione di schemi basati sull'esperienza. Si pensi ad esempio a passaggi come "... in una base $\beta>1$, $\beta\in\mathbb{N}$ ..." o "... è la base $\beta=10$ e le cifre c_i, $i = 0, ..., k$ sono ..." dove occorre capire, ad esempio, che la base è β, non "$\beta>1$" o "$\beta\in\mathbb{N}$", e dove la scrittura "c_i, $i = 0, ..., k$" potrebbe creare serî ostacoli a un non matematico.
Inoltre, inevitabilmente, non tutto è espresso in forma esplicita: ad esempio non è scritto da nessuna parte che P sta sulla stessa retta in cui c'è già O.
I lettori potrebbero poi avere dubbi sulla rilevanza di alcune frasi, come ad esempio, "Il verso di percorrenza positivo della retta è quello che porta dal punto O al punto P ..." la cui funzione si rivela soltanto nella frase finale.
Anche le ragioni per cui si introduce la notazione

$$\overline{OP}$$

non sono immediatamente evidenti, e a una lettura superficiale potrebbe sfuggire la differenza rispetto a '*OP*'.
Una lettura troppo puntigliosa (poco cooperativa!) potrebbe suggerire che la scrittura "La base usualmente adottata è la base $\beta=10$" non precisa quale sia la base.
La situazione è quindi la seguente: le notazioni simboliche della matematica (dal formalismo dell'aritmetica a quello dell'algebra o della logica matematica) sono interpretabili attraverso grammatica e dizionario e, in linea di principio, non dovrebbero richiedere molte inferenze; d'altra parte, nella pratica didattica, come in tutti i consorzi umani, qualunque testo, anche simbolico, è destinato a interagire col contesto, e in particolare a innescare inferenze; inoltre, la produzione di testi assolutamente privi di ambiguità è illusoria. Per tutte queste ragioni è opportuno guardare ai processi di interpretazione in matematica come processi attivi e cooperativi, anche per quanto riguarda la componente simbolica.
Anche se siamo abituati a parlare di ambiguità come se fosse una proprietà assoluta dei testi, dobbiamo renderci conto che essa dipende anche dal contesto, e in particolare dagli interlocutori. Una formula espressa in un linguaggio del primo ordine con indicazione precisa (in un metalinguaggio adeguato) di un'interpretazione dei simboli specifici è forse priva di ambiguità per interlocutori esperti in materia, ma può risultare difficilmente interpretabile, e quindi ambigua, per un profano. La cooperazione e le inferenze che è lecito attendersi dai destinatari variano quindi a seconda delle persone.
Testi che fino a pochi anni fa risultavano non ambigui per gli studenti di allora, sembrano creare problemi agli studenti di oggi. Qui non è rilevante stabilire chi ha ragione e chi ha torto, o se il testo originario fosse o no accurato, ma notare che inferenze pacifiche per alcuni gruppi di studenti, non lo sono per altri. È evidente che nel frattempo le enciclopedie degli studenti potrebbero essere cambiate e con loro le inferenze praticabili, oppure che potrebbero essere cambiati convinzioni e atteggiamenti degli studenti nei confronti della matematica o del linguaggio.

In qualunque scambio comunicativo sono necessari dei criteri per selezionare i messaggi che vengono scambiati. Nella maggiore parte delle situazioni le affermazioni scambiate non sono scelte a caso né sono caratterizzate solo dall'essere vere o false, ma anche (e soprattutto) dall'essere opportune o inopportune. Gli studiosi di pragmatica hanno proposto diverse risposte, dal principio di cooperazione di Grice (1975) a quello di rilevanza di Sperber e Wilson (1986) alle regole di cortesia studiate da diversi autori. In base al principio di cooperazione di Grice, ad esempio, ogni scambio comunicativo è un processo collaborativo, rivolto a degli scopi di solito condivisi, a cui ciascuno porta il suo contributo. Grice identifica 4 massime: *quantità* (la quantità di informazione scambiata deve essere proporzionata alla situazione), *qualità* (le affermazioni scambiate devono avere un grado di verità e di affidabilità proporzionato alla situazione), *relazione* (le affermazioni scambiate devono avere una certo grado di pertinenza con l'oggetto dello scambio) e *modo* (i modi espressivi utilizzati devono essere adeguati agli scopi dello scambio). Sperber e Wilson unificano le massime di Grice in un unico principio, quello di *rilevanza*, in base al quale i messaggi scambiati devono essere il più possibile rilevanti per gli scopi dello scambio. Nel seguito di questa presentazione vedremo che alcuni registri matematici, come altri registri evoluti, spesso violano principi di cooperazione e rilevanza usualmente adottati nei registri colloquiali.

Va anche osservato che molti scambi fra studenti e insegnanti (come un'interrogazione o un compito scritto) tendono a essere cooperativi, in modo anche ambiguo: lo studente che deve rispondere a una domanda è consapevole che l'insegnante conosce già la risposta e può essere portato ad aspettarsi un certo grado di cooperazione, che normalmente viene accordato. L'attenzione che presterà all'adeguatezza linguistica della sua risposta sarà probabilmente limitata da questa attesa. Supponiamo che davanti a un problema sia lo studente sia l'insegnante abbiano in mente la soluzione, ma che questa non venga descritta adeguatamente nella risposta dello studente. In alcuni casi l'insegnante potrebbe non rilevare l'inadeguatezza linguistica della risposta, dato che questa realizza comunque i propri scopi comunicativi. Se invece l'insegnante rilevasse l'inadeguatezza, lo studente potrebbe attribuire il suo insuccesso non alle proprie carenze linguistiche (sulle quali ha la possibilità di intervenire) ma alla scarsa cooperazione dell'interlocutore (sulla quale non può normalmente intervenire).

In generale, un insegnante, davanti a un testo, scritto o orale, prodotto da uno studente, potrebbe, per motivi diversi, scegliere tra le diverse interpretazioni possibili quella più favorevole, contibuendo così involontariamente a rafforzare la convinzione di cui sopra.

Per questo è opportuno, fin dall'inizio del percorso scolastico, inventare situazioni in cui l'esigenza di produrre testi adeguati emerga dai vincoli oggettivi imposti dalla situazione comunicativa o dalle modalità di rappresentazione e non sia subita come il capriccio di una persona.
Chi interpreta un messaggio normalmente suppone che questo rispetti criteri di cooperazione o rilevanza. Se qualcuno, in una conversazione, afferma che una figura è un rettangolo, nella maggior parte dei casi per il ricevente è abbastanza naturale supporre che l'affermazione sia rilevante e comunichi la quantità di informazione adeguata, e che quindi, anche se non c'è alcun riferimento esplicito a questo, la figura non sia un quadrato. Quest'ultima conclusione è un'*implicatura conversazionale*. Un'implicatura conversazionale è quella parte di informazione ricavabile da un testo che non deriva dal suo contenuto proposizionale ma piuttosto dall'ipotesi che il testo sia adeguato al contesto. Nel nostro caso, se la figura fosse un quadrato, la parola 'quadrato' sarebbe più adeguata di 'rettangolo'. Quindi se chi ha prodotto il testo ha usato 'rettangolo' è lecito attendersi che ci sia un motivo, e il primo che viene in mente (ma non l'unico) è che il quadrilatero non sia un quadrato.
Un'implicatura non ha il grado di certezza di una deduzione, in quanto è possibile pensare ad altre situazioni che rendono rilevante la frase citata, o anche che i principi di cooperazione o di rilevanza siano violati, il che accade spesso in matematica, dando origine a implicature improprie. Tuttavia, le implicature sono forme di inferenza che utilizziamo continuamente nei nostri processi di comunicazione. Molti docenti sono diventati esperti in contorsionismi verbali per disinnescare implicature nei testi dei compiti scritti che propongono agli studenti. Da una frase come

> "Determinate tutte le radici dell'equazione …"

non segue logicamente che qualche radice debba esistere (l'insieme delle radici potrebbe essere vuoto). Tuttavia l'esistenza di almeno una radice è un'implicatura che molti studenti si sentono di trarre, in molti casi a ragione. L'uso del plurale ('radici') potrebbe addirittura suggerire che le radici siano più di una. Anche la versione più raffinata

> "Determinate, se ne esistono, tutte le radici dell'equazione …"

può dare origine alle stesse implicature, seppur con diversa dipendenza dal contesto: se le radici non esistessero, in molte situazioni il problema sarebbe inadeguato per gli scopi di valutazione per cui è stato assegnato. Anche questo dipende dalle persone: se un professore si divertisse a assegnare problemi le cui soluzioni sono in contraddizione con un certo insieme di implicature, molto probabilmente i suoi studenti dopo un'adeguata sperimentazione smetterebbero di applicarle, e ne applicherebbero altre.

Le funzioni del linguaggio

Mentre le idee discusse nei tre punti precedenti risalgono agli anni '60 e sono ormai classiche, quelle che verranno illustrate in questo punto sono di alcuni anni più recenti e fanno riferimento a un orientamento specifico all'interno della pragmatica, la *linguistica funzionale*.

La linguistica funzionale, legata al nome di M.A.K.Halliday, mette al centro le funzioni dei linguaggi rispetto alle forme. Nella mia ricerca gli strumenti della linguistica funzionale si sono rilevati decisivi per rispondere all'esigenza di descrivere il linguaggio matematico in modo da spiegare il suo funzionamento in contesto scolastico (che coinvolge quindi *persone*) tenendo però conto della sua specificità (in quanto è strettamente legato a esigenze di rappresentazione e trattamento tipiche della matematica e non di altri campi, come la giurisprudenza o la letteratura[33]). Le differenze fra il linguaggio quotidiano e quello matematico, al di là di riferimenti rituali e un po' vaghi al rigore o al formalismo del secondo, sono in molti casi riconducibili alle diverse funzioni che essi sono chiamati a esercitare, e spiegabili in modo convincente soltanto in termini di queste.
Halliday attribuisce ai linguaggi 3 funzioni: quella *ideazionale* (in altri orientamenti denominata logica, proposizionale, transazionale, ecc.), che riguarda l'identificazione dei riferimenti e la verità o la falsità delle affermazioni; quella *interpersonale* che riguarda le reciproche influenze fra i partecipanti allo scambio; quella *testuale* che riguarda la costruzione dei testi. Un approccio funzionalista deve prendere in considerazione non solo singole parole o frasi, ma testi, cioè produzioni orali o scritte di estensione anche maggiore di una frase. Per analizzare i testi e studiare le funzioni dei linguaggi è necessaria un'analisi dettagliata dei *contesti* in cui i testi sono prodotti o interpretati. In ambito linguistico il contesto non è qualcosa che esiste prima del e indipendentemente dal testo, ma testi e contesti si determinano reciprocamente. Fra i vari livelli di contesto vi è il *contesto di situazione*, relativo alle circostanze specifiche (spazio, tempo, partecipanti in quanto persone, …), il *contesto di testo* (o *co-testo*), relativo altre parti del testo in esame o eventualmente ad altri testi collegati, il *contesto di cultura*, relativo ai sistemi di convinzioni e conoscenze associati ai partecipanti allo scambio.

Registro

La costruzione che collega i testi ai contesti è il *registro*, che utilizzeremo ampiamente nel corso della libro.
Un registro è una varietà linguistica basata sull'uso[34]. Questo significa che un individuo può adottare registri diversi in relazione alle diverse funzioni che il linguaggio è chiamato a svolgere. Un registro si forma per selezione delle risorse linguistiche disponibili a un soggetto, e quindi diversi registri sono determinati da diversi criteri di selezione fra le risorse linguistiche di un individuo. Un registro non è però soltanto un insieme di risorse linguistiche, ma è strettamente legato ai significati e al contesto. Più precisamente, è una costruzione che collega la situazione simultaneamente al *testo*, al sistema *linguistico* e al sistema sociale. La mia accezione è diversa da quella di Duval[35], per cui un registro è un sistema di rappresentazione semiotico, ma è conforme all'uso della linguistica in lingua inglese, di diversi libri di divulgazione o educazione linguistica in italiano (e.g., Altieri-Biagi, 1985; Dardano & Trifone, 1985) e alle definizioni adottate dai principali dizionari italiani (Devoto-Oli, Sabatini-Colucci). Situazioni come una chiacchierata fra amici, la stesura di un articolo scientifico o una lezione universitaria corrispondono usualmente a registri diversi, con diverse scelte riguardo a lessico, organizzazione dei testi, criteri di accettabilità degli stessi ecc..
L'idea di registro non è molto lontana da quella di *genere* (*genre*) dovuta a Bachtin (1986). Leckie-Tarry[36] confronta in modo approfondito le due nozioni, sostenendone la compatibilità. L'idea di registro è più orientata alle risorse linguistiche messe in gioco, mentre quella di genere è più orientata agli aspetti socio-culturali. Per questo non c'è corrispondenza 1-1 tra registri e generi: in uno stesso genere possono essere utilizzati diversi registri.
In questo quadro ha un certo rilievo la distinzione fra registri evoluti (o colti, in inglese *literate registers*) e registri colloquiali. Anche questa distinzione è di tipo funzionale: le stesse persone possono anche usare registri evoluti in alcuni contesti e registri colloquiali in altri. I registri evoluti sono quelli utilizzati nella comunicazione scientifica, giuridica, politica, letteraria, in buona parte della narrativa, molto spesso nelle conversazioni fra persone istruite ecc.. Il fatto che un registro sia evoluto non dipende strettamente dall'uso

---

[33] Si è purtroppo diffusa di recente la pratica di applicare alla matematica quadri teorici elaborati per altre discipline, di solito senza giustificazioni specifiche convincenti; un esempio è l'analisi dell'argomentazione in linguaggio 'naturale' sviluppata da Toulmin (Toulmin *et al.*, 1978), che a meno di ulteriori elaborazioni, non sembra in grado di rendere conto della specificità della matematica e del suo linguaggio.

[34] Un *dialetto* è invece una varietà linguistica basata sul parlante.

[35] 1995, p.21. Con questo non intendo criticare il quadro, estremamente interessante, illustrato da Duval ma solo proporre una diversa nomenclatura.

[36] (1995, pp.5-15)

di modalità stilistiche sofisticate, dal far riferimento a contenuti specialistici o dalla preparazione o dall'età dei partecipanti. Ad esempio, un gruppo di scolari di II elementare che stendono il rendiconto di un'attività comune possono benissimo usare un registro evoluto. Le caratteristiche linguistiche dei registri evoluti verranno discusse nella sezione dedicata al linguaggio matematico.
Naturalmente non è possibile dare una definizione rigorosa di registro evoluto: si potranno vedere esempi di registri decisamente evoluti, e altri di registri decisamente colloquiali ma il confine resta sfumato. Anche se si parla di registri più o meno evoluti, dati due registri, non sempre è possibile stabilire che uno dei due è più evoluto dell'altro. Le proprietà che caratterizzano i registri evoluti sono diverse e ciascuna può essere presente in misura maggiore o minore. Allo stesso modo, anche se la comunicazione scritta richiede e allo stesso tempo rende possibili registri più evoluti, non è detto che questi registri siano sempre più evoluti di quelli adottati nella comunicazione orale.
Uno dei punti centrali di questo quadro sarà proprio il confronto fra alcuni registri appartenenti al linguaggio matematico (che, come vedremo, sono prevalentemente registri evoluti) e i registri colloquiali, utilizzato per spiegare alcune delle difficoltà degli studenti.

Testi orali e testi scritti

In questa sezione si utilizzano contributi diversi per illustrare alcune differenze sul piano sia cognitivo sia strettamente linguistico fra i testi scritti e quelli orali.

Funzioni cognitive

Come osservato da Duval (2000) la differenza fra orale e scritto non riguarda soltanto l'organizzazione linguistica dei testi ma anche le loro funzioni cognitive. Un testo orale, dopo che è stato pronunciato, è accessibile, per il parlante come per chi ascolta, solo attraverso la memoria a breve termine[37]. L'espressione orale, nelle situazioni standard, non consente di riesaminare i testi già prodotti se non riproducendo degli altri testi che si ritengono identici o equivalenti. Chi riceve un testo orale, è costretto ad adeguarsi alla scansione temporale (ordine delle parole, pause ecc.) scelte dal parlante, e a interpretare le varie parti via via che si ricevono, modificando se necessario l'interpretazione. La lettura di un testo scritto è più libera, in quanto è possibile modificare l'ordine di scansione del testo e cogliere diverse caratteristiche del testo prima del completamento del processo (parole-chiave, conclusione ecc.), e rende anche possibile affrontare il testo nel suo complesso (anche in relazione al diverso funzionamento dell'occhio rispetto all'orecchio); questo consente spesso processi di interpretazione più selettivi.
Un testo scritto (ma molte di queste considerazioni valgono anche per le rappresentazioni figurali) consente di superare i limiti della memoria a breve e di tenere a disposizione una quantità di dati maggiore rispetto a quelli memorizzabili. Il significato di un testo può inoltre essere analizzato in relazione sia a ciò di cui si parla (*de re*) sia a come se ne parla (*de dicto*). Nel primo caso l'attenzione è focalizzata sui fatti descritti o evocati nel testo, nel secondo sul testo stesso, in relazione ai suoi scopi. Un analisi del secondo tipo è praticabile in modo sistematico e con efficacia solo nella forma scritta o figurale. In matematica, le analisi del secondo tipo sono richieste in continuazione. Se si vogliono discutere le proprietà di un testo (ad esempio, l'enunciato di un teorema), è quasi indispensabile avere il testo in forma scritta, così come se si vogliono discutere le proprietà di una figura o di un'immagine (ad esempio, una figura geometrica o il grafico di una funzione di variabile reale), è necessario disporre di una rappresentazione grafica. In breve, la scrittura (così come le rappresentazioni figurali) rende disponibili le funzioni di oggettivazione e di trattamento.
La funzione di oggettivazione fa riferimento al ruolo delle parole nella transizione da processo a oggetto. Nella storia della matematica come nell'apprendimento degli individui molte idee vengono interpretate dapprima come processi, e successivamente come oggetti. L'idea di numero per un bambino è inizialmente legata al processo del contare (che per un certo tempo è poco più di una sequenza di azioni) e solo in un secondo tempo diventa un oggetto indipendente da tale processo. Le rappresentazioni semiotiche possono giocare un ruolo in questa transizione. Ad esempio, la disponibilità al momento giusto di rappresentazioni adeguate per i numeri (e.g., rappresentazioni iconiche) può favorire la transizione verso un'idea di numero indipendente dai processi di conta. Le rappresentazioni possono anche essere utilizzate per rappresentare

---

[37] Naturalmente esistono i registratori, e talvolta possono essere usati come supporto all'analisi dei testi prodotti (come durante le prove di uno spettacolo o un'esercitazione in lingua straniera). Si può però assumere che in molte delle situazioni rilevanti per l'educazione matematica non vengano abitualmente usati come supporto all'espressione orale.

concetti ancora vaghi e non sistemati teoricamente. Nella storia della matematica questo è capitato spesso: ad esempio, nel XVI secolo, il matematico Girolamo Cardano usò espressioni come

$$\sqrt{-15}$$

nella soluzione di equazioni cubiche molto prima della sistemazione teorica dei numeri complessi.
Questo punto, su cui esiste una vasta letteratura, è evidentemente collegato alla discussione sui rapporti fra linguaggio e concetti svolto nella sezione 2.
Il fatto che vi siano funzioni dei linguaggi per le quali la forma scritta o grafica sono più indicate non toglie che la forma orale possa essere indispensabile per realizzare altre funzioni, né che le due forme possano integrarsi. Lo stretto legame fra l'espressione orale e il contesto spazio-temporale in cui è prodotta è un limite per certi aspetti ma una risorsa per altri. Il fatto di essere immersi nella situazione che si vuole descrivere (come quando dei bambini devono descrivere una configurazione di oggetti o la forma di un edificio) esonera dalla descrizione esatta di tutti i componenti (che possono essere indicati o descritti sommariamente, o lasciati impliciti) e consente di concentrarsi per il tempo necessario, sugli aspetti ritenuti focali. Se lo scambio procede efficacemente, l'informazione trascurata rimane in sospeso, se invece qualche interlocutore ha difficoltà di interpretazione, può chiedere precisazioni, integrare l'informazione o correggerla attraverso un processo di negoziazione, anche in base ai suoi interessi, alle informazioni che già possiede (che possono anche essere ignote al parlante), alle sue convinzioni sul tema e anche alle emozioni che prova. D'altra parte il parlante non sempre rende esplicito di primo acchito l'intero contenuto informativo che vuole comunicare. In molti casi dovrà, in via preliminare, attirare l'attenzione dell'ascoltatore, convincerlo che vale la pena di ascoltare, verificare conoscenze e convinzioni di questo in modo da adeguare il testo alla situazione. In qualche caso potrà addirittura lasciare frasi a metà, in attesa delle reazioni dell'interlocutore o degli sviluppi del proprio pensiero. Da questo punto di vista un testo troppo completo fin dall'inizio potrebbe addirittura risultare inadeguato, con informazioni inutili, che possono appesantire il testo o violare principi di cooperazione o di cortesia (ad esempio presupponendo che il ricevente ignori informazioni che invece possiede, o costringendolo a uno sforzo di comprensione troppo intenso).
Le differenze di funzioni fra testi orali e testi scritti si presta alla costruzione di percorsi didattici particolarmente efficaci dal punto di vista dei processi di astrazione.
Queste situazioni, di cui saranno illustrati alcuni esempi nella sezione 6, suggeriscono che il contesto non è di per sé un ostacolo, ma se sfruttato adeguatamente può favorire i processi di generalizzazione e astrazione. Questo rende particolarmente produttive le situazioni di interazione orale con la disponibilità condivisa di testi scritti o immagini, in quanto diviene possibile combinare le potenzialità dei due modi di rappresentazione.
L'espressione scritta non consente da sola di mettere in atto agevolmente processi di questo tipo. Essa richiede un controllo cognitivo maggiore, in quanto lo scritto, una volta completato, è direttamente accessibile da altri con scarse o nulle possibilità di negoziazione. Un testo scritto è accessibile anche a lettori che non condividono lo stesso contesto di situazione, quindi le descrizioni devono essere più precise e complete e senza troppi riferimenti deittici. Inoltre il passaggio alla forma scritta può richiedere una ristrutturazione dei significati in gioco, il che può risultare costoso sul piano cognitivo o bloccare ogni iniziativa. Duval distingue l'attività di scrittura (*écrire*) da quella di trascrizione (*transcrire*). Quest'ultima è una trasposizione modale di un testo orale che non ne modifica sostanzialmente il funzionamento cognitivo. Esistono infatti forme di rappresentazione scritta (come la stenografia, alcune forme di verbalizzazione, alcuni usi della posta elettronica o degli sms) che hanno un funzionamento cognitivo più simile all'espressione orale.

Caratteristiche linguistiche

Come abbiamo appena visto, le funzioni che possono essere attribuite al linguaggio nelle varie situazioni e modalità sono molto varie. Di conseguenza anche i registri adottati sono molto diversificati. Nella comunicazione orale si può andare da una conversazione fra amici, svolta in un registro colloquiale molto lontano da quelli evoluti, a una conferenza tenuta in un registro orale con molte caratteristiche tipiche dei registri scritti (ma non tutte!). Le differenze riguardano anche le modalità comunicative: una conversazione fra due persone sedute di fronte ha caratteristiche sia cognitive sia linguistiche diverse da una conversazione telefonica.

Anche nella comunicazione scritta le differenze di funzioni e di medium sono notevoli. Da un lato si può andare da una lista della spesa a un articolo scientifico, dagli appunti di una lezione a un romanzo pubblicato; dall'altro si può andare da testi manoscritti a testi scritti con il computer, da SMS a ipertesti. Molti insegnanti hanno sperimentato le forti differenze fra una lezione svolta utilizzando una lavagna con gesso, un proiettore di trasparenze o un proiettore da calcolatore.

Nel caso della lavagna, lo studente assiste alla costruzione del testo e alle eventuali integrazioni o correzioni, ed ha l’opportunità di rendersi conto di alcune scelte del docente (ad esempio di abbreviare o omettere alcune parole per mancanza di spazio). Nel caso della proiezione do trasparenti o da calcolatore il testo è generalmente già confezionato e lo studente è escluso dal processo di costruzione, con minori possibilità di rendersi conto delle ragioni di alcune scelte dettate dalla natura del mezzo di comunicazione: anche nella proiezione da calcolatore può essere necessario abbreviare dei testi per farli stare in una stessa schermata, o compiere scelte influenzate dalle caratteristiche tecniche del programma usato, oltre che dalle convinzioni del docente.

Nel primo caso, inoltre, il tempo che il docente usa per produrre il testo è anche a disposizione degli studenti per i loro processi di interpretazione (mettendo in atto inferenze ecc.). nel secondo caso questo tempo non è a disposizione degli studenti, e se il docente non rallenta deliberatamente l’esposizione, costoro possono non avere il tempo necessario per interpretare il testo, specie se per loro si rendano necessarie molte inferenze.

In conclusione, anche se non c’è un legame rigido fra le modalità di produzione del testo e i registri adottati, si può dire che i registri evoluti sono più adatti alla modalità scritta e quelli colloquiali a quella orale, ma si possono trovare facilmente numerose eccezioni.

Esempi

1) Il testo seguente proviene da un sussidiario di IV elementare[38].

   La “media punti a partita”, significa che Giorgio, **se avesse realizzato lo stesso numero di punti in ognuna delle partite giocate, avrebbe realizzato esattamente 19 punti a partita.** Questo fatto è però quasi certamente non vero: in alcune partite Giorgio potrebbe aver realizzato più di 19 punti, e in altre meno; in media, però, si dice che ha realizzato 19 punti a partita.

   La media è utile per confrontare situazioni diverse: se si vuole confrontare il rendimento di giocatori presenti in un numero diverso di partite, rispetto ai punti realizzati, occorre mettere a confronto le medie partita di ognuno di loro.

2) Il testo seguente proviene da un libro per la secondaria superiore.[39]

   Quando eseguiamo una misurazione facciamo ricorso necessariamente a strumenti fisici di misura. Abbiamo osservato che, di conseguenza, dobbiamo considerare sia l’errore dovuto allo strumento sia l’errore dovuto a chi esegue la misurazione.

   Per questo motivo spesso, quando si deve eseguire una misurazione di una grandezza fisica, si ripete più volte l’operazione e si prende come **misura attendibile** la *media aritmetica dei valori letti nelle varie misurazioni*. Dire che questa è una misura attendibile non significa assolutamente dire che rappresenta il “vero valore” della grandezza.

3) Il testo seguente è tratto da una relazione prodotta da alunni di IV elementare.

   Abbiamo ragionato sul sistema di Biagio che è sicuramente più breve, ma meno aderente al testo del problema e ci è sembrata più precisa l’impostazione di Francesca. Discutendo tra noi abbiamo capito che sia il metodo di Anna che quello di Francesca e Biagio fanno raggiungere la soluzione, però usare due incognite ci sembra più complicato. Per rispondere alla seconda domanda in classe sono emersi tre metodi diversi.

4) Il testo seguente è la risposta scritta da uno studente universitario a un problema di matematica.

   Dalle tavole di verità possiamo dedurre che quando il primo enunciato è uno, anche il secondo enunciato è uno; quindi il secondo è conseguenza logica del primo; il primo però non è conseguenza logica del secondo.

5) Il testo seguente è un estratto dalla sbobinatura di una spiegazione data da un docente universitario.

   Come fanno, per insegnare le operazioni in colonna, ad esempio le divisioni? Cioè, in colonna, va bé, non proprio in colonna, insomma, l’algoritmo scritto solito, tutto l’algoritmo viene spezzato in una serie di passaggi elementari … pensate anche solo alla somma e al prodotto, il prodotto … di un numero di tre cifre per un numero di … due cifre. Voi fate il prodotto in realtà cifra per cifra e per questo vi basta aver memorizzato le tabelline … e poi avete … un sistema … una … un’impalcatura per cui se uno è ordinato e sta attento non deve sapere altro … anche se … non capisce che cosa sta facendo … a voi forse non l’hanno detto perché la moltiplicazione si fa così, nelle divisioni molti arrivano a laurearsi in matematica che non sanno perché si abbassano le cifre … perché si abbassano le cifre, anche lì, si basa sulla divisione euclidea, essenzialmente.

[38] Olivieri, Castiglia, Bello (2003

[39] Maraschini, Palma (1987)

6) Il testo seguente è un estratto dalla sbobinatura di una discussione in classe[40].

Insegnante: "Emma, quante palline avremo nella base nella figura venti?"

Emma: "Venti"

I.: "E nell'altezza?"

Em.: "Diciannove"

I.: "Perché ne avremo diciannove in altezza Emma?"

Em.: "Perché in alto ce n'è sempre una in meno"

I.: "In meno rispetto a che cosa?"

Em.: "Rispetto alla base"

7) Il testo seguente è un estratto di una conversazione in treno fra tre interlocutrici, impiegate, colleghe di lavoro e utenti fisse di quel treno (denotate con *A*, *B*, *C*).

A (rivolta a *B*): Aha … non te l'ho ancora detto … mistero risolto!

B: Che?!

A: Ah, già, tu lunedì non c'eri … il fatto che mi danno meno di stipendio …

C (rivolta ad *A*): Lunedì c'era la Mimma …

A (rivolta a *C*): Sì, che dice che aveva il mal di testa … (rivolta a *B*) è che non mi fanno le detrazioni …

B (rivolta a *A*): Sei andata dalla commercialista?

A: No, macché … figurati … quella … mio marito, cioè no, vabé, il suo collega, quello che era al cinema a Natale, sì … la domenica dopo …, insomma, ha guardato lo statino e dice che non mi fanno tutte le detrazioni

C: Ah, le detrazioni, ma non le fanno neanche a me … quasi venti euro

Commenti agli esempi.

Questo commento fa riferimento alle sole caratteristiche linguistiche dei testi. Anche se possiamo riconoscere notevoli differenze tra di loro, sembra evidente che i registri adottati nei testi 1), 2), 3) sono registri evoluti. In tutti questi testi l'organizzazione sintattica è rigorosa[41] e la struttura dei periodi è relativamente complessa. Tutti questi testi sono scarsamente dipendenti dal contesto di situazione e sono accessibili anche per un lettore estraneo. Il testo 2) è estremamente sofisticato, con una sintassi molto ricca e una grande abbondanza di marcatori testuali ('necessariamente', 'di conseguenza', …, l'uso delle virgolette, del corsivo e del grassetto). Il testo 3) è più semplice del precedente ma presenta comunque un uso abbastanza sofisticato della sintassi, con predominio (anch'esso in relazione alle finalità del testo) di proposizioni causali. Il testo 4) pur adottando a tratti uno stile scolastico abbastanza formale ("possiamo dedurre") presenta alcuni usi tipici dei registri colloquiali orali: espressioni come "il primo enunciato è uno" sono chiaramente inaccurate: lo studente voleva (o avrebbe dovuto) dire "il valore di verità del primo enunciato è 1"; questa inaccuratezza è comune anche fra gli studenti che usano formule e scrivono, ad esempio, 'A=1' in luogo di $v(A)$=1. In questo caso non c'è l'esplicitazione del significato attraverso la sintassi o il lessico ma, come accade spesso negli scambi colloquiali, la semplice giustapposizione di un riferimento anaforico ('il primo enunciato'), che è il tema della frase, con il risultato di un calcolo ('1'), che svolge le funzioni del rema. I testi 5) e 6) sono testi orali con alcune caratteristiche tipiche dei registri evoluti. Il terreno degli scambi è tipicamente scolastico: in entrambi i casi la comunicazione avviene in situazioni scolastiche istituzionali (orario di lezione), istituzionali sono anche i ruoli dei partecipanti (docenti e allievi) e scolastici sono i domini semantici evocati nei due esempi (un problema di aritmetica nel primo, il problema dell'insegnamento delle operazioni aritmetiche nel secondo. Tuttavia la modalità orale modifica drasticamente due caratteristiche tipiche dei testi scritti evoluti: la pianificazione e la possibilità di intervento degli interlocutori ('feedback'). I testi orali non sono vincolati a una pianificazione accurata come quelli scritti, e possono essere aggiustati progressivamente in base alle reazioni esplicite degli interlocutori, come nell'esempio 6, o anche in assenza di reazioni esplicite, come nell'esempio 5, dove il parlante potrebbe comunque essere guidato da reazioni non verbali degli interlocutori (espressioni facciali, rumori di fondo, ecc.). Nell'esempio 5 il parlante continua ad aggiustare il testo e di rendere il significato più esplicito, anche in base alle esigenze della comunicazione in quel contesto e con quegli interlocutori. Ad esempio, dopo il riferimento alle 'operazioni in colonna' il parlante si rende conto che gli interlocutori potrebbero fraintendere nel caso della divisione e quindi cerca di legare il riferimento alle esperienze degli interlocutori,

[40] Questo esempio è parte di un'attività più ampiamente trattata nella sez.6.

[41] Questo naturalmente non esclude che ci possano essere delle improprietà, come nel caso del testo 1) che ne contiene un paio.

scoraggiandoli da intraprendere inferenze inutili. D'altra parte anche parole come 'memorizzato' forse non esprimono esattamente il pensiero del parlante, che tuttavia rinuncia a precisarle (riservandosi forse di farlo successivamente) per non appesantire troppo il discorso. La sintassi di questo brano è comunque piuttosto disinvolta. Anche nell'esempio 6) la sintassi non è ferrea: ad esempio, ciascuno dei due interlocutori (l'insegnante ed Emma) interviene quattro volte, ma degli otto interventi solo tre sono frasi con verbi. L'esempio 7 presenta un uso del linguaggio tipicamente colloquiale. La sintassi è molto rilassata, con, ad esempio, omissioni di verbi o di altre parti del discorso. L'organizzazione del testo è basata sullo schema *tema-rema* piuttosto che sulla sintassi. Il primo intervento di *A* ha quasi esclusivamente la funzione di attirare l'attenzione degli interlocutori definendo il tema e delimitandone la rilevanza: un'esclamazione rumorosa ("Aha"); una frase ("non te l'ho ancora detto") rivolta apparentemente a *B* ma il cui vero destinatario è *C*, con lo scopo di giustificare la rilevanza del tema (*C*, a differenza di *B*, era evidentemente al corrente della vicenda); un'esclamazione ("mistero risolto!") che ha la funzione di creare una certa attesa, mitigata da un po' d'ironia. Il testo è zeppo di riferimenti a persone e fatti (lunedì, Mimma, la commercialista, il cinema la domenica dopo Natale, alcune caratteristiche della retribuzione) che non sono esplicitati e si ritengono evidentemente noti a tutte le interlocutrici; un estraneo sarebbe in difficoltà a interpretarli. I gesti e le espressioni facciali delle interlocutrici giocano una funzione rilevante nello scambio, anche in relazione ai loro ruoli reciproci: *A* è evidentemente la chiacchierona del gruppo (mentre *C* è l'antagonista e *B* la novizia), gesticola molto e adotta espressioni facciali atte a enfatizzare quanto dice. *B* sembra poco interessata all'argomento e mantiene un atteggiamento di cortese attenzione, senza gesticolare. L'atteggiamento di *C* è simile, con qualche cenno di noia o di biasimo per l'esuberanza di *A* alternati a segni di interesse per le divagazioni. Il testo non ha evidentemente solo funzioni ideazionali: la retribuzione di *A* non è evidentemente una questione di capitale importanza: al di fuori della conversazione in treno probabilmente non verrebbe toccata, di certo non giustificherebbe, da sola, nemmeno una telefonata. Anche per questo il testo contiene diverse divagazioni, con informazioni irrilevanti rispetto al tema, come i riferimenti a Mimma e al suo mal di testa, l'accenno di biasimo nei confronti della commercialista, il riferimento al marito e al collega, con il connesso episodio del cinema. Tutto questo corrisponde allo scopo principale della conversazione, che è quello di far passare una mezz'ora di viaggio in treno in modo da mettere tutte le tre interlocutrici a proprio agio, parlando di cose note a tutte, meglio se abbastanza futili. È evidente che un testo di questo tipo si colloca, per caratteristiche strettamente linguistiche, agli antipodi rispetto a un testo scritto di matematica.

Linguaggio matematico

Per le esigenze teoriche delineate sopra, è necessaria una definizione ampia di linguaggio matematico. Per questo considero come appartenenti al linguaggio matematico testi verbali (orali o scritti) e rappresentazioni simboliche e figurali. In questa scelta è implicita la convinzione del fatto che le caratteristiche peculiari del linguaggio matematico non risiedono soltanto nella componente simbolica ma mettono in gioco tutte le componenti, in particolare quella verbale. Per ragioni analoghe è inoltre opportuno considerare tutti i registri che vengono utilizzati nel fare e comunicare matematica, a qualunque livello. A questo riguardo occorre precisare, come anche osservato da Morgan (1998, pp.1-3), che è illusorio proporsi di classificare i registri matematici in base a un insieme finito di proprietà. Una classificazione di questo tipo porterebbe probabilmente a escludere molti dei registri utilizzati da insegnanti e alunni in educazione matematica e che a noi interessano in modo particolare. Quindi per *linguaggio matematico* io intendo un sistema multimodale (che include testi verbali, espressioni simboliche e rappresentazioni figurali) e multivariato (che include un ampio spettro di registri).

Registri matematici

Con la definizione abbiamo deciso di considerare matematici un'ampia classe di registri, non necessariamente avanzati. È evidente che i registri utilizzati nel fare matematica, ad esempio, a livello di scuola elementare, presentano molte caratteristiche in comune con i registri utilizzati nelle altre discipline. Per rendere più evidenti le differenze, in questa sezione farò riferimento ai registri matematici che fanno un uso abbastanza ampio della conponente simbolica, come quelli utilizzati nel fare e comunicare matematica a partire dalla secondaria superiore. Un registro matematico avanzato include tutte le componenti finora considerate: verbale, simbolica e figurale.

Testi verbali ed espressioni simboliche

I rapporti fra la componente verbale e quella simbolica sono complessi ed è opportuno chiarirli dall'inizio. Secondo Granger (1979) ogni scienza richiede lo sviluppo di un proprio linguaggio specifico nel quale esprimere i propri risultati. Il linguaggio verbale non è destinato a scomparire ma ad assumere prevalentemente funzioni di metalinguaggio, incorporando le funzioni illocutorie e perlocutorie (o, per dirla con Halliday, interpersonali). Tuttavia la situazione non è così semplice perché la componente verbale in moltissimi casi e per motivi diversi deve inevitabilmente svolgere funzioni di sostituto e di parafrasi di quella simbolica. Vediamo alcuni esempi. I primi due sono tratti da un testo di scuola media[42], il terzo da un testo universitario. Il primo riguarda le equazioni:

> *Risolvere* un'equazione significa determinare, se esiste, quel numero che sostituito alla *x* rende vera l'uguaglianza.
>
> Possiamo facilmente verificare che
>
> $$5+x=9$$
>
> diventa vera solo quando alla *x* sostituiamo il numero 4; infatti:
>
> $$5+4=9$$
>
> Si dice allora che il numero 4 è la soluzione dell'equazione.

Il secondo esempio riguarda i quadrati:

> Si chiamano **quadrati perfetti** i numeri naturali la cui radice quadrata è un numero naturale. Sono, per esempio, quadrati perfetti i numeri:
>
> $$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ \ldots$$
>
> perché
>
> $$\sqrt{1}=1,\ \sqrt{4}=2,\ \sqrt{9}=3,\ \sqrt{16}=4,\ \sqrt{25}=5,\ \ldots$$
>
> Non sempre è facile stabilire se un numero è un quadrato perfetto, specie se si tratta di un numero molto grande. Esiste però un *criterio* che ci consente di riconoscere con certezza se un numero naturale è un quadrato perfetto. Per scoprirlo prendiamo in considerazione, per esempio, i numeri 12 e 20 scomposti in fattori primi:
>
> $$12=2^2\times 3 \qquad 20=5\times 2^2$$
>
> li eleviamo al quadrato:
>
> $12^2 = (2^2\times 3)^2 = (2^2)^2\times 3^2 = \mathbf{2^4\times 3^2 = 144}$
>
> $20^2 = (5\times 2^2)^2 = 5^2\times(2^2)^2 = \mathbf{5^2\times 2^4 = 400}$
>
> I numeri 144 e 400 sono sicuramente quadrati perfetti. Osservando gli *esponenti* dei loro fattori primi, notiamo che essi sono *tutti* numeri *pari*.

In questi testi le proprietà matematiche sono rappresentate sia con il linguaggio verbale sia con le formule. Nel primo brano la scrittura $5+x=9$ è inserita come proposizione, senza che gli autori prendano posizione sulla sua verità ("… diventa vera solo quando …") e con il linguaggio verbale che svolge funzioni prevalentemente metalinguistiche, mentre appena due righe dopo la scrittura 5+4=9 è un atto linguistico, in quanto gli autori sono evidentemente convinti della sua verità, senza la necessità di commenti metalinguistici. In questo brano è degna di nota, dal punto di vista linguistico, anche l'implicatura contenuta nella definizione iniziale: l'uso di 'quel' sembra presupporre che la soluzione sia unica. In questo caso gli autori si sono preoccupati di disinnescare l'implicatura legata all'esistenza di una soluzione ("… se esiste …") ma non quella legata all'unicità. Anche nel secondo brano il linguaggio verbale svolge sia funzioni metalinguistiche ("… eleviamo …", "… notiamo …") sia di rappresentazione di proprietà matematiche ("…sono tutti numeri pari."). Anche la maggior parte delle uguaglianze del secondo brano hanno la funzione di atti linguistici. È di rilievo l'uso, estremamente diffuso e già segnalato in precedenza, di citare formule come se fossero termini ("… prendiamo in considerazione, per esempio, i numeri 12 e 20 scomposti in fattori primi: $12=2^2\times 3$, …), dove la scrittura $12=2^2\times 3$, a rigore, rappresenta una formula e non un numero. Questo si collega al tema, ampiamente discusso fra i ricercatori in educazione matematica, dell'interpretazione del simbolo '=', e anche al fatto che nei testi verbali esistono funzioni (come quelle degli attributi) non immediatamente traducibili nella notazione simbolica.

Il terzo brano consiste nella parte iniziale di una dimostrazione del teorema di Weierstrass[43].

---

[42] Aicardi & Zarattini (1994)

[43] Naldi *et al.* (2003, p.99)

Mostriamo che f è limitata superiormente (in modo analogo si dimostra per la limitazione inferiore). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia I_n l'insieme dei punti x tali che $f(x)>n$,

$$I_n = \{x \in [a,b]: \ f(x)>n\}.$$

Supponiamo che $I_n \neq \emptyset$ per ogni n. L'insieme I_n è limitato inferiormente perché $x \geq a$, segue che esiste l'estremo inferiore $a_n = \inf(I_n)$. ...

In questo testo, che è simile a molti altri, compaiono espressioni interamente simboliche, espressioni verbali che esprimono proprietà matematiche (come ad esempio "f è limitata superiormente"), espressioni miste con la stessa funzione (come ad esempio "$I_n \neq \emptyset$ per ogni n") ed espressioni verbali con funzioni metalinguistiche (come ad esempio "Mostriamo che ...", "in modo analogo si dimostra per ...", "Supponiamo che ..."). Inoltre, alcune delle espressioni simboliche presenti, in quanto inserite nel corpo del testo, svolgono la funzione di atti linguistici (ad esempio, l'espressione "$x \geq a$" equivale a " $x \geq a$ è vera").

Da queste considerazioni emerge che, in una lezione o un testo di matematica a livello di secondaria superiore o universitario, la distinzione di ruoli tra la componente simbolica e quella verbale è tutt'altro che netta. Espressioni simboliche possono assumere funzioni illocutorie, mentre il linguaggio verbale può rappresentare idee e relazioni matematiche in forma scritta o orale (anche come traduzione di espressioni simboliche) ma anche commentarle, marcarne l'organizzazione logica (ipotesi, tesi, dato, …) e quella testuale (tema, focus, coesione, …), esprimere le convinzioni del parlante sul tema (rilevanza di quanto viene comunicato, scopi, adeguatezza del messaggio rispetto a questi, …) e influenzare in modo corrispondente quelle dell'uditorio. Il fatto che la componente verbale possa surrogare quella simbolica fa sì che nei registri matematici avanzati essa venga usata prendendo quest'ultima come modello (si pensi all'uso vero-funzionale dei connettivi, anche espressi a parole, e all'uso formale di definizioni anche verbali). Per questo quando parlo delle caratteristiche linguistiche della componente simbolica, mi riferisco anche a quegli usi della componente verbale che si conformano a essa.

La diversità nelle funzioni svolte dalla componente verbale fa sì che, a volte in uno stesso testo, le stesse parole vengano utilizzate con significati o in base a criteri diversi. Questo accade per esempio, quando si illustra un'espressione che contiene occorrenze di un connettivo (ad esempio la 'e') la cui interpretazione è vero-funzionale (ad esempio, nella definizione dell'intersezione di due insiemi), oppure quando una voce del lessico matematico assume un diverso significato negli usi quotidiani. Vediamo un altro esempio[44].

DEFINIZIONE L'*intersezione* dei due insiemi A e B, e si scrive $A \cap B$, è l'insieme $\{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

L'intersezione di A e B è così l'insieme degli elementi che appartengono sia ad A che a B. Vediamo quali sono le intersezioni degli insiemi visti sopra per illustrare l'unione. Per un qualunque insieme A, è $A \cap A = A$, e anzi se B è un sottoinsieme di A, è $A \cap B = B$.

In questo testo la congiunzione 'e', ad esempio, svolge funzioni varie[45]. La sua prima occorrenza ha la funzione di separare i due argomenti dell'intersezione, e potrebbe essere sostituita da una virgola. La seconda ha la funzione di coordinare due frasi. La terza (fra le parentesi graffe) è il connettivo logico governato dalla semantica vero-funzionale. La quarta è equivalente alla prima. La quinta serve ancora a coordinare due frasi. È da notare che l'uso di 'e' per coordinare non è governato dalla semantica vero-funzionale, in quanto, ad esempio, l'inversione dell'ordine delle frasi coordinate non lascia del tutto invariato il significato del periodo.

Non sono condivisibili le argomentazioni di chi attribuisce il ricorso ai linguaggi simbolici della matematica alla presunta ambiguità, o imprecisione, del linguaggio verbale. Questa posizione è fuorviante perché sottovaluta la profonda differenza delle funzioni che svolge il linguaggio nei diversi contesti. Il linguaggio verbale è del tutto adeguato per una grande varietà di scopi, nei normali contesti di uso. Non è adatto alla funzione di trattamento, e infatti per questo nella storia si sono sviluppati i linguaggi simbolici.

Anche se un'analisi accurata delle funzioni delle notazioni simboliche in matematica va al di là degli scopi di questo libro, voglio osservare che le notazioni simboliche hanno giocato un ruolo fondamentale nello sviluppo della matematica. Questo ruolo non riguarda soltanto la ricerca pura, ma anche l'impatto della matematica sulla società. Le notazioni simboliche, insieme ad altri fattori, hanno contribuito a rendere accessibili ad ampi strati dell'umanità conoscenze e tecniche matematiche che in precedenza erano riservate

---

[44] Herstein (1982, p.3)

[45] il tema dello scarto fra il funzionamento dei connettivi nel linguaggio quotidiano e in quello matematico è stato affrontato in Italia da diversi autori, come ad esempio Bernardi (1990) e D'Amore & Plazzi (1990). Alcune proposte didattiche collegate sono state elaborate da Bernardi, Cannizzaro, Mentrasti & Lanciano (1990/91).

a ristretti circoli di sapienti. Si pensi ad esempio alla soluzione delle equazioni algebriche. È anche grazie al simbolismo dell'algebra che un'equazione di II grado è diventata accessibile a studenti di 15 anni. Questo riguarda anche la ricerca contemporanea: la disponibilità di notazioni standardizzate ampiamente condivise e la cui interpretazione non è troppo influenzata dai fattori culturali, anche se può avere degli effetti negativi, è comunque un elemento di trasparenza e di democrazia nella ricerca.

Linguaggio matematico come gergo

Un ulteriore elemento di complessità è dato dal fatto che il linguaggio matematico, e in particolare la componente simbolica, è sottoposto ad adattamenti dettati dalle condizioni materiali in cui è effettivamente usato ed è influenzato da esigenze diverse da quelle comunicative o di trattamento. Questo vale a maggior ragione nella scuola. Molte formule sono abbreviate per motivi pratici. Alcune abbreviazioni sono ampiamente praticate, come l'uso attributivo di predicati (frasi del tipo 'sia x>0' invece di 'sia x tale che x>0'). Inoltre tutti i matematici o gli insegnanti di matematica hanno le proprie preferenze, talvolta piccole manie, che hanno in parte giustificazioni di tipo pratico o ergonomico (come denominare i vertici di un poligono $A, B, C, D, \ldots$ in senso orario o antiorario o chiamare $2p$ il perimetro di un poligono quando si deve lavorare col semiperimetro, o razionalizzare i denominatori, o preferire la scrittura '$a-b$' a '$-b+a$'). Si continua a ritenere che queste scelte non costituiscano degli ostacoli per gli studenti, ma questo dipende dal possesso, da parte di questi, di competenze linguistiche e metalinguistiche, e atteggiamenti verso il linguaggio tipici di chi padroneggia i registri evoluti. In caso contrario, lo studente può non essere in grado di controllare le ragioni per cui il docente sceglie una notazione piuttosto che un'altra. Non è banale spiegare a uno studente linguisticamente poco evoluto che se si usano le lettere a, b, c per denotare numeri interi, questo non significa che debba valere '$a < b < c$', mentre quando si usa la sequenza $A, B, C, \ldots$ per denotare i vertici di un poligono (o un insieme di punti su una retta) l'ordine alfabetico delle lettere corrisponde di norma a un ordinamento naturale dei punti. Allo stesso modo, è probabile che la comprensione di un testo, magari scritto alla lavagna, con abbreviazioni e riferimenti ad altre parti della lavagna (se non a parti già cancellate), richieda competenza linguistica e forme di cooperazione tipici dei registri evoluti. La capacità di sintetizzare un testo lungo, che era comune fra gli studenti di qualche anno fa, è poco diffusa tra le matricole di oggi; questo può essere influenzato dalle differenze dei contesti in cui le diverse generazioni di studenti si sono trovate a operare. Con questo non intendo esprimere un giudizio di merito, ma solo far notare che problemi comunicativi inesistenti fino a pochi anni fa oggi sono diffusi e richiedono di tenerne conto in qualche modo.

In conclusione, l'uso delle notazioni simboliche è influenzato da criteri che appartengono a livelli diversi: preferenze personali, ragioni ergonomiche più o meno esplicite o motivate (compresa la brevità), enfasi su proprietà ritenute rilevanti (da chi opera la scelta), vincoli imposti dalla teoria. Gli studenti spesso aggiungono le loro convenzioni e abbreviazioni, come l'uso di '$\forall$' come attributo in luogo di 'qualunque', o l'omissione del simbolo di uguaglianza: '$k2$' in luogo di 'k=2'. Questo contribuisce a rendere sempre più oscuri i legami fra il linguaggio matematico e le sue funzioni, rendendolo sempre più simile a un gergo, cioè a un linguaggio la cui comprensione dipende pesantemente dall'appartenenza a un gruppo.

Dopo aver messo in luce la complessità delle relazioni fra la componente verbale e quella simbolica passo a confrontare i registri matematici con gli altri registri.

Funzione prevalente

Nelle situazioni colloquiali spesso la funzione interpersonale è quella prevalente. Tutti ci troviamo continuamente in situazioni di interazione in cui lo scopo prevalente non è quello di scambiare informazioni ma quello di intrattenere relazioni interpersonali. Nella gran parte dei testi scritti, che possono essere letti da persone che non conoscono l'autore, o che l'autore non conosce, anche in tempi lontani dal tempo in cui il testo è stato prodotto, la funzione interpersonale spesso assume un ruolo più limitato e l'elaborazione e lo scambio di informazioni (la funzione ideazionale) diventa prevalente. La funzione prevalente dei registri matematici avanzati è ovviamente quella ideazionale, ma con un forte orientamento all'applicazione di algoritmi. Questo significa che molte scelte riguardo alla rappresentazione delle idee e delle relazioni matematiche sono influenzate dall'esigenza di applicare algoritmi più che da quella di comunicare informazioni.

In scritture come

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{2}{12}=\frac{11}{12}$$

la trasformazione di $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{6}$ rispettivamente in $\frac{9}{12}$ e $\frac{2}{12}$ non corrisponde a esigenze comunicative e in molti casi ha poco a che fare con i significati in gioco; ha invece la funzione di rendere chiaramente applicabile un algoritmo noto.
Allo stesso modo, il passaggio dalla formula

$$x^2+y^2-2x = 0$$

alla formula equivalente

$$x^2+y^2-2x+1 = 1$$

in molti casi non è motivato dall'esigenza di comunicare nuove informazioni, ma da quella di operare una trasformazione per giungere all'equazione della circonferenza di centro (1,0) e raggio 1 nella forma:

$$(x-1)^2+y^2 = 1$$

La prevalenza dell'applicazione di algoritmi (trattamento) sottolinea la funzione strumentale dei linguaggi in matematica rispetto a quella rappresentativa, e corrisponde bene alle idee di Vygotskij riprese da Radford (2000). Il predominio della funzione ideazionale, e in particolare del trattamento, è un modo di funzionamento tipico (e portato all'estremo) dei registri evoluti e per questo crea molte difficoltà agli studenti che non li padroneggiano.

Stile, gerarchizzazione, iconicità

I registri colloquiali sono organizzati in base a uno stile pragmatico, organizzato su una struttura del tipo *tema-rema*. Questo significa che una conversazione (come visto negli esempi inseriti nel punto 'Testi orali e testi scritti' di questa sezione) non è costruita su schemi rigidamente sintattici, ma soprattutto in base alle esigenze pragmatiche di:

(i) far capire subito all'interlocutore l'argomento di cui si intende parlare (*tema*);
(ii) aggiungere successivamente gli elementi (il *rema*[46]: informazioni, opinioni, …) che costituiscono il punto focale dello scambio, documentandone la rilevanza (in relazione al contesto).

Nel corso di una conversazione casuale la sintassi si piega alle esigenze pragmatiche; le frasi spesso sono semplicemente pronunciate una di seguito all'altra, e le congiunzioni eventualmente usate ('e', 'poi', …) hanno un ruolo secondario nella determinazione del significato (coordinazione debole); inoltre la percentuale di subordinate è in genere più bassa rispetto ai testi scritti. Le produzioni orali hanno un ordinamento 'naturale' dato dal tempo (i fonemi, e quindi anche i morfemi sono pronunciati in un ordine temporale), mentre quelle scritte sono ordinate spazialmente. Questi ordinamenti possono essere usati per esprimere significati iconicamente. Questo accade nei registri orali e, in modi diversi, in quelli scritti. Ad esempio i periodi

"Ho preso una pillola e mi è venuto il mal di testa"

e

"Mi è venuto il mal di testa e ho preso una pillola"

specie se pronunciati in una situazione colloquiale, hanno significati totalmente diversi. I due periodi non esplicitano nessuna relazione tra le due proposizioni elementari che li compongono. L'ordine in cui sono pronunciati suggerisce un corrispondente ordine temporale fra gli eventi descritti, e i criteri di rilevanza suggeriscono che si intenda suggerire che tra essi ci sia una relazione di causa-effetto. In questo caso tale relazione è espressa *iconicamente* e non esplicitata attraverso la sintassi.
Nelle situazioni colloquiali la sintassi è meno importante che nei testi scritti. Anche per questo è abbastanza frequente che le regole sintattiche vengano violate (anacoluti, mancate concordanze, errata scelta dei modi o dei tempi, omissioni di parti del discorso, …) per meglio realizzare gli obiettivi pragmatici dello scambio. Durante uno scambio parlato è possibile rendere facilmente comprensibile il testo marcandolo attraverso l'intonazione, la mimica, i gesti e anche attraverso la negoziazione progressiva dei significati, che consente di partire con un'informazione anche vaga o inaccurata e di renderla più precisa e corretta sulla base delle reazioni dell'interlocutore. Anche per questo, i registri colloquiali non necessitano di un lessico particolarmente ampio e preciso.

---

[46] L'organizzazione pragmatica dei testi e la loro struttura dell'informazione è un tema complesso che ho tentato di semplificare. Oltre alla struttura 'tema-rema' ne sono state proposte altre, come 'topic-comment' e 'dato-nuovo'. Alcuni autori parlano anche di focus.

Lo stile dominante dei registri evoluti scritti è invece quello sintattico, basato sulla struttura *soggetto-predicato*. I significati sono governati soprattutto dalla sintassi e ci si attiene meno agli schemi pragmatici; di conseguenza l'attenzione per la correttezza è maggiore. Il lessico è più ampio e molte parole hanno significati specialistici che sono definiti o definibili esplicitamente. Inoltre, l'esigenza di esprimere relazioni per mezzo della sintassi induce spesso a produrre testi con una maggiore percentuale di subordinate. Per marcare i testi non sono più disponibili intonazione, mimica e gesti, ma la sintassi offre altri strumenti quali la scelta fra la forma attiva, quella passiva e quella impersonale e un gran numero di parole, espressioni e costruzioni con la funzione di marcatori testuali ('cioè', 'quindi', 'insomma', 'non è così che …', 'nel senso che …', …). Questi strumenti non sono gli stessi in tutte le lingue. Già fra italiano, francese e inglese si evidenziano forti differenze. Questo significa in particolare che la traduzione da una lingua all'altra può preservare una parte del significato (quella legata alla grammatica e al lessico) ma può facilmente deformare la funzione della frase (adeguatezza ecc.). Quindi la traduzione da una lingua all'altra di testi prodotti a qualunque titolo dagli studenti di qualunque livello scolare è utile solo per analisi che non tengano conto degli aspetti linguistici, o ne tengano conto solo parzialmente o per aspetti limitati alla funzione ideazionale.
Lo stile dei registri matematici avanzati è ovviamente sintattico ma, nella sua componente simbolica e nei suoi sostituti verbali, è basato sulla struttura *predicato-argomenti*. La differenza, in breve, è questa. Nell'enunciato "5 è diverso da 7", '5' è il soggetto e gioca delle funzioni testuali che possono variare; in molti casi '5' potrebbe essere il tema della frase. L'enunciato "7 è diverso da 5" ha infatti un significato leggermente diverso. A seconda del contesto, potrà essere più adeguato l'uno oppure l'altro. Invece, nell'uso matematico, nella scrittura "$5\neq 7$" non c'è distinzione di funzioni tra '5' e '7': essi sono gli argomenti e '$\neq$' è un simbolo di predicato. Secondo tale uso la scelta fra "$5\neq 7$" e "$7\neq 5$" non svolge funzioni comunicative ma è soprattutto legata alle esigenze delle trasformazioni svolte o da svolgere.
In altre parole, in ambito matematico, l'organizzazione del testo deve piegarsi alla funzione di trattamento e non sempre può essere utilizzata a fini comunicativi. Se ad esempio si conoscono le relazioni $x<y$, $x>a$ e si vuole provare $y>a$, per applicare la proprietà transitiva di '>' è necessario riscrivere i dati, ad esempio, nella forma $y>x$, $x>a$. La scrittura $y>x$ è equivalente a $x<y$ dal punto di vista della semantica matematica, ma non da quello testuale. Le due scritture non sono congruenti semanticamente, e inoltre suggeriscono due temi diversi (y la prima, x la seconda). Se gli studenti interpretano x come il tema del testo (cioè l'argomento di cui si parla) e se dispongono di scarsa competenza linguistica, possono essere spiazzati[47] dalla scrittura $y>x$, che può richiedere il superamento di un'interpretazione iconica delle relazioni.
Fenomeni simili si verificano a tutti i livelli. È ben noto che scritture come '5+2=7' e '7=5+2' non sono percepite come equivalenti da molti soggetti nella fase del primo apprendimento aritmetico. Questo ha motivazioni legate all'interpretazione (procedurale o relazionale) di '=', ma anche al fatto che, benché entrambe le formule facciano riferimento all'addizione, soltanto la prima contiene il simbolo '+' nel tema ('5+2'), mentre la seconda (il cui tema è '7') lo contiene soltanto nel rema. Quindi la prima formula assomiglia maggiormente a un testo colloquiale rispetto alla seconda.
Questa situazione è aggravata dal fatto che gran parte dei marcatori testuali del linguaggio verbale non sono più disponibili nelle espressioni simboliche, e quindi il significato di queste ultime è determinato quasi esclusivamente dalla sintassi senza molte possibilità di marcatura.
I registri matematici avanzati sono altamente gerarchici, come gran parte dei registri evoluti; questo significa che le parti che lo compongono sono strettamente organizzate, anche dal punto di vista dei significati.
In sintesi, nel simbolismo matematico (e nei testi verbali che ne sono influenzati) vengono meno molte delle opportunità comunicative non solo dei registri colloquiali, ma anche di quelli evoluti in genere. La sintassi resta spesso, insieme al lessico, l'unico strumento per determinare i significati. Qualche conoscenza preliminare sugli scopi dei testi diventa quindi fondamentale.

Contesti

Nei registri colloquiali è dominante il ruolo del contesto di situazione; l'interpretazione dei testi richiede una qualche conoscenza di tale contesto (partecipanti, …) e l'attivazione di processi abduttivi che rendono sensati i testi (presupposizioni ecc.). Il ricorso a riferimenti deittici è ampio. Il contesto gioca un ruolo anche nella determinazione della rilevanza degli enunciati. Nei registri evoluti scritti il contesto di riferimento è quello di cultura. La situazione specifica (spazio, tempo, partecipanti, …) può essere poco rilevante, se si tratta di testi (come articoli, libri ecc.) accessibili da più soggetti in tempi e luoghi diversi. La dipendenza

[47] Questo significa che possono avere difficoltà nell'interpretarla, se viene loro proposta, ma, soprattutto, che possono mancare di prenderla in considerazione, se tocca a loro trovare la conclusione.

dalla situazione è quindi minore, mentre diventano fondamentali la grammatica e le conoscenze (in qualche caso anche le convinzioni) condivise.
Nei registri matematici avanzati il ruolo del contesto è lo stesso dei registri evoluti in genere. I riferimenti al contesto di cultura possono essere abbastanza sofisticati, come quando in una dimostrazione all'interno di una teoria assiomatica o in un gioco matematico si debba prescindere dalle proprie conoscenze sulla materia e far riferimento ai soli dati esplicitamente descritti.
Nella sezione 6, nella seconda attività illustrata (scuola media), in fase di interpretazione del testo alcuni alunni utilizzano espressioni scorrette fortemente dipendenti dal contesto. Proprio grazie al contesto il comportamento scorretto non ha l'effetto di precludere la comunicazione. Lo scopo di queste analisi non è né incitare alla repressione di comportamenti di questo tipo né incoraggiarli, ma capire le funzioni cognitive che svolgono i testi inaccurati, ampiamente e inevitabilmente usati nei registri colloquiali.

Costruzione del significato

Nei contesti colloquiali il significato viene costruito attraverso un processo di negoziazione fra gli interlocutori, mentre nei registri scritti questo processo è molto più difficile: un testo scritto può essere letto anche da persone che non conoscono l'autore o dal quale non sono conosciute, o comunque molto lontane dal punto di vista dello spazio, del tempo e della cultura; il lettore deve quindi ricostruire il significato sulle sole basi del testo e della propria cultura. D'altra parte, mentre un testo orale è disponibile solo nel momento in cui viene pronunciato, ed è necessario memorizzarlo (o registrarlo, o convertirlo) se si vuole renderlo oggetto di riflessione, un testo scritto può essere letto più volte ed è a disposizione del ricevente senza vincoli temporali. Quindi l'autore dovrà inserire nel testo tutte le informazioni che ritiene necessarie, in modo da limitare la possibilità del lettore di adottare interpretazioni incoerenti coi suoi scopi; l'impossibilità di precisare in un secondo tempo il significato e la possibilità che il testo scritto sia a disposizione di un gran numero di lettori può indurre l'autore a una maggiore prudenza e a mettere in atto strategie di controllo più raffinate. In altre parole, il testo dovrà essere accuratamente pianificato. Il lettore avrà la possibilità di innescare processi interpretativi personali, leggendo e rileggendo il testo, sottoponendo ad analisi dettagliata singole parti, sviluppando inferenze basate sulle sue conoscenze e convinzioni sul tema e sull'autore, eventualmente leggendo testi collegati.
Benché i registri evoluti siano indispensabili per lo sviluppo della conoscenza, e in particolare di quella scientifica, alcune caratteristiche dei registri colloquiali sono altrettanto fondamentali. La possibilità di rappresentare idee in forma provvisoria e modificabile, senza investire troppa attenzione sulla loro rappresentazione compatta, concentrando gli sforzi su alcuni aspetti e trascurandone altri, gioca un ruolo centrale nello sviluppo di nuove idee.
Nella costruzione del significato i registri matematici avanzati presentano in forma spinta le caratteristiche tipiche dei registri evoluti. Il significato è presentato come un prodotto, e la mancanza di marcatori testuali rende la sua ricostruzione più difficile che in altri registri. Si pensi ad esempio all'enunciato di un teorema così come è usualmente presentato nei libri di testo, dove il processo che ha consentito l'individuazione delle ipotesi è spesso nascosto.
È fuori di dubbio che in virtù di questa caratteristica, i registri matematici avanzati siano funzionali sia a esigenze di rappresentazione organizzata e compatta della conoscenza, sia alla funzione di trattamento. Tuttavia, se usati rigidamente, non sono funzionali ai processi di costruzione della conoscenza. Gli studenti sono spesso in difficoltà davanti all'esigenza di rappresentare la conoscenza come prodotto. L'esempio, ampiamente discusso in letteratura, delle catene di uguaglianze

$$5+3 = 8+2 = 10\times4 = 40$$

è legato certamente, come notato da molti, all'uso procedurale del simbolo '=', ma corrisponde anche, al livello testuale, alla difficoltà nel rappresentare la conoscenza elaborata come sistema stabile di relazioni, al di fuori dei processi (sviluppati nel tempo) che l'hanno generata.
Un altro esempio è il seguente: durante un appello di esame, un numero notevole di studenti di Biologia e Scienze Ambientali ha usato espressioni come "è crescente e decrescente" per descrivere l'andamento del grafico nella figura 4.1, che corrisponde a una funzione crescente nell'intervallo visualizzato. Il riferimento alla decrescenza è probabilmente il segnale dell'insuccesso degli studenti nell'utilizzare le convenzioni sulla lettura dei grafici e di staccarsi dal modello procedurale per cui la curva viene esplorata a partire dall'origine in entrambi i versi.

Fig.4.1

Da questo punto di vista, lo studente che parte dall'origine e osserva il grafico da destra verso sinistra lo vede in effetti decrescere. La definizione di crescenza è un'altra cosa, ed è probabilmente al di fuori della portata linguistica di molti di questi studenti. Anche qui, come nell'esempio finale del punto precedente, l'espressione 'crescente e decrescente', che è matematicamente incoerente, incorpora una variazione nel riferimento deittico, dal lato destro a quello sinistro del grafico.

Nei registri matematici avanzati, e in particolare nelle espressioni simboliche l'esigenza di pianificare è molto forte. Per questo risulta difficile procedere per successivi aggiustamenti e correzioni. Se nella costruzione di una formula si parte con il piede sbagliato, è molto frequente che non sia più possibile rimediare se non cominciando da capo. La possibilità di costruire i testi (e le conoscenze), attraverso processi di progressive correzioni, e precisazioni è invece fondamentale, ed è quello che spesso cercano di fare gli studenti.

Vediamo un esempio.

Davanti alla richiesta di trovare le soluzioni di equazioni come

$$x^2 + x^3 = 0$$

è comune ricevere risposte (sia orali sia scritte) come:

"Il quadrato e il cubo devono essere uguali"

successivamente completate dall'aggiunta

"ma di segno opposto"

spesso sollecitata da qualche interlocutore.

In un registro matematico, questa risposta è, a rigore, sbagliata. Tuttavia la costruzione del testo adottata è tipica dei registri colloquiali orali e spesso tollerata anche nella scuola. In tali situazioni è consentito esprimere un'affermazione falsa correggendola immediatamente dopo, o anche a richiesta. Non c'è dubbio che si tratti di una modalità comunicativa talvolta efficace e che la costruzione dei concetti debba passare anche attraverso modalità espressive di questo tipo. L'incapacità di abbandonarle, o di controllarle[48], può però risultare un ostacolo ai processi di apprendimento.

Lessicalizzazione e nominalizzazione

Nei registri colloquiali si usa un insieme ridotto di vocaboli. L'uso di una grande varietà di vocaboli dotati di significati specifici, tecnici, definiti con precisione è tipico dei registri evoluti e della loro esigenza di rappresentare la conoscenza come prodotto, in forma compatta e accessibile, senza che si renda necessario negoziare i significati. Questo processo si chiama *lessicalizzazione*.

Il processo di *nominalizzazione* consente di usare le diverse proprietà dei nomi rispetto ai verbi per distillare le informazioni essenziali eliminando quelle irrilevanti. Una frase verbale richiede di esplicitare informazioni che possono essere ritenute irrilevanti rispetto agli scopi comunicativi correnti, come ad esempio soggetto, modo, tempo di un verbo. Un'espressione nominale come 'lo sfruttamento del Terzo Mondo' rappresenta un fenomeno senza prendere posizione su alcune caratteristiche che potrebbe essere necessario esplicitare in una costruzione verbale, come ad esempio l'indicazione di chi sfrutta il Terzo Mondo (con eventualmente, indicazioni sul suo genere e numero), del tempo in cui questo è avvenuto o avviene, del grado di certezza associato all'affermazione (dato di fatto, ipotesi, …). I processi di nominalizzazione corrispondono alla rappresentazione del significato come prodotto e richiedono una pianificazione maggiore e, spesso, la rinuncia alla congruenza semantica. Lessicalizzazione e nominalizzazione sono processi tipici dei registri evoluti.

La lessicalizzazione è praticata in forma spinta nei registri matematici. La possibilità di aggiungere nuove definizioni è ampiamente usata (e talvolta abusata). Nei linguaggi del I ordine la possibilità di aggiungere nuovi simboli di costante o di funzione è un capitolo importante ed è basata su teoremi dovuti a T.Skolem.

I registri matematici avanzati, inoltre, utilizzano generalmente uno stile altamente nominale. Il formalismo algebrico rappresenta un caso estremo di stile nominale, in quanto esiste sostanzialmente un solo predicato (l'uguaglianza) e tutti gli altri predicati vengono espressi con l'ausilio di espressioni nominali. Il predicato 'x è pari' viene trasformato nell'affermazione che esiste un k tale che x è uguale al doppio di k. Questa caratteristica del linguaggio algebrico presenta diversi vantaggi sul piano logico e computazionale ma è uno dei principali responsabili dei fenomeni analgebrici discussi sotto la voce 'indicali'.

[48] Lo studente che convertisse la sua frase nella notazione simbolica, scrivendo '$x^2 = x^3$' si troverebbe probabilmente in una situazione difficile.

La componente figurale

Un'analisi approfondita del ruolo della componente figurale nei processi di apprendimento della matematica va al di là degli scopi di questo libro. Da diverse teorie sulla percezione delle immagini emerge comunque il ruolo della cultura nella percezione: in molti casi non esiste un modo naturale di interpretare un'immagine, ma il soggetto è influenzato dalle sue conoscenze e convinzioni, e anche dal contesto in cui l'immagine è percepita. In questo capitolo voglio delineare in breve alcune caratteristiche delle rappresentazioni figurali che possono contribuire a completare il quadro del linguaggio matematico.

Il problema descritto nella figura 4.2[49] è stato proposto in diverse classi di scuola media che avevano già svolto l'argomento 'trapezi' e nei cui libri di testo un trapezio viene descritto come 'quadrilatero avente almeno una coppia di lati paralleli'.

Questo problema mette in gioco la questione del controllo concettuale sulle immagini. Le risposte si possono suddividere in due categorie: quelle che fanno riferimento a una definizione verbale e quelle che dipendono da stereotipi visuali o linguistici. Nel primo caso punti critici sono i disegni B, F, H. Un buon numero di alunni ha sbagliato soltanto nel classificare uno o più di essi mentre ha classificato in modo soddisfacente i disegni A, C, D, E, G.

Problema Secondo te, quali delle seguenti figure sono trapezi? Spiega le tue risposte.

Figura 4.2

Anche in base ai commenti verbalizzati e alle discussioni successive fra gli alunni, è ragionevole ipotizzare che questi alunni abbiano applicato le definizioni correttamente ma in base agli usi conversazionali, per i quali, a differenza del linguaggio matematico, 'trapezio' non può efficacemente denotare un parallelogramma o un rettangolo, o un quadrato.

Nel secondo caso punti critici sono anche i disegni A, C, D, E. Visto che A, D, E sono trapezi la cui forma è distante dallo stereotipo, essi possono essere non riconosciuti da alunni con scarso controllo concettuale dell'idea di trapezio. Il disegno C rappresenta invece un quadrilatero che non è un trapezio ma la cui forma è poco distante dallo stereotipo e che consente inoltre di identificare gli elementi fondamentali dello stereotipo linguistico (base maggiore, base minore, lati obliqui, …). Tutto questo è influenzato anche da come è percepito lo status del disegno. Se il disegno è considerato preciso, allora figure come la C non sono interpretabili come trapezi, mentre in un contesto di schizzi approssimativi, il disegno C potrebbe essere una rappresentazione adeguata di un trapezio.

L'esperienza indica che i comportamenti del I tipo non corrispondono necessariamente a gravi lacune linguistiche: gli alunni semplicemente applicano pratiche interpretative tipiche dei registri quotidiani a un contesto che ne richiederebbe altre, ma sono probabilmente in grado di estendere le loro risorse linguistiche fino a inglobare progressivamente il nuovo registro. Al contrario, l'incapacità di confrontare il linguaggio con semplici modelli, e controllare la verità di affermazioni è spesso indice di lacune linguistiche più gravi, legate alla difficoltà di coordinare l'interpretazione delle frasi e alla pratica di utilizzare i testi come contenitori di parole-chiave. Questo esempio mette in luce due tipi di difficoltà: quelle dovute al passaggio dai registri quotidiani a quelli matematici e quelle dovute al contrasto fra le descrizioni verbali e gli stereotipi linguistici e visuali; in ogni caso, anche le figure (intese in un senso lato che include i grafici e le visualizzazioni in genere) non sono esenti dai fenomeni studiati dalla pragmatica.

In molti casi, dato che la funzione loro riconosciuta è spesso quella di illustrazioni aggiuntive ma non indispensabili, dalle figure ci si attende che giochino un ruolo cooperativo, anche in misura maggiore rispetto ai testi verbali e alle espressioni simboliche. Per questo in un grafico, ad esempio, molti studenti si attendono di trovare tutte le informazioni che servono loro, né più, né meno. Davanti a un grafico come quello nella fig.4.3 molti sono disposti ritenere che sia adeguato a descrivere un fenomeno e che questo sia quindi crescente anche al di fuori dell'intervallo visualizzato.

Figura 4.3

Anche se gli stereotipi[50] scolastici giocano indubbiamente un ruolo, resta il fatto che se il grafico di fig.4.3 fosse (come di fatto è) una porzione del grafico di fig.4.4, allora la rappresentazione di fig.4.3 sarebbe del tutto inadeguata e persino ingannevole.

---

[49] Questo esempio è tratto con minime variazioni da Ferrari (2003)

[50] Anche gli stereotipi, comunque, si collegano almeno in parte a inferenze.

Fig.4.4

Quindi in base al principio di cooperazione è lecito attendersi che la fig.4.3 sia adeguata, e che quindi contenga tutte le informazioni necessarie per caratterizzare la funzione. Questa situazione non è per nulla anomala. L'interpretazione di un grafico richiede una notevole quantità di ipotesi e di inferenze per le quali non sono di solito fissati criteri precisi.

Possiamo ricavare, ad esempio, dal grafico di fig.4.5 che, detta f la funzione rappresentata, vale $f(0)=0$? Normalmente questa ipotesi è considerata legittima, anche se significa leggere nel grafico informazioni che non possono esserci: se fosse invece $f(0)=0.01$ non avremmo la possibilità di accorgercene. Quindi l'ipotesi $f(0)=0$ è il risultato di un'implicatura.

Fig.4.5

Considerazioni analoghe valgono per altre proprietà delle funzioni: un grafico di per sé non ci dice se una funzione è definita su un intervallo reale, se è continua, se è derivabile, e non ci consente di individuare con precisione i punti notevoli.

A questo proposito si presentano problemi analoghi a quelli che riguardano le altre componenti. Da un lato è inaccettabile che gli studenti non siano in grado di controllare criticamente le rappresentazioni grafiche e di rendersi conto che un semplice cambiamento di unità di misura può modificare profondamente la percezione di un fenomeno.

Dall'altro i grafici e le altre rappresentazioni visuali vanno usati ampiamente nell'insegnamento, se possibile non solo come illustrazioni ma anche come ambienti per operare trattamenti che abbiano dignità non inferiore ai calcoli numerici o simbolici. Questo significa che non è necessario inseguire modelli astratti di rigore ma occorre imparare a leggere le figure, a non fermarsi alle apparenze, a ragionare su quello che ci dicono e quello che non possono dirci.

5. Implicazioni didattiche

Il lavoro svolto in questi anni per mettere a punto il quadro teorico e le considerazioni presentate finora hanno avuto conseguenze prima di tutto sul mio modo di comunicare con gli studenti. Mi sono reso conto che molti comportamenti tipici dei docenti universitari presuppongono negli studenti abilità e competenze proprie di chi è abituato a utilizzare i registri evoluti[51]. Questo vale a maggior ragione se si insegna a classi numerose. Aspetti usualmente ritenuti secondari, come il mezzo di comunicazione adottato (voce, microfono, gesso e lavagna, proiezione di trasparenze o da calcolatore), la qualità dei caratteri, il tempo di permanenza delle lavagnate, delle trasparenze o delle schermate hanno effetti rilevanti sull'apprendimento degli studenti, ma anche sui loro atteggiamenti. Occorre anche rendersi conto che gli studenti devono comunque operare inferenze, e per fare questo hanno bisogno di un certo grado di padronanza del contesto e di comprendere in qualche misura gli scopi dei testi a cui sono esposti. Anche la comprensione di una definizione molto semplice può allora creare difficoltà se gli studenti hanno una padronanza insufficiente del contesto. Questo problema, a livello universitario, è diventato più acuto coll'introduzione della laurea triennale, che generalmente ha richiesto agli studenti di acquisire i concetti fondamentali delle discipline in intervalli di tempo limitati, in un monte-ore limitato e con poche occasioni di riflettere sui significati di quanto appreso. Gli studenti sanno quindi operare un numero molto ridotto di inferenze, e in genere solo una piccola parte di quelle che molti docenti si aspettano implicitamente da loro.

Ma il quadro illustrato in nella sezione 4 è finalizzato, oltre che a interpretare le difficoltà legate al linguaggio, a fornire indicazioni su come promuovere le competenze linguistiche adeguate per comprendere la matematica. Da quanto visto finora è chiaro che la comprensione della matematica richiede competenze linguistiche specifiche che non si riducono alla sola componente simbolica e che i soli registri colloquiali non sono sufficienti. Inoltre, tali competenze linguistiche non sono naturali ma vanno sviluppate, soprattutto a livello di scuola primaria e secondaria.

La tecnologia sta ampliando lo spettro dei sistemi semiotici disponibili per le attività umane. Questo porta da un lato a un uso più ampio di rappresentazioni visuali a elevata iconicità (si pensi alle strutture ipertestuali,

[51] Questo atteggiamento, abbastanza diffuso tra i matematici, è un buon esempio di quella che Duval (1995, p.5) chiama 'la prima ipotesi', che lui, con buone ragioni, rigetta e secondo la quale può esserci noesis senza semiosis, il che significa, in altri termini, che l'acquisizione dei concetti matematici non dipende dalle loro rappresentazioni.

che consentono la rappresentazione iconica di nessi di natura logica, testuale o altro), dall'altro a forme di comunicazione verbale che non lasciano spazio né alla esplicitazione dei significati per mezzo della sintassi né alla riflessione sui medesimi (sms, televisione). D'altra parte i metodi di insegnamento della lingua basati sullo studio di modelli grammaticali o stilistici si stanno rivelando inefficaci, sia in generale sia per quanto riguarda la matematica: anche fra gli studenti che dimostrano di possedere una discreta padronanza di lessico e grammatica solo pochi sanno utilizzarla in ambito matematico o scientifico. Questo è in parte legato alla separazione tra educazione linguistica ed educazione scientifica, molto radicata nella nostra scuola e che costituisce un ostacolo grave rispetto agli obiettivi sopra enunciati. L'obiettivo principale dovrebbe essere quindi il potenziamento delle capacità metalinguistiche, cioè delle capacità di mobilitare consapevolmente le proprie risorse linguistiche per rispondere a scopi diversi e di controllare i prodotti. Si tratta quindi non di offrire nuovi modelli linguistici (in quanto più corretti di altri) ma di costruire la flessibilità nel passaggio da un sistema semiotico all'altro, da un registro verbale all'altro e di potenziare le capacità di controllo. Il coordinamento di sistemi semiotici come proposto da Duval (1995) rientra in pieno in queste finalità. Questo deve essere integrato dalla capacità di controllare le proprie risorse linguistiche, selezionando quelle più adeguate agli scopi comunicativi, in altre parole governando l'uso di registri diversi, tra i quali almeno qualcuno sufficientemente evoluto. I registri evoluti non sono tanto caratterizzati da modelli grammaticali e stilistici raffinati quanto dalla possibilità di comunicare con soggetti che non condividono lo stesso contesto di situazione, di riflettere sui testi e controllarli e di rappresentare con precisione significati complessi. Questo punto è delicato. Se da un lato la tecnologia offre possibilità di espressione impensabili nel passato, dall'altro la capacità di interpretare testi complessi, sviluppando strategie di ricostruzione del significato attraverso inferenze che mettono in gioco le conoscenze e le convinzioni del soggetto continua a essere strategica e insostituibile per lo sviluppo del pensiero. La costruzione di tale capacità richiede un certo tirocinio e tempi adeguati per riflettere sui testi. La tecnologia o le rappresentazioni visuali, da sole, non possono sostituire questa capacità, anche se possono concorrere a potenziarla. È quindi necessario che gli studenti siano in grado di usare registri evoluti quando le situazioni comunicative o operative lo richiedano.

Per potenziare le capacità metalinguistiche è necessario mettere al centro il controllo sui testi in relazione ai loro scopi. Questo urta con diverse convinzioni diffuse tra gli studenti. Alcune di queste discendono dalla separazione tra insegnamento linguistico e insegnamento scientifico, e, nell'ambito di quest'ultimo, dalla separazione fra i diversi sistemi semiotici[52]. Si tratta quindi di sviluppare la capacità di costruire testi adeguati rispetto a scopi che devono essere evidentemente non solo noti, ma anche condivisi dagli studenti. Tutte le risorse linguistiche necessarie (sintattiche, lessicali, stilistiche, …) devono essere messe in campo in relazione a tali scopi. Per superare alcuni dei fenomeni negativi di separazione fra sistemi semiotici, si dovrà lavorare a lungo sulle conversioni fra di essi, con lo scopo di raggiungere il coordinamento di sistemi semiotici come descritto da Duval (1995). La via è quella di costruire una maggiore flessibilità nell'uso dei linguaggi attraverso situazioni che forzino l'uso di strumenti linguistici non come adesione a un modello (grammaticale o stilistico) ma come risposta a vincoli di comunicazione e di rappresentazione espliciti e condivisi.

Un elemento centrale di queste situazioni è la discussione in classe. Questo tema non viene sviluppato in dettaglio in questo libro. Per analisi approfondite e indicazioni bibliografiche si vedano i lavori di Bartolini Bussi (1998a,b), Bartolini Bussi & Boni (1995).

Presento qui sommariamente alcuni esempi di situazioni che possono forzare il potenziamento del controllo metalinguistico sui testi e l'uso di registri evoluti.

1) Comunicazione con soggetti che non condividono il contesto di situazione, come ad esempio la comunicazione fra due classi situate in luoghi diversi. Questo richiede di esplicitare buona parte dei riferimenti deittici e tutte le presupposizioni che derivano, ad esempio, dal fatto di essere nello stesso luogo, di essere un gruppo stabile, di svolgere determinate attività ecc. Una delle attività descritte nella sezione 6 è di questo tipo.
2) Comunicazione con soggetti che non condividono il contesto di cultura. Questo accade quando vengono a contatto alunni di fasce d'età abbastanza lontane, o di culture diverse, o provenienti da ambienti sociali diversi, o alunni con adulti. Questo richiede di esplicitare alcuni riferimenti culturali che si ritiene

[52] Su questo tema permangono, anche fra i neolaureati in matematica e gli insegnanti in formazione, convinzioni molto radicate, come quella secondo cui una rappresentazione figurale può avere soltanto un ruolo di illustrazione di concetti introdotti in precedenza per mezzo del linguaggio verbale e delle notazioni simboliche. Alcuni esempi su questo tema sono stati discussi da D'Aprile & Ferrari (2003)

possano non essere condivisi. Un’attività di questo tipo è stata svolta in una scuola elementare di Alessandria, dove gli alunni di una classe V sono stati incaricati di progettare e gestire in laboratorio un’unità didattica di primo approccio al calcolatore rivolta ad alunni di I. In quell’occasione gli alunni di V hanno mostrato notevole sensibilità per le difficoltà potenziali dei piccoli, sviluppando strategie didattiche complesse e, in genere, ragionevoli; ad esempio, hanno controllato puntigliosamente il lessico, escludendo tutte le parole che, a loro giudizio, potevano mettere in difficoltà i piccoli.

3) Conversioni fra sistemi semiotici diversi (verbale ↔ simbolico, verbale ↔ figurale, simbolico ↔ figurale, …). Queste attività, alcuni esempi delle quali sono illustrati nella sezione 6, possono richiedere notevoli sforzi metalinguistici di riorganizzazione dei testi, in relazione a scopi condivisi.

4) Conversioni fra testi orali, testi scritti provvisori, testi scritti stabili. Ad esempio, scrivere gli appunti di una discussione, o la descrizione provvisoria di un’attività, o la bozza di un progetto, o convertire gli appunti in testi più stabili e coesi. Un’attività di verso opposto è la messa in scena un testo narrativo. In questo caso, invece della sequenza testo orale → trascrizione provvisoria → testo scritto stabile se ne presenta una rovesciata: si parte da un testo stabile (un testo narrativo), si elabora un testo scritto adeguato per la messa in scena (il copione) e infine si procede alla messa in scena vera e propria, che comporta la realizzazione di un testo parlato. In questo caso il testo intermedio non è necessariamente provvisorio (come spesso non sono i testi teatrali) ma deve avere alcune caratteristiche tipiche dei registri orali. In tutti questi casi i testi prodotti hanno, ciascuno, scopi noti e condivisi. Nel passaggio da una discussione orale agli appunti a un testo stabile (così come in quello da un testo narrativo a una messa in scena) si incontrano grandi differenze di funzioni cognitive e di organizzazione del testo, con possibilità di sfumature intermedie. Tuttavia questi testi così diversi sono riconoscibili come testi prodotti in una stessa lingua, quindi in qualche misura confrontabili. Questa è la grande ricchezza del linguaggio verbale: la possibilità di esercitare funzioni e di assumere forme e strutture lontanissime fra loro conservando la possibilità di confronto fra i testi.

5) Ricostruzione di un testo (completando le parti mancanti) sulla base di alcune sue parti, di informazioni sui suoi scopi ecc.. Questa attività può essere strutturata in modi molto diversi e ha lo scopo duplice di richiedere l’interpretazione accurata dei frammenti di testo disponibili (che può anche essere non univoca) e, su questa base, la ricostruzione di un testo coeso che rispetti i vincoli imposti da tali frammenti. È evidente che la ricostruzione non è mai univoca. Un prototipo letterario di questa attività si trova nei ‘Figli del capitano Grant’ di Verne, dove i protagonisti trovano in una bottiglia un messaggio scritto in tre lingue e molto sciupato dalla permanenza in mare. In questo caso sono estremamente chiari gli scopi del testo (richiesta di soccorso), gli autori (naufraghi) e il tipo di informazioni che deve contenere (indicazioni geografiche sulla posizione dei naufraghi). Sono invece ambigue le informazioni lessicali, in quanto le parole sono danneggiate dell’acqua. L’intera trama del romanzo si basa sul fatto che una stessa parola viene successivamente interpretata in modi diversi.

6) Completamento di un testo dal quale sono stati eliminati alcuni dati. In questo caso lo sforzo non è tanto orientato alla riorganizzazione del testo quanto a decidere, attraverso inferenze che mettono in gioco l’interpretazione globale del testo e l’enciclopedia dei soggetti, quali dati siano compatibili (ad esempio, scegliendoli in un insieme dato). È importante che l’inserimento dei dati richieda di considerare il testo nel suo complesso, attraverso inferenze e non la sola individuazione di parole-chiave. Nella sezione 3 è stato illustrato un esempio di attività di questo tipo.

7) Ricostruzione di due testi separati a partire da un insieme di frasi mescolate. La chiave per la ricostruzione può essere semantica (le frasi che devono andare insieme contengono parole collegate semanticamente) o anche stilistica (ad esempio, i testi sono scritti da persone di competenza linguistica nettamente diversa) o altro. Lo scopo di questa attività è l’individuazione di legami di tipo diverso tra le varie frasi (attraverso l’analisi testuale) e, successivamente, l’organizzazione di due testi coesi.

8) Traduzione da una lingua all’altra. Ad esempio, tradurre dall’inglese o dal francese un testo che esprime una storia nota, oppure una sconosciuta. In ogni caso, la situazione deve essere costruita in modo che gli alunni abbiano la possibilità di controllo semantico sul testo (quindi, non una semplice traduzione, ma gli alunni devono sapere prima almeno di che cosa si tratta ecc.). Lo scopo non dovrebbe essere la traduzione scolasticamente intesa, ma la costruzione di un testo in italiano che risponda a criteri negoziati ed esplicitati in precedenza e che racconti la stessa storia di quello originale. Questa attività dovrebbe richiedere di esplicitare le informazioni eventualmente implicite nel testo originale e di

riorganizzare il testo in modo da rendere il prodotto finale coeso, magari confrontando il loro prodotto con una traduzione letterale.

9) Stesura di regolamenti per attività comuni (gare, ecc.). Ad esempio, in una classe di scuola elementare si organizzano gare a squadre di proposta e di soluzione di problemi. Una squadra deve risolvere collettivamente i problemi proposti dall'altra. La gara richiede delle regole. Verbalizzare le regole è un lavoro che assomiglia all'assiomatizzazione di una classe di strutture. Si tratta di esprimere in forma scritta delle condizioni, in modo che il testo risultante sia comprensibile per tutti e non consenta interpretazioni diverse.

10) Invenzione di sistemi di segni. Nella sezione 6 è illustrato un esempio di attività in cui un gruppo di bambini alla fine della II elementare mettono in formula la soluzione di un problema usando una notazione inventata da loro. In questo caso lo scopo non è di conformarsi (magari giustificandolo) a un modello offerto dall'esterno (la notazione standard aritmetica o algebrica) ma di inventare una notazione che risponda a scopi condivisi dai bambini. Attività come queste non dovrebbero essere finalizzate a portare i bambini ad ammirare la bellezza delle notazioni matematiche esistenti o a padroneggiarne presunti significati profondi. Si tratta invece di mettere in luce in modi diversi e situazioni diverse i collegamenti tra le funzioni dei linguaggi e le loro forme. Questo ha dei prezzi: la possibilità che i bambini operino scelte in contrasto con le notazioni standard. Questo è inevitabile se si vuole che i bambini assumano un atteggiamento attivo nei confronti dei linguaggi. Le notazioni matematiche esistenti, anche se sono probabilmente adeguate per i loro scopi, sono tuttavia prodotti di sviluppi storici e di condizioni culturali che non possono che essere in gran parte estranee alla maggioranza degli studenti, comprese le matricole universitarie. Il sistema scolastico, l'accademia, l'editoria ecc. hanno poi aggiunto caratteristiche che corrispondono a esigenze ancora diverse, e anche di queste molte non sono condivise né condivisibili per la maggior parte degli studenti. Quindi l'adozione delle notazioni standard della matematica da parte degli studenti, per quanto inquadrata e motivata, assomiglierebbe più allo studio della grammatica che non all'uso mirato del linguaggio. L'introduzione delle notazioni matematiche come prodotto esistente non è quindi la migliore occasione di costruire i legami tra testi e scopi, perché questi ultimi sono troppo lontani o sfuggenti. La capacità di costruire tali legami deve essere quindi costruita prima, senza spaventarsi se gli studenti costruiscono notazioni diverse da quelle standard.

In Italia sono state realizzate diverse unità didattiche che realizzano uno o più dei punti precedenti.
Esempi di attività che realizzano i punti 1), 2) e 3) sono stati presentati da Malara & Navarra (2003a,b) e da Navarra & Giacomin (2003a,b,c,d,e,f). In alcuni di questi lavori è stato utilizzato un personaggio fittizio, un bambino giapponese di nome Brioshi che ha innescato situazioni linguistiche di estremo interesse. In questo caso il personaggio di Brioshi è costruito in modo da non condividere né il contesto di situazione, né quello di cultura. Queste condizioni, oltre ad altre che scaturiscono dal contesto comunicativo, spingono gli alunni a rendere il più possibile espliciti i significati e ad affinare le tecniche di controllo metalinguistico sui testi.
Altri esempi di attività compatibili con questo quadro (con i relativi riferimenti bibliografici) sono stati presentati da Boero *et al.* (2002).

6. Esempi di attività didattiche

Scuola elementare

<u>Descrizione dell'attività</u>
Una classe a tempo pieno della scuola elementare "Villaggio Europa, di Alessandria ha svolto un itinerario innovativo attinente all'educazione linguistica e matematica. Il quartiere di appartenenza della scuola è periferico e abbastanza tranquillo; gli ambienti di provenienza degli alunni sono vari. Nella classe è inserita anche una bambina certificata.
Entrambi gli insegnanti della classe sono stati coinvolti nell'esperienza. L'insegnante di area linguistica adotta da tempo un approccio pragmatico, basato sull'uso consapevole della lingua finalizzato ai diversi contesti, piuttosto che sulla pura e semplice grammatica, e favorisce varie forme di interazione linguistica in classe. L'insegnante di area scientifica utilizza un metodo compatibile con quello del collega. In questo ciclo, come nel precedente, ha costruito, fin dall'inizio della prima, un modo di lavorare in classe tale da lasciare gli alunni liberi di prendere collettivamente decisioni e autoregolamentare la propria attività.
La classe ha svolto sistematicamente, fino dalla metà della II, attività di costruzione collettiva di testi finalizzati alla descrizione del lavoro svolto e dei risultati raggiunti, con modalità diverse. Gli alunni hanno

deciso via via i criteri di scrittura e gli scopi dei testi che andavano elaborando e, successivamente, si sono attenuti ad essi.
L'insegnante ha svolto il ruolo di moderatore, aiutando gli alunni a organizzare la discussione, a circostanziare progressivamente i pensieri e a raccogliere le idee emerse. Tuttavia il ruolo dell'insegnante, per quanto naturalmente insostituibile e decisivo, ha fatto sì che gli alunni si sentissero responsabili di tutte le decisioni prese e si impegnassero a rispettarle e farle puntualmente rispettare.

Questi sono gli scopi e le motivazioni, assunti esplicitamente dopo averli discussi, che hanno spinto gli alunni a intraprendere attività di preparazione dei testi anche con l'insegnante di area matematica:

- Congruenza e correlazione col lavoro di lingua ("Anche con il maestro E. facciamo così")
- Aiuto agli alunni assenti
- Promemoria collettivo, per ricostruire i percorsi risolutivi, per avere traccia dei progressi ("come ragionavamo, come scrivevamo l'anno scorso"), per raccogliere risultati utilizzabili in futuro.

Questi sono i criteri per la preparazione dei testi esplicitamente decisi dagli alunni:

- Comunicabilità (semplicità e comprensibilità)
- Sollecitazione a non usare parole ridondanti e inadeguate, o delle quali non si conosce pienamente il significato
- Uso di tempi verbali corrispondenti alle azioni descritte
- Invito a non abusare delle parole generiche e prive di un preciso significato ("fare" , "cosa")

Gli alunni hanno costruito collettivamente nel corso degli anni glossari attinenti al linguaggio abituale quotidiano, alla matematica, alle scienze e all'ambito storico- geografico. Gli alunni hanno giocato un ruolo propositivo anche nelle attività più strettamente matematiche. In modo sistematico hanno individuato problemi da risolvere nel contesto delle attività che stavano svolgendo. In qualche caso hanno anche inventato problemi in contesti di gioco, ad esempio organizzando gare. Gli alunni si dividevano in gruppi e ciascun gruppo doveva sottoporre un problema agli altri. In questo modo la stesura dei testi aveva lo scopo di rendere difficile la vita alla squadra che doveva risolvere, rispettando però un insieme di regole concordate (ad esempio, non erano ammessi problemi privi di soluzione, o con dati mancanti).
L'esempio illustrato è tratto da una sequenza di attività finalizzate fra l'altro alla rappresentazione delle strategie risolutive dei problemi e alla costruzione a tale scopo di espressioni con lettere. Tali attività si sono sviluppate a partire della seconda, e alla fine di tale anno scolastico si è verificato l'episodio in esame. Il problema presentato è stato scelto per mettere in luce l'atteggiamento che i bambini avevano già raggiunto nei confronti del linguaggio.
L'attività è stata svolta prendendo spunto da uno studio di Radford (2000), che ha però coinvolto studenti di livello scolare più elevato.

Fig.6.1

L'insegnante ha sottoposto loro la situazione problematica (così come illustrata nella fig.6.1) e li ha via via invitati a calcolare il numero delle palline delle prime 20 figure della sequenza.

Vediamo qualche estratto di sbobinatura. L'insegnante (L.) in questa fase aiuta a tenere la discussione ordinata, parafrasa gli interventi degli alunni, riassume ogni tanto le cose dette da loro, orienta la discussione verso i contributi più significativi se questa tende a disperdersi. All'inizio del brano riportato gli alunni stanno facendo prove numeriche.

Anna (a proposito della figura n°10)
"Allora, fa diciannove … perché … considerando che la figura cinque è nove … cinque più cinque fa dieci … dunque mi ha portato a diciannove"

Adriano
"Allora, … … se tu, se il numero in alto fosse uguale alla base sarebbe un numero pari … però se noi togliamo un numero in verticale viene un numero dispari"

L. parafrasa l'intervento di Adriano.

Gianluca
"Io ho fatto … ehm … ho aggiunto nella base tre pallini e poi in su sei"

Eugenio
"Andiamo avanti di due fino a arrivare a diciannove"

L.: *"Quindi nella figura numero sei quanti ne avremo?"*

E.: *"Undici"*

L.: *"Nella figura sette?"*

E.: *"Tredici"*

L.: *"Nella figura otto?"*

E.: *"Quindici"*

L.: *"Nella figura nove?"*

E.: *"Diciassette"*

L.: *"Nella figura venti?"*

E.: *"Diciannove"*

L.: *"Eugenio praticamente vi ha detto che ogni volta aggiungiamo due"*

Diversi alunni: *"Due, due"*

L.: *"Se la figura che vogliamo prendere in considerazione fosse la figura cento, o la figura cinquanta, o la figura settanta …cioè sarebbe facile continuare ad aggiungere due due due due?"*

Francesco: *"No"*

L.: *"Perché non sarebbe facile? Perché bisognerebbe …"*

F.: *"Bisognerebbe aggiungere tante volte tante volte e poi diventerebbe noioso e lungo lungo lungo lungo lungo"*

L.: *"Diventerebbe noioso e lungo lungo lungo lungo, dice Francesco. Allora dobbiamo trovare una regola o un modo o un sistema che ci faccia arrivare a trovare la soluzione senza stare lì a contare"*

E.: *"Nella figura cinque, nella figura quattro nella figura tre nella figura due i pallini della base sono uguali alla figura"*

L.: *"Alla figura o al numero indicato nella figura?"*

E.: *"Eee … al numero indicato nella figura"*

L.: *"Eugenio dice: il numero di palline che si trovano nella base sono esattamente corrispondenti al numero della figura. Cioè nella figura due ci sono due palline alla base, nella figura tre ce ne sono tre, nella figura quattro ce ne sono quattro nella figura cinque ce ne sono cinque eccetera eccetera. Osservate ancora più attentamente perché lui vi ha già dato una buona indicazione secondo me"*

A.: *"Io ho notato una cosa che se tolgo quei due che ho aggiunto diventa il numero precedente"*

L.: parafrasa e orienta la discussione su quanto detto da Eugenio.

Giulia: *"Sempre numeri dispari"*

L.: *"Si ma E, …, guardate un po' in altezza. Biagio?"*

Biagio: *"Ce n'è una in meno rispetto alle palline della base"*

L.: parafrasa e chiede a Emma quante palline avremo nella base nella figura venti.

Emma: *"Venti"*

L.: *"E nell'altezza?"*

Em.: *"Diciannove"*

L.: *"Perché ne avremo diciannove in altezza Emma?"*

Em.: *"Perché in alto ce n'è sempre una in meno"*

L.: *"In meno rispetto a che cosa?"*

Em.: *"Rispetto alla base"*

L.: *"Facciamo bene il ragionamento. Quindi partite da lì e andiamo avanti. Biagio ha un'ispirazione ..."*

B.: *"Le palline che ci sono nella figura cento sono sono centonovantanove perché sappiamo che ce n'è una in meno in verticale e alla base c'è sempre uguale quindi se dobbiamo avere la figura cento in base ci saranno cento e su ci saranno una in meno ... novantanove le addizioniamo ... centonovantanove"*

L.: *"Oh! Allora sentite bene"* [Parafrasa Biagio.] *"Vediamo se funziona anche con altri numeri. Con la figura ad esempio ... quaranta. Biagio, hai provato a vedere che cosa verrebbe con la figura quaranta?"*

B.: *"Sì. Ce n'abbiamo in alto trentanove e quaranta sotto quindi diventa settantanove"*

L.: *"E vediamo, a Francesco che cosa verrebbe nella figura ... trenta"*

F.: *"Allora nella base trenta palline e in alto ventinove ..."*

L.: *"E allora che cosa faresti Francesco per sapere quante sono in tutto?"*

Sussurri, suggerimenti.

F.: *"Trentanove"*

L.: *"No"*

F.: *"Trenta più ventinove"*

L.: *"E che cosa fa trenta più ventinove?"*

F.: *"Sett ... cinquantanove"*

L.: *"Sì. Proviamo a vedere con il numero duecento"*

Diversi alunni: *"Eee"*

L.: *"Allora vediamo chi vuole provare con duecento ... quante palline ci sono nella figura duecento?"*

Adriano: *"Nella figura duecento ci saranno duecento pallini alla base e centonovantanove pallini in alto"*

L.: *"E allora in tutto quanti saranno?"*

Ad.: *"Duecentonovantanove ... no ... trecentonovantanove"*

L.: *"Secondo voi il ragionamento di Biagio funziona?"*

Coro: *"Sìiiiiii"*

L'attività prosegue con la scoperta che la strategia proposta da Biagio (sommare il numero della figura con lo stesso numero diminuito di 1) equivale a raddoppiare il numero della figura e sottrarre 1. Dopo questa scoperta (basata sulle prove numeriche effettuate) la classe si mette alla ricerca di un sistema per abbreviare la notazione. Tale esigenza è motivata dalla scelta, di tipo generale, di rappresentare le strategie in forma esplicita. La rappresentazione (per adesso verbale) della strategia trovata evidentemente era troppo lunga rispetto al foglio in cui doveva essere riportata. La discussione continua come segue.

Anna: *"Abbreviamo numero in modo che ci stia base"*

Viene così proposta la scrittura

n.base per due meno uno = n. delle palline

L. suggerisce la parentesi dopo 'per due' e di eliminare 'delle'. La classe concorda e si arriva così alla scrittura

(n.base × 2) – uno = n.palline

L.: *"Vediamo se si può fare ancora qualcosa"*

Giulia propone di scrivere 'uno' in cifra:

(n.base × 2) – 1 = n.palline

B.: *"Mettere simboli per abbreviarlo ancora e quindi farlo stringere di più. In un ... palline ... facciamo un cerchio e diventa una pallina oppure ne facciamo due per il plurale"*

Biagio propone quindi la scrittura

(n.base × 2) – 1 = n.OO

Lo stesso Biagio propone un'ulteriore abbreviazione.

B.: *"Maestra, me n'è venuta un'altra … se mettiamo per la base invece che base una str … riga orizzontale, per verticale una verticale."*

La proposta (finale) di Biagio è quindi:

$$(\mathrm{n}^{-} \times 2) - 1 = \mathrm{n}\ \mathrm{OO}$$

Nel corso dell'attività, il punto che seguiva ogni occorrenza di *n* [*n*.] è poco a poco sparito.

Discussione

L'attività in classe ha coinvolto tutti gli alunni. Anche in questo breve estratto otto di loro sono intervenuti individualmente (cioè con contributi riconoscibili nella sbobinatura) nella discussione, mentre altri sono intervenuti nelle fasi più concitate. Emerge anche il forte ruolo dell'insegnante, che aiuta molto i bambini a tenere il filo senza limitare la loro capacità di pensare in modo autonomo. L'insegnante valorizza gli interventi più costruttivi, propone momenti di riflessione e consolidamento. Da questa e da altre esperienze condotte negli anni nella stessa classe emerge come nessun alunno si senta limitato dagli interventi dell'insegnante, che tutti considerano come un esperto a cui rivolgersi in caso di bisogno. In altre parole gli alunni comprendono e condividono gli scopi degli interventi dell'insegnante. In qualche caso questi interviene a correggere formulazioni imprecise attraverso domande. Ad esempio, quando Eugenio dice *"Nella figura cinque, nella figura quattro nella figura tre nella figura due i pallini della base sono uguali alla figura"* l'insegnante chiede: *"Alla figura o al numero indicato nella figura?"*. La frase di Eugenio è tipica dei registri colloquiali e, se isolata dal suo contesto, è certamente ambigua: un ascoltatore occasionale potrebbe pensare che ciascun pallino è uguale alla figura (ad esempio, perché ha la stessa forma). In realtà Eugenio intende "il numero dei pallini è uguale al numero della figura"; nel contesto in cui è stata pronunciata, la frase non è stata considerata ambigua dagli altri alunni. L'intervento dell'insegnante non ha avuto la funzione di imporre un vincolo normativo, di conformità a un modello, ma di far apprezzare la complessità della situazione in cui si stanno muovendo e forzare il passaggio a un uso linguistico più evoluto. Una situazione simile si verifica quando Emma dice: *"Perché in alto ce n'è sempre una in meno"* e l'insegnante chiede *"In meno rispetto a che cosa?"*. Anche in questo caso l'insegnante interviene su una frase perfettamente comprensibile nel contesto di situazione in cui si trovano gli alunni ma ambigua se isolata da tale contesto, spingendo anche in questo caso verso usi linguistici propri dei registri evoluti.

Nella discussione vengono usati continuamente riferimenti deittici: "*in alto*", "*base*", "*in verticale*", "*in su*", "*in altezza*", "*sotto*". A questo proposito è del tutto calzante l'analisi di Radford (2000) secondo cui queste parole giocano un ruolo fondamentale nel dialogo. Tali riferimenti preparano il terreno a generalizzazioni, in quanto consentono di mantenere un collegamento elastico con gli esempi concreti senza richiedere l'esplicitazione di tutte le informazioni non necessarie. In questo modo gli alunni possono parlare della figura 10 sviluppando ragionamenti che valgono anche per le altre figure, e mettendosi nelle condizioni linguistiche adatte per applicarli. Analogamente, i riferimenti deittici consentono agli alunni di parlare della figura 200 come se l'avessero davanti.

Vorrei essere chiaro sul senso delle invenzioni di scritture che costituisce la parte finale dell'estratto. La caratteristica principale di tale attività (che si è manifestata per la prima volta nell'occasione descritta) sta nel fatto che gli alunni si sono trovati davanti un problema di rappresentazione da loro individuato e condiviso e lo hanno affrontato usando le risorse che avevano a disposizione. Nell'affrontarlo hanno utilizzato alcuni suggerimenti dell'insegnante e hanno tenuto conto dei vincoli di rappresentazione e di comunicazione che dovevano rispettare. A mio giudizio in questa fase ha scarsa rilevanza ogni riferimento ai sistemi di notazione matematica storicamente determinati. A un certo punto, ad esempio, l'insegnante suggerisce di inserire le parentesi in modo da ottenere l'espressione

$$(\text{n.base} \times 2) - \text{uno} = \text{n.palline}.$$

Dal punto di vista matematico quelle parentesi non sono necessarie, e molto probabilmente l'insegnante le ha suggerite, opportunamente, per non dirottare la discussione sul tema delle precedenze. Analogamente, qualcuno potrebbe obiettare che l'introduzione di variabili come abbreviazioni non è la scelta migliore. Qui quello che conta non è la scelta particolare adottata dagli alunni, ma il fatto che si sono trovati davanti a un problema e lo hanno risolto non conformandosi a un modello preesistente ma utilizzando a modo loro le risorse disponibili, tenendo conto dei vincoli condivisi imposti dalla situazione problematica, in modo complessivamente adeguato agli scopi.

Scuola media[53]

Descrizione dell'attività

Scopo di questo esperimento è la costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica come risposta a specifici vincoli comunicativi e di rappresentazione imposti dal contesto. L'esperimento si è svolto con due classi di II media, denotate "classe A' e 'classe B', situate in due località diverse entrambe in zone agricole della provincia di Alessandria. Alla classe A è stato proposto, dall'insegnante di Scienze, il problema di calcolare l'area del piano terra della scuola. Gli alunni hanno riprodotto alla lavagna la pianta in scala, si sono procurati le misure necessarie e hanno calcolato l'area. Nella fase successiva è stato chiesto loro di proporre il problema agli alunni della classe B soltanto attraverso il testo, senza l'ausilio di figure. Nella classe B l'attività è stata gestita prevalentemente dall'insegnante di Italiano.

Qui sono in gioco due situazioni delineate ai punti 1 e 3 della sezione 5. La richiesta di comunicare in forma scritta con alunni sconosciuti (seppure della stessa età e provenienti da un ambiente socioculturale simile) richiede uno sforzo (a carico soprattutto della classe A) di rendere esplicita una parte delle conoscenze che solitamente rimangono implicite nelle conversazioni orali, in quanto quelli che scrivono e quelli che ricevono la lettera non condividono lo stesso contesto di situazione. La richiesta di convertire una figura geometrica in un testo o un testo in una figura richiede qualche esplicitazione e selezione delle relazioni incorporate in ciascuna rappresentazione. La situazione mette in gioco essenzialmente rappresentazioni figurali, ed espressioni verbali orali e verbali scritte.

Di seguito è riportato il disegno adottato dalla classe A. Le lettere sono state scelte e messe dagli alunni. È anche riportata la versione del testo proposta alla classe B. Ho numerato le frasi per facilitare i riferimenti.

Fig.6.2

(1) *La nostra scuola assomiglia molto a una culla vista di profilo.*
(2) *Il nostro edificio si compone di 3 rettangoli 2 dei quali posti verticalmente e uno orizzontalmente che li unisce nella parte superiore.*
(3) *Chiamiamo i 2 rettangoli posti verticalmente A e B e quello orizzontalmente C.*
(4) *Il trapezio D (che è la nostra palestra) è rettangolo ed è posto sul rettangolo A e parte del rettangolo C, con il lato obliquo adiacente all'altezza del rettangolo A. I due rett.A e B sono uguali.*
(5) *Adesso vi diamo le misure: la base del rett.A (quindi anche di B) misura 11 cm e l'altezza 21 cm.*
(6) *La base del rett.C misura 22 cm e l'altezza equivale all'altezza del rettangolo A meno una rientranza di 10 cm.*
(7) *Nel trapezio D la base maggiore appoggiata ai 2 rett.A e C misura 18 cm e quella minore 16 cm. L'altezza misura 19 cm.*

Nel corso della preparazione del testo gli alunni hanno concordemente evitato tutte le espressioni che facessero riferimento al contesto fisico della scuola. Qualcuno ha proposto di affiancare al riferimento alla culla quello a un flipper. Il suggerimento è stato apprezzato, ma non adottato perché gli alunni hano ritenuto che l'immagine della culla fosse più accessibile di quella del flipper: *"Magari nel loro paese non c'è un flipper di quelli, invece qualcuno avrà per forza un fratello o una sorella piccoli."*

Tutti gli alunni della classe B hanno avuto una copia della lettera della classe A, con la descrizione della scuola. La lettera è stata anche letta dall'insegnante di Italiano. Gli alunni hanno prodotto immediatamente diversi disegni basati soltanto sulle frasi (1) e (2), che sono riprodotti nelle figure 6.3 A-F. Di seguito sono riportati esempi di argomenti usati per scartarne alcuni (o proporre di farlo). I testi riportati sono trascrizioni di dialoghi registrati.

[53] Questa parte è una versione abbreviata della sezione 3 di (Ferrari, 2003).

Fig.6.3

A: *"Il rettangolo orizzontale non li unisce tutti e due nella parte superiore, li unisce uno nella parte superiore e uno in quella inferiore."*
B: *"Ci sono due rettangoli orizzontali, il testo parla di uno solo"*
C: *"Non è come una culla vista di profilo, potrebbe essere vista di fronte."*
"Le scuole non sono fatte così."
E: *"Il rettangolo orizzontale unisce gli altri due nella parte inferiore invece che in quella superiore."*
F: *"Il rettangolo orizzontale li unisce di fianco, non nella parte superiore."*

Dopo qualche discussione, tutti gli alunni hanno convenuto di eliminare i disegni A, B, C, E. La scelta fra D e F ha provocato ulteriori discussioni focalizzate sull'interpretazione di *'li collega nella parte superiore'*.
Questo è un brano di uno scambio tra Barbara, un'alunna che sosteneva il disegno D e Alessandro, un sostenitore del disegno F.
<u>Barbara</u>: *"Il primo disegno non va bene, perché non li collega nella parte superiore, li collega di fianco"*
<u>Alessandro</u>: *"Il triangolo sotto ..."*
<u>B</u>.: *"È un rettangolo!"*
<u>A</u>.: *"Va bé rettangolo, ... è collegato nella parte sopra, ma il triangolo, li collega nella parte sotto"*
<u>B</u>.: *"Non c'è una misura che dice qual'è la parte superiore"*

Anche se la scelta di Alessandro è quella giusta, la sua argomentazione contiene un'imprecisione, in quanto interpreta *'... nella parte superiore'* come se fosse *'... <u>con</u> la parte superiore'*.
Nel corso della discussione Alessandro ha usato spesso 'triangolo' in luogo di 'rettangolo'. Quando l'insegnante gli ha chiesto: *"Dov'è questo triangolo di cui parli?"* Barbara ha risposto per lui: *"Oh, lui vuol dire rettangolo, lo sappiamo!"*
Dopo aver letto il testo fino alla frase (4), gli alunni hanno deciso unanimemente di scegliere il disegno rappresentato nella figura 6.4. Subito dopo sono sorte altre 2 questioni: l'interpretazione di 'sul' (*"... posto sul rettangolo A ..."*) e di 'adiacente'.

Fig.6.4

Riguardo la prima questione, alcuni alunni hanno proposto disegni come quello nella figura 6.5 che sono stati rigettati subito con argomenti del tipo *"Non è più come una culla"* o *"Dove avete messo il trapezio ci sono le aule"*.

Fig.6.5

Per quanto riguarda la seconda questione, gli alunni si sono trovati in disaccordo sull'interpretazione di 'adiacenti'. Barbara ha cercato materialmente su un libro di testo e ha trovato che 'segmenti adiacenti' sono

allineati. Dopo qualche discussione gli alunni hanno lasciato cadere la contraddizione tra la definizione di 'adiacente' e il resto delle informazioni, e hanno deciso di adottare il disegno riprodotto nella figura 6.4 e di risolvere il problema in base a quello.
Gli alunni della classe A si sono interessati vivamente alla lettura del rendiconto di come la classe B aveva interpretato il loro testo. La discussione si è concentrata sull'interpretazione di 'adiacente' e sul fatto che il disegno prodotto dalla classe B non era direttamente congruente al loro, anche se i valori trovati per l'area erano i medesimi. In entrambi i casi le interpretazioni scelte dalla classe B e le perplessità sollevate sono state giudicate legittime.
Il testo è stato modificato riscrivendo le frasi (3) e (4) come segue:

(3) *"Chiamiamo A il rettangolo verticale sulla destra, B quello sulla sinistra e C quello orizzontale."*
(4) *Il trapezio D, che è la nostra palestra, è rettangolo ed è appoggiato sul rettangolo A e in parte sul rettangolo C, con il lato obliquo consecutivo all'altezza del rettangolo A."*

Sono stati sollevati alcuni dubbi sull'opportunità dei riferimenti a 'destra' e 'sinistra' (*"Non sono parole matematiche!"*)[54].

Discussione

Gli alunni della classe A hanno cercato di descrivere la figura in diversi modi, dalla similitudine con la culla all'introduzione di lettere per denominare le figure geometriche utilizzate per descrivere il piano terra della scuola. L'esigenza di comunicare, insieme con le risposte ricevute ha li ha spinti a riflettere sul significato di alcune delle espressioni che stavano usando, come ad esempio 'parte superiore', 'adiacente', 'posto'/'appoggiato'. Queste riflessioni non hanno portato all'adozione di un registro più vicino a quelli adottati nei loro libri di testo, ma piuttosto allo sfruttamento di tutte le risorse linguistiche disponibili nel contesto in cui stavano operando. L'uso delle lettere per denominare le figure, ad esempio, è diverso dalla notazione scolastica standard in base alla quale lettere maiuscole rappresentano punti. Lo stesso vale per l'uso di 'adiacente': il fatto che questa parola sia stata provvisoriamente interpretata dalla classe B in base al lessico matematico standard (in contraddizione con il significato inteso dagli scriventi) ne ha provocato l'esclusione dal testo, con l'adozione di un più appropriato termine tecnico, 'consecutivo'. Anche la sostituzione di 'posto' con 'appoggiato' è un esempio di un processo simile, anche se di segno opposto: 'posto', che è un termine tipico del lessico geometrico usato dai libri di testo, viene utilizzato in prima battuta; le interpretazioni che hanno portato a figure come la 6.5, suggeriscono che la frase possa essere ambigua, e questo induce la classe A a sostituire 'posto' con 'appoggiato', che è un termine che richiama relazione fisiche in modo più pregnante; 'appoggiato' suggerisce infatti l'idea di contatto fra oggetti dotati di peso.
Per quanto riguarda la classe B, almeno due passaggi del processo interpretativo sono degni di nota: le relazioni fra il testo e i disegni prodotti e il registro orale adottato. Nella fase di interpretazione del testo, gli alunni hanno proposto diversi disegni immediatamente dopo aver letto le frasi (1) e (2), e ne hanno scartati una buona parte dopo averli discussi o aver letto le frasi (3) e (4). Alcuni di questi disegni erano chiaramente incompatibili con le frasi (1) e (2). Questo comportamento può essere spiegato dal bisogno di una rappresentazione esplicita come terreno comune per riflessioni e discussioni che possono aiutare a prendere in considerazione significati del testo trascurati alla prima lettura. In genere gli esperti sanno trascurare da subito le interpretazioni chiaramente incompatibili e le escludono attraverso inferenze senza il bisogno di rappresentarle esplicitamente. Molto probabilmente questo accade perché essi sanno selezionare le caratteristiche rilevanti direttamente dal testo. Tutti questi comportamenti sono tipici dei registri evoluti. Per gli alunni, al contrario, la riflessione su modelli espliciti e la discussione e il confronto di diverse opinioni (con l'attivazione di processi interpersonali basati sulle loro relazioni reciproche) sembrano giocare un ruolo importante nell'intepretazione. Anche la scelta finale del disegno si è rivelata incompatibile con l'interpretazione di parte del testo. A proposito della frase (4), nessun alunno ha contestato l'interpretazione di 'adiacente' da parte di Barbara, chiaramente incompatibile con il disegno prescelto; nonostante ciò il disegno non è stato scartato, forse perché il riferimento a una culla è stato considerato (più o meno consciamente) più affidabile dell'interpretazione di una singola parola, per di più presa da un libro di testo. Processi come quelli descritti qui sono piuttosto comuni nelle pratiche quotidiane di interpretazione, mentre nei registri matematici la compatibilità e il significato di ogni singola parola (specie di quelle esplicitamente definite) sono più importanti.
Per quanto riguarda il registro orale adottato, sembra che in alcuni scambi gli alunni siano stati piuttosto inaccurati; Alessandro, per esempio, usa la parola 'triangolo' invece di 'rettangolo', ma gli altri, nonostante

[54] I riferimenti a 'sopra' e 'sotto' non hanno invece sollevato le stesse perplessità.

ciò, comprendono quello che sta dicendo. Altri alunni, a proposito della fig.6.3B parlano di 'due rettangoli orizzontali', in riferimento a un disegno in cui tali rettangoli hanno le altezze maggiori delle loro basi. Questi comportamenti sono frequenti nelle interazioni orali e potrebbero addirittura essere considerati aspetti positivi dei registri quotidiani, in quanto consentono di costruire frasi focalizzate soltanto su alcuni aspetti (per Alessandro, la posizione reciproca delle figure piuttosto che la loro classificazione) senza dedicare troppa attenzione agli altri. Quando Alessandro dice 'triangolo' non intende esprimere la totalità dei significati usualmente annessi a tale parola nei registri matematici, o anche nei registri quotidiani appena più accurati, ma la usa piuttosto come un *indicale*, magari associato a qualche gesto delle mani; questo uso è strettamente legato al contesto di situazione. Allo stesso modo, gli alunni che hanno usato l'espressione 'rettangoli orizzontali' a proposito della fig.6.3B non intendevano esprimere proprietà di quei rettangoli, ma soltando designarli in modo economico; è fondamentale prendere atto che la designazione, nel contesto in cui è stata formulata, non è ambigua: lo diventerebbe in altri contesti, ad esempio in una relazione scritta di matematica. Dal punto di vista matematico, questi comportamenti sono considerati errori, ma nei registri quotidiani sono modi abituali di costruire e interpretare testi.
In entrambe le classi è stato determinante il ruolo dell'insegnante di Italiano. Nella classe B l'insegnante di Italiano ha dichiarato agli alunni di non sapere nulla di matematica, e ha richiesto diversi chiarimenti, mettendo gli alunni in una originale posizione comunicativa e costringendoli così a notevoli sforzi testuali. In entrambi i casi si è trattato di insegnanti disposti a privilegiare gli aspetti funzionali e comunicativi su quelli formali e stilistici dei linguaggi.
Questo esempio mette in luce che gli alunni di II media possono usare il linguaggio verbale con successo per rappresentare idee matematiche e comunicarle a loro coetanei che non condividono lo stesso contesto di situazione. I metodi che usano sono diversi da quelli adottati nei registri istituzionali (in particolare nei libri di testo). Molti dei comportamenti linguistici qui illustrati sono incompatibili con l'organizzazione dei registri matematici standard ma possono essere considerate efficaci per gli scopi della comunicazione e del pensiero. Gli alunni cercano di usare tutte le risorse disponibili al livello di contesto che essi riconoscono appropriato per sviluppare la comunicazione con successo. Ad esempio, gli alunni della classe A nella stesura del testo non fanno riferimenti alla collocazione fisica della loro scuola, ma usano altre informazioni che si aspettano siano condivise dagli altri alunni (riferimento a una culla, alla nomenclatura geometrica, e così via).

7. Commenti conclusivi

Le conseguenze didattiche delle idee discusse in questo libro sono molte e alcune di loro richiedono ulteriori approfondimenti. Attività didattiche che realizzano tali idee, oltre a quelle qui illustrate sommariamente, sono in corso di sperimentazione. Mi rendo conto della mole del quadro teorico, che rappresenta poco meno della metà del numero di pagine del libro. Tuttavia ho resistito alla tentazione di abbreviarlo ulteriormente per un paio di motivi: prima di tutto perché questo libro (insieme con la sessione del Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica da cui deriva) è stata un'occasione di presentare in forma organica i risultati di ricerche che durano da una decina di anni e che sono per gran parte non pubblicate o pubblicate in modo frammentario. Inoltre, ho ritenuto opportuno sottolineare le scelte di fondo che stanno dietro alle varie utità didattiche rispetto alle modalità di realizzazione, che sono pure fondamentali ma che richiedono probabilmente un lavoro a lungo termine di più persone e il contributo degli insegnanti. Spero soprattutto che questo lavoro contribuisca a far superare la disastrosa separazione tra l'educazione linguistica e quella scientifica che da tanti anni affligge il sistema scolastico italiano.

Riferimenti

Altieri Biagi, M.L.: 1985, *Linguistica essenziale*, Milano: Garzanti.

Auslander, J.: 2001, 'Where mathematics comes from' (book review), *American Scientist*, http://www.americanscientist.org/template/AssetDetail/assetid/14366

Austin, J.L.: 1962, *How to do things with words*, Cambridge (Mass.): Harvard U.P..

Bachtin, M.M.: 1986, *Speech Genres and Other Late Essays* (trad.Vern W.McGee), Austin TX: University of Texas Press.

Bartolini Bussi M. G.: 1998a, 'Joint Activity in the Mathematics Classroom: a Vygotskian Analysis', in Seeger F., Voigt J. & Waschesho U. (eds), *The Culture of the Mathematics Classroom. Analyses and Changes*, Cambridge University Press, 13-49.

Bartolini Bussi M. G.: 1998b, ‘Verbal Interaction in Mathematics Classroom: a Vygotskian Analysis’, in Steinbring H., Bartolini Bussi M. & Sierpinska A. (eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, Reston VA: NCTM, 65-84 .

Bartolini Bussi M. G. & Boni M.: 1995, ‘Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio Vygotskiano’, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 18, 221-256.

Bernardi, C.: 1990, ‘Linguaggio naturale e linguaggio logico: parliamo della «e»’, *Epsilon,* III/2, 37-42.

Bernardi, C., L.Cannizzaro, P.Mentrasti e N.Lanciano : 1990/91, *La Matematica nella scuola elementare,* La Nuova Italia, Firenze.

Bernicot, J., J.Caron-Pargue & A.Trognon (eds.): 1997, *Conversation, interaction et fonctionnement cognitif,* Presses Universitaires de Nancy.

Bloedy-Vinner, H.: 1996. ‘The analgebraic mode of thinking and other errors in word problem solving’, in Gutierrez, A. & L.Puig (eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* vol.2, 105-112.

Boero, P., N.Douek & P.L.Ferrari: 2002, 'Developing Mastery of Natural Language: Approaches to Theoretical Aspects of Mathematics', in English,L. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Mahwah (NJ, USA): Lawrence Erlbaum Associates, 241-268.

Bruner, J.: 1990, *Acts of meaning,* Cambridge (Massachusetts): Harvard University Press.

Caron, J.: 1979, 'La compréhension d'un connecteur polysemique: la conjonction "si"', *Bulletin de psychologie*, Tome XXXII, N°341, 791-801.

Caron, J.: 1997, ‘Psychologie cognitive et interactions conversationnelles’, in Bernicot *et al*. (eds.), cit..

Clark, H.H. & W.G.Chase: 1972, ‘On the Process of Comparing Sentences against Pictures’, Cognitive Psychology, 3, 472-517.

D’Amore, B. & P.Plazzi: 1990, ‘La didattica dei connettivi logici: alcune considerazioni’, *L’Insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate*, 13, 4, 370-398.

D’Aprile, M. & P.L.Ferrari: 2003, ‘Linguaggi e rappresentazioni nella formazione degli insegnanti di matematica’, *La Matematica e la sua Didattica*, n.4, 391-411.

Dapueto, C., P.L.Ferrari and M.P.Rogantin: 1986, ‘Il numero nel primo apprendimento’, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* Vol.9, N.11, 7-93.

Devlin, K.J.: 2000, *The Language of Mathematics: Making the Invisible Visible*, New York: W.H.Freeman & Co..

Di Martino, P. & R.Zan: 2001, ‘Attitude towards mathematics: some theoretical issue’, in van der Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht (NL), vol.3, pp.351-358.

Dubinsky, E.: 1999, 'Mathematical reasoning: analogies, metaphors and images' (book review), *Notices of the AMS* Vol.46, No.5, 555-559.

Dubinsky, E.: 2000, 'Meaning and Formalism in Mathematics', *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5/3, 211-240.

Duval, R.: 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Bern: Peter Lang.

Duval, R.: 2000, 'Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques', *Recherches en didactique des mathématiques*, 20/2, 135-169.

Eco, U.: 1979, *Lector in fabula – La cooperazione interpretativa nei testi narrativi*, Milano: Bompiani.

Eco, U.: 1984, *Semiotica e filosofia del linguaggio*, Torino: Einaudi.

English, L.D. (ed.).:1997, *Mathematical Reasoning*, Lawrence Erlbaum Associates.

Ferrari, P.L.: 2003, 'Costruzione di competenze linguistiche appropriate per la matematica a partire dalla media inferiore', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol.26A, N.4, 469-496.

Gold, B.: 2001, , 'Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being' (book review), *MAA Online*, http://www.maa.org/reviews/wheremath.html.

Goldin, G.: 2001, ‘Counting on the metaphorical’, (Recensione di: Lakoff & Núñez, 2000), *Nature*, vol.413, 6 september 2001, 18-19.

Granger, G.G.: 1979, *Langages et épistémologie*, Paris: Klincksieck.

Grice, H.P.: 1975, 'Logic and conversation', in Cole, P.&J.L.Morgan (Eds.), *Syntax and semantics: Vol.3. Speech acts* (pp.41-58), New York: Academic Press (trad.it.: *Logica e conversazione*, Bologna: il Mulino).

Halliday, M.A.K.: 1985, *An introduction to functional grammar*, London: Arnold.

Hoyles, C. & D. Küchemann: 2002, 'Students' understandings of logical implication', *Educational Studies in Mathematics*, 51, 193-223.

Lakoff, G.: 1987, *Women, Fire and Dangerous Things*, The University of Chicago Press.

Lakoff, G. & M.Johnson: 1999, *Philosophy in the Flesh*, Basic Books.

Lakoff, G. & R.E.Núñez: 1997, 'The Metaphorical Structure of Mathematics', in English, L.D. (ed.), *Mathematical Reasoning*, Lawrence Erlbaum Associates, 21-89.

Lakoff, G. & R.E.Núñez: 2000, *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books.

Leckie-Tarry, H.: 1995, *Language & context- A functional linguistic theory of register*, London: Pinter.

Lolli, G.: 1996, *Capire la matematica*, Bologna: il Mulino.

Lolli, G.: 2002, 'La metafora in matematica', in: Beccaria, G.L. & C.Marello (a cura di) *La parola al testo*, Alessandria: Edizioni dell'Orso, 221-232.

Lolli, G.: 2003, *Da dove viene la matematica*, recensione di: Lakoff. & Núñez (2000), cit.

Madden, J.: 2001, 'Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being' (book review), *Notices of the AMS*, Vol.48, No.10, 1182-1188.

Malara N. A., Navarra G.: 2003a, *ArAl Project. Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking*, Bologna: Pitagora.

Malara N. A., Navarra G.: 2003b, *Quadro di riferimento e glossario*, Bologna: Pitagora (Collana 'Progetto ARAL').

Morgan, C.: 1998. *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation*, London: Falmer Press.

Napoli, M.: 1995, *I linguaggi della retorica*, Bologna: Zanichelli.

Navarra, G., Giacomin, A.: 2003a, *Unità 1 – Brioshi e l'approccio al codice algebrico,* Bologna: Pitagora (Collana 'Progetto ARAL').

Navarra, G., Giacomin, A.: 2003b, *Unità 2 – Rappresentazioni del numero: le mascherine e il domino,* Bologna: Pitagora (Collana 'Progetto ARAL').

Navarra, G., Giacomin, A.: 2003c, *Unità 3 – Verso il numero sconosciuto: il gioco della matematòca,* Bologna: Pitagora (Collana 'Progetto ARAL').

Navarra, G., Giacomin, A.: 2003d, *Unità 4 – Ricerca di regolarità: la griglia dei numeri,* Bologna: Pitagora (Collana 'Progetto ARAL').

Navarra, G., Giacomin, A.: 2003e, *Unità 5 – Le piramidi di numeri,* Bologna: Pitagora (Collana 'Progetto ARAL').

Navarra, G., Giacomin, A.: 2003f, *Unità 6 – Dalla bilancia a piatti all'equazione,* Bologna: Pitagora (Collana 'Progetto ARAL').

Núňez, R.E., Edwards L.D., Matos J.F.: 1999, 'Embodied Cognition as Grounding for Situatedness and Context in Mathematics Education', *Educational Studies in Mathematics*, 39, 1-3: 45-65.

O'Brien, T.C., B.J.Shapiro & N.C.Reali: 1971, 'Logical thinking – language and context', *Educational Studies in Mathematics*, 4, 201-219.

Paulos, J.A.: 2001, 'Where mathematics comes from' (book review), *The American Scholar*, Vol.70, No.1, 151-152.

Pawley, D. and M.Cooper: 1997, 'What can be done to overcome the multiplicative reversal error?', *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol.3, 320-327, Lahti (Finland).

Pimm, D.: 1987, *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms*, London: Routledge Kegan and Paul.

Presmeg, N.: 2002, 'Where mathematics comes from …' (book review), *Journal for Research in Mathematics Education*, 33-1, 59-63.

Radford, Luis: 2000, 'Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis', *Educational Studies in Mathematics,* 42: 237-268.

Radford, L.: 2002, 'On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking', in Cockburn, A.D. & E.Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Norwich (UK), vol.4, pp.81-88.

Rumain, B., J.Connell & M.D.S.Braine: 1983, 'Conversational Comprehension Processes Are Responsible for Reasoning Fallacies in Children As Well As Adults: *If* Is Not the Biconditional', *Developmental Psychology*, Vol.19, No.4, 471-481.

Schiralli, M. & N.Sinclair: 2003, 'A constructive response to '*Where mathematics comes from*', *Educational Studies in Mathematics*, 52, 79-91.

Sfard, A.: 1997, 'Commentary: on Metaphorical Roots of Conceptual Growth' English, Lyn D. (Ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images,* Mahwah (NJ): Lawrence Erlbaum, 339-371.

Sfard, A.: 2000a, 'Symbolizing Mathematical Reality Into Being - Or How Mathematical Discourse and Mathematical Objects Create Each Other', in Cobb, P., E.Yackel and K.McClain (eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms,* Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard A.: 2000b, 'Steering (Dis)Course Between Metaphors and Rigor: Using Focal Analysis to Investigate an Emergence of Mathematical Objects', *Journal for Research in Mathematics Education*, 31/3, 296-327.

Sfard, A.: 2001, 'There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning', *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57.

Sperber, D. & D.Wilson: 1986, *Relevance,* Blackwell.

Toulmin, S., R.Rieke & A.Janik: 1978, *An introduction to reasoning*, New York: Macmillan Publishing Co..

Trognon, A.: 1997, 'Conversation et raisonnements', in Bernicot *et al.* (eds.), cit..

Usiskin, Z.: 1996, 'Mathematics as a Language', in Elliot, P.C. & M.J.Kenney (eds.), *Communication in Mathematics – K-12 and Beyond,* 1996 Yearbook, Reston, NCTM, 231-243.

Vailati, G.: 1908, 'La grammatica dell'algebra: contributo alla psicologia del linguaggio matematico', *Rivista di psicologia applicata*, 92-110.

Vygotskij, L. S.: 1992, *Pensiero e linguaggio,* Bari: Laterza.

Vygotskij, L.S.: 1987, *Il processo cognitivo*, Torino: Boringhieri.

Zan, R.: 2000a, '"Misconceptions" e difficoltà in matematica', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Vol.23A, N.1, 45-68.

Zan, R.: 2000b,'Le convinzioni', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Vol.23A, N.2, 161-197

Zan, R.: 2000c, 'Emozioni e difficoltà in matematica', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Vol.23A, N.3, 207-232 e N.4, 327-345.

Zan, R.: 2000d, 'Atteggiamenti e difficoltà in matematica', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* Vol.23A, N.5, 441-465.

Zan, R.: 2000e, 'A metacognitive intervention in Mathematics at University level', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* Vol.31, N.1.

Elenco dei testi da cui sono stati tratti brani esemplificativi

La scelta dei testi è stata operata senza particolari criteri, al solo scopo di esemplificare stili linguistici, e non sottintende quindi alcuna forma di critica.

Aicardi, L. & Zarattini, M.: 1994, *Aritmetica*, Milano: Bruno Mondadori.

Herstein, I.N.: 1982, *Algebra*, Roma: Editori Riuniti.

Maraschini W., M.Palma: 1987, *Matematica di base 1*, p.50, Torino: Paravia.

Naldi, Pareschi, Aletti: 2003, *Matematica I*, Milano: McGraw-Hill.

Olivieri, G., Castiglia, D., Bello, M.C.: 2003, *Compagno di Banco* – Matematica e Scienze, classe IV, Firenze: La Nuova Italia.

Glossario

In corsivo i rimandi ad altre voci in questo glossario

Analgebrico

È l'aggettivo usato da H.Bloedy-Vinner per indicare una classe di comportamenti o di modelli di pensiero adottati dagli studenti che apprendono algebra, collegati a difficoltà di conversione fra il *linguaggio verbale* e il *simbolismo* algebrico. Fra le cause di queste difficoltà sono indicate le diversità di organizzazione fra i testi verbali e quelli simbolici, la carenza di simboli di predicato in questi ultimi e l'attribuzione impropria di funzioni *deittiche* alle variabili.

Atto linguistico (e proposizione)

Si definisce proposizione quell'aspetto del significato di una frase che consente di identificare i referenti e stabilire se la frase è vera o falsa. Un atto linguistico riguarda anche le frasi non dichiarative (interiezioni, ordini, domande, ...) e include il fatto di produrre quella frase in quelle circostanze; oltre a una proposizione può quindi esprimere atteggiamenti, convinzioni, impegni, azioni del parlante (illocuzione) o modificare atteggiamenti, convinzioni, comportamenti del ricevente (perlocuzione). Questa distinzione è un classico della *linguistica* orientata alla *pragmatica* ed è in origine dovuta ad Austin (1962).

Coesione

È il modo in cui le diverse parti di un testo sono collegate, sia dal punto di vista grammaticale sia da quello semantico. Da non confondersi con la coerenza: un testo coeso può essere incoerente.

Congruenza semantica

L'idea di congruenza semantica è dovuta a Clark & Chase (1972) ed è stata ripresa da Duval (1995, pp.45 e segg.) che enumera tre criteri per verificare la congruenza di rappresentazioni. In questo libro è usata in senso largo per indicare la corrispondenza tra le unità dotate di significato di diverse rappresentazioni. La frase "3 è maggiore di 5", ad esempio, è congruente a "3>5" ma non a "5<3".

Contesto

Questa parola nell'ambito della *linguistica funzionale* assume significati più specifici rispetto all'accezione comune. Per questo uso parole come 'situazione', 'circostanze' per rappresentare l'accezione comune e 'contesto' per rappresentare quella specifica della linguistica. In linguistica testo e contesto non sono considerati indipendenti ma si influenzano reciprocamente. Diverse trattazioni distinguono fra livelli di contesto, quali ad esempio, il contesto di situazione, il contesto di testo (o co-testo), il contesto di cultura. Il contesto di situazione fa riferimento a caratteristiche quali spazio, tempo, interlocutori in quanto persone fisiche. Il co-testo fa riferimento ad altre parti (precedenti o successive) del testo in esame o eventualmente ad altri testi collegati. Il contesto di cultura fa riferimento ai sistemi di convinzioni e conoscenze collegati ai partecipanti allo scambio.

Conversione

È un termine del vocabolario di Duval. Indica la trasformazione di una rappresentazione in una rappresentazione di un diverso sistema semiotico.

Coordinamento (di sistemi di rappresentazione)

È un altro termine del vocabolario di Duval. È la capacità di prendere in considerazione contemporaneamente più rappresentazioni di uno stesso oggetto. Il coordinamento di sistemi semiotici svolge funzioni pratiche (consente di scegliere i *trattamenti* più economici) e cognitive (consente di separare i concetti dalle loro rappresentazioni).

Copione

Un copione (*script*) è uno dei modi di rappresentare la conoscenza che fa da sfondo alla produzione o all'interpretazione di un testo. Più precisamente, è una struttura di dati specializzata a trattare sequenze stereotipate di eventi.

Deissi, deittico

Vi sono parole (dette anche indicali) la cui interpretazione richiede informazioni sulla situazione in cui sono state prodotte. Tali parole si riferiscono al tempo in cui il *testo* viene prodotto (oggi, domani, l'anno scorso, …), agli interlocutori (io, tu, noi, …) e alla loro collocazione spaziale (questo, quello, laggiù, qui). Il tipo di riferimento associato a queste parole è detto 'deissi'.

Discorso

È un termine ampiamente usato in aree disciplinari diverse, più o meno collegate alla linguistica (sociolinguistica, psicolinguistica, filosofia del linguaggio, …), con diverse sfumature nelle definizioni.

Secondo la linguistica funzionale il discorso appartiene alla sfera interpersonale e include il testo (in quanto produzione linguistica) e il messaggio (che corrisponde grosso modo ai contenuti ideazionali del testo). Negli orientamenti più marcatamente 'culturali' il discorso è il processo di creazione e riproduzione del senso che avviene all'interno di formazioni sociali, istituzionali e storiche.

Focus
In termini strettamente linguistici, in una *proposizione* organizzata pragmaticamente il focus è quella parte di significato in virtù del quale ciò che viene asserito differisce da ciò che l'interlocutore conosceva o era pronto a prendere per buono prima di ascoltare. Sfard usa questo termine in senso largo, per indicare il significato fondamentale di un testo, quello che lo rende rilevante. Questa interpretazione è compatibile con la definizione dei linguisti.

Genre
È un termine dovuto a Bachtin. Un genre è un tipo di produzione linguistica relativamente stabile, determinato dalle caratteristiche specifiche della sfera comunicativa (dal punto di vista del tema, della composizione o dello stile). Vedere anche *registro* per un confronto fra i due termini.

Gerarchizzazione
È il processo che organizza gerarchicamente un *testo*. La sintassi (subordinazione, ecc.) o l'organizzazione spaziale e tipografica (titoli, sottotitoli, elenchi, …) sono fra gli strumenti utilizzati per esplicitare l'organizzazione gerarchica nei testi scritti. I *registri* evoluti (e in particolare quelli scientifici), al contrario di quelli colloquiali, producono testi altamente gerarchici.

Iconico
È iconica una rappresentazione che riproduce una o più caratteristiche di ciò che denota. Questa proprietà si applica anche ai *testi*. Ad esempio, se si deve raccontare una sequenza di eventi, hanno un grado di iconicità maggiore i testi in cui l'ordine delle frasi (spaziale se scritti, temporale se orali) corrisponde a quello cronologico dei fatti raccontati.

Implicatura
È quella parte di informazione ricavabile da un *testo* che non deriva dal suo contenuto dichiarativo ma piuttosto dall'ipotesi che il testo sia adeguato al contesto. Un'implicatura non ha il grado di certezza di una deduzione, in quanto è possibile pensare ad altre situazioni che rendono adeguato il testo in esame.

Indicali
(vedi **Deissi**, **deittico**)

Inferenza
Questo termine, che viene usato con sfumature diverse in logica e in filosofia, in *linguistica* indica soprattutto un processo di ragionamento, più o meno consapevole, utilizzato nell'interpretazione di un *testo*. In questa accezione l'inferenza comprende diverse forme di ragionamento, come la deduzione, l'induzione, l'abduzione, e anche *implicature*.

Lessicalizzazione
È il processo per cui un *registro* utilizza un numero crescente di termini specialistici, definiti esplicitamente e con precisione. I registri evoluti, al contrario di quelli colloquiali, sono altamente lessicalizzati. Nel *linguaggio matematico*, e in particolare nella componente *simbolica*, la pratica di definire nuovi termini è ampiamente usata (in qualche caso abusata). Nei linguaggi del I ordine la possibilità di aggiungere nuovi simboli di costante o di funzione è regolata da teoremi legati al nome di T.Skolem.

Lingua, linguistica
Una lingua è un *sistema semiotico* umano, storicamente determinato, che si distingue da altri sistemi semiotici, fra l'altro, per la sua creatività (cioè la possibilità di creare un insieme infinito di segni) e per la doppia articolazione (il fatto che ogni frase si possa scomporre in unità dotate di significato, i morfemi, e che ogni morfema si possa scomporre a sua volta in unità prive di significato, i fonemi). La linguistica è la disciplina che studia le lingue.

Linguaggio matematico
In base all'impostazione seguita in questo libro, fanno parte del linguaggio matematico *testi* verbali, espressioni *simboliche* e rappresentazioni visuali di diverso tipo. Il linguaggio matematico comprende diversi *registri*, da quelli usati dagli alunni di scuola primaria per discutere la soluzione di un problema a quelli usati nei testi universitari o negli articoli di ricerca.

Linguaggio verbale
Include orale e scritto. In questa presentazione è distinto dal linguaggio *simbolico* o da quello figurale. Nel corso della presentazione ho usato 'linguaggio quotidiano' per indicare i *registri* più comuni del linguaggio verbale. Non ho usato di proposito la locuzione 'linguaggio naturale' in quanto fuorviante (nessun linguaggio è 'naturale', meno che mai la componente verbale dei registri matematici avanzati).

Metafora
Figura retorica consistente nella sostituzione di un termine con un altro connesso al primo da un rapporto di somiglianza.

Metafora concettuale
È un termine usato da Lakoff e i suoi collaboratori. Nelle loro opere viene spesso denominata 'metafora'. Non è una figura retorica del linguaggio ma appartiene alla sfera cognitiva. Tecnicamente è definita come 'un'applicazione situata, fra diversi dominî, che conserva le inferenze' ('a grounded, inference-preserving, cross-domain mapping').

Metalinguistica (consapevolezza, difficoltà, ...)
Esistono due accezioni: quella più restrittiva dei linguisti e quella più inclusiva degli psicolinguisti. Per i primi 'metalinguistico' significa 'riferito al metalinguaggio', cioè al linguaggio usato per parlare di un altro linguaggio. Per i secondi sono metalinguistiche tutte le conoscenze e le attività consapevoli che hanno come oggetto il linguaggio, la sua natura e le sue funzioni.

Metonimia
Figura retorica consistente nell'estensione semantica di un termine dal suo significato usuale a un altro che abbia col primo una relazione di contiguità o dipendenza.

Nominalizzazione
È il processo che trasforma in un sostantivo una parola di categoria diversa (e.g., un aggettivo o un verbo), come nel passaggio da "Se da 12 sottraggo 7 rimane 5." a "La differenza fra 12 e 7 è 5." In questo libro si fa riferimento soprattutto alla trasformazione di verbi in nomi. Si parla anche di stile verbale e nominale.

Pragmatica
È il settore della *linguistica* che si occupa delle interazioni fra i sistemi linguistici e il mondo, o, in altre parole, del funzionamento dei sistemi linguistici nei loro *contesti* di uso. La grammatica è invece il settore che si occupa dell'organizzazione interna dei sistemi. Si parla talvolta di organizzazione pragmatica di un testo (sulla base dello schema *tema-rema*) in contrapposizione a quella sintattica.

Proposizione
È quell'aspetto del significato di un testo dichiarativo che consente di identificare i riferimenti e di stabilire se quanto è affermato è vero o falso. Questa nozione è spesso usata insieme a quella inclusiva di *atto linguistico*.

Registro
È una varietà linguistica basata sull'uso. Più in generale, è una costruzione che collega la situazione simultaneamente al *testo*, al sistema *linguistico* e al sistema sociale. Questa accezione è diversa da quella di Duval, per cui un registro è un sistema *semiotico* di rappresentazione, ma è conforme all'uso della linguistica anglosassone, di diversi libri di divulgazione linguistica in italiano (Altieri Biagi, 1985; Dardano & Trifone, 1985) e alle definizioni dei principali dizionari italiani (Devoto-Oli, Sabatini-Colucci). Un registro si forma per selezione delle risorse linguistiche disponibili a un soggetto, in relazione agli usi che intende farne. L'idea di registro e quella di *genre* non sono incompatibili. La prima è più rivolta agli aspetti linguistici, la seconda a quelli socioculturali.

Semiotica, sistemi semiotici
La semiotica include lo studio delle *lingue* e di altri sistemi di segni che lingue non sono, come ad esempio le notazioni *simboliche* o i colori di un semaforo.

Simbolico, simbolismo
In letteratura vi è un ampio spettro di espressioni per indicare i sistemi simbolici della matematica, come ad esempio i sostantivi 'simbolismo', 'notazione', 'codice', accompagnati da aggettivi come 'algebrico', 'matematico' o 'formale'. In questa presentazione i sistemi simbolici sono visti come particolari linguaggi del I ordine.

Similitudine
Figura retorica che consiste nell'instaurare esplicitamente un paragone, un rapporto di somiglianza fra due concetti.

Sociolinguistica
La *linguistica funzionale* è talvolta chiamata sociolinguistica.

Tema (e rema)
Un referente è il tema di una frase se questa è costruita con la funzione di esprimere informazioni rilevanti e che aumentano la conoscenza del destinatario su di esso.

Testo
Ogni produzione *linguistica* orale o scritta, non necessariamente formulata in un linguaggio verbale.

Trattamento
È un termine del vocabolario di Duval. È l'applicazione a una rappresentazione di trasformazioni che rimangono all'interno di un sistema *semiotico*.