Capitolo I

Linguaggio della matematica e difficoltà degli studenti tra secondaria e università

1.1. Introduzione

Obiettivo di questo lavoro è mettere in luce la possibilità di interpretare in chiave linguistica alcune difficoltà in matematica degli studenti all'inizio dell'università, e abbozzare un quadro di riferimento appropriato. L'ipotesi che una parte delle difficoltà in matematica delle matricole di corsi scientifici sia legata al linguaggio si basa sia sull'individuazione di errori e inadeguatezze di interpretazione o produzione dei testi, sia su altri comportamenti (omissioni, paralisi, mancata individuazione di forme o procedimenti semplici, rinuncia a revisionare i propri prodotti scritti) che possono essere ricondotti a difficoltà col linguaggio. Collegare a problemi di linguaggio questi ultimi comportamenti, o atteggiamenti, non è un'operazione banale e richiede strumenti relativamente sofisticati, se si vuole andare oltre le semplici congetture. Anche gran parte dei comportamenti più evidenti (come ad esempio testi non coesi o incoerenti) possono essere interpretati in modi diversi. Questo punto verrà sviluppato nella prossima sezione ('Come interpretare i testi prodotti?').

Nella sezione successiva ('Il linguaggio della matematica’) si sviluppa un quadro teorico per affrontare questi temi andando oltre ad alcune interpretazioni superficiali purtroppo diffuse. A questo scopo si individuano le caratteristiche fondamentali del linguaggio della matematica sulla base degli strumenti della linguistica funzionale (Halliday, 1985, 2004; Leckie-Tarry, 1995; Ferrari, 2004; O’Halloran, 2005; Schleppegrell, 2010) e si propone un modello interpretativo per alcune delle difficoltà documentate. Nella sezione conclusiva si individuano alcuni obiettivi per un’educazione linguistica che sia funzionale all’apprendimento della matematica. Questi obiettivi non devono essere necessariamente perseguiti dai soli insegnanti di italiano ma possono essere raggiunti attraverso il lavoro coordinato degli insegnanti delle diverse discipline, compresa la matematica.

1.2. Come interpretare i testi prodotti?

Gran parte dei dati e degli esempi illustrati in questo lavoro provengono da testi scritti prodotti da studenti del I anno di corsi di laurea scientifici (Scienze Biologiche, Scienze Ambientali, Chimica, Informatica) nello spiegare le loro risposte a problemi di matematica proposti sia in occasioni ufficiali o semiufficiali (esami, prove intermedie) sia in occasioni più informali (esercitazioni guidate; compiti assegnati, svolti e corretti attraverso una piattaforma per l’e-learning).

In tutte le prove di questo tipo agli studenti si richiede sistematicamente di motivare, o spiegare, in forma scritta le risposte. Questa pratica si basa sulla convinzione che lo scrivere testi argomentativi nel dominio della matematica possa aiutare la comprensione dei concetti e i loro collegamenti, e promuovere pratiche di apprendimento più efficienti rispetto allo studio mnemonico. Le metodologie di apprendimento basate sulla scrittura sono state introdotte da Emig (1983) e discusse in relazione alla matematica da

Morgan (1998).

Per un buon numero di studenti la produzione delle spiegazioni scritte è un ostacolo, in parte per la loro scarsa competenza linguistica o matematica, in parte perché non sono abituati a tali pratiche, che spesso entrano in conflitto con la convinzione diffusa che la matematica e il linguaggio verbale siano dominî distanti e incompatibili. Va sottolineato che i testi inappropriati o contenenti errori sono presi in considerazione a causa non della loro difformità rispetto agli usi matematici ma del fatto che questi comportamenti linguistici rendono molto difficoltosa qualunque forma di ragionamento astratto. Gli stessi studenti che producono testi vaghi e male strutturati sono in difficoltà quando richiesti di commentarli o revisionarli, in quanto non riescono a ricostruire, attraverso essi, un processo di pensiero.

1.2.1. *L'interpretazione dei testi*

L'interpretazione dei testi prodotti dagli studenti pone diversi problemi. Prima di tutto occorre domandarsi se i testi sono davvero il frutto di uno sforzo di spiegare il procedimento adottato o vengono prodotti con altri scopi.

Alcuni soggetti arrivano a considerare la soluzione di un problema matematico e la produzione di una spiegazione come due processi indipendenti, e le interviste svolte in qualche caso dopo la produzione del testo hanno evidenziato anche casi di soggetti che facevano riferimento nella spiegazione scritta a procedimenti diversi da quelli effettivamente adottati per risolvere il problema.

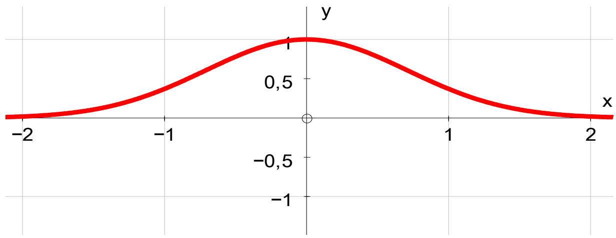
Alcuni studenti talvolta copiano qualche frase dal vicino (anche se gli è stato assegnato un problema diverso) o dagli appunti, o riportano frasi usate in un compito precedente. Si tratta delle cosiddette strategie pseudoanalitiche, ben descritte da Vinner (1997), che ha mostrato come in alcuni casi lo studente stia affrontando un problema diverso da quello assegnato. Non è sempre facile distinguere queste strategie dalle altre.

Ci sono poi altri casi in cui lo studente è condizionato da fattori metacognitivi o non cognitivi, che fanno sì che il testo non rifletta completamente il suo livello di competenza. Questo accade quando il soggetto scrive con poco tempo a disposizione, o in condizioni di tensione, o sulla base di particolari convinzioni e atteggiamenti sulla matematica in generale o sui concetti specifici affrontati. È frequente che numerosi studenti svolgano buona parte del compito in carenza di tempo, magari perché hanno sprecato la maggior parte di quello a disposizione per affrontare un solo problema. È anche frequente il caso di studenti che, pur avendo ancora tempo a disposizione, rispondono frettolosamente alle domande e non utilizzano il tempo rimanente per revisionare i loro prodotti, nemmeno se sollecitati a farlo. Per questi soggetti la prova sembra una sorgente di tensione che cercano di allontanare rispondendo in qualche modo, come per porre rapidamente fine a una situazione di disagio. Alcune spiegazioni del tutto incoerenti e insensate, a volte in palese contrasto coi dati di partenza o con il procedimento adottato, potrebbero essere spiegate in questo modo.

Anche nei casi rimanenti, quando il testo è veramente frutto di uno sforzo di spiegare il proprio procedimento, le eventuali inadeguatezze possono essere attribuite a un ampio spettro di ragioni, quali la scarsa competenza matematica o linguistica, o l’adozione di schemi argomentativi fallaci. Nella maggior parte dei casi non è facile distinguere fra tutti questi potenziali fattori, che possono anche essere mescolati fra loro. Vediamo qualche esempio.

Nella figura 1 è rappresentata la funzione esponenziale di equazione $y = e^{-x^2}$.

Figura 1



Diversi studenti non la riconoscono come una funzione esponenziale con motivazioni del tipo:

"… l'esponenziale va sempre a infinito …"

oppure:

"… l'esponenziale è crescente su tutto il dominio …"

Queste risposte possono essere interpretate in diversi modi. Può essere che lo studente non abbia afferrato l'idea di funzione esponenziale e che la sua risposta sia determinata dalla sua scarsa competenza matematica. Ma è anche possibile che il termine 'esponenziale' sia stato usato, più o meno consciamente, in modo rigido e che il soggetto gli abbia associato un'immagine stereotipata, come ad esempio il grafico della funzione di equazione $y = e^x$. In questo caso si tratterebbe di una convinzione impropria collegata a un uso rigido del linguaggio, che non esclude una comprensione sufficiente delle idee matematiche in gioco.

Un secondo esempio riguarda la lettura. Il testo di una prova di matematica includeva il passaggio:

"Trova quali sono i numeri primi p compresi fra 1700 e 2200 …, della forma p=2k+1, con k primo, per cui …"

Oltre il 90% dei candidati (un centinaio) non ha considerato la clausola "con *k* primo" e ha letto il testo come se fosse stato:

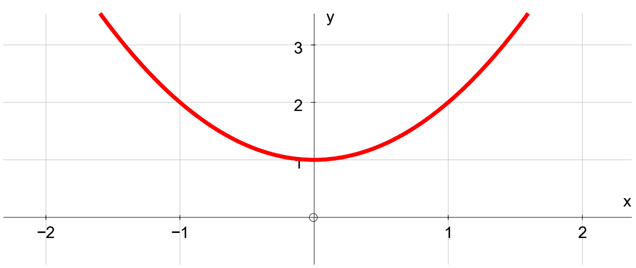
"Trova quali sono i numeri primi p compresi fra 1700 e 2200 …, della forma p=2k+1, per cui …"

senza rendersi conto che, in assenza della clausola successiva, la condizione "della forma p=2k+1" era del tutto inutile (tutti i numeri primi p diversi da 2 sono dispari, cioè della forma $p = 2k+1$).

Una percentuale così grande di cattive interpretazioni può essere legata a scarsa sensibilità al testo, o anche a strategie di lettura superficiali o improprie, come la ricerca di parole-chiave. Queste ultime possono a loro volta essere collegate alla convinzione che il linguaggio verbale ha scarsa importanza in matematica, e agli atteggiamenti conseguenti. C’è anche la possibilità che qualche studente abbia risolto il problema in analogia con qualche problema precedente, e che quindi non abbia nemmeno tentato di leggere accuratamente il testo. In tutti questi caso le difficoltà linguistiche da una lato e le convinzioni e gli atteggiamenti dei soggetti dall’altro possono concorrere, in proporzioni variabili da individuo a individuo, a provocare comportamenti come quelli illustrati.

Vediamo un altro esempio: nella figura 2 è rappresentato il grafico della funzione polinomiale di equazione $y = 1+x^2$.

Figura 2



Diversi studenti hanno usato il termine ‘flesso’ per descrivere l’andamento della curva in corrispondenza di x=0:

“*... la curva ha un flesso per x=0...*”.

Tale uso è improprio dal punto di vista matematico e non corrisponde a quanto molti di loro hanno appreso nella secondaria di II grado. Anche qui le interpretazioni possono essere diverse. Chi usa tale espressione potrebbe semplicemente non aver compreso il concetto matematico di flesso. Oppure il termine potrebbe essere stato utilizzato in modo inaccurato, magari col significato colloquiale e vago di ‘piegamento’; questo potrebbe essere frutto di atteggiamenti negativi nei confronti del linguaggio. Lo stesso comportamento potrebbe essere frutto non tanto di sciatteria quanto di una lacuna linguistica specifica, come nel caso di una studentessa originaria della Turchia, che ha usato quell’espressione in quanto non conosceva la parola italiana appropriata. È evidente che questi due ultimi casi (che si sono effettivamente verificati nella stessa prova) sono profondamente diversi e richiedono azioni diverse.

Vediamo ancora alcuni esempi di testi inaccurati, con a lato un tentativo (ovviamente soggettivo) di ricostruzione matematicamente sensata (le aggiunte sono sottolineate). In questi casi emergono problemi specifici di uso del linguaggio, che possono corrispondere in misura diversa a difficoltà specifiche coi concetti matematici in gioco. In qualche caso si ha la sensazione che lo studente avesse l’intuizione di una risposta appropriata, ma l’abbia espressa in forma sciatta.

“… la retta tende sempre più verso 0 …”	*… la pendenza della retta tangente alla curva tende a 0 al crescere di x.*
“Il polinomio ha il termine noto non passante per l’origine.”	*Il polinomio ha il termine noto diverso da zero. Il grafico del polinomio non passa per l’origine.*
“La derivata di zero è negativa, quindi è decrescente.”	*La derivata di f calcolata in zero è negativa, quindi f è decrescente in zero.*
“La derivata di f è positiva, quindi f è positiva.”	*“La derivata di f è positiva, quindi f è crescente.”*

I primi tre esempi di questa tabella mostrano esempi di uso sciatto del linguaggio. Testi di questo tipo sono purtroppo frequentissimi. Ci troviamo di fronte a frasi prive di parti essenziali, la cui interpretazione è possibile solo attraverso una massiccia (e benevola) dose di cooperazione comunicativa da parte del lettore.

Esempi come il quarto potrebbero rappresentare tentativi di rispondere alle domande per pura assonanza, senza modellizzare la situazione problematica. Una volta che si sa che la derivata di f è positiva, la risposta più semplice (per chi non sa o è convinto di non sapere di che cosa si sta parlando) e forse più rassicurante è affermare che f è positiva. Risposte di questo tipo vengono trovate molto frequentemente, e corrispondono a uno schema generale: se A gode della proprietà P, allora anche A* (che è in relazione con A) gode della proprietà P. La proprietà P può essere la positività, la crescenza, la parità e così via. Questi modelli di risposta (che dipendono probabilmente anche dall’abitudine a risolvere i problemi verbali attraverso la ricerca di parole-chiave) sono robusti, nel senso che sono difficilmente modificabili anche attraverso attività mirate.

Le difficoltà riguardano anche le notazioni simboliche della matematica. L’analisi di alcuni comportamenti contribuisce a chiarire come le difficoltà linguistiche possono influenzare le prestazioni in matematica. Un caso classico è l’omissione delle parentesi. Supponiamo che lo studente, nel corso della risoluzione di un problema debba scrivere l’espressione:

$$3\cdot(2+5)$$

e dimentichi le parentesi scrivendo:

$$3\cdot 2+5$$

È possibile che lui o lei tenga in mente il significato originario dell’espressione e quindi nel passaggio successivo scriva la formula:

$$3\cdot 2+5 = 21$$

che per un lettore esterno è sbagliata, ma probabilmente corrisponde al processo di pensiero di chi ha scritto; questa scrittura potrebbe portare alla soluzione corretta del problema. È inutile sottolineare, in situazioni come questa, la delicatezza del ruolo degli insegnanti, che potrebbero essere indotti ad attribuire allo studente due errori in sequenza, uno di modellizzazione e uno di calcolo, mentre invece lo studente ha modellizzato e calcolato correttamente, e ha solo trascritto il proprio processo mentale in modo non conforme alle convenzioni in uso.

È però anche possibile che lo studente non ricordi il significato originario dell'espressione e scriva:

$$3 \cdot 2+5 = 11$$

che è una formula corretta ma lo porterà probabilmente a una soluzione inadeguata del problema. In altre parole, una scrittura non conforme, se in qualche caso può essere funzionale alla soluzione appropriata di un problema, in molti altri diventa un ostacolo, in quanto lo studente non è in grado di ricostruire il proprio prodotto. In tutti i casi di questo tipo i soggetti sembrano considerare la scrittura come una traccia provvisoria del loro pensiero piuttosto che come un prodotto ispezionabile e riutilizzabile da sé stessi e da altri.

Una altro caso frequente è quello di studenti che operano trasformazioni del tipo

$$\frac{\cancel{4} \cdot 2 + 7}{\cancel{4}} = 2 + 7 = 9$$

ottenendo un risultato errato. In questo caso le proprietà algebriche che in altri casi consentono le trasformazioni vengono ridotte a gesti meccanici (la barratura di uno o più simboli) scollegati dalle condizioni che li rendono funzionali agli scopi. In questo modo anche le notazioni simboliche perdono la loro funzione di supporto del ragionamento e diventano oggetti fuori controllo.

1.3. Il linguaggio della matematica

Gli esempi della sezione precedente hanno mostrato che le difficoltà linguistiche in matematica riguardano almeno tre sistemi semiotici: il linguaggio verbale, le rappresentazioni figurali e le notazioni simboliche. È anche evidente la centralità del linguaggio verbale rispetto al resto, e anche la sua problematicità: in altre parole, la specificità del linguaggio della matematica non risiede soltanto nelle notazioni simboliche, e nemmeno nel solo lessico: fra gli esempi esaminati nella sezione precedente alcuni fanno riferimento all’organizzazione dei testi e mettono in luce come lo stile sciatto di molti studenti renda il linguaggio un ostacolo piuttosto che un sostegno del pensiero.

Si nota anche che alcuni testi prodotti dagli studenti sono funzionali ad alcuni scopi, in genere comunicativi, ma non ad altri. L’esame delle funzioni del linguaggio nell’insegnare e apprendere matematica mette in luce che esso è chiamato a svolgere due gruppi di funzioni nettamente diverse e divergenti: la comunicazione fra le persone (con tutto ciò che questo implica) e il fare matematica. Denominare ‘rettangolo’ un quadrato è perfettamente funzionale alle esigenze di organizzazione gerarchica dei concetti matematici, ma poco adatto alla comunicazione. Se vogliamo farci capire dobbiamo chiamare ‘quadrato’ un quadrato, e ‘rettangolo’ un rettangolo che non sia un quadrato. Una frase come *“La derivata di zero è negativa, quindi è decrescente.”* (citata nella sezione precedente) è probabilmente funzionale alla comunicazione fra studenti che stanno svolgendo lo stesso problema, magari con testo e grafico davanti agli occhi. La stessa frase diventa inutilizzabile al di fuori di quel contesto, in quanto la sua improprietà (l’omissione di un complemento necessario nella prima proposizione) e la sua indeterminatezza (la mancanza del soggetto della seconda) impediscono la ricostruzione univoca del significato a qualsiasi lettore, probabilmente compreso chi l’ha scritta.

Per tutti questi motivi il linguaggio della matematica va considerato da un lato come un sistema multisemiotico, che include (almeno) una componente verbale, una simbolica e una figurale, dall’altro come un sistema multivariato, con l’inevitabile tensione fra le diverse varietà linguistiche (da quelle colloquiali a quelle evolute) adottate nei processi di insegnamento-apprendimento. In altre parole, lo scarto tra i registri colloquiali (utilizzati in modo pressoché esclusivo da diversi studenti nel fare matematica) e quelli evoluti (su cui si basano i testi dei libri, delle lezioni, dei problemi di matematica) è una chiave di lettura che può dar conto di molti dei comportamenti degli studenti in relazione al linguaggio.

È necessario quindi andare oltre sia alle posizioni che, con diverse motivazioni, sottovalutano il ruolo dei linguaggi in matematica, sia alle interpretazioni superficiali o ideologiche, purtroppo molto diffuse nell'ambito dell'Educazione Matematica, che ne fraintendono usi e funzioni. Il punto cruciale è il rapporto tra il linguaggio quotidiano (talvolta qualificato, in modo fuorviante, 'naturale') e quello usato in matematica (talvolta qualificato, in modo ancor più fuorviante, 'formale'). La linguistica funzionale (Halliday, 1985, 2004; Leckie-Tarry, 1995; O'Halloran, 2005) offre gli strumenti adeguati per un'interpretazione del linguaggio della matematica che consenta di capire i comportamenti degli studenti, puntando l'attenzione sulle funzioni di rappresentazioni e testi. La nozione di registro gioca un ruolo fondamentale, in quanto è possibile mostrare (Ferrari, 2004) che il linguaggio della matematica presenta, in forma estrema, molti tratti che caratterizzano i registri che Leckie-Tarry (1995) classifica come evoluti (*literate registers*). La padronanza di questi ultimi è dunque un buon punto di partenza per praticare la matematica con successo. L'analisi dei registri, e in particolare di quelli matematici, si inserisce nel filone più ampio della *metafora grammaticale* (Halliday, 2004; O'Halloran, 2005) cioè delle metafore costruite attraverso variazioni dell'organizzazione grammaticale del testo piuttosto che attraverso variazioni lessicali. Le variazioni dell'organizzazione grammaticale trasformano testi *iconici* e *congruenti* in testi con caratteristiche opposte. Una delle variazioni più comuni è la *nominalizzazione*, cioè la trasformazione in nomi di espressioni di categoria diversa. Anche se un'analisi più approfondita di questo tema è al di fuori degli obiettivi di questo contributo, una caratteristica saliente del linguaggio della matematica è che esso realizza la metafora grammaticale, e in particolare la nominalizzazione, in forma estrema. Molti studenti sembrano a disagio con questo uso del linguaggio e preferiscono utilizzare descrizioni in stile verbale. Ad esempio, sono frequenti locuzioni del tipo " … la funzione *f* cresce … " per descrivere l'andamento di una funzione. Solo pochi studenti usano spontaneamente la corrispondente espressione nominalizzata " … la pendenza della funzione *f* è positiva … ". Anche qui il problema non sta nel fatto che lo studente non si adegua a uno stile. Piuttosto, la seconda locuzione richiama una grandezza (la pendenza) che può essere calcolata facilmente, e una volta calcolata può essere oggetto di confronti e ulteriori trasformazioni, mentre la prima locuzione, di per sé, non consente di andare oltre a una valutazione qualitativa. In altre parole, la rigidità delle scelte linguistiche e la mancata comprensione dell'equivalenza fra enunciati da parte di alcuni studenti li ostacola nella costruzione di una strategia efficace per risolvere i problemi.

1.4. Obiettivi per l'educazione linguistica

L'assunzione che il linguaggio della matematica non è una cosa diversa rispetto a quello quotidiano, ma ne è un'estensione basata sui registri evoluti di questo fornisce indicazioni abbastanza chiare circa gli obiettivi dell'educazione linguistica a ogni livello scolare. Anche la presa d'atto del fatto che il linguaggio della matematica è un sistema multisemiotico che oltre ai testi verbali mette in gioco almeno notazioni simboliche e rappresentazioni figurali ha conseguenze sull'insegnamento.

In un contesto di cooperazione tra l'educazione matematica e quella linguistica, quest'ultima dovrebbe mirare quindi alla costruzione e al potenziamento della capacità di ogni alunno di mobilitare consapevolmente le proprie risorse linguistiche per rispondere a scopi diversi e di controllare i prodotti. Si tratta quindi di costruire la flessibilità nel passaggio da un sistema semiotico all'altro, da un registro verbale all'altro e di potenziare le capacità di controllo. Attività in cui un testo viene costruito e valutato rispetto a scopi chiari e condivisi possono essere iniziate già nei primi anni della scuola primaria. In estrema sintesi, gli alunni dovrebbero fin dalla scuola primaria essere consapevoli che un testo è un prodotto che può essere ispezionato, modificato, valutato in relazione a contesto e scopi, piuttosto che in base a criteri di conformità a modelli prefissati. Esempi di attività di questo tipo sono illustrati da Ferrari (2004). Questo dovrebbe consentire di costruire la capacità di usare i registri evoluti come risposta consapevole a scopi noti e condivisi, piuttosto che come adeguamento a modelli astratti e percepiti come arbitrari. Il dominio della matematica, d'altra parte, può fornire all'educazione linguistica diversi esempi di situazioni in cui il linguaggio assume caratteristiche diverse da quello quotidiano, in relazione a diversi scopi che sono almeno in parte accessibili. Questo vale, ad esempio, per il lessico matematico, con la sua organizzazione inclusiva dei termini (e.g., quadrato $\rightarrow$ rettangolo $\rightarrow$ parallelogramma $\rightarrow$ quadrilatero), che contrasta con quella del linguaggio quotidiano, che privilegia le coppie di opposti. Vale anche per le notazioni simboliche, in cui la sintassi gioca un ruolo preponderante nella determinazione del significato di un'espressione.

Riferimenti bibliografici

Emig J. (1983), "Writing as a mode of learning", in Goswami, D. e Butler, M. (a cura di) *The Web of Meaning: Essays on Writing, Teaching, Learning and*

Thinking, Boynton/Cook Publishers, Upper Montclair, NJ, pp.123-31.

Ferrari P.L. (2004), *Matematica e linguaggio. Quadro teorico e idee per la didattica*, Pitagora, Bologna.

Halliday M.A.K. (1985), *An introduction to functional grammar*, Arnold, London.

Halliday M.A.K. (2004), *The Language of Science*, Continuum, London.

Leckie-Tarry H. (1995), *Language & context - A functional linguistic theory of register*, Pinter, London.

Morgan, C. (1998), *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation*, Falmer Press, London.

O'Halloran K.L. (2005), *Mathematical Discourse. Language, Symbolism and Visual Images*, Continuum, London.

Schleppegrell M.J. (2010), "Language in mathematics teaching and learning - A research review" in J.N.Moschkovich (a cura di), *Language and Mathematics Education. Multiple Perspectives and Directions for Research*, Information Age Publishing, Charlotte (NC-USA), pp.73-112.

Vinner, S.: 1997. "The Pseudo-Conceptual and the Pseudo-Analytical Thought Processes in Mathematics Learning", *Educational Studies in Mathematics*, 34, 97-125.