

**XXVIII SEMINARIO NAZIONALE DI RICERCA
IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA
"GIOVANNI PRODI"**

Rimini, 27-29 gennaio 2011

COMITATO SCIENTIFICO E ORGANIZZATORE: F. FERRARA (UNIV. TORINO), F. SPAGNOLO (UNIV. PALERMO), R.
TORTORA (UNIV. NAPOLI)

**RICERCA DIDATTICA NEI CAMPI DI ESPERIENZA, 1989-2010:
CONTRIBUTI SULLA COSTRUZIONE DEI CONCETTI E
SULL'APPROCCIO AL PENSIERO TEORICO IN MATEMATICA**

Paolo Boero *, Nadia Douek **, Rossella Garuti ***

*** Università di Genova, ** Université de Nice,**

***** Dottorato dell'Università di Modena e Reggio Emilia**

Introduzione

**I TESTI CITATI IN GRASSETTO SONO NELLA SEZIONE "TESTI PER APPROFONDIRE" DEL SITO
DEL SEMINARIO**

Prevalentemente basato sul nostro lavoro di ricerca e di implementazione didattica degli ultimi due decenni, gli scopi di questo **testo scritto** sono:

- presentare lo stato attuale del nostro **inquadramento teorico** dell'insegnamento e apprendimento della matematica "in contesti", spiegando come e perché l'abbiamo sviluppato nel confronto/nella differenziazione da altri quadri teorici, e ripensando, con riferimento ad esso, alcune parti del lavoro di ricerca passato;
- situare il nostro lavoro di **inquadramento teorico** nell'attuale panorama delle ricerche sullo stesso tema e su temi vicini o collegati, con alcuni **esempi di ricerche** connesse, riguardanti la costruzione dei concetti e l'approccio al pensiero teorico, prevalentemente **a livello di scuola primaria e secondaria di primo grado**;
- delineare possibili sviluppi del nostro **inquadramento teorico** e indicare problemi da risolvere relativi ad esso e alle ricerche connesse.

In relazione a tali scopi vedremo come (per bisogni interni di inquadramento e miglioramento delle nostre ingegnerie didattiche e opportunità/necessità di partecipare al dibattito in corso nella didattica della matematica) in alcuni casi abbiamo cercato di elaborare costrutti teorici originali, mentre in altri casi abbiamo adottato (se necessario, adattandoli) costrutti teorici e prospettive provenienti dalla ricerca a livello internazionale. Le scelte tra queste due possibilità sono state fatte confrontando i bisogni interni con le teorie esistenti all'esterno.

In termini più sintetici: speriamo con questo testo di riuscire a presentare il funzionamento della nostra "fabbrica di ricerca per l'innovazione" e della sua evoluzione, in particolare, negli ultimi 20 anni, insieme con alcuni dei suoi prodotti e delle sue attività di ricerca in corso.

Uno scopo collaterale di questo Seminario è preparare l'ossatura del libro sui "campi di esperienza" che ci siamo impegnati a preparare per Sense Publishers entro la fine del 2011.

Per quanto riguarda il filo conduttore della nostra presentazione, esso avrà due aspetti strettamente connessi: un aspetto didattico (connesso alle attività nelle classi) e un aspetto di ricerca (riguardante la ricerca su tali attività).

Sul versante didattico, il filo conduttore della nostra presentazione (lo stesso dagli inizi del nostro lavoro, 35 anni fa) sarà l'insegnamento-apprendimento della matematica attraverso attività in classe

riguardanti la realtà extra-scolastica (fisica, sociale o culturale - quest'ultima per noi include anche la matematica, in quanto la matematica extra-scolastica è diversa dall'usuale matematica della scuola: basta pensare ai "numeri in colore"...). Dal 1985 i titoli dei piani di lavoro delle tre classi della scuola secondaria di I grado, nel nostro progetto per tale ordine di scuola, riflettono bene tale scelta: "Uomo e natura, uomo e società, uomo e cultura". Se i temi-chiave sono sempre gli stessi, vedremo come i modi di considerarli ai fini dell'acculturazione degli allievi sono profondamente cambiati a partire dal 1976 per ragioni inerenti la sperimentazione dei progetti, i cambiamenti della società e il rapporto con il lavoro di ricerca esterno (sia in Italia che nel mondo).

Sul versante della ricerca, il filo conduttore riguarda i criteri di scelta e trattamento delle questioni di ricerca: il nostro lavoro di ricerca riguarda questioni che emergono dal lavoro in classe e da bisogni educativi più generali, si sviluppa attraverso il confronto con la ricerca contemporanea a livello internazionale e (nella maggior parte dei casi) ha ricadute sul lavoro in classe in quanto si traduce in attività innovative, cambiamenti metodologici, ecc. In tal senso possiamo riconoscerci nel paradigma italiano della "ricerca per l'innovazione".

L'insegnamento-apprendimento della matematica attraverso attività in classe riguardanti la realtà extra-scolastica è stato per noi il contesto di lavoro in cui la maggior parte delle nostre ipotesi di ricerca sono state elaborate, i nostri teaching experiments sono stati condotti e sono stati prodotti i nostri costrutti teorici originali (come il costrutto dei "campi di esperienza"; l'unità cognitiva tra il congetturare e il dimostrare; il modello dei "quattro modi" di generare la condizionalità degli enunciati; il "gioco delle voci e degli echi"; l'integrazione tra la teoria di Vergnaud dei concetti e la dialettica tra concetti comuni e concetti scientifici di Vygotskij; l'adattamento del modello di Habermas del comportamento razionale e la sua integrazione con il modello di Toulmin dell'argomentazione).

Il testo che segue presenta, come prima accennato, una immagine complessiva della nostra "fabbrica di ricerca per l'innovazione" e della sua evoluzione, in particolare, negli ultimi 20 anni. La presentazione orale sarà concentrata (con esempi tratti per lo più da lavori pubblicati) su una parte ridotta degli argomenti trattati. In particolare ci soffermeremo sui punti 5a, 5b, 6, 7, 9a, 9b. Nella replica potremo ulteriormente chiarire le questioni che abbiamo deciso di affrontare oralmente e/o altri punti di questo testo, se richiesto dai controrelatori o dal pubblico.

-1: Collegare la matematica con l'esperienza di tutti i giorni degli allievi

I progetti per la scuola primaria (dal 1980) e per la scuola secondaria di primo grado (dal 1976) sono stati costruiti tra il 1975 e il 1980 come radicale alternativa alla "matematica moderna": alternativa mirata all'insegnamento di una matematica "utile" per la vita e per capire i fenomeni naturali e sociali, e radicata nell'esperienza extrascolastica degli allievi. Ciò nella prospettiva di: collegare cultura sviluppata a scuola ed esperienza extra-scolastica con finalità di apprendimento; e, insieme, di preparare gli allievi a usare nel corso della vita gli strumenti culturali appresi a scuola.

Coerente con questa alternativa era il cambiamento radicale della focalizzazione del lavoro: si passava dal lavoro sulle *strutture* matematiche e logiche, ad attività finalizzate a introdurre e sviluppare *strumenti* matematici in modo contestualizzato. In quel periodo (fine degli anni '70) noi eravamo consapevoli che la nostra alternativa alla "matematica moderna" era in parte collegata, da un lato, alle prospettive della "scuola attiva" che si erano sviluppate nel corso del ventesimo secolo in diversi Paesi, e dall'altro agli orientamenti che andavano sotto il nome di "matematica nella realtà" (Castelnuovo, Freudenthal e altri), anche se con visioni culturali, epistemologiche ed educative diverse (a proposito del valore per noi "utilitaristico" della matematica, del significato per noi "strumentale" della matematica in relazione alla conoscenza delle realtà non matematiche, e della figura e del ruolo per noi "militante" dell'insegnante).

Nel corso degli anni '80 le nostre scelte culturali e didattiche hanno subito una graduale evoluzione, soprattutto in relazione: ai cambiamenti nella società (che rendevano improponibile la figura dell'insegnante come partecipe attivo della trasformazione della società in senso "progressista"); alla

ri-lettura attenta di Vygotskij (che ci comunicava l'idea di una cultura da trasmettere profondamente radicata nella storia e nella coscienza degli uomini e attirava la nostra attenzione sul compito di mediazione culturale dell'insegnante e sulle funzioni culturali e cognitive del linguaggio verbale); e al dialogo con la ricerca didattica di quegli anni e con persone di grande cultura che incontravamo nei convegni in Italia e all'estero. *Via via assumeva così rilievo l'insegnamento della matematica come occasione per gli allievi di accedere ad una parte importante del patrimonio culturale della nostra civiltà, all'interno di un processo di acculturazione più vasto basato sul ruolo cruciale dell'argomentazione per l'accesso alla "cittadinanza culturale"*. Questo cambiamento di prospettive ebbe come conseguenza il fatto che gli aspetti utilitaristici e pragmatici della matematica divennero aspetti da curare insieme ad altri (non più aspetti-chiave dell'insegnamento e apprendimento della matematica). Questo cambiamento di prospettive è ben rappresentato dalle espressioni utilizzate per il piano di lavoro della terza media: il titolo del 1976, "Uomo e produzione", divenne "Uomo e cultura" nel 1985. Inoltre anche il ruolo dell'insegnante si definiva meglio come "mediatore culturale" e come attivatore di processi argomentativi aventi una portata culturale e cognitiva molto più vasta rispetto alla funzione strumentale nella risoluzione dei problemi e nel controllo degli algoritmi. E la lettura di alcune pagine di Vygotskij relative alla coscienza, alla creatività e alle dinamiche personali dell'individuo nel contesto sociale ci portava a ri-leggere i lavori di Piaget degli anni '30 sui processi di adattamento per assimilazione e accomodamento (condensati nelle lezioni al College de France, 1942) e a ripensare al ruolo della soggettività nella conquista dell'autonomia.

Quando poi, a partire dalla fine degli anni '80 (articolo di Greeno del 1987, articolo-manifesto del 1989, libro di Lave e Wenger del 1991) si è sviluppata la teoria della "situated cognition" noi ci siamo trovati di fronte ad un quadro teorico più vicino all'impostazione *iniziale* del nostro lavoro, ma ormai con alcune importanti diversità culturali ed epistemologiche che ci hanno indotto a costruire un nostro quadro teorico (quello dei "campi di esperienza"). In effetti, l'importanza crescente attribuita alla trasmissione del sapere matematico come "valore culturale" aveva messo in primo piano il problema dell'approccio al pensiero teorico in matematica, e dello sviluppo delle competenze argomentative come condizione di accesso ad esso oltre che di controllo delle tecniche matematiche e, più in generale, come condizione di accesso al "discorso" culturale. *Ci interessava capire quale padronanza del linguaggio verbale fosse necessaria, e fosse possibile raggiungere, a partire dall'inizio della scuola primaria per accedere alla cultura matematica (e, più in generale, alla cultura!); e quali "contesti" potessero consentire lo sviluppo di tali competenze verbali e di forme di pensiero "teorico" prossime (o propedeutiche) al pensiero teorico in matematica.* Su tutte queste questioni la teoria della situated cognition non sembrava in grado di fornire risposte specifiche, ma solo una visione di alcuni processi di acculturazione (vedi nel seguito per una analisi più precisa delle differenze).

0. Il costrutto iniziale dei campi di esperienza (CdE) e le sue origini e motivazioni

(presentazione di Boero al Seminario Nazionale del 1989, e successiva plenaria a PME-XIII, nel luglio dello stesso anno; seminario di Boero a Paris-V, un anno dopo)

0a) motivazioni

0a1)- *Per quanto riguarda le scelte culturali*, in relazione alle trasformazioni del nostro modo di concepire l'insegnamento della matematica nel corso degli anni '80 oltre che alla complessità raggiunta dall'organizzazione didattica e culturale dei due nostri progetti era necessario un quadro di riferimento unitario in cui considerare la matematica come eredità culturale da trasmettere alle nuove generazioni, insieme con la matematica come insieme di strumenti per modellizzare e conoscere la realtà, e la conoscenza della "realtà" come valore formativo trasversale importante da perseguire in tutte le discipline. Questo richiedeva di organizzare il percorso formativo attorno ad alcuni nuclei tematici portanti, selezionati con attenzione alle ricadute possibili in campo matematico e nelle altre discipline ma anche al loro significato culturale generale.

0a2)- *Per quanto riguarda le scelte didattiche*, era necessario collocare l'insegnante, lo studente e la

conoscenza della "realtà" in una prospettiva evolutiva su tempi lunghi, affidata alle scelte dell'insegnante come motore dell'evoluzione del "sistema didattico" in classe, capace di combinare micro-scelte relative alle reazioni e agli apprendimenti via via realizzati dagli studenti (basate su vari tipi di mediazione - diretta e indiretta) con le scelte educative a lungo termine, ma anche di dare spazio all'allievo e alla sua "soggettività" nella costruzione delle conoscenze e nella conquista dell'autonomia;

0a3)- Per quanto riguarda il bisogno (interno e di comunicazione ad altri insegnanti) di omogeneità e consapevolezza culturale e metodologica, era necessario chiarire, all'interno dei progetti e nella presentazione di essi agli insegnanti interessati, molti presupposti teorici impliciti nel nostro lavoro e via via accumulati in oltre vent'anni di sperimentazione in classe. Nella seconda metà degli anni '80 la sperimentazione controllata (con "ritorni" dei materiali di verifica quadrimestrale e finale) dei progetti riguardava oltre 250 insegnanti in Italia (oltre 200 nella scuola elementare), e diversi insegnanti della ragione di Barcellona stavano adottando/adattando alla loro realtà varie unità didattiche del progetto della scuola media. In particolare quest'ultima situazione richiedeva una esplicitazione di certi nostri presupposti che potevamo dare per scontati in Italia (almeno per gli insegnanti impegnati nel rinnovamento dell'insegnamento). D'altra parte l'esplicitazione di tali presupposti in un quadro unitario appariva anche necessaria (come in effetti è avvenuto) per lo sviluppo stesso dei progetti.

0a4) Ed entravano in gioco anche altri fattori motivazionali dei ricercatori, collegati alla nostra partecipazione al dibattito internazionale sull'insegnamento-apprendimento della matematica (la CIEAEM dall'inizio degli anni '80, i congressi ICME, la scuola estiva francese a partire dal 1982, le iniziative promosse da H. G. Steiner, e PME a partire dal 1998). Attraverso tali contatti ci eravamo resi conto che il tempo dei dibattiti sull'insegnamento della matematica basato sul confronto di realizzazioni personali innovative esemplari e di posizioni culturali e pedagogiche generali era giunto al termine. La mathematics education si stava sviluppando in altri Paesi (come Francia, UK, Olanda, Germania, Israele, USA, Canada, Australia...) come area di ricerca con alcuni caratteri distintivi della ricerca scientifica (questioni di ricerca precise all'interno di un quadro teorico collegato alla letteratura internazionale, scelte metodologiche coerenti con tale quadro, sulla base delle quali condurre le attività sperimentali e le analisi dei dati raccolti, conclusioni strettamente collegate all'analisi dei dati,...), anche se opzioni molto diverse erano esercitate in paesi diversi e in "scuole" diverse per quanto riguarda, ad esempio, il ruolo degli insegnanti nelle attività sperimentali, l'autonomia o meno da altre discipline già affermate (come la psicologia dell'apprendimento), i rapporti con l'epistemologia e la storia della matematica, ecc. Le riviste più importanti dell'epoca (a partire da ESM) e alcuni congressi internazionali (come i congressi annuali di PME) secondavano/orientavano tale trasformazione con requisiti sempre più "scientifici" per l'accettazione dei lavori da pubblicare. Era frustrante per noi in quel periodo presentare articoli e proposte di comunicazioni a Congressi, basate su un lavoro esteso e originale di innovazione didattica, e vederli rifiutati nelle sedi più selettive per mancanza di requisiti scientifici. Ed era anche frustrante raccontare le nostre realizzazioni didattiche e non riuscire a inquadrarle in una prospettiva di "ricerca scientifica" che potesse renderle confrontabili con altre pratiche didattiche innovative. Appariva quindi necessaria una svolta nel nostro modo di sviluppare i progetti (per una decina d'anni rivolto più al coinvolgimento esteso degli insegnanti che alla qualità dell'indagine scientifica su quanto succedeva nelle classi). Appariva anche necessario collaborare con altri in Italia per stabilire rapporti sempre più stretti tra lo sviluppo della ricerca didattica in Italia e lo sviluppo della ricerca a livello internazionale, e per sviluppare in Italia forme di dibattito scientifico aperto al confronto a livello internazionale e basato sul confronto tra quanti riconoscevano la necessità di muovere in tale direzione (*il Seminario Nazionale è stato concepito con tali funzioni*).

Come vedremo al punto successivo, per quanto riguarda il lavoro del nostro Gruppo la nostra attenzione era soprattutto rivolta, nella seconda metà degli anni '80, alle ricerche di Gerard Vergnaud (in particolare, sul ruolo cruciale della *reference* per la costruzione dei concetti) e di Alan Bishop (sulle radici della matematica in culture e civiltà diverse), e ai primi sviluppi della Situated

Cognition negli USA; in Italia, alle ricerche di Mariolina Bartolini Bussi (che stava mettendo a punto il costrutto della "Discussione matematica" attorno al quale organizzare attività di insegnamento-apprendimento in classe nella prospettiva dell'activity theory).

0b) riferimenti per la costruzione del quadro teorico dei campi di esperienza

Alcuni di essi erano esplicitamente citati e discussi nella presentazione al Seminario Nazionale del 1989, altri si sono aggiunti nel periodo successivo, fino alla messa a punto del costrutto nel seminario a Parigi-5 del 1990. Come si può osservare l'attenzione era inizialmente rivolta più ai contributi riguardanti gli aspetti culturali e cognitivi-individuali dell'insegnamento-apprendimento della matematica "in contesto" che ai problemi relativi al ruolo dell'insegnante e delle interazioni in classe;

- la ricerca sul problem solving contestualizzato/non contestualizzato (R.Lesh, plenaria a PME nel 1985) aveva messo in evidenza che problemi nei quali la "situazione problematica" riguarda ambiti di esperienza famigliari sono molto più facili da risolvere (a parità di complessità e difficoltà del ragionamento matematico necessario) anche da parte di persone che di solito hanno difficoltà nella risoluzione dei problemi. Persone che in questi problemi che riguardano ambiti famigliari sono anche in grado di produrre strategie originali (rispetto a quelle esperite precedentemente);

- la ricerca nel campo della psicolinguistica (K. Nelson ed altri) aveva offerto molte evidenze sperimentali per l'ipotesi della dipendenza dal contesto dello sviluppo delle competenze linguistiche avanzate. Nel testo di Boero del Seminario Nazionale del 1989 era riportata una citazione da un lavoro di survey compiuto da Lucia French sulle ricerche del decennio precedente, citazione che servirà come spunto per nostre successive indagini e che tuttora è per noi un riferimento importante (nelle ricerche sui "contesti" naturali per lo sviluppo delle forme argomentative più importanti per il lavoro matematico e per la "razionalità" matematica). Nella citazione si sottolineava il ruolo cruciale (evidenziato da molteplici indagini sperimentali) del contesto nell'emergere e nell'uso dei connettivi linguistici con la varietà dei loro significati.

- le esperienze innovative condotte in Italia da Emma Castelnuovo e dal "gruppo romano" a partire dagli anni '60 sull'ipotesi metodologica dell'insegnamento della matematica (soprattutto della geometria) collegato all'osservazione e allo studio della "realtà", come pure (con premesse epistemologiche un po' diverse circa il rapporto matematica-realtà) i progetti didattici sviluppati in Olanda attorno alle idee di Hans Freudenthal a partire dagli anni '70, avevano dimostrato la praticabilità dell'ipotesi dell'insegnamento-apprendimento della matematica in contesti "reali". Secondo tale ipotesi, importanti contenuti matematici di base possono essere insegnati attraverso attività di problem solving riguardanti "realtà" famigliari agli allievi, nelle quali la matematica "organizza" la conoscenza della realtà e permette la risoluzione dei problemi. Hans Freudenthal e i suoi allievi avevano anche fornito (a partire dagli anni '70) successivi inquadramenti teorici (epistemologici e didattici) via via più sistematici e approfonditi per tale ipotesi di lavoro, culminati nel libro di A. Treffers (1987);

- la teoria della trasposizione didattica di Yves Chevallard (1984-1987) aveva messo a disposizione dei didatti della matematica: uno scenario in cui diversi soggetti (matematici, politici, curriculum designers, ispettori, autori di libri di testo per le scuole, insegnanti, ...) sono responsabili delle trasformazioni che il sapere matematico subisce passando dai testi ufficiali della disciplina a ciò che viene presentato come "matematica" in classe; e una prospettiva educativa in cui si ipotizza che il compito principale dell'insegnante debba essere quello di ri-contestualizzare la matematica dei matematici riportandola alle pratiche da cui ha tratto origine, per poi ri-decontestualizzarla e ricondurla progressivamente vicino alla matematica dei matematici;

- attorno al 1986 la dialettica strumento/oggetto di Regine Douady aveva fornito una sistemazione teorica soddisfacente (la "dialectique outil-objet") per l'idea che i contenuti matematici potessero essere introdotti come insieme di strumenti per risolvere problemi, e che tali strumenti potessero essere poi trattati e sviluppati come oggetti culturali (da reinvestire successivamente come strumenti

per risolvere nuovi problemi, ecc. ecc.);

- il lavoro di ricerca di Alan Bishop e di altri ricercatori, culminato nel libro di Bishop "Mathematical enculturation" del 1988, aveva mostrato come importanti settori dell'esperienza umana (come l'orientamento e il posizionamento nello spazio; la misura delle grandezze fisiche; lo scambio di merci e le relative operazioni di conteggio; ecc.) erano stati i "contesti" in cui nelle diverse civiltà si erano sviluppate le idee di base della matematica. L'idea e la terminologia dei "campo di esperienza" sono state suggerite soprattutto dalla lettura del libro di Bishop;

- nel corso degli anni '80, contatti personali di Boero con Gerard Vergnaud alla Scuola Estiva francese e in altre occasioni (come il seminario organizzato in Italia in vista dell'elaborazione dei programmi del 1985 per la scuola primaria) avevano avuto come risultato una particolare attenzione prestata a "contesti", come quello "delle monete e degli acquisti" e quello "delle ombre del sole", come "luoghi" in cui trovare molteplici occasioni per la costruzione dei diversi "sensi" e alcuni degli "invarianti operatori" (proprietà) dei concetti dell'aritmetica e della geometria elementare

- il quadro teorico della Situated Cognition dalla fine degli anni '80 si stava sviluppando attorno all'ipotesi che "il conoscere è inseparabile dal fare" (Greeno, 1989) intrecciata ad una concezione della cultura secondo la quale "tutta la conoscenza è situata in attività relative a contesti sociali, culturali e fisici" (Greeno & Moore, 1993). Secondo la teoria della Situated Cognition l'attività cognitiva non può essere separata dal contesto: il conoscere è *situato* e inseparabile dal contesto, dall'attività dalle persone, dalla cultura e dal linguaggio. Quindi l'apprendimento è visto come progressivo sviluppo delle performances personali attraverso situazioni adatte piuttosto che in termini di accumulazione di conoscenze, dato che "quello che si conosce è co-determinato dal soggetto e dal contesto". Lave e Wenger introdurranno all'inizio degli anni '90 (libro del 1991) il costrutto della "legitimated peripheral participation" come modello di insegnamento e di apprendimento: attraverso compiti "marginali", subordinati, il soggetto che apprende entra via via nella cultura del gruppo ("community of practice") a cui aspira a partecipare (o che si occupa della sua acculturazione) acquisendo non solo conoscenze e tecniche specifiche ma anche specifici modi di fare e di rapportarsi agli altri che fanno parte integrante della partecipazione culturale a quel gruppo. Vedremo in seguito le ragioni del nostro differenziarci sempre più netto da tale prospettiva; occorre però riconoscere che nella fase di costruzione del quadro teorico dei "campi di esperienza" essa ha pesato non poco (per analogia e per differenza), soprattutto dopo la conferenza plenaria di Boero a PME nel 1989 e le sollecitazioni ricevute in tale occasione a confrontarsi con la Situated Cognition.

0c) Il costrutto "Campo di esperienza" (CdE)

Il costrutto del CdE veniva presentato nella conferenza plenaria a PME-XIII (1989) così: *"settore dell'esperienza (effettiva o potenziale) degli allievi identificabile da loro, con specifiche caratteristiche che lo rendono (sotto la guida dell'insegnante) adatto per attività di modellizzazione matematica, di problem solving matematico, ecc. Esempi sono i CdE delle macchine, delle monete e degli acquisti, delle produzioni in classe, del calendario, dei numeri, delle ombre del sole..."*

"Ogni campo di esperienza può essere considerato sotto tre punti di vista: quello dell'insegnante ("contesto interno dell'insegnante"), quello dell'allievo ("contesto interno dell'allievo") e quello degli elementi oggettivi e delle relazioni tra essi che rendono un campo di esperienza riconoscibile dall'esterno ("contesto esterno")".

Dopo le discussioni seguite alla presentazione a PME e durante il seminario a Parigi-V la presentazione è stata modificata nel modo seguente:

"Un CdE è un settore della cultura umana identificabile dagli allievi come parte della loro esperienza (effettiva o potenziale), con specifiche caratteristiche che lo rendono (sotto la guida dell'insegnante) adatto per attività di modellizzazione matematica, di problem solving matematico, di costruzione e sviluppo di concetti matematici, ecc. Esempi sono (come sopra)..."

"Ogni campo di esperienza può essere considerato sotto tre punti di vista: quello dell'insegnante ("contesto interno dell'insegnante", CII, che comprende le sue rappresentazioni mentali a proposito del campo di esperienza, i suoi schemi che gli permettono di agire con sicurezza in esso, le sue attese a proposito del suo utilizzo didattico in classe, ecc.), quello dell'allievo ("contesto interno dello studente", CIS, che comprende le sue rappresentazioni mentali a proposito del campo di esperienza, i suoi schemi a proposito delle azioni in esso, le sue attese a proposito di come comportarsi in classe per fare fronte alle richieste dell'insegnante relative ad esso, ecc.) e quello degli elementi oggettivi e delle relazioni tra essi che rendono un campo di esperienza riconoscibile dall'esterno ("contesto esterno", CE: gli oggetti materiali, le rappresentazioni grafiche, i testi, le convenzioni sociali e i vincoli che ne derivano, le relazioni fisiche tra le sue parti e i vincoli che ne derivano, ecc.). I tre "contesti" evolvono nel corso dell'azione didattica in classe e nell'esperienza a più lungo termine dei soggetti coinvolti."

Tale definizione è rimasta sostanzialmente invariata fino ad oggi, salvo precisazioni ulteriori che hanno messo in evidenza:

- la "riconoscibilità" anche in base a script (che ci permettono di distinguere, ad esempio, il significato della parola "rotazione" nel campo di esperienza delle macchine e nel campo di esperienza delle coltivazioni) (criterio peraltro già presente nella presentazione al Seminario Nazionale del 1989);
- il riferimento del termine "cultura" a concezioni di matrice vygotskiana (come sarà quella di Hatano e Wertsch, 2001), i cui i caratteri distintivi sono (in sintesi) il passaggio da una generazione all'altra (trasmissibilità), la presenza di artefatti attorno ai quali si sviluppano relazioni sociali, le attività relative a tali artefatti;
- il carattere evolutivo dei tre contesti, che comprende anche la loro evoluzione per effetto delle esperienze extrascolastiche (che nel caso dell'allievo possono entrare in rapporto di sinergia con quelle in classe: si pensi al CdE delle monete e degli acquisti); l'evoluzione è significativa anche per quanto riguarda il contesto esterno, di cui entrano a far parte via via (ad esempio) produzioni culturali personali o socialmente condivise in cui si cristallizzano conoscenze e comportamenti;

Precisazioni ulteriori sulla definizione, e problematizzazioni di alcuni suoi aspetti sono contenute nella tesi di Nadia Douek (2003).

In una prospettiva educativa, le tre componenti CII, CIS, CE erano considerate (e sono ancora considerate) tre poli evolutivi del processo di insegnamento-apprendimento. Il modello iniziale, piuttosto rozzo, di tale processo veniva così descritto: *in relazione al suo CII, l'insegnante interviene sul CIS sfruttando in modi diversi (secondo gli obiettivi di apprendimento e le risorse del CE) il CE stesso. Le reazioni degli studenti alle iniziative dell'insegnante vengono interpretate dall'insegnante secondo il suo CII, e così viene preparato ed effettuato un nuovo intervento sul CIS (sono sfruttati nuovi elementi del CE, tra i quali anche le produzioni verbali e grafiche degli studenti). Le tre componenti del CdE si modificano nel tempo (compreso il CII, in relazione alla conoscenza degli studenti e, su tempi più lunghi, all'esperienza didattica e culturale via via accumulata).*

Possiamo osservare (in vista di riflessioni in punti successivi) che il CE include, già nelle formulazioni iniziali della teoria, non solo testi, oggetti materiali, segni relativi ad un dato CdE, ma anche regole socialmente condivise e necessità/vincoli fisici, ecc. Questa scelta era relativa all'opportunità di considerare, nell'insegnamento-apprendimento della matematica nei CdE, non solo il ruolo di mediazione culturale dell'insegnante, esercitato attraverso testi ed altri segni, ma anche quei processi di adattamento piagetiano degli studenti (per assimilazione e accomodamento) che, in particolare, consentono di costruire così tanti teoremi-in-atto per i concetti matematici. La nostra scelta non esclude che certi "oggetti" del CE possano o debbano subire dei processi di *instrumentalisation* (alla Rabardel) sotto la guida dell'insegnante, ma sottolinea il fatto che altri "oggetti" del CdE sono immediatamente presenti con i loro vincoli nell'esperienza (diretta o

potenziale) dell'allievo e che allora l'insegnante può fare leva su quei vincoli (fisici o sociali) per provocare l'adattamento dell'allievo.

Confrontando il triangolo CII-CIS-EC con l'usuale triangolo della didattica: Insegnante-Studente-Conoscenza, possiamo meglio comprendere la distanza del nostro costrutto da altri costrutti elaborati negli anni '80, come quello della Teoria delle Situazioni Didattiche; ma possiamo anche riconoscere delle parentele con costrutti di derivazione più o meno direttamente vygotiskiana, come quello della Situated Cognition. Infatti la conoscenza è vista nel nostro caso come un qualcosa di inter-personale che si sviluppa nel rapporto evolutivo tra CII, CIS e EC, e quindi come una entità in evoluzione inseparabile da tali componenti del CdE. Essa si cristallizza (temporaneamente) nelle rappresentazioni semiotiche (testi, figure,...) del CE; per diventare "operativa" e insieme evolvere ha però bisogno di entrare nelle relazioni tra CII, CS ed EC. Centrale è dunque l'attività che si sviluppa tra i tre poli del CdE.

Come abbiamo accennato prima, vent'anni fa il nostro modello era rozzo sul terreno più propriamente didattico, in quanto non erano modellizzate nella teoria dei CdE le azioni dell'insegnante, la natura delle interazioni insegnante-allievo/i e tra allievi, le forme di mediazione dell'insegnante. In proposito possiamo però rilevare che la pratica didattica degli insegnanti (condivisa nelle riunioni, in media, quindicinali dei gruppi in cui si articolava la sperimentazione) era molto più avanzata e ricca di quanto allora teorizzato, con "pratiche" innovative assai efficaci (come quella del "prestamano", in particolare per la mediazione di forme complesse di ragionamento verbale; o quella del confronto di testi e di strategie risolutive di problemi) descritte nei Rapporti Tecnici dei progetti e accompagnate da molti esempi concreti di lavoro in aula.

Come vedremo, il nostro modello verrà arricchito nella prima metà degli anni '90 introducendo il ciclo didattico del "gioco delle ipotesi" e successivamente, nella seconda metà degli anni '90, il "gioco delle voci e degli echi" e infine, pochi anni fa, il costrutto della Didattica dei Campi di Esperienza (DCdE), basato (con attenzione peraltro alla flessibilità necessaria - come nel caso del "Gioco delle voci e degli echi") sul ciclo didattico fondamentale che può essere rappresentato schematicamente così:

....--> produzione individuale (o in piccoli gruppi) assistita, se necessario, dall'insegnante con il "prestamano" o altre tecniche ---> discussione in classe, guidata dall'insegnante, di prodotti selezionati dall'insegnante ----> sintesi provvisoria delle conclusioni raggiunte, individuale o mediata dall'insegnante ---->

- vedi una anticipazione in **Douek-ESM-1999 BOERO-DOUEK Carrefours Ed-2008**; e una sistemazione in **BOERO-DOUEK Carrefours Ed-2008**;

Un ciclo didattico fondamentale può innestarsi su un ciclo precedente, oppure seguire una discussione introduttiva a un tema nuovo, oppure innestarsi sulla preparazione alla produzione individuale di "eco" nel "gioco delle voci e degli echi", realizzata attraverso la lettura della "voce" sotto la guida e con la mediazione dell'insegnante.

Come vedremo, oggi il costrutto della DCdE deve confrontarsi con il modello della mediazione semiotica presentato da Bartolini e Mariotti al Seminario Nazionale 2010.

1. Revisione del costrutto dei CdE e suoi sviluppi, negli anni '90

1a) miglioramento e arricchimento delle ingegnerie didattiche attorno al costrutto teorico di "ipotesi"...

... elaborato da Enrica Ferrero e quindi estesamente implementato nelle nostre classi nel periodo 1992-1996, anche in relazione all'importanza assunta dal formulare e gestire ipotesi nelle schede valutative proposte dal Ministero in quegli anni, esso include molti tipi di ipotesi: interpretative, predittive, progettuali, esplicative... - vedi articolo di **Boero&Ferrero-IPOTESI-IMSI**. Nella

nostra elaborazione sono da sottolineare: l'importanza attribuita alla motivazione argomentata delle ipotesi (gli insegnanti che lavorano con noi si sono via via abituati a considerare più importante una motivazione ben argomentata di una ipotesi che non reggerà la successiva verifica, rispetto ad una ipotesi valida ma non argomentata); e l'importanza attribuita al processo di verifica argomentativa delle ipotesi anche in ambiti (come quello delle ombre del sole, o delle molle) in cui in certi casi sarebbe possibile una immediata verifica sperimentale. Si tratta di scelte coerenti con l'importanza attribuita al pensiero teorico e all'argomentazione nella "svolta" culturale del nostro Gruppo negli anni '80. Le riflessioni teoriche connesse a queste scelte e le sperimentazioni estese in classe ci hanno suggerito due tipi di sviluppi:

- un inquadramento teorico efficace, nelle attività in opportuni campi di esperienza, per il lavoro sull'approccio al congetturare e al dimostrare resosi necessario non come compromesso con esigenze di sopravvivenza dei nostri alunni nella scuola "tradizionale", ma come scelta qualificante della nostra offerta formativa (vedi penultimo paragrafo della sezione -1), tanto è vero che abbiamo anticipato l'approccio al congetturare e al dimostrare rispetto ai tempi dell'insegnamento tradizionale. L'inquadramento del congetturare e del dimostrare nel "gioco delle ipotesi" è possibile in quanto le congetture sono particolari ipotesi (secondo la nostra definizione di "ipotesi"- vedi **Boero&Ferrero-IPOTESI-IMSI**);

- una particolare routine, basata sulla produzione individuale delle ipotesi seguita dal confronto in classe tra alcune delle ipotesi prodotte (selezionate dall'insegnante) e sulla discussione di esse, fino a pervenire a conclusioni provvisorie da sottoporre (se ancora discordanti, o non esaurienti) a ulteriori indagini. Tale routine dieci anni dopo avrebbe assunto un posto centrale nella "didattica dei CdE" (vedi **BOERO-DOUEK Carrefours Ed-2008**). Questo sviluppo ci ha permesso di cominciare a distinguere tra una *prospettiva dei CdE* (in senso culturale ed educativo generale) e una *didattica dei CdE* (come insieme di metodi didattici nella prospettiva dei CdE). Possiamo anche rilevare che con la routine discussa è stato possibile avviare un confronto costruttivo con il lavoro del Gruppo di Modena (Bartolini Bussi) sulla "discussione matematica", in quanto siamo riusciti ad armonizzare un focus sull'individuo e sui suoi processi produttivi (nella fase di produzione delle ipotesi) con un focus sulla gestione produttiva delle discussioni in classe sui prodotti degli allievi (che richiedeva un inquadramento teorico come quello offerto dalla "Discussione matematica").

1b) migliore collegamento tra il costruito dei CdE e la teoria di Vergnaud dei campi concettuali

L'articolo di Vergnaud sulla teoria dei campi concettuali (1990), accuratamente tradotto in italiano da Francesco Speranza e pubblicato sulla rivista La matematica e il suo insegnamento, è diventato presto un riferimento-chiave per i ricercatori e gli insegnanti-ricercatori del gruppo, in quanto la definizione di Vergnaud dei concetti (vedi contributo di Nadia Douek, in appendice) ci consentiva, da un lato, di sfuggire alla maniera tradizionale di considerare i concetti come "astrazioni" da esperienze "concrete" multiple, e dall'altro, di mettere ordine nella progettazione a lungo termine e nella valutazione dell'insegnamento e dell'apprendimento dei concetti più importanti della matematica. In effetti attraverso l'articolo di Vergnaud (che faceva seguito a suoi contributi in conversazioni cominciate alla Scuola Estiva francese del 1982) noi potevamo concepire l'insegnamento e l'apprendimento di un concetto come un processo a lungo termine, che si sviluppa ed è accessibile a verifica secondo le tre componenti del concetto (le situazioni di riferimento, gli invarianti operatori, le rappresentazioni linguistiche). In questo modo il collegamento con il lavoro di Vergnaud si faceva più stretto (dopo i contributi che avevano così tanto influenzato la nostra stessa concezione dei "campi di esperienza" in relazione all'importanza attribuita da Vergnaud alle "situazioni di riferimento" come depositarie dei "sensi" di un concetto). Una ulteriore evoluzione del collegamento si realizzerà con la tesi di Nadia Douek (2003).

1d) sviluppo dei legami teorici tra campi di esperienza e modellizzazione matematica

A partire dagli anni '80 e in modo più preciso (come vedremo nella prossima sezione) nel corso degli anni '90 (vedi **PME-XIX FORUM**, 1995) abbiamo messo a fuoco almeno tre tipi di situazioni di uso della matematica nei campi di esperienza, nelle quali la modellizzazione

matematica svolge funzioni diverse e presenta difficoltà diverse:

- il caso del campo di esperienza del denaro e degli acquisti, in cui la modellizzazione matematica corrisponde perfettamente al funzionamento sociale dei fenomeni considerati; possiamo parlare in tal caso di modelli matematici "normativi" in quanto oltre alla funzione di descrizione di quanto accade essi hanno anche una funzione di regolazione delle transazioni tra gli umani (esempi più elaborati in tal senso sono quello del noleggio di una macchina, o della determinazione del costo di una corsa di taxi "a tassametro");
- il caso del campo di esperienza delle ombre del sole, nel quale la modellizzazione matematica fornisce strumenti descrittivi, interpretativi e predittivi che si sovrappongono e in alcuni casi entrano in conflitto con rappresentazioni mentali che appaiono del tutto spontanee (come quella dell'ombra-"tappetino") o culturalmente indotte (come quella dell'ombra-"doppio" così vicina all'idea di "anima"), senza però una collocazione culturale esplicita di tali rappresentazione nella nostra cultura (vedremo però che così non è in altre culture!);
- il caso del campo di esperienza della trasmissione dei caratteri ereditari, nel quale la modellizzazione probabilistica entra in conflitto con rappresentazioni mentali che non solo sono indotte dalla cultura di appartenenza, ma in parte sono anche collegate a concezioni esplicite presenti in tale cultura.

La presenza di tali, diversi casi (che presentano difficoltà didattiche e culturali di gestione molto diverse!) ci ha indotto a riflettere sul processo di modellizzazione matematica in relazione ai campi di esperienza e a cercare un inquadramento unitario per tale processo e per le sue ricadute e ostacoli nell'apprendimento della matematica.

L'articolo di Dapuetto&Parenti su ESM, 1999 offre una presentazione concisa e sistematica di un quadro in cui situare le attività di modellizzazione (interne o esterne alla matematica) nella prospettiva dei "campi di esperienza", contribuendo a chiarire il rapporto tra modello matematico e conoscenza della realtà modellizzata. Il quadro proposto deriva dal costrutto di "modello" di Norman, molto aperto e flessibile (rispetto all'usuale modo di intendere i modelli matematici delle scienze) nel considerare "modelli" delle costruzioni culturali che possono rappresentare aspetti particolari di realtà diverse (situazioni, fenomeni) e insieme dare accesso a particolari conoscenze su tali aspetti.

2. Che cosa il costrutto dei CdE e la sua implementazione didattica nelle classi ha consentito di produrre negli anni '90 sul versante della ricerca?

In quel periodo la ricerca era soprattutto rivolta all'interno, al miglioramento dei progetti; una parte dei temi trattati e dei risultati conseguiti hanno dato luogo a presentazioni esterne sotto forma di contributi ai Convegni Internuclei di quel periodo, di 24 Research Reports presentati da ricercatori e insegnanti-ricercatori del nostro Gruppo (pubblicati negli atti di PME nel periodo 1990-2003) e di comunicazioni in altri Convegni internazionali (come la CIEAEM).

Vengono di seguito elencati alcuni dei contributi che consideriamo oggi più importanti per possibili sviluppi futuri e/o per l'evoluzione delle nostre ricerche (anche grazie alle sollecitazioni e ai contributi critici ricevuti dall'esterno: dai reviewer PME e dai partecipanti alle nostre presentazioni).

2a) i CdE e lo sviluppo delle competenze argomentative

Come abbiamo visto, nel corso degli anni '80 la svolta nelle scelte culturali di fondo dei nostri progetti aveva posto in primo piano il problema dello sviluppo delle competenze argomentative in vista dell'accesso alla "cittadinanza culturale" e in collegamento con lo sviluppo del pensiero teorico in matematica. Occorreva quindi chiarire se, e soprattutto come, il lavoro nei CdE potesse contribuire allo sviluppo delle competenze argomentative. In effetti abbiamo già visto che a partire

dagli anni '70 le ricerche nel campo della psicolinguistica avevano messo in evidenza la "situatedness" di quelle forme di espressione che sono componenti-chiave dell'argomentazione e, più in particolare, dell'organizzazione e espressione del pensiero teorico in matematica (implicazioni, costrutti ipotetici, forme avversative...). In un RR PME del 1990 di Boero vengono riportati i risultati di una indagine sistematica effettuata in alcune nostre classi di scuola elementare a proposito dell'emergere, nell'uso spontaneo degli alunni, di forme espressive del pensiero ipotetico: si vede come nella stragrande maggioranza dei casi ciò avviene in contesti famigliari agli allievi, con significati talvolta vicini a quelli propri dell'argomentazione matematica (due esempi dal CdE delle produzioni in classe: "se dici che per fare la spremuta hai messo l'arancia sullo spremiagrumi, quello che dici non è quello che fai, l'arancia sullo spremiagrumi vuol dire l'arancia tutta intera, le tue parole sono diverse da quello che fai, se uno esegue quello che fai non riesce a fare la spremuta o si sbrodola tutto perchè l'arancia scoppia", classe II; "se calcoli la somma dei costi dei 21 panini per la nostra classe e fai la moltiplicazione di 21 per il costo di un panino non usi una strategia tanto diversa, perché la somma fatta tante volte è una moltiplicazione, invece Luca che separa 21 panini in 10 panini e 10 panini e 1 panino per calcolare moltiplicazioni più facili e poi fare le somme, lui sì che usa una strategia diversa", classe III). Nel corso degli anni (fino a evidenze sperimentali raccolte negli ultimi due anni nell'ambito del progetto genovese sullo sviluppo della competenze argomentative dalla scuola dell'infanzia alla fine delle scuole secondarie superiori, nel quadro di PLS) si sono accumulate molte "prove" del potenziale notevole delle attività argomentative in ambiti famigliari agli allievi come contesti favorevoli al manifestarsi di competenze vicine alle forme argomentative necessarie per lo sviluppo e l'espressione del pensiero matematico (e ciò fin dalla scuola dell'infanzia! CdE delle "regole": "se usciamo in fila io e poi un altro e poi un altro ci mettiamo più tempo che se usciamo di fianco io con un altro, e altri due...", "ma se non dici che dobbiamo tenerci per mano viene fuori una grande confusione, dobbiamo dire che dobbiamo tenerci per mano e fare un bel disegno della regola che ce la ricordiamo"). Naturalmente gli alunni che producono tali espressioni non le creano ex-novo; in realtà l'estrazione socio-culturale gioca un ruolo decisivo (attraverso l'esposizione a tali forme argomentative nella vita di tutti i giorni) al loro emergere a scuola in particolari alunni; alcuni di questi alunni però "ci mettono di proprio" significati nuovi legati al contenuto della conversazione. Il problema didattico (che presenteremo in seguito come problema di ricerca attuale) è quello di come far sì che queste prestazioni di pochi diventino il più precocemente possibile prestazioni di tutti.

2b) CdE come contesti per la costruzione dei concetti (continuazione dagli anni '80) e approccio ai sistemi simbolici della matematica

In opportuni CdE abbiamo identificato situazioni didattiche particolarmente favorevoli per una costruzione "facile" e "naturale" di "sensi", di "teoremi in atto" e di "rappresentazioni semiotiche" di alcuni concetti-chiave della matematica di base: quasi tutti i "sensi" e diversi "teoremi in atto" e "rappresentazioni semiotiche" del concetto di numero naturale e delle operazioni di addizione e sottrazione, nei CdE del "calendario" e delle "monete e acquisti", in I (vedi presentazione di Ezio Scali al Seminario Nazionale, e il suo contributo alla Scuola Estiva Francese del 2009, in corso di pubblicazione); alcuni "sensi" e "teoremi in atto" del concetto di misura (nel RR PME-XXIV di **DOUEK&SCALI-PME-XXIV**, 2000); i "sensi" dinamico e statico e alcuni "teoremi in atto" del concetto di angolo (Douek, RR PME XXII, 2008) nel piano e poi nello spazio (compreso il senso connesso all'altezza angolare del sole: vedi **Douek, ESM 1999**), e il concetto di parallelismo con alcuni suoi "teoremi in atto", nel CdE delle ombre del sole, dalla III alla IV primaria e in I media (RR presentato da Boero, PME-XVIII, 1994); vari "sensi", "teoremi in atto" e "rappresentazioni semiotiche" del concetto di proporzionalità, a partire dalla scuola primaria e poi nei primi due anni della scuola secondaria di I grado, nei CdE delle "ombre del sole" e delle "produzioni in classe", dell'"antropometria", poi anche delle "figure geometriche" e delle "molle" (RR presentato da Garuti, PME-XVIII, 1994).

Abbiamo anche identificato situazioni per introdurre il linguaggio algebrico come strumento per rappresentare il ragionamento algebrico (dopo una messa a punto sulla caratterizzazione di strategie

di tipo diverso per risolvere uno stesso problema - vedi RR presentato da Boero a PME XVI) in campi di esperienza diversi (non matematici, come "economia" e "molle", e matematici, come "figure geometriche" - e relative aree) e per sviluppare la sua padronanza in vista di compiti più impegnativi- come quello del trattamento di disequazioni quadratiche in una prospettiva funzionale, nel campo di esperienza matematico "equazioni e funzioni": vedi RR presentati da Boero e da Garuti a PME-XXI). In generale, a proposito dell'approccio ai linguaggi simbolici dell'aritmetica e algebrico abbiamo cercato (con sufficiente successo formativo) di adottare soluzioni ad hoc sempre basate sulla formalizzazione di situazioni ormai ben consolidate dal punto di vista della padronanza dei significati da parte degli allievi, con il ricorso al campo di esperienza delle calcolatrici tascabili (sia in V elementare che in II media) per sviluppare consapevolezza delle regole sintattiche e al campo di esperienza dell'algebra nella storia (in III media) per guidare gli allievi alla comprensione delle funzioni del linguaggio algebrico. Non disponiamo tuttavia ancora di un discorso organico e di un itinerario didattico coerente e completo dalla I primaria alla classe III della scuola secondaria di primo grado come quello delineato dal progetto ArAl del Gruppo coordinato da Nicolina Malara (su prospettive epistemologiche e culturali in parte diverse: ci differenzia il peso e il significato delle attività di modellizzazione di fenomeni e situazioni extramatematiche nell'approccio ai linguaggi simbolici dell'aritmetica e algebrico). Vedremo che questo è un obiettivo che ci siamo posti recentemente e su cui stiamo lavorando per la scuola primaria, per migliorare i risultati di apprendimento attuali (sufficientemente buoni ma probabilmente migliorabili).

2c) CdE come contesti per lo sviluppo di dinamiche mentali importanti nel lavoro matematico

L'osservazione di alunni di scuola elementare e media impegnati nella risoluzione individuale di problemi aritmetici (soprattutto nei campi di esperienza riguardanti l'economia e il tempo) e nella produzione e validazione di ipotesi riguardanti fenomeni complessi (soprattutto nel caso del campo di esperienza delle ombre del sole) ci ha suggerito di approfondire, a partire dalla fine degli anni '80, il problema delle "dinamiche mentali" nelle attività matematiche (dalla risoluzione dei problemi, all'individuazione delle trasformazioni algebriche necessarie per risolvere un problema con l'uso del linguaggio algebrico - quindi anche al di là del livello della scuola media). Osservazioni accurate di Ezio Scali, Maria Grazia Bondesan e altri insegnanti di scuola primaria e media avevano in effetti evidenziato come le *difficoltà* a gestire processi di anticipazione, di richiamo in memoria e proiezione in avanti (rispetto alla situazione passata), di "arretramento" relativo nel passato rispetto ad una situazione pensata nel futuro, di coordinamento simultaneo *avevano come risultato l'insuccesso* in quelle attività matematiche che richiedono una iniziativa personale creativa. La letteratura internazionale degli anni '90 ci incoraggiava a cercare di modellizzare alcune dinamiche mentali importanti nel lavoro matematico (vedi articolo di Simon su ESM-1996). Il lavoro nei campi di esperienza extramatematici ci offriva un osservatorio particolarmente adatto per identificare dinamiche mentali significative anche al di fuori dell'ambito specifico in cui erano state evidenziate. Una descrizione-classificazione di dinamiche mentali che intervengono nel problem solving è nell'articolo di sintesi di Guala e Boero del 2000. Risultati precisi e dettagliati (per lo più suggeriti da osservazioni nel campo di esperienza delle ombre del sole e nel campo di esperienza dell'aritmetica/"proprietà dei numeri") sono stati pubblicati nel RR presentato da Boero a PME-XXIII (1999). I risultati concernono un modello di produzione della condizionalità degli enunciati articolato in quattro modi di produzione. Questo risultato è stato recentemente riconsiderato da alcuni "giovani ricercatori" italiani nel contesto DGS, con evidenze sperimentali precise per alcuni dei modi di produzione modellizzati. Per quanto ci riguarda abbiamo abbandonato tale tema di ricerca perché ci sembrava che, nonostante il suo interesse scientifico per la ricerca di base, esso non avesse ricadute didattiche rilevanti (che invece potrebbe avere nel contesto DGS, in quanto potrebbe servire per disegnare con precisione compiti adatti per attivare le diverse dinamiche).

2d) CdE come contesti adatti per l'approccio al pensiero teorico in matematica

In relazione alla svolta degli anni '80 nell'orientamento culturale e nella finalizzazione dei nostri progetti, una delle ipotesi alla base della teorizzazione dei CdE era che un inquadramento unitario

di CdE matematici e non matematici potesse favorire lo sviluppo di ingegnerie didattiche capaci di sfruttare le potenzialità di diversi CdE per costruire le capacità di produrre e validare "congetture". Già negli anni '80 disponevamo infatti di esempi di pensiero teorico matematico "naturalmente" prodotti in contesti non matematici, e d'altra parte (come già indicato in precedenza) le ricerche di psicolinguistica evidenziavano il potenziale dei contesti famigliari agli allievi nell'emergere di forme argomentative importanti per il pensiero teorico in matematica. Un ulteriore aiuto allo sviluppo delle ricerche sull'approccio al pensiero teorico in matematica nel quadro unitario dei CdE ci è venuto dalla ricerca sulla produzione e la gestione delle ipotesi, grazie al costruito teorico di "ipotesi" prodotto da Enrica Ferrero (che comprende ipotesi di vario tipo - comprese le congetture matematiche).

Possiamo identificare quattro fasi successive di lavoro:

- un primo passo (corrispondente ai RR presentati da Garuti a PME-XVI e da Boero a PME-XVIII) in cui siamo riusciti a identificare alcuni meccanismi e condizioni che avevano consentito ad alunni di prima e seconda media di produrre enunciati condizionali e di validarli nel campo di esperienza dell'aritmetica elementare e nel campo di esperienza delle ombre del sole;
- un secondo passo (corrispondente ai due RR PME di Boero e di Garuti del 1996 -vedi **BOERO & C., TEOREMA BASTONI** e al RR di Boero del 1998) in cui, a partire dall'osservazione di allievi di III media alle prese con la produzione e la validazione di una ipotesi/congettura relativa a un problema di geometria dello spazio nel campo di esperienza delle ombre del sole (a partire dalla domanda... "è possibile che due bastoni non paralleli producano ombre parallele sul terreno?") si identificavano dinamiche mentali che avevano come risultato la produzione della congettura e legami stretti tra il processo di congettura e il processo di validazione/dimostrazione (*"unità cognitiva dei teoremi"*); l'unità cognitiva (molto importante per permettere agli allievi una costruzione autonoma della dimostrazione, nelle attività di approccio ai teoremi) veniva poi identificata anche in altre situazioni problematiche di congettura e dimostrazione in campi di esperienza diversi;
- un terzo passo (su cui ha poi riferito **PARENTI & C**) in cui studenti di terza media sono stati in grado di costruire e confrontare, sotto la guida dell'insegnante, due sistemi assiomatici ridotti all'essenziale per la "geometria delle ombre" e per la "geometria della visione" con i quali dimostrare in un caso, e giustificare la non-validità nell'altro caso, di uno stesso enunciato riguardante la condizione necessaria e sufficiente affinché un rettangolo venga trasformato in un parallelogramma. Da notare che nel nostro lavoro abbiamo approfittato delle ricerche condotte dal Gruppo di Bartolini Bussi sulla rappresentazione dello spazio visibile (da noi interpretato come "campo di esperienza della geometria della visione"), mentre in quegli stessi anni il Gruppo di Bartolini Bussi ha condotto una ricerca sull'approccio al pensiero teorico nel "campo di esperienza" degli ingranaggi;
- un quarto passo (in parte in parallelo con il precedente) in cui abbiamo sviluppato il "gioco delle voci e degli echi" come strategia didattica, concepita in una prospettiva vygotskiana e basata sull'imitazione attiva e consapevole delle "voci", al fine di favorire l'accesso degli allievi a conoscenze e forme di ragionamento che sarebbero praticamente inaccessibili in una ipotesi "costruttivista, alcune delle quali che giocano un ruolo cruciale anche nella dimostrazione. I campi di esperienza in cui abbiamo sviluppato teaching experiment sul "gioco voci-eco" sono stati finora quello della caduta dei gravi, quello dell'aritmetica elementare e quello delle molle - vedi **VOCI-ECHI 2001 INTERNUCLEI**, per una sintesi in italiano, e la riconsiderazione di quelle ricerche nell'intervento di Garuti a questo Seminario.

3. Confronto e differenziazione da altre prospettive teoriche prossime, negli anni '90

3a. Activity theory(es)

L'attenzione di queste teorie ci sembrava rivolta al ruolo dell'insegnante come organizzatore didattico e mediatore culturale, con diverse scale di intervento e di analisi (dal macro-livello delle scelte sull'insegnamento a lungo termine, al micro-livello della gestione in classe delle singole situazioni didattiche). Nel dibattito di quegli anni in seno ai teorici dell'activity theory c'erano problemi interessanti anche per noi - come quello dei meccanismi di interiorizzazione (dal livello interpersonale al livello intra-personale) che noi cercavamo in parte di risolvere con il "gioco delle voci e degli echi"; e quello della transizione dall'accesso mediato alla cultura, al contributo personale autonomo alla cultura. In quel periodo l'activity theory(es) ci appariva una derivazione riduttiva dal lavoro di Vygotskij. In effetti l'elaborazione di Vygotskij è sempre dialettica, con polarizzazioni chiare: l'individuo e la società; l'insegnante e lo studente; l'imitazione e la creatività; i concetti quotidiani e i concetti scientifici. La "dialetticità" (secondo la tradizione filosofica tedesca a cui esplicitamente si riferisce Vygotskij) è una prospettiva in cui collocare e studiare la natura e i contributi dei poli dialettici all'evoluzione del sistema che li comprende, e, viceversa, studiare come i poli sono progressivamente modificati dal processo dialettico. Ripensando a tale dialetticità e al nostro lavoro degli anni '90 possiamo dire di aver sviluppato le attività di ricerca nella prospettiva dei CdE con un procedere a tentoni, per "prove ed errori", in molti casi interessandoci ai singoli allievi come individui e ai loro processi e alla loro crescita intellettuale (con sullo sfondo l'insegnante e le sue decisioni), in altri casi occupandoci delle strategie didattiche dell'insegnante (con attenzione ai loro effetti sugli allievi), in altri casi ancora focalizzando l'attenzione sulle interazioni tra insegnanti e allievi. Possiamo dire ora che la prospettiva dei CdE ha funzionato negli anni '90 come ambiente di ricerca dinamico in cui stabilire collegamenti con particolari sviluppi dell'activity theory (in particolare, nell'interpretazione di M. Bartolini Bussi), senza però sviluppare un quadro teorico del tipo "activity theory" per le riserve che avevamo (e ancora abbiamo) sul suo focus prevalente sull'insegnante e sull'interazione sociale.

3b) Situated cognition

Fin dai suoi primi sviluppi negli anni '80 la Situated cognition è stata un riferimento per noi per quanto riguarda alcune idee-chiave (come quella della cultura come "medium" contestualizzato, distribuito ed evolutivo). Ma come già accennato in precedenza dobbiamo dire che abbiamo anche identificato forti differenze. Pensiamo che esse dipendano da un tipico modo anglo-americano di interpretare una prospettiva teorica di origine europea-continentale (in questo caso, il pensiero di Vygotskij). La specificità delle discipline con i loro aspetti epistemologici, la (relativa) stabilità di certe acquisizioni culturali attraverso la storia e le civiltà, la natura non negoziabile della "verità" una volta stabilite sufficienti premesse, come pure l'irriducibile differenza tra le posizioni di potere e culturali dell'insegnante e degli allievi in classe sono a nostro avviso punti su cui i modi in cui in Germania, Italia, Paesi nordici si concepisce una prospettiva vygotskiana in campo educativo si differenziano dalla Situated cognition. Queste differenze a nostro avviso hanno come risultato lo scarso spazio riservato allo sviluppo del pensiero teorico a scuola e l'attenzione rivolta invece alla costruzione di competenze matematiche informali in "comunità di pratica" fuori della scuola negli attuali indirizzi che si ispirano alla Situated cognition nel campo della didattica della matematica negli USA e in altri Paesi (come si è potuto constatare nella conferenza plenaria di J. Matos, attuale presidente di PME, a PME-34).

3b - Realistic Mathematics Education (RME, Freudenthal Institute)

Mentre condividevamo (e condividiamo ancora) le loro ipotesi sulla necessità di costruire le conoscenze e le abilità matematiche di base a partire da attività di problem solving il cui "contesto" ("task context") è adatto al raggiungimento dell'obiettivo matematico fissato e, insieme, familiare agli allievi (in modo che possano "raffigurarsi" la situazione problematica, matematica o non matematica), ci differenziavamo e ci differenziamo da loro per quanto riguarda: il fatto che nella RME la realtà matematica è solo una occasione per l'accesso e lo sviluppo di strumenti e conoscenze matematiche - non un investimento culturale e una fonte/occasione di costruzioni

cognitive complesse, anche senza ricadute immediate in campo matematico; e il fatto che la metodologia didattica si sviluppa tutta attorno al "problem solving realistico" con lo scopo di ricostruire il sapere matematico. Non è chiaro il ruolo dell'insegnante quando si tratta di ri-costruire oggetti matematici (come il linguaggio algebrico) e modi di ragionare (come il dimostrare) non facilmente accessibili attraverso il problem solving. Le strategie di imitazione attiva nella ZPD degli allievi non sono prese in considerazione. Queste che per noi sono carenze possono aver favorito la penetrazione della RME negli Stati Uniti come pure lo sviluppo di ricerche e di ingegnerie didattiche riguardanti la modellizzazione matematica e gli aspetti pragmatici della matematica, il "calculus" (analisi matematica su base parzialmente intuitiva) e la statistica piuttosto che l'algebra e la "cultura dei teoremi".

4. Cosa mancava nella nostra prospettiva dei CdE attorno all'anno 2000

4a) sul versante della concettualizzazione e delle attività verbali

Nel periodo 1985-1998 noi avevamo progressivamente elaborato e implementato in classe strategie didattiche che consentivano agli studenti di sviluppare competenze verbali (in particolare, argomentative), in particolare al fine di accedere al pensiero teorico e riflessivo (la didattica delle ipotesi aveva dato un grosso contributo in tal senso). D'altro canto avevamo anche migliorato le nostre strategie didattiche per lo sviluppo della concettualizzazione nei CdE. Con riferimento a Vygotskij, l'articolo di Vergnaud (1990) sui campi concettuali aveva posto in primo piano il ruolo del linguaggio verbale (insieme con gli altri linguaggi della matematica) nella padronanza dei concetti e nelle attività matematiche (pur in una prospettiva che continuava a fare riferimento a Piaget per quanto riguarda i processi di costruzione dei concetti "per adattamento"). La lettura e riletture del capitolo VI di "Pensiero e linguaggio" aveva suggerito di considerare una prospettiva a lungo termine per l'evoluzione della padronanza dei concetti da parte degli allievi nel contesto scolastico.

Alla fine degli anni '90 questi "ingredienti teorici" non erano integrati tra loro; e le funzioni del linguaggio verbale nel processo di costruzione e sviluppo dei concetti non erano affatto chiare. In particolare, l'argomentazione era vista soprattutto come chiave di accesso alla validazione delle congetture e delle ipotesi.

A partire dal teaching experiment (progettato e realizzato con Ezio Scali nella sua classe) sulla costruzione del concetto di "altezza angolare" (... del Sole) (vedi **Douek-ESM-1999**), Douek ha cominciato a sviluppare un quadro teorico complesso dove si integrano la teoria di Vergnaud dei concetti, la dialettica vygotskiana "concetti quotidiano-concetti scientifici", e l'ipotesi sulla costruzione e lo sviluppo argomentativo dei concetti nella didattica dei campi di esperienza, culminato nella sua tesi di dottorato del 2003 e in successivi lavori, e "problematizzato" nel contributo a questo Seminario.

D'altra parte, con riferimento all'ipotesi di Bruner sulla funzione "costitutiva" del linguaggio verbale nella costruzione della conoscenza e all'ipotesi di Sfard sul potere generativo della comunicazione verbale per quanto riguarda la conoscenza, Valeria Consogno nella sua tesi di laurea (2004), e poi anche Boero e Guala hanno cominciato a esplorare processi individuali e collettivi di costruzione verbale delle conoscenze al fine di individuare meccanismi specifici per la costruzione delle conoscenze matematiche.

4b) per quanto riguarda l'approccio e lo sviluppo del pensiero teorico

Gradualmente abbiamo sviluppato la consapevolezza della necessità di un quadro teorico unitario per la varietà di forme di attività relative al congetturare e al dimostrare (esplorazione, problem solving, organizzazione e controllo di una catena deduttiva di affermazioni all'interno di una teoria, sistemazione delle congetture e delle dimostrazioni secondo criteri standard di formulazione, ...). Consideriamo i research reports presentati da Boero e da Garuti a PME-XX (1996) - vedi **BOERO**

& C., TEOREMA BASTONI, sulla continuità cognitiva che per certi teoremi può sussistere tra il congetturare e il dimostrare, come pure i research reports di Douek a CERME-1 e a PME-XXIII e nel libro *Theorems in School* sulle relazioni e sugli aspetti comuni tra l'ordinaria argomentazione e la dimostrazione (nonostante le loro differenze epistemologiche così sottolineate nella letteratura - vedi Duval). Essi avevano complessivamente messo in evidenza come il carattere di problem solving delle fasi esplorative e costruttive doveva essere messo in relazione con la tensione verso un prodotto conforme con i requisiti della dimostrazione matematica al fine di ottenere una prospettiva educativa equilibrata.

4c) sul versante antropologico

Quello che secondo noi mancava era una risposta convincente a una questione specifica emersa dal dibattito (o dalla mancanza di un vero dibattito?), verso la fine degli anni '90, a proposito della necessità di insegnare matematica come materia obbligatoria a tutti i livelli scolastici (contro la tendenza, negli USA e altrove, di considerarla materia opzionale nella scuola secondaria superiore, riservata a quanti vogliono continuare gli studi in economia, scienze o tecnologia): *perché insegnare e imparare matematica per almeno dodici anni?*

Le risposte più frequenti in quegli anni per tale domanda erano abbastanza facili da contestare:

la matematica come insieme di strumenti utili per la vita di tutti i giorni (in realtà, bastano gli strumenti matematici insegnati nei primi 7 od 8 anni di scuola, al resto fanno fronte i software disponibili); la matematica come occasione per educare la mente alla concentrazione e al rigore (l'informatica è altrettanto se non più esigente!); la matematica come strumento per capire le leggi della natura e dei fenomeni sociali e controllare il loro uso (nella realtà, la vera comprensione di quelle leggi e soprattutto il controllo della loro interpretazione e del loro uso sono troppo impegnativi per persone non altamente specializzate oppure, quando sono accessibili, non dipendono dalla padronanza dei loro aspetti matematici); la matematica come campo di sfide intellettuali (altre discipline scientifiche, in particolare l'informatica, condividono tale caratteristica).

Per quanto lo riguarda personalmente, Boero ha dovuto affrontare la questione del senso della matematica durante la sua visita in Eritrea nel 1999: la scoperta di un modo di pensare il fenomeno delle ombre del sole altamente sofisticato e non matematico, capace di rendere conto della maggior parte dei suoi aspetti più immediatamente esperiti. Un modo di pensare, presente nella cultura locale, basato su un equilibrio dinamico tra luce e buio, in cui le ombre sono l'espressione dell'opposizione del buio alla luce e dell'equilibrio momentaneo tra le rispettive forze. Un modo di pensare non matematico ma che ha in sé elementi di base con cui concepire (ad esempio) l'evoluzione dei sistemi biologici e la stessa modellizzazione matematica di fenomeni di "equilibrio dinamico" (es.: predatore-preda). La questione originaria "perché insegnare e imparare matematica per almeno 12 anni?" si è così trasformata in un'altra questione: come caratterizzare o comportamenti matematici nel confronto con altri comportamenti culturali (in matematica - tra algebra, geometria e analisi; tra matematica e altre scienze; e tra matematica standard e comportamenti culturali di altre culture - come nell'esempio precedente). Ma, come vedremo al punto successivo, tale questione era anche collegata a precedenti problemi irrisolti di analisi e scelta derivanti da osservazioni nelle nostre classi.

4d) connessione tra le prospettive del pensiero teorico, e antropologica: Il protocollo di Lucia

Prodotto in una classe di III media (con l'insegnante Rossella Garuti) a metà degli anni '90, il protocollo di Lucia ha costituito oggetto di riflessione per noi e per gli insegnanti che lavorano con noi per una decina d'anni, prima di poter essere inquadrato in un modo che comincia ad apparirci soddisfacente. Il protocollo di Lucia non è un exploit isolato: protocolli simili sono stati raccolti in altre classi italiane e catalane, nel campo di esperienza delle Ombre del sole e nel campo di esperienza della Trasmissione dei caratteri ereditari.

Lucia affronta il "problema dell'ombra nell'intercapedine", un problema per noi paradigmatico: nato

nella situazione particolare di Camogli (cittadina arroccata in faccia al mar Ligure) grazie alla sensibilità di un nostro insegnante-ricercatore (Teresa Gazzolo) e alle curiosità dei suoi bambini di IV riguardanti il fenomeno delle ombre del sole (sono i bambini che si sono posti il problema di dove finisse l'ombra di un muretto in una profonda intercapedine a fianco della Rotonda di Camogli), è diventato uno strumento di ricerca che ha consentito, ad esempio, di evidenziare la permanenza di concezioni di ombra-"tappetino" e di ombra-"doppio" in laureati della Facoltà di Scienze (insegnanti di scuola secondaria e allievi SSIS).

Nel suo elaborato Lucia parte dalla concezione dell'ombra-tappetino e dal principio che l'ombra-tappetino ha bisogno di una superficie per appoggiarsi per concludere (dopo una serie di argomentazioni stringenti svolte con linguaggio rigoroso) che l'ombra non finisce da nessuna parte, perché tutte le parti su cui potrebbe appoggiarsi sono escluse in quanto contraddicono la concezione dell'ombra-tappetino e/o il principio della superficie d'appoggio e/o la propagazione rettilinea della luce.

La storia dell'elaborato di Lucia comincia con la sua valutazione comparativa con altri elaborati in un corso di aggiornamento per insegnanti di scienze della scuola media nel 1996: esso suscita una reazione violenta in molti insegnanti, che (come giudizio più benevolo) lo considerano come "stravagante" o si chiedono se la bambina ha voluto prendere in giro l'insegnante, o se la bambina ha problemi di salute mentale o di ritardo di sviluppo. La qualità dell'elaborato in termini argomentativi viene ignorata, e gli vengono preferiti (nella graduatoria delle valutazioni) altri elaborati che risolvono il problema con un disegno insicuro (senza le spiegazioni richieste).

Interrogandoci nel Gruppo su tali reazioni ci rendevamo conto della distanza che ormai ci separava da una visione dell'insegnamento della matematica e delle scienze come trasmissione delle conoscenze "vere", e dalla valutazione delle ipotesi in base alla loro correttezza e non alla qualità dei processi di produzione. Restava però il problema del valore e del significato da dare all'elaborato di Lucia al di là della qualità del suo processo argomentativo, e del come gestirlo in classe (qualora, come in effetti avviene, un altro elaborato del genere fosse stato prodotto in un'altra classe). Mancava uno strumento di inquadramento equilibrato e "sensibile" ai valori culturali in gioco nella prestazione di Lucia.

5. la concettualizzazione nei campi di esperienza: risposta a 4a)

5a. sviluppo del "dialogo" Vygotsky - Vergnaud sui concetti, e problematizzazione della concettualizzazione

(CONTRIBUTO DI NADIA DOUEK - ALLEGATO)

5b. La funzione costruttiva-constitutiva del linguaggio verbale nella costruzione dei concetti

Non è difficile, analizzando protocolli individuali di "esperti" (ad esempio, bravi studenti universitari di matematica) e di discussioni tra pari (in un contesto educativo favorevole, in cui è stato diffuso il valore dell'ascolto reciproco e dell'interesse al confronto costruttivo con gli altri) trovare esempi in cui si vede come la conoscenza può progredire attraverso il dialogo con se stessi mediato dalla scrittura e dalla lettura di quello che si è scritto, nel primo caso, e attraverso il confronto con i pari, nel secondo caso. Ciò trova riscontro in quadri teorici come quelli di Bruner e (con riferimenti specifici alla matematica) della Sfard. Non sono tuttavia teorizzati i meccanismi attraverso cui la conoscenza matematica progredisce, e le condizioni precise di tale progredire. Il lavoro di Consoglio mette in evidenza uno di tali meccanismi che consiste nella trasformazione sintattica dell'espressione verbale e nell'interpretazione dell'espressione trasformata da parte del soggetto che ha prodotto l'espressione originaria. Un meccanismo simile a quello così frequentemente sfruttato nel caso del linguaggio algebrico (vedi Boero, in *Perspectives on School Algebra*, 2001): produco un'espressione algebrica scritta che corrisponde a quello che penso di una certa situazione, la trasformo sintatticamente e interpreto la nuova espressione, scoprendo cose

nuove e inaspettate (Paolo Guidoni aveva attirato la nostra attenzione su tale uso del linguaggio algebrico in Fisica). Consogno ha poi condotto una analisi simile su protocolli di discussione sull'approccio al pensiero probabilistico nella classe di Teresa Gazzolo, mettendo in evidenza tre meccanismi di costruzione concettuale: uno simile a quello individuato nel dialogo con se stessi (un allievo A produce un'espressione verbale orale che, trasformata sintatticamente da un compagno, viene re-interpretata da A, producendo un avanzamento della conoscenza), ed altri due meccanismi descritti nel RR-PME del 2006 di Consogno, Boero & Gazzolo e nell'articolo RDM del 2009 di Boero, Consogno, Guala, Gazzolo. Si tratta di meccanismi che funzionano in un modo collegato alla specificità dei concetti in gioco (come è evidente nel primo meccanismo, in situazioni in cui il passaggio da una forma espressiva a un'altra ha un preciso significato nel modo di considerare delle operazioni aritmetiche). Boero e poi Boero e Guala hanno proceduto al confronto con altre classi sulle stesse situazioni problematiche, e su situazioni problematiche riguardanti le proprietà dei numeri e l'infinità dei numeri, identificando forti variazioni di frequenze tra il manifestarsi dei tre meccanismi nelle diverse classi e formulando alcune ipotesi sulle ragioni di tali differenze.

(vedi Consogno&Boero PME-30, 2006 research report; **Boero&al, RDM-2009** - 2009)

6. Habermas come risposta a 4b), 4c) e 4d)

Il nostro "incontro" con Habermas è stato favorito da un suggerimento di N. Balacheff nel 2002 e si è realizzato attraverso tappe successive: un seminario di Boero al dottorato di Torino nel 2004, il suo research report a PME nel 2006, la sempre più stretta collaborazione con Francesca Morselli (a partire dal suo lavoro sugli aspetti culturali della dimostrazione, nella tesi di dottorato discussa a Torino nel 2007), i loro lavori in collaborazione del 2009 (CERME, PME-33, ICMI-Study 19), e più recentemente lo stimolante, conflittuale ma costruttivo dibattito con Nadia Douek che ha condotto alla research forum presentation a PME-35 (2010)-vedi **Boero&al-PME-34-RF**.

6a) Il costrutto di Habermas della razionalità

Secondo Habermas (1999), l'aggettivo "razionale" può essere attribuito a una persona che svolge una attività discorsiva (quindi a un comportamento discorsivo) quando quella persona non solo è capace di comportarsi secondo le sue intenzioni con lo scopo di raggiungere lo scopo dell'attività, ma anche di render conto delle sue scelte secondo criteri di validità e vincoli comunicativi del gruppo sociale di riferimento.

Come conseguenza di questo approccio, la razionalità (del comportamento di una persona che svolge una attività discorsiva) è costituita da tre componenti tra loro connesse:

- la razionalità epistemica;
- la razionalità teleologica;
- la razionalità comunicativa.

La *razionalità epistemica* riguarda il fatto che noi *"conosciamo fatti e possediamo un sapere su essi solo quando, contemporaneamente, sappiamo perché i giudizi corrispondenti sono veri"* (altrimenti la nostra conoscenza rimane a livello intuitivo o implicito-pragmatico). *"Il 'sapere qualcosa' è implicitamente legato a un 'sapere perché' e rimanda, per questo, a potenziali giustificazioni"*. Ciò rinvia al criterio-base della razionalità del comportamento sul versante epistemico: essere in grado di giustificare le proprie affermazioni secondo criteri condivisi nella comunità di appartenenza. Considerando opinioni o convinzioni razionali quelle relative a un comportamento razionale *"non significa che opinioni o convinzioni razionali siano sempre composte da giudizi veri"* in assoluto: *"la razionalità di un giudizio non implica la sua verità, bensì soltanto la sua motivata accettabilità in un dato contesto"*. La verità dei giudizi di validità delle affermazioni deve essere il criterio di orientamento del comportamento razionale, anche quando essa non può essere soddisfatta in

assoluto.

La *razionalità teleologica* si riferisce al carattere intenzionale dell'attività e alla scelta consapevole degli strumenti per svolgere l'attività e orientarla al conseguimento del fine che si propone.

La *razionalità comunicativa* riguarda le pratiche di comunicazione in una comunità in cui i partecipanti riescono a comunicare tra loro. Il comportamento razionale richiede che il soggetto abbia l'intenzione di comunicare, e cerchi di realizzare la comunicazione con gli strumenti adatti per ottenere lo scopo.

6b) cosa prendiamo da Habermas per l'analisi del comportamento razionale in campo educativo (in particolare, ma non solo, in Didattica della Matematica)

- focus su un *comportamento* discorsivo, piuttosto che su un *prodotto* linguistico;
- due dimensioni del comportamento razionale, che comprendono due tipi di relazioni con il contesto sociale e culturale (a proposito di criteri per la razionalità epistemica e di criteri per la comunicazione)
- e una dimensione di problem solving, che comprende l'adozione consapevole di strategie che richiedono esplorazioni, uso di risorse non linguistiche, ecc.;
- interdipendenza delle tre "dimensioni" aperta allo sviluppo dialettico delle loro interazioni: in particolare, la razionalità teleologica non può essere separata dalla razionalità epistemica, e viceversa (con una mutua dipendenza funzionale e genetica, particolarmente evidente nei processi dimostrativi), anche se possiamo riconoscere il polo epistemico e il polo teleologico come "tensioni verso" il soddisfacimento dei rispettivi criteri di razionalità.

6c) ciò che sottolineiamo e/o portiamo alle estreme conseguenze interpretative nel lavoro di Habermas:

- il carattere aperto, evolutivo e generativo della dialetticità nel rapporto tra le tre componenti/dimensioni: pensiamo che il retroterra filosofico di Habermas (situato nella filosofia dialettica tedesca) legittimi questa interpretazione. Si tratta di un aspetto per noi molto rilevante, in particolare ma non esclusivamente nel lavoro matematico. Consideriamo per esempio un'attività di costruzione di una dimostrazione complessa, nel caso di un esperto: l'individuazione e la dimostrazione di un lemma, oppure la scoperta, strada facendo, di una analogia con un'altra situazione cambia le risorse a cui il soggetto può attingere per controllare la validità di certe proposizioni (sul versante epistemico) e può cambiare altresì la strategia dimostrativa (quindi con effetti sul versante teleologico). Questa evoluzione del comportamento razionale si realizza all'interno di una stessa prestazione, e può realizzarsi a maggior ragione passando da una prestazione a un'altra. Nel caso di un allievo l'evoluzione è ancora più rapida ed estesa in quanto l'azione dell'insegnante, l'apprendimento e l'esperienza via via accumulata modificano i criteri soggettivi che regolano l'esercizio della razionalità secondo le sue componenti con effetti diretti su ciascuna componente, e mediati dal rapporto dialettico sulle altre. Ad esempio l'esclusione della misurazione dai criteri di controllo della validità di un enunciato di geometria piana può essere l'effetto diretto (sulla razionalità epistemica dell'allievo) di una "regola" fissata dall'insegnante, con effetti indiretti sulla razionalità teleologica (in quanto l'allievo dovrà cercare altre strategie di validazione). Altro esempio: sempre in geometria piana, il suggerimento, da parte dell'insegnante, di esplorare più figure che soddisfano una certa proprietà al fine di individuare una regolarità può modificare in modo diretto la razionalità teleologica con effetti indiretti sulla razionalità epistemica (in quanto l'allievo può variare una figura, conservando una proprietà data, per una prima validazione di una sua supposizione).
- le relazioni tra osservatore e soggetto osservato per quanto riguarda la possibilità di una valutazione oggettiva della razionalità del comportamento osservato, *secondo il punto di vista dell'osservatore*; e la possibilità (*per l'osservatore*) di inferire i criteri di razionalità del soggetto

osservato (che possono essere diversi da quelli dell'osservatore), *in base alle tracce verbali e alla conoscenza dell'esperienza culturale del soggetto osservato*. Questa problematica è fondamentale nella didattica e anche in altri ambiti, come l'antropologia (a proposito dell'analisi dei comportamenti di appartenenti a civiltà diverse dalla nostra): vedi dibattito Habermas-Quine. Nella didattica in molti casi non è difficile per l'insegnante come osservatore (o per il ricercatore) valutare la distanza tra il comportamento dell'allievo e quello che l'osservatore considera come modello di comportamento razionale per un dato compito secondo i suoi criteri (ad esempio, nel caso di una attività di costruzione di una dimostrazione o di modellizzazione matematica). Per esempio, l'insegnante può riconoscere facilmente il mancato controllo della correttezza della soluzione di un'equazione, o l'uso di un criterio improprio di accertamento della validità di una affermazione (R. epistemica), o la mancata attenzione alle regole standard di scrittura di una formula (pur gestita personalmente in modo efficace ed epistemicamente controllato per lo scopo da raggiungere) (R. comunicativa). Ciò che può essere molto difficile in certi casi (soprattutto in mancanza di tracce verbali esaurienti dei ragionamenti effettuati) è individuare *se l'allievo osservato si è posto il problema di essere razionale nel suo comportamento* (effettuando consapevolmente le operazioni a tal fine necessarie), e anche nel caso ciò accada, *individuare i criteri di razionalità dell'allievo*, cioè i criteri secondo i quali l'allievo pensa di soddisfare le richieste di razionalità che gli derivano dall'appartenenza al contesto scolastico (criteri che possono essere molto diversi da quelli dell'osservatore e difficili da mettere a fuoco, se non si conosce bene l'esperienza culturale dell'allievo osservato).

Il confronto e la discussione delle risoluzioni dei problemi può essere uno strumento utile per portare alla luce i criteri (impliciti, o consapevoli) che guidano il comportamento degli allievi. Ad esempio abbiamo visto in molti casi che la richiesta di scegliere tra le soluzioni (ben esplicitate) proposte dall'insegnante alla discussione in classe quella più vicina al proprio modo di ragionare ha un duplice effetto positivo in classe: consente di identificare in alcuni casi modi di ragionare non ben esplicitati, e consente altresì di sollecitare gli allievi ad una maggiore consapevolezza delle proprie scelte mentre risolvono un problema. Può essere inoltre il punto di partenza per cercare di avvicinare nella discussione successiva il comportamento degli allievi al modello di comportamento razionale che per l'insegnante costituisce un obiettivo da raggiungere. Con questa osservazione sottolineiamo il fatto che il ciclo fondamentale della DCdE può funzionare come dispositivo didattico efficace per l'educazione al comportamento razionale, insieme ad altre metodologie (in particolare, il "Gioco delle voci e degli echi") che possono offrire modelli di comportamento razionale da imitare in modo attivo e consapevole.

6d) cosa aggiungiamo

6d1: specificità relative alla scala e alla focalizzazione:

Il costrutto di Habermas del comportamento razionale appare sufficientemente flessibile da consentire analisi e confronti secondo scale diverse: da micro-analisi del comportamento razionale in ambiti diversi della stessa disciplina - vedi, per quanto riguarda la matematica, Boero & Morselli PME-33; e Morselli & Boero, ICMI 19 - ad analisi del comportamento razionale in generale, in una disciplina o tra discipline diverse. Per esempio, possiamo confrontare la razionalità matematica con la razionalità in fisica identificando caratteristiche comuni (come la consequenzialità dei ragionamenti) e diversità (a proposito del ruolo degli "esperimenti" particolari). Possiamo confrontare la razionalità algebrica con la razionalità geometrica (individuando lo specifico ruolo delle figure geometriche e delle evidenze spaziali nel secondo caso); possiamo confrontare la razionalità nelle scienze della natura con la razionalità in altri campi (come l'economia o la psicanalisi), nei quali il rapporto con le evidenze sperimentali ha un significato molto diverso sul terreno epistemico e per quanto riguarda le strategie di indagine (cioè sul terreno teleologico); e così via.

6d2: integrazione con Toulmin

Il modello di Toulmin dell'argomentazione fornisce un importante strumento analitico per

analizzare la razionalità epistemica e i suoi collegamenti dialettici con la razionalità teleologica.

La posizione filosofica di Toulmin (ispirata dall'ultima produzione scientifica di Wittgenstein) cerca una collocazione al di là dell'assolutismo e del relativismo distinguendo tra ciò che è invariante e ciò che varia nell'argomentazione in un dato contesto confrontando epoche storiche diverse e assunti epistemologici diversi. Si tratta di una prospettiva in cui l'attenzione è rivolta agli aspetti evolutivi più che alle "rivoluzioni" (nel senso di Kuhn). Il modello di Toulmin per l'argomentazione è un risultato del tentativo di caratterizzare ciò che è invariante nel giudizio sulla validità di un enunciato, sia che si tratti di una teoria deduttiva o di un contesto legislativo o di un contesto argomentativo più informale. Per questo motivo tale modello (nonostante le posizioni filosofiche generali diverse di Toulmin e di Habermas) può essere adattato per l'analisi del "comportamento razionale" in ambiti diversi. E per lo stesso motivo il modello di Toulmin ha richiamato l'attenzione dei ricercatori in didattica della matematica interessati al confronto tra le diverse forme di argomentazione che intervengono nelle diverse fasi del processo di congettura e dimostrazione. Il lavoro-pilota di Bettina Pedemonte nella sua tesi di dottorato (2003) e nei successivi articoli su RDM, nel 2006 e su ESM, nel 2007 è stato seguito da diversi altri lavori pubblicati su riviste internazionali, come quelli di Knipping, di Jahnke e della stessa Pedemonte, sulla Special Issue di ZDM-2008 sulla dimostrazione, e quello di Pedemonte e Reid, su ESM-2010.

L'integrazione del costrutto di Habermas del comportamento razionale (precedentemente usato da noi come strumento soprattutto *analitico*) con il modello di Toulmin dell'argomentazione (e con altri costrutti) ha permesso di sviluppare uno strumento promettente per *pianificare, gestire e analizzare* l'approccio consapevole degli allievi ad alcuni aspetti salienti della cultura dei teoremi (vedi la research forum presentation di Boero, Douek, Morselli & Pedemonte a PME-34, 2010-**Boero&al-PME-34-RF**, *che verrà ripresa nell'esposizione orale al Seminario*, e i suoi sviluppi nei report di Arzarello & Sabena e di Samper & C a CERME-7, 2011, WG1 - già accessibili via internet).

6d3: integrazione con Vygotskij

in questo caso l'integrazione non pone problemi di conflitto tra i retroterra filosofici e le posizioni epistemologiche di Habermas e di Vygotskij, in quanto il lavoro di entrambi ha le sue radici nella filosofia dialettica tedesca (in particolare, Engels e Marx) e nell'umanesimo di Feuerbach.

Se noi consideriamo la definizione dei "concetti scientifici" di Vygotskij possiamo identificarne alcune caratteristiche salienti (intenzionalità d'uso, carattere esplicito, consapevolezza di aspetti sistemici connessi a legami epistemici) che sono necessarie per assicurare l'esercizio della razionalità secondo Habermas. Viceversa, l'esercizio della razionalità richiede conoscenze gestite come "concetti scientifici" in senso vygotiskiano (in particolare per quanto riguarda la razionalità epistemica e la razionalità teleologica). Ciò premesso, rileviamo che l'integrazione Habermas-Vygotskij ha funzionato finora come riferimento euristico per il nostro lavoro senza ancora tradursi in un apporto preciso al quadro teorico generale (che potrebbe derivare dall'approfondimento in corso sulla concettualizzazione nei campi di esperienza - vedi punto 6f3 e contributo di Nadia Douek).

6e) FoE e razionalità alla Habermas

Il fatto che i campi di esperienza extra-scolastici costituiscano i principali contesti nei quali è "situato" l'insegnamento-apprendimento della matematica offre interessanti occasioni di incontro con diverse razionalità e di messa in evidenza della specificità della (o delle) razionalità matematica. Ad esempio a livello di scuola primaria il lavoro sulle regole della vita in classe o sull'osservazione e produzione di ipotesi relative ai cambiamenti stagionali o sulle calcolatrici tascabili consente ai bambini di esperire razionalità epistemiche diverse (riguardanti, a seconda dei casi: adesione, violazione e modifica di regole di comportamento; relazioni di causa-effetto fisiche; comportamenti di un sistema fisico progettato e realizzato dall'uomo), con la possibilità di avviare riflessioni su tali differenze. Accanto a tali diversità si possono anche mettere in evidenza alcuni

aspetti comuni alle diverse razionalità, per esempio il fatto che il discorso che si sviluppa non deve presentare contraddizioni, o il fatto che occorre aderire in tutti i casi a regole di comunicazione che consentono il confronto con gli altri. Si possono anche confrontare i diversi sistemi di conoscenze in gioco, ed evidenziare (ad esempio) le corrispondenze tra le regole di scrittura dei numeri incorporati nelle calcolatrici e le regole di scrittura dei numeri con carta e penna, o le differenze tra il funzionamento del tasto "=" delle calcolatrici e le regole d'uso del segno "=" nella scrittura delle espressioni aritmetiche. Ciò educa a cercare analogie e differenze tra i "principi" che governano razionalità epistemiche diverse.

6f) ciò che ancora manca

6f1: un modello sufficientemente generale e insieme preciso per inquadrare le ingegnerie didattiche finalizzate allo sviluppo della (o delle) razionalità matematica degli allievi.

Sarebbe utile poter disporre, nell'ambito della DDE, di alcune linee-guida per sviluppare la capacità degli allievi di praticare un comportamento razionale nei diversi tipi di prestazioni matematiche (dalla modellizzazione matematica, alla costruzione di algoritmi, alla dimostrazione matematica).

Un primo tentativo parziale in tal senso è stato realizzato per l'approccio consapevole degli allievi ad aspetti importanti della "cultura dei teoremi" (vedi la già citata research forum **Boero&al-PME-34-RF**).

Ulteriore lavoro è necessario per passare dall'ipotesi di integrazione di "Toulmin" con "Habermas" in una prospettiva vygotskiana, all'implementazione di un modello didattico comprensivo per inquadrare in modo coerente: la modellizzazione matematica; lo sviluppo della razionalità matematica, rendendo gli studenti consapevoli delle sue specificità (e differenze rispetto alle altre razionalità "scientifiche"); più in generale, lo sviluppo di una razionalità scientifica, prendendo insieme coscienza delle sue limitazioni e del potenziale insito in razionalità non scientifiche. Il "Gioco delle voci e degli echi" potrebbe svolgere un ruolo importante nella costruzione di tale modello didattico comprensivo. Di fatto però va detto che al momento attuale non sapremmo ancora come inquadrare didatticamente e gestire in aula il rapporto tra la razionalità matematica proposta dall'insegnante e la razionalità non scientifica dei ragazzi di Asmara a proposito del fenomeno delle ombre del sole!

6f2: una risposta a livello teorico (e un adeguato inquadramento)....

.... per l'apparente contraddizione tra il fatto che un esperto solo in certi casi (solo quando è alle prese con una situazione intricata o quando deve presentare la sua ricerca in situazioni formali - come i congressi) si comporta in un modo consapevole nella scelta degli strumenti per risolvere il problema a cui sta lavorando, per controllare la validità delle affermazioni fatte e delle concatenazioni logiche tra esse, per scegliere mezzi di comunicazione efficaci con i suoi interlocutori. Durante il suo lavoro ordinario la razionalità teleologica dell'esperto è frequentemente rimpiazzata da scelte di routine o comunque non pienamente consapevoli; la sua razionalità epistémica è spesso sostituita dal "sentire" (in base alla sua esperienza) se un'affermazione è valida o un passo dimostrativo funziona oppure no; e la sua razionalità comunicativa non crea di solito grossi problemi di scelta consapevole di mezzi efficaci per comunicare con i colleghi (e ancora meno per comunicare con se stesso). Mentre gli allievi devono imparare, da un lato, a comportarsi "razionalmente" (secondo il modello di Habermas), e dall'altro a sviluppare quelle forme di intuizione che consentono di utilizzare in modo creativo uno strumento o una forma di esplorazione (ad esempio grafica) scelta consapevolmente, di capire rapidamente se un'affermazione è valida oppure no in modo da sottoporla a un controllo più accurato, di capire quali forme di comunicazione possono essere efficaci in un certo contesto. In sostanza devono diventare capaci di comportamento razionale senza però compromettere quelle capacità che consentono all'esperto di essere creativo nel suo lavoro, senza essere soffocato dall'esigenza di attenersi ai criteri di razionalità del modello di Habermas.

La razionalità in un dato ambito (ad esempio, matematico) dovrebbe diventare un atteggiamento

mentale dell'allievo che ne orienta il comportamento non riflessivo e che, insieme, può dare luogo, quando necessario, a un comportamento pienamente razionale.

Queste considerazioni dovrebbero essere i punti di riferimento per sviluppare un discorso teorico di riferimento per l'educazione alla/alte razionalità matematica/che. Il contesto culturale dei campi di esperienza (con le possibilità di confrontare razionalità diverse che offre) dovrebbe facilitare tale costruzione, come pure le esperienze già condotte sulla metodologia del "Gioco delle voci e degli echi". Anche in relazione a ciò assumono rilievo le funzioni dell'insegnante come possibile riferimento e modello di comportamenti razionali quando mostra agli allievi "come si fa" a risolvere un problema, quando evidenzia i possibili salti logici di un'argomentazione, quando sottolinea l'opportunità di ricorrere a certe forme di esplorazione piuttosto che ad altre, ecc.

6f3: una risposta teorica al problema delle relazioni tra lo sviluppo della concettualizzazione e lo sviluppo della razionalità nei CdE

La padronanza dei concetti scientifici si esercita, in particolare, attraverso la consapevolezza degli invarianti operatori di un concetto (che sono gli ingredienti del controllo della razionalità epistemica nell'uso di esso), delle sue situazioni di riferimento (che intervengono nella razionalità teleologica quando si decide di fare uso di esso), e delle sue rappresentazioni esterne (che intervengono nella razionalità comunicativa). D'altra parte, le componenti della razionalità richiedono una padronanza consapevole dei concetti in gioco in ogni "comportamento razionale". Ed abbiamo visto come appaia ragionevole stabilire legami funzionali tra lo sviluppo della razionalità e l'approccio ai concetti scientifici (in una prospettiva vygotkiana). La "problematizzazione" di alcuni aspetti della concettualizzazione e i suoi legami con la dialettica concetti quotidiani-concetti scientifici (presentata da Nadia Douek in un'altra Sezione di questo articolo) potrebbe fornire elementi per andare oltre le constatazioni fatte sopra, in cui le relazioni tra la padronanza dei concetti e l'esercizio della razionalità sono facili da riconoscere ma non facili da inserire in una prospettiva a lungo termine di sviluppo della concettualizzazione e di sviluppo della razionalità.

7. La mediazione di forme di ragionamento che svolgono una funzione cruciale nei comportamenti "razionali": il "Gioco delle voci e degli echi" rivisitato

Consideriamo due dei teaching experiments svolti nella prospettiva del "Gioco delle voci e degli echi" circa dieci anni fa: l'uso della "voce" di Platone (nel "Menone") per imparare a individuare e superare errori concettuali; e l'uso della "voce" di Galilei (dai "Dialoghi...") per accedere a forme sofisticate di ragionamento che sono cruciali nel lavoro e nel dibattito scientifico in matematica e in altri ambiti. Nella prospettiva del "comportamento razionale" tali esperimenti riguardano modi di mediare importanti ingredienti del "comportamento razionale" soprattutto per quanto riguarda gli aspetti epistemico e teleologico, ma anche le loro connessioni con l'aspetto comunicativo (in quanto occorre fare riferimento al punto di vista degli interlocutori nel dibattito in modo comprensibile ad essi). Stiamo attualmente lavorando ad una estensione del "Gioco delle voci e degli echi" per l'accesso al "comportamento razionale" nel congetturare e nel dimostrare.

(VEDI IN ALLEGATO IL CONTRIBUTO DI R. GARUTI)

8. Il nostro lavoro nel campo della mathematics education oggi: confronto con alcuni quadri teorici riguardanti l'insegnamento-apprendimento della matematica e possibili collegamenti

Ci consideriamo ricercatori che teorizzano sui fondamenti e sugli sviluppi delle ingegnerie didattiche (a partire dai problemi che richiedono cambiamenti nell'insegnamento, e con ritorni sull'insegnamento), nella prospettiva del paradigma italiano della ricerca per l'innovazione. Siamo interessati a fare confronti, in particolare, con altre ricerche e quadri teorici che riguardano problematiche di inquadramento teorico e di innovazione didattica vicine alle nostre (ovviamente senza trascurare l'importanza di altre ricerche più lontane, in Italia e nel mondo: ad esempio, a

livello internazionale, la ricerca che sta sviluppando l'equipe di Tommy Dreyfus).

8a) in Italia,...

8a1. Arzarello e il Gruppo di Torino

...hanno sviluppato un modello complesso che riguarda gli aspetti cognitivi, individuali e sociali (lo Spazio di Azione, Produzione e Comunicazione, SAPC) e gli aspetti semiotici (il Semiotic Bundle) dell'insegnamento e apprendimento della matematica a scuola.

Questo costrutto ci sembra offrire strumenti analitici utili in relazione a quello che accade in classe; esso rende conto dell'azione dell'insegnante come "motore" del sistema, delle interazioni sociali (tra insegnante e allievi, e tra gli allievi) in classe e della multimodalità dell'attività matematica e dell'insegnamento e apprendimento della matematica. Ci sembra che le differenze maggiori tra la DCdE e lo SAPC possano essere riassunte così: le scelte culturali relative al contesto culturale dell'azione didattica restano sullo sfondo nel caso dello SAPC, mentre sono aspetti cruciali della DCdE; le relazioni tra le opportunità di apprendimento insite nel contesto culturale scelto e le costruzioni cognitive e culturali degli allievi non sono oggetto di particolari approfondimenti nel caso dello SAPC, mentre sono centrali nelle nostre ricerche; e soprattutto, l'aspetto dominante nelle ricerche relative allo SAPC è quello analitico (ricerca di base) rispetto agli sviluppi pragmatici in campo educativo (su come sfruttare i risultati di ricerca nella scuola, al di là del rendere gli insegnanti consapevoli della complessità del fenomeno dell'insegnamento-apprendimento della matematica in classe e dei suoi aspetti semiotici). Invece nel caso della DCdE cerchiamo di mantenere uno stretto legame tra la maggior parte degli sviluppi sul piano teorico e l'innovazione didattica a lungo termine, qualche volta rinunciando a portare avanti ricerche di base promettenti (come è avvenuto con quelle sulle dinamiche mentali).

Nonostante queste differenze, l'efficacia dello SAPC sul terreno analitico (in particolare per quanto riguarda la multimodalità nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica) ci sembra offra la possibilità di integrare i nostri strumenti analitici sul versante semiotico.

8a2. Il costrutto della mediazione semiotica di Bartolini & Mariotti - vedi il loro Seminario Nazionale 2010.

Con riferimento alle questioni indicate al punto 9b1, nel gruppo di ricerca della scuola primaria stiamo studiando in questo momento due loro testi (*"Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij"* e il loro capitolo pubblicato nell'*International Handbook* edito da Lyn English). Questa è per noi una occasione per cercare di identificare punti comuni e possibili loro strumenti per arricchire il nostro armamentario teorico, oltre che differenze.

Il loro quadro teorico sembra utile per noi per quanto riguarda il linguaggio preciso ed efficace per descrivere le azioni dell'insegnante e i processi che riguardano la mediazione semiotica. Sicuramente il "ciclo didattico" è molto vicino al "ciclo fondamentale" della DCdE (anche per quanto riguarda l'indicazione di flessibilità). Un punto in comune (già integrato da tempo nei nostri lavori) riguarda il costrutto della "discussione matematica".

La questione che rende per noi problematico andare oltre nell'uso del loro apparato teorico riguarda le diverse prospettive cognitive e culturali/antropologiche dell'azione didattica. Al fine di illustrare queste differenze possiamo considerare uno dei teaching experiment (*"a chain of artifacts in the first grade"*) presentati nel capitolo dell'*International Handbook*: il nostro lavoro sulla rappresentazione decimale-posizionale dei numeri è interamente basato (nelle prime due classi della scuola primaria) sull'abaco delle monete (introdotto nel secondo quadrimestre della classe I dopo oltre quattro mesi di lavoro, a partire da ottobre, nel CdE "delle monete e degli acquisti"), e sulle misure di lunghezza nel sistema metrico-decimale (praticate a partire dall'inizio della seconda in diversi CdE). L'abaco delle monete offre agli alunni, con una adeguata gestione da parte dell'insegnante, uno strumento di apprendimento e riflessione sulla scrittura dei numeri dei prezzi

connesso a *necessità/vincoli convenzionali di natura sociale* radicati nell'uso extrascolastico (e anche scolastico: il mercatino in classe) del denaro, degli scontrini, ecc. Le misure di lunghezza offrono invece uno strumento di apprendimento e riflessione connesso a un sistema di *necessità fisico-percettive*, oltre che ai modi di esprimere, in particolare, le stature dei bambini (usuali in sala medica). L'incontro tra i due approcci riflessivi avviene quando si confronta il prezzo di 1,27 € con la lunghezza di 1,27 m.

Nel secondo ciclo approfondimenti e de-centramenti rispetto a questo radicamento della scrittura decimale-posizionale dei numeri nelle necessità sociali e fisico-percettive potranno avvenire attraverso le attività argomentative relative al confronto con la scrittura additiva dei numeri presso i Romani.

Tornando al lavoro nel primo ciclo e ai meccanismi di costruzione e riflessione sul sistema decimale-posizionale di scrittura, nella nostra impostazione sono le necessità sociali extrascolastiche e fisico-percettive che "forzano" i processi di adattamento degli alunni durante la risoluzione individuale dei problemi, mentre le fasi di discussione collettiva sono finalizzate a promuovere (sotto la guida dell'insegnante e la sua mediazione diretta o indiretta) il confronto e l'evoluzione delle soluzioni individuali verso conclusioni condivise in cui vengono messi gradualmente in risalto gli aspetti di convenzione e di necessità delle regole di scrittura. Nel nostro approccio il fatto che il triangolo CII-CIS-CE è culturalmente "situato" (cioè che la sua evoluzione nel tempo dipende anche da specifiche necessità presenti nel CE) assume quindi un rilievo centrale.

Ci chiediamo se la scelta e la conduzione di un teaching experiment come quello presentato nell'articolo citato (nella sua estraneità alla prospettiva dei CdE come scelta e come conduzione) corrisponde a posizioni epistemologiche diverse per quanto riguarda la matematica, a preoccupazioni/opzioni diverse per quanto riguarda il suo apprendimento, o solo all'esigenza di fare funzionare un particolare teaching experiment per illustrare in modo paradigmatico la mediazione semiotica.

Naturalmente, segnalando questa differenza noi non ignoriamo che in passato in altri teaching experiments del Gruppo di Modena (Rappresentazione dello spazio visibile, Ingranaggi) le "necessità" di quei "campi di esperienza" hanno avuto un ruolo rilevante nella costruzione e nello sviluppo delle conoscenze matematiche e, in particolare, nell'approccio al pensiero teorico.

Un altro punto in cui si differenziano il modello della mediazione semiotica e la DCdE è l'assenza di una presa in considerazione esplicita, in termini evolutivi, del CII e del CIS nel modello della mediazione semiotica (le loro modifiche durante il ciclo didattico, e la loro presa in carico o meno da parte dell'insegnante, determinano spesso la maggiore o minore produttività del ciclo didattico in termini di apprendimento).

8a3. Il lavoro del Gruppo di Napoli...

...sul costrutto della "risonanza" (connesso a risultati recenti della neuropsicologia e a più remote elaborazioni teoriche proprie riguardanti, in particolare, gli sviluppi dell'assunto che esistono forme "naturali" di pensiero che interfacciano il comportamento del mondo fisico che ci circonda), come pure le loro implementazioni didattiche, possono offrire un terreno di confronto con il nostro discorso sul ruolo dei processi di adattamento degli allievi nei CdE per il loro sviluppo intellettuale. Altri terreni di incontro e confronto sono già stati e possono continuare ad essere quelli che riguardano il ruolo dei linguaggi (verbale, e della matematica) nel lavoro matematico e nell'organizzazione della conoscenza della realtà fisica.

8a4. Il lavoro del Gruppo di Palermo

Potrebbe essere interessante verificare se il lavoro di ricerca principale in corso nel Gruppo di Palermo (basato sull'ipotesi generale che *provenienze culturali diverse possano dare luogo a strategie diverse nell'affrontare problemi matematici e nello svolgere attività matematiche*) possa essere inquadrato nella prospettiva del confronto tra razionalità diverse (con riferimento al nostro

adattamento del costrutto di Habermas). Ciò potrebbe offrire una occasione concreta per verificare il potenziale analitico e l'utilità del costrutto di Habermas come strumento per confronti interculturali di grande interesse per la didattica della matematica, come quelli che si sta cercando di portare avanti nel gruppo di Palermo.

8b) A livello internazionale

8b1. La prospettiva semiotica e storico-culturale di Radford

Luis Radford focalizza la sua attenzione sulla costruzione sociale della conoscenza e sulla mediazione semiotica, in una prospettiva storico-culturale vygotskiana che rende conto molto bene degli sviluppi storici della matematica e dei processi interpersonali in classe. I meccanismi di adattamento individuale ai vincoli fisici e sociali (in particolare, la costruzione individuale delle conoscenze per adattamento "alla Piaget"), come pure alcuni costrutti vygotskiani che riguardano lo sviluppo intellettuale individuale nel contesto sociale (come la ZPD e le attività dell'insegnante relative ad essa) non sono in primo piano nel lavoro attuale di Radford. Si nota invece una crescente attenzione per la multimodalità dell'insegnamento-apprendimento e, in genere, per gli aspetti semiotici. Siamo molto interessati al lavoro di Radford sul terreno storico-culturale, mentre ci sembra di non potere stabilire collegamenti produttivi con il suo lavoro per quanto riguarda lo sviluppo a lungo termine delle ingegnerie didattiche e l'analisi e la valutazione dell'apprendimento del singolo studente (ma del resto questi non sono obiettivi di ricerca per Radford!).

8b2. La teoria di Anna Sfard ("Commognition") (vedi volume recente, tradotto e pubblicato in Italia dalla casa editrice Erickson):

Abbiamo seguito il lavoro di Anna Sfard con crescente interesse fin dal suo articolo più noto (ESM, 1991) e poi dalla sua "svolta" linguistico-comunicativa, per la prima volta proposta nel suo RR a PME-XXI (1997), che ha avuto importanti influenze sui nostri studi riguardanti il "potere generativo" del linguaggio nei confronti della conoscenza matematica, nella comunicazione con se stessi (mediata dal testo scritto) e nell'interazione tra pari. Una analisi dello stato attuale dell'elaborazione teorica della Sfard attraverso il suo libro non è facile; possiamo riconoscere diversi punti di contatto con posizioni teoriche che condividiamo per quanto riguarda il ruolo del linguaggio, il ruolo delle interazioni sociali nello sviluppo intellettuale dell'individuo, ecc. Ma ci sembra di individuare anche delle differenze sostanziali.

Riferendosi soprattutto al lavoro di Vygotskij e Wittgenstein, Sfard propone un quadro teorico per l'analisi dello sviluppo del pensiero (in particolare, ma non solo, matematico) in cui il pensiero è definito come "la versione individuale della comunicazione interpersonale". Possiamo riconoscere in questo quadro teorico un render conto equilibrato, vicino al pensiero di Vygotskij, per la cognizione individuale e per l'interazione sociale (in contrasto con diversi teorici dell'activity theory). Ma vorremmo anche segnalare alcune posizioni molto controverse della Sfard che riguardano le limitazioni dell'idea della Sfard a proposito del "carattere autopoietico, alla Maturana e Varela, del discorso matematico, che continuamente si auto-genera" attraverso la comunicazione: limitazioni che a nostro avviso emergono quando si vuole render conto della trasmissione della cultura da una generazione all'altra, e della dipendenza di molte produzioni culturali da "necessità" legate a vincoli fisici e a convenzioni sociali. In altre parole, lo sviluppo intellettuale (come anche lo sviluppo della cultura) non sembra dipendere solo dal potere generativo del linguaggio in situazioni di comunicazione, ma anche dall'eredità culturale e dall'interfaccia con convenzioni sociali e vincoli insiti nella realtà fisica.

8b3. Sviluppi recenti della teoria antropologica di Chevallard

Chevallard ha portato, nel corso dell'ultimo decennio, alle estreme conseguenze il suo lavoro degli anni '80 sulla "trasposizione didattica" e la prospettiva connessa di ri-contestualizzazione del sapere matematico come punto di partenza per l'accesso degli allievi alla matematica. Chevallard sviluppa una critica radicale della tradizionale presentazione "monumentalista" della matematica a scuola e le contrappone una ri-costruzione del suo "senso" come strumento per dare forma a molte

esperienze intellettuali (siano esse connesse alla conoscenza e all'azione sulla realtà extra-matematica, o a questioni che riguardano lo sviluppo delle stesse conoscenze matematiche). In tale prospettiva i PER (parcours d'étude et de recherche - percorsi di studio e ricerca) sono concepiti come punto focale dell'insegnamento e apprendimento della matematica: da un lato ci sono i "testi", in cui è cristallizzato il sapere; dall'altro ci sono le questioni da affrontare; l'attività di "studio e ricerca" deve stabilire delle connessioni feconde tra gli uni e le altre.

Mentre le prospettive epistemologiche e antropologiche sono largamente compatibili con la prospettiva dei CdE e ci offrono un terreno promettente di confronto e arricchimento, la mancanza di un inquadramento teorico in campo psicologico (riguardante i processi cognitivi individuali e sociali) e il fatto che le scelte e le analisi didattiche finì sono modellizzate ("esternamente") secondo la teoria delle praxeologie matematiche (sviluppata da Chevallard negli anni '90) costituisce un elemento di forte differenziazione con la DCdE (come con la maggior parte dei presenti orientamenti della didattica della matematica a livello internazionale).

9. Altri problemi aperti, e ulteriori sviluppi

Abbiamo già indicato in precedenti Sezioni di questo documento alcuni problemi aperti e sviluppi possibili (in particolare per quanto riguarda la prospettiva della "razionalità" e la concettualizzazione). In questa Sezione intendiamo indicare ulteriori questioni legate: alla formazione degli insegnanti, nella prospettiva dei campi di esperienza; al lavoro nelle classi e allo sviluppo dei nostri progetti; ai cambiamenti nella società; e alla diffusione delle proposte innovative da noi prodotte.

9a) formazione degli insegnanti alla didattica dei campi di esperienza

Nel periodo 1976-2000 il problema della formazione degli insegnanti (come prepararli a gestire la didattica dei CdE) è stato affrontato solo sul piano operativo, secondo una strategia "per tentativi ed errori", senza alcun particolare approfondimento. In quel periodo chi si occupava nel nostro Gruppo della formazione degli insegnanti erano gli universitari e gli insegnanti-ricercatori con più esperienza. Esperienze di formazione svolte con successo, o fallite, venivano confrontate e discusse al fine di ottimizzare i nostri interventi.

In generale, la nostra formazione universitaria degli insegnanti (corsi di Didattica della Matematica per la laurea in matematica) non era particolarmente finalizzata alla didattica dei campi di esperienza, anche se ne venivano presentate le idee-guida e se molte delle situazioni didattiche discusse riguardavano le classi che sperimentavano i nostri progetti. Nei corsi di Didattica della Matematica gli allievi erano impegnati in attività matematiche (per lo più di problem solving) a livello adulto, che offrivano lo spunto per: introdurre strumenti culturali (di epistemologia e storia della matematica) e psicologici per analizzare i compiti proposti e le difficoltà incontrate dagli allievi stessi; e introdurre ulteriori strumenti, didattici (il costrutto della "trasposizione didattica", il "contratto didattico", ecc.), e psicologici, per analizzare specifici problemi di insegnamento e apprendimento degli stessi contenuti in gioco in alcune delle attività svolte a livello adulto.

Nel caso della formazione in servizio (di solito richiesta da Enti vari in relazione ai nostri progetti in corso di sperimentazione nelle scuole, o svolta per gli insegnanti che decidevano di adottare in parte o completamente i progetti) il punto di partenza era sempre un problema/una difficoltà che gli insegnanti incontrano frequentemente nell'insegnamento-apprendimento della matematica, con momenti di lavoro matematico a livello adulto connesso a tali difficoltà. Anche in questo caso gli strumenti teorici venivano introdotti per trattare specifiche questioni relative alla progettazione didattica, all'analisi dei compiti e all'analisi degli errori e delle difficoltà incontrate dagli alunni (o dagli insegnanti). Nella attività di formazione in servizio la didattica dei campi di esperienza era in genere parte della nostra offerta formativa (in relazione alle richieste specifiche degli organizzatori o dei frequentanti).

Nel periodo considerato il confronto con la letteratura sulla formazione degli insegnanti a livello internazionale (in particolare negli anni '90, quando questo tema divenne di grande rilievo nella

ricerca in didattica della matematica) ci serviva solo per arricchire le nostre strategie di formazione degli insegnanti.

Le difficoltà incontrate da Nadia Douek nelle sue attività di formazione degli insegnanti in Francia e l'introduzione in Italia della formazione universitaria degli insegnanti (SSIS, CLSFP) gradualmente ci hanno indotto a esplicitare alcuni criteri che di fatto guidavano le nostre attività di formazione (universitaria e in servizio) degli insegnanti e a confrontarli con la letteratura corrente su tale tema a livello internazionale. Da tale confronto è emerso che la maggiore differenza insita nelle nostre pratiche di formazione rispetto a quanto si fa e si teorizza in altri Paesi è il peso assegnato nel nostro caso alla analisi culturale del contenuto (ACC) da insegnare: la formazione degli insegnanti collegata alla prospettiva dei CdE richiede riflessioni e analisi specifiche riguardanti (a seconda del livello di scuola) il ruolo delle conoscenze matematiche nella nostra cultura, le radici storiche dei concetti matematici, il significato dell'espressione "modello matematico", le differenze tra modellizzazione algebrica, modellizzazione differenziale e modellizzazione probabilistica, ecc. Così abbiamo cominciato a teorizzare tale *peculiarità* delle nostre pratiche di formazione degli insegnanti in termini di componente ACC delle competenze dell'insegnante, intesa non come ulteriore "conoscenza" da aggiungere alla PCK (Pedagogical Content Knowledge) e agli altri tipi di conoscenza, necessari per l'insegnante, discussi nella letteratura, ma come competenza esercitata e sviluppata durante tutta la carriera dell'insegnante (vedi **BOERO & GUALA**, 2008). In questo momento Boero e Guala stanno cercando di teorizzare come sviluppare la competenza ACC a partire dalle loro esperienze di formazione degli insegnanti e dal confronto su come nella letteratura internazionale vengono inquadrati teoricamente i processi di formazione degli insegnanti. Sono elementi di confronto interessanti per noi, in quanto sviluppate in Italia ma su ipotesi di insegnamento e di formazione degli insegnanti indipendenti dalle nostre, le metodologie e le pratiche "riflessive" teorizzate in seno al gruppo di Modena (Malara) e al gruppo di Napoli su obiettivi in parte riconducibili alla ACC.

9b) alcune questioni riguardanti le attività nelle nostre classi

Nel Gruppo di ricerca che si occupa della scuola primaria stiamo lavorando attualmente su tre temi per noi molto importanti:

9b1) come accedere nella scuola primaria ai linguaggi simbolici di base della matematica...

(...a partire dalla scrittura dei numeri nel sistema decimale-posizionale e dai simboli delle operazioni aritmetiche, fino al linguaggio delle espressioni aritmetiche in vista del linguaggio algebrico) nella prospettiva della didattica dei CdE.

Nel nostro progetto per la scuola primaria il problema è stato finora affrontato caso per caso, in relazione ai singoli obiettivi; manca un quadro unitario e un percorso didattico organico e coerente.

L'ipotesi-guida per la costruzione di un itinerario didattico coerente dalla prima alla quinta classe (con proiezione nella scuola secondaria di primo grado) è oggi quella di un approccio argomentativo per trattare adeguatamente le continuità e le rotture tra il linguaggio verbale nei suoi registri matematici (il riferimento per questo e per altri termini è **BOERO, DOUEK, FERRARI-2008**) e i linguaggi simbolici dell'aritmetica e dell'algebra.

Per illustrare questa ipotesi e la prospettiva in cui stiamo lavorando (coerente con la didattica dei CdE) consideriamo il seguente frammento proveniente da una nostra classe IV (ma comportamenti simili li registriamo a partire dalla classe I, e poi li ritroviamo - su prestazioni ovviamente più complesse - anche tra gli studenti universitari!).

Lo studente deve valutare *quanto deve pagare per comprare tre bustine di costo unitario 40 centesimi*. Scrive: *40 centesimi per una bustina; $40 \times 3 = 1,20$ €*

La scelta su come trattare questo tipo di comportamenti è attualmente per noi una questione paradigmatica nella didattica dei campi di esperienza. In effetti fin dalla classe I il lavoro esteso nel campo di esperienza del denaro e degli acquisti e, in seguito, in altri campi di esperienza in cui si

devono effettuare calcoli con misure di lunghezza sviluppa negli studenti una grande sicurezza nel gestire espressioni come quella riportata sopra, sicurezza basata sul controllo costante del loro significato. La transizione alle convenzioni di scrittura e alle regole sintattiche del linguaggio simbolico dell'aritmetica (e poi dell'algebra), e al loro uso disinvolto, pone delicati problemi di approccio e su come mantenere il controllo semantico dei calcoli effettuati.

Fin dall'inizio degli anni '80 l'attenta osservazione degli alunni alle prese con la scrittura di calcoli aritmetici, e i riscontri di tali comportamenti in allievi molto più grandi (fino all'università) ha segnalato vari tipi di ostacoli nell'approccio al linguaggio dell'aritmetica che poi via via abbiamo trovato discussi in letteratura, e a cui abbiamo cercato di dare soluzioni-tampone: ad esempio,

- l'uso del segno = in senso procedurale/stenografico (con scritture del tipo: $3 \times 5 = 15 + 8 = 23$), a cui cerchiamo di far fronte nella classe V con il lavoro riflessivo sulle calcolatrici tascabili nel campo di esperienza "Uomo-macchine";

- la non corrispondenza stenografica tra descrizione verbale usuale dei calcoli e rappresentazione aritmetica standard. Nel calcolo dell'area di un quadrilatero irregolare attraverso la sua scomposizione in triangoli e la somma delle loro aree troviamo espressioni verbali "naturali" del tipo: *"calcolo il prodotto della base per l'altezza del primo triangolo e lo divido per due e sommo il risultato con il prodotto della base per l'altezza del secondo triangolo diviso per due"* (espressioni simili si trovano anche nel calcolo di costi). A parte l'anticipazione dell'indicazione dell'operatore rispetto all'indicazione dei fattori nei prodotti, tale espressione verbale è vicina alla traduzione nel linguaggio dell'aritmetica. Una soluzione del genere diventa di difficile applicazione a casi in cui il calcolo da descrivere in forma verbale è più complesso (in particolare con l'introduzione di parentesi).

D'altra parte sappiamo (Kirshner) che il prezzo pagato per questa difformità del linguaggio aritmetico (e del suo sviluppo come linguaggio algebrico) rispetto al linguaggio verbale usuale è la potenzialità del linguaggio algebrico come linguaggio "trasformatore" che consente di trasformare una espressione in una espressione equivalente la cui interpretazione offre informazioni nuove sulla situazione modellizzata non disponibili all'atto della scrittura dell'espressione di partenza (si pensi alla risoluzione dei sistemi lineari).

Tornando al frammento di partenza di questo discorso, un modo per mettere in crisi il comportamento dei bambini utilizzato da vari ricercatori è quello di proporre problemi più complessi. Con il gruppo della scuola primaria preferiamo al momento ipotizzare un'altra soluzione didattica, basata sulla "definizione" del segno "=" da parte di R.Recorde (1557): *"...per evitare la noiosa ripetizione di queste parole: "è uguale a", io userò (come spesso faccio in pratica) un paio di segmenti paralleli della stessa lunghezza (=), poiché non si possono immaginare due cose più uguali di essi."*

Anche l'introduzione del calcolo dimensionale potrebbe dare un contributo.

Si tratta tuttavia ancora di soluzioni "ad hoc" che mancano di un quadro di riferimento unitario e si aggiungono alle soluzioni già trovate nei nostri progetti, grazie al confronto tra calcolatrici di vario tipo, per la priorità dei calcoli (caso di $3 + 4 \times 5$), per l'introduzione e la gestione delle parentesi, ecc.

Inquadrare il problema dell'approccio ai formalismi della matematica (in particolare, dell'aritmetica e poi dell'algebra) nella prospettiva delle razionalità matematica potrebbe aiutarci a orientare le nostre scelte didattiche in modo più coerente e unitario, anche ai fini della formazione degli insegnanti che devono gestire tali scelte. In effetti (vedi lavori già pubblicati: in particolare, Boero&Morselli, PME-33 e volume di prossima pubblicazione edito da J. Cai; e lavori in corso di messa a punto - vedi comunicazione di Boero a SFIDA, dicembre 2010) la razionalità nell'uso del linguaggio aritmetico o del linguaggio algebrico consiste in particolare, sul versante epistemico, nel controllo della coerenza tra espressione simbolica e situazione rappresentata e nel controllo delle manipolazioni sintattiche, mentre sul versante comunicativo è richiesta l'adesione consapevole a un

linguaggio condiviso dagli altri. In questo quadro si delineano compiti più precisi per gli insegnanti e una possibilità di sviluppo unitario del percorso formativo. E' pure possibile affrontare questioni delicate su cui molti insegnanti di matematica anche a livello di liceo sono in difficoltà: ad esempio non vi è consapevolezza tra molti di loro sul fatto che $3+4 \times 5=23$ e non 35 per convenzione (sull'omissione delle parentesi nella scrittura (4×5)) e non per significato delle operazioni (cioè: la priorità di esecuzione delle operazioni in assenza di parentesi dipende da convenzioni di scrittura); mentre - una volta accettate le convenzioni ordinarie di priorità di esecuzione dei calcoli - $5 \times (3+4) = 5 \times 3 + 5 \times 4$ e $5:(3+4) \neq 5:3 + 5:4$ in base al significato delle operazioni. Il significato delle operazioni rinvia all'aspetto epistemico della razionalità nel rapporto tra rappresentazione e significato, mentre le convenzioni di scrittura rinviano all'aspetto comunicazionale con ricadute sull'aspetto epistemico (regole sintattiche connesse alle convenzioni di scrittura).

Con riferimento ai CdE è anche interessante un'altra opportunità offerta dal quadro teorico della razionalità: l'approccio consapevole (di allievi... e insegnanti) al linguaggio dell'aritmetica e poi al linguaggio algebrico permette (per quanto riguarda il versante epistemico della razionalità) il passaggio da "necessità" strettamente legate ai vincoli del CE di un CdE non matematico, a "necessità" riguardanti la gestione matematica dei modelli matematici della situazione considerata. Questo aspetto della transizione da CdE non matematici a CdE matematici sembra un aspetto interessante da sviluppare per approfondire il problema del costituirsi progressivo della razionalità matematica (oltre che il confronto tra razionalità matematica e altre razionalità).

9b2) come fare sì che almeno l' 85% dei nostri allievi riescano a usare e capire le espressioni di base dell'argomentazione alla fine della seconda classe della scuola primaria....

.... (i due gruppi di forme espressive della causalità e dell'implicazione - "*E perché C*", "*C quindi E*"; le forme espressive del periodo ipotetico "*Se P, Q*"; le forme avversative - rette da "*invece*", "*al contrario*", ecc.).

Ricerche nostre precedenti (come quelle dell'inizio degli anni '90 già citate, e quella riportata nel RR PME-XXVIII di Douek e Pichat) e osservazioni correnti nelle classi hanno messo in evidenza che *alcuni* alunni già a 5 anni in CdE opportuni spontaneamente usano (e capiscono) espressioni verbali in cui intervengono tali connettivi linguistici con vari significati (compresi significati prossimi a quelli dell'argomentazione matematica).

La familiarità extra-scolastica sembra avere un ruolo importante nell'uso spontaneo di quelle forme espressive (basta considerare il retroterra familiare della maggior parte dei bambini che le usano spontaneamente, o riferirsi alla vasta letteratura sull'argomento, a cominciare dai lavori classici di Bernstein). I maggiori problemi educativi che incontriamo sono: sviluppare la sensibilità degli insegnanti sull'importanza cruciale e la varietà di significati di quelle espressioni (in parte, in base alla nostra esperienza il modello di Toulmin dell'argomentazione può essere di aiuto, ma occorre integrarlo con una grande attenzione da sviluppare, ad esempio, al fatto che il *perché* si può usare, tra gli altri, con *significato causale* e con *significato inferenziale* - "*stamattina l'acqua nelle pozzanghere è gelata perché ha fatto freddo stanotte*"; "*ha fatto freddo stanotte perché stamattina l'acqua nelle pozzanghere è ghiacciata*"); e identificare strategie didattiche che possano consentire, nonostante il poco tempo disponibile a scuola, di colmare per quanto possibile il gap che deriva dalla diversa estrazione culturale dei bambini.

La nostra ipotesi attuale è che tecniche di tipo "prestamano" (rapporto 1-1 tra bambino e insegnante, privato o anche pubblico, come modello per tutti) possano servire per arricchire le prestazioni individuali (vedi <http://didmat.dima.unige.it/PRESTAMANO/home.html>) insieme con discussioni in classe condotte possibilmente secondo il modello dalla "discussione matematica" al fine di socializzare modi d'uso e interpretazioni diverse e variazioni di significato delle forme espressive utilizzate. Importante sembra comunque la presenza del testo scritto come "prodotto" verso cui fare convergere il pensiero dei bambini, e da cui partire nelle discussioni (come riferimento permanente durante le discussioni) per cogliere significati e produrre variazioni, interpretazioni contrastanti, ecc. (cfr. Vygotskij, Cap. VI di Pensiero e linguaggio a proposito del passaggio al testo scritto come

prima e fondamentale forma di "pensiero scientifico")

9b3) come accedere a quelle forme complesse di espressione (e ai relativi modi di ragionare)...

.... che caratterizzano i testi "scientifici" e sono strettamente collegate alla specificità degli usi "scientifici" e dell'organizzazione dei concetti in diverse discipline e settori di esse: per esempio il modo di scrivere le definizioni in matematica, il modo di presentare le leggi della fisica, il modo di presentare le regole grammaticali...

Il lavoro di Vygotskij propone l'ipotesi che ogni disciplina dia un suo contributo specifico allo sviluppo intellettuale; ma l'accesso al sapere di una disciplina richiede un accesso ai testi di quella disciplina. Non è azzardato ipotizzare che tra le specificità di una disciplina che sono rilevanti per il suo contributo allo sviluppo intellettuale ci siano i modi di organizzare ed esprimere il sapere di quella disciplina (e i modi connessi di produzione e di comprensione). Se pensiamo al modo di presentare una definizione o l'enunciato di un teorema ci rendiamo conto della complessità delle operazioni mentali necessarie per passare da un'idea sommaria di cosa vogliamo scrivere, alla formulazione di un testo standard, e per realizzare la comprensione di tale testo, se non conosciamo già il suo contenuto.

Le nostre esperienze nella scuola primaria e secondaria (e anche all'università) mostrano che la mancanza di familiarità con talune forme cruciali di organizzazione e comunicazione delle conoscenze in particolari discipline o settori della disciplina rappresenta un ostacolo per la comprensione di testi importanti di quella disciplina o settore.

Esperimenti preliminari condotti in classi IV e V della scuola primaria con la metodologia del "gioco delle voci e degli echi" ci hanno fornito evidenze sperimentali sul fatto che la comprensione autonoma di definizioni in ambiti diversi può trarre grande vantaggio da una attività preliminare in cui il testo che presenta una definizione è stato discusso in classe evidenziandone la struttura espositiva e poi si è chiesto di produrre un testo che presenta in modo analogo un'altra definizione. In effetti la comprensione di una terza definizione di contenuto sconosciuto agli alunni e che non aveva nulla a che fare con le precedenti è risultata sempre molto migliore nelle classi che avevano svolto questa attività rispetto ad altre classi che non l'avevano svolta.

Si tratta ora di identificare alcune delle forme espressive che caratterizzano la presentazione delle conoscenze in campi specifici, e trovare contesti adeguati (CdE) e strategie per mediare il loro uso e la loro comprensione (attualmente è disponibile solo il "Gioco delle voci e degli echi").

Una ipotesi che ci sembra lecito formulare è che non sia necessario lavorare su un numero elevato di forme espressive tipiche di molte discipline diverse, in quanto è soprattutto importante per gli apprendimenti successivi (e per la comprensione dei testi nella vita) acquisire la consapevolezza che di fronte a un testo impegnativo una delle cose più importanti da fare è rendersi conto di come è organizzata la conoscenza in quel testo / in quel campo disciplinare. In questo senso un lavoro sistematico in matematica (sui testi di definizioni, dimostrazioni, esempi e controesempi) potrebbe costituire una parte importante di un lavoro formativo (anche se non sufficiente: i laureati in matematica nei corsi SSIS avevano delle difficoltà non trascurabili nel comprendere testi di psicologia o di biologia!).

Per quanto riguarda i punti 9b2 e 9b3,...

... può sorgere il dubbio sulla legittimità di investire tempo per attività non immediatamente spendibili in una disciplina come la matematica (se si ha come compito quello di insegnare solo la matematica, o se non si vuole sottrarre troppo tempo ad essa). In realtà abbiamo osservato che gli insegnanti (e anche i ricercatori!) che lavorano nella prospettiva dei CdE gradualmente imparano a stabilire collegamenti produttivi tra aree diverse (in particolare, ma non solo, tra queste aree: regole e leggi; grammatica; matematica, fin dalla scuola primaria e poi ancora nella scuola secondaria), trovando nella trattazione di esse spunti "naturalisti" affinché (ad esempio) l'esplorazione del

significato di un connettivo o di una espressione verbale nella riflessione su una regola grammaticale possa essere collegata produttivamente (a fini di comprensione) alla comprensione del suo uso (o dell'uso di una espressione equivalente) in campo matematico.

9c) Problemi relativi alla diffusione delle nostre proposte innovative, e questioni di ricerca e ipotesi connesse

Altre questioni di ricerca derivano dalla diffusione delle nostre proposte didattiche innovative in Francia e in Italia. L'esperienza di Nadia Douek in Francia mostra quanto sia difficile per gli insegnanti di quel Paese adottare una prospettiva di "campi di esperienza" nel loro insegnamento, non solo per quanto riguarda i campi di esperienza extra-matematici (inagibili per la concezione della matematica dominante in Francia e anche per una visione della trasmissione della cultura che dà poco spazio alle esperienze di vita di tutti i giorni), ma in una certa misura anche per i campi di esperienza della matematica. In effetti la rigida progressione dello studio dei contenuti matematici dettata dai programmi e la sua suddivisione in piccole "unità", ecc. non abitua gli insegnanti ad assumere responsabilità di progettazione didattica autonoma e inoltre le attività di verbalizzazione e di produzione individuale seguite da discussioni guidate dall'insegnante-mediatore non appartengono alla tradizione didattica recente in Francia. Per di più di solito l'insegnante di matematica cambia passando da una classe alla successiva. Non è quindi possibile sviluppare una attività coerente e su tempi lunghi su temi come la rappresentazione dello spazio visibile, o il pensiero probabilistico, o le proprietà dei numeri.

La questione che allora si pone è: *cosa è possibile trarre dalla didattica dei campi di esperienza per proposte adatte a un tale contesto, senza perderne le potenzialità formative originarie?*

Una questione simile si può porre anche in Italia, pur essendo la situazione italiana diversa.

Nel sistema scolastico italiano alcuni elementi innovativi della nostra implementazione della didattica dei campi di esperienza sono stati pubblicati in una trentina di articoli delle riviste L'EDUCATION e LA VITA SCOLASTICA, largamente diffuse nella scuola primaria, e sono entrati in diversi libri di testo e indicazioni curriculari ministeriali, ma di solito quello che entra è separato dagli aspetti più importanti del discorso educativo con cui quelle innovazioni sono state concepite e sperimentate con successo. Un caso esemplare è quello della tecnica cosiddetta "Canadese" per il calcolo scritto della divisione. Boero l'ha introdotta nelle classi del Gruppo di ricerca di Genova alla metà degli anni '80 dopo una visita in una classe sperimentale canadese che usava materiali tratti dal Progetto Nuffield. La nostra motivazione era quella di rendere possibile la costruzione in classe, partecipata dagli alunni, e la comprensione (comprensione del "perché" funziona) di una tecnica di calcolo scritto della divisione. La comprensione delle tecniche di calcolo era previsto nei programmi del 1985; in quegli anni in Francia all'Ecole Michelet di Bordeaux si conducevano sotto la guida di Brousseau esperienze con lo stesso obiettivo (e la stessa tecnica). Costruzione in classe e comprensione erano, nel nostro caso, strettamente collegate allo sfruttamento delle potenzialità dei campi di esperienza della classe III, in cui si ponevano in modo naturale problemi di "contenenza" e di "partizione", e alla didattica dei campi di esperienza, in cui era naturale per gli alunni, sotto la guida dell'insegnante, costruire e poi confrontare e discutere strategie risolutive e di calcolo (vedi articolo di Boero, Ferrari & Ferrero, FLM, 1989 e articolo di Ferrero su IMSI, 1991). Separata da quel contesto, la tecnica cosiddetta "Canadese" (perché diffusasi con i nostri Rapporti Tecnici con quel nome) diventa una tecnica proposta sui testi insieme con la tecnica tradizionale, da imparare eventualmente nello stesso modo della tecnica tradizionale. Il paradosso è che, come tecnica da imparare in modo meccanico, non è certo più formativa di quella tradizionale dal punto di vista dei calcoli mentali e della concentrazione mentale che richiede - e in effetti così viene presentata su certi libri di testo: una tecnica per persone meno abili nel calcolo... come erano i cacciatori di pellicce del Canada!!

Un fenomeno per certi versi simile si è verificato e continua a verificarsi quando gli insegnanti italiani accedono individualmente a nostre unità didattiche attraverso Internet, o attraverso i nostri Rapporti Tecnici: nonostante che molto spazio sia dedicato in entrambi i casi alla presentazione del

quadro didattico e culturale secondo cui sono organizzate tali unità didattiche, molti insegnanti adottano singole "consegne" o anche sequenze di "consegne" estraendole dal contesto (l'interesse è rivolto al solo contenuto specifico, o all'uso come "prove di verifica"). Discutendo con alcuni insegnanti ci siamo resi conto di quanto sia difficile gestire in modo produttivo quelle situazioni didattiche quando il contratto didattico e l'impegno culturale di insegnanti e alunni non sono coerenti con il contesto culturale ed educativo originario (dei nostri progetti).

Una esperienza tuttora in corso (compiuta nel quadro del progetto PLS con il sotto-progetto genovese sull'argomentazione) sembra tuttavia indicare la possibilità di un approccio alternativo alla didattica dei campi di esperienza. Impegnandosi per lo sviluppo delle competenze argomentative (e della "razionalità") nella scuola primaria, gli insegnanti che accettano di attuare i cambiamenti della metodologia didattica necessari per tale obiettivo arrivano in modo abbastanza autonomo a scoprire la necessità di "contesti" culturali adeguati per poter lavorare produttivamente, e così alcuni di loro adottano e adattano nostre unità didattiche (o, più in generale, la prospettiva dei CdE) in modo più genuino.

Nella nostra esperienza di lavoro con i "campi di esperienza" siamo arrivati abbastanza tardi a formulare i principi della DCdE e ad adattare e implementare il costrutto del "comportamento razionale". *Una ipotesi su cui lavorare nei prossimi anni è:* Può essere che l'accesso "sul campo", in situazioni concrete, ai cicli della didattica dell'argomentazione (che sono i cicli della DCE) e all'educazione alla razionalità prepari gli insegnanti a entrare nella prospettiva della DCE con una più precisa e genuina motivazione (mentre l'adozione delle unità didattiche può essere dovuta al solo interesse per il loro contenuto).

Una ipotesi di lavoro alternativa (per assicurare una adozione genuina di nostre proposte didattiche) potrebbe essere quella di presentare la prospettiva dei CdE attraverso una formazione degli insegnanti interessati focalizzata sull'analisi culturale del contenuto da insegnare (ACC); ma forse questa è solo una condizione necessaria per sviluppare l'autonomia degli insegnanti nella gestione della didattica dei CdE, non una condizione sufficiente affinché adottino e adattino le nostre unità didattiche in modo genuino.

9d) due questioni collegate ai cambiamenti in atto nella società

Esse sono relative alla crescente difficoltà di impegnare gli studenti della scuola primaria e secondaria di primo grado (ma il fenomeno sembra riguardare anche ordini di scuola successivi, fino all'università!) in attività argomentative complesse, difficoltà dovuta a una diminuzione impressionante delle competenze linguistiche e della capacità di concentrarsi e riflettere autonomamente per un tempo sufficientemente lungo. Valutazioni soggettive di insegnanti che lavorano con noi fin dagli anni '80 come pure dati oggettivi (qualità dei testi prodotti dagli alunni, particolarmente i maschi, negli stessi ambienti e con gli stessi insegnanti) confermano tale difficoltà. Questo fenomeno potrebbe essere connesso ai nuovi media e ai nuovi stili di vita (dentro e fuori delle famiglie): in particolare, alla mancanza di spazi, tempi e occasioni "rilassate" di interazione con i familiari e con i coetanei, alla mancanza di occasioni per realizzare "cose" liberamente decise (da soli o con i coetanei), alla mancanza di attività fisiche "libere" e liberamente decise; mancanze che si accompagnano alla diffusione di forme di comunicazione rapide, efficienti e di bassa complessità e di passatempi che sviluppano dipendenza da un mezzo che di fatto gestisce l'interazione e organizza la concentrazione mentale del bambino e dell'adolescente.

E' possibile sviluppare pensiero riflessivo, approccio consapevole ad aspetti teorici della matematica, ecc. attraverso mezzi di espressione almeno parzialmente alternativi al linguaggio verbale nelle sue funzioni argomentative, e utilizzando tempi brevi di concentrazione?

Può la ricerca sulla multimodalità nelle attività matematiche suggerire risposte positive alla questione precedente?

10. Conclusione: un bilancio sintetico

Qual è il "senso" dei 35 anni di lavoro del nostro Gruppo?

Il forte legame con il lavoro nelle classi (una decina all'inizio, oltre 250 all'anno, in modo controllato, nella seconda metà degli anni '80, poi via via di meno, in una dimensione di ricerca sempre più puntuale, una volta accertata la fattibilità e la produttività dei progetti, fino alle attuali 15 classi di sperimentazione controllata), da un lato, e l'attenzione al dibattito internazionale nella ricerca didattica, dall'altro, hanno guidato il nostro lavoro di ricerca teorica e i suoi sviluppi operativi in classe. Tenuto conto di ciò, un bilancio si può fare sul versante delle attività in classe e sul versante degli apporti di ricerca rivolti all'esterno.

Sul *versante delle attività in classe*, alcune rilevazioni su campioni di allievi (nell'epoca di maggiore espansione della sperimentazione, tra il 1985 e il 1995) hanno evidenziato il fatto che (nonostante alcune difficoltà nell'incontro, nel livello scolastico successivo, con abitudini, "contratti didattici" e valori culturali diversi per quanto riguarda l'insegnamento della matematica) la maggior parte dei nostri allievi ha avuto successo nella prosecuzione degli studi per quanto riguarda la matematica. Il fatto che la percentuale di laureati in matematica a Genova provenienti dalle nostre classi di scuola elementare o di scuola media della Liguria sia stato, in corrispondenza del periodo di maggiore espansione della sperimentazione, almeno doppia della media dei coetanei (e quasi tripla attorno al 2005) è un indicatore di un imprinting positivo con la matematica con effetti a lungo termine. E' interessante il fatto che diversi laureati da noi intervistati abbiano conservato un ricordo abbastanza preciso soprattutto di certe unità didattiche relative ai CdE non matematici dei progetti, come "le monete", "le produzioni in classe", "le ombre del sole", "la genetica", "automazione"... Come valutazione complessiva ci sembra di aver offerto ad allievi e insegnanti opportunità di meglio imparare e di meglio insegnare la matematica (in confronto con l'insegnamento e apprendimento ordinario nelle scuole). Il "meglio" naturalmente deve essere riferito, nel caso degli insegnanti, *non solo* alle proposte didattiche *ma anche* alla possibilità di condividere con colleghi e ricercatori la loro progettazione o adattamento, la loro gestione in classe e l'analisi dei risultati.

La formazione (in servizio, e iniziale-universitaria) degli insegnanti, come pure la diffusione dei nostri Rapporti Tecnici e (più recentemente) delle nostre unità didattiche attraverso Internet, ha offerto a parecchi insegnanti in Italia l'opportunità di adottare/adattare nostre proposte didattiche in modo peraltro non sempre genuino. Non è facile fare una valutazione della quantità e della qualità di tale diffusione; e sulla qualità, come già detto in precedenza, i dati a disposizione sono piuttosto contrastanti tra loro, anche se ci sono giunte valutazioni nella maggior parte dei casi positive sugli stimoli offerti al lavoro degli insegnanti. Queste considerazioni nel complesso piuttosto positive sulle ricadute del nostro lavoro nelle "nostre" e in altre classi sono in contrasto con la mancanza di ricadute consistenti e coerenti nel sistema-scuola nazionale: come abbiamo visto, solo alcuni prodotti isolati del nostro lavoro di ricerca e implementazione didattica affiorano nei libri di testo e nei curricula nazionali. Questa del resto è una situazione comune ad altri gruppi di ricerca collegati alla scuola (in Italia come in diversi altri Paesi - ma non in tutti!): l'impatto più significativo è solo locale, ed anche l'impatto locale dipende fortemente dalle relazioni con il sistema-scuola a livello locale.

Sul *versante della ricerca*, partecipare al lavoro della comunità internazionale dei ricercatori in didattica della matematica ci ha offerto (oltre che stimoli e contributi per il nostro lavoro "interno" di implementazione didattica) la possibilità di contribuire (pur in una condizione minoritaria e marginale, e con apporti limitati e specifici) all'avanzamento delle ricerche, soprattutto per quanto riguarda il tema dell'approccio e dello sviluppo a scuola del pensiero teorico in matematica. Quindi sul versante della ricerca il bilancio è più positivo, anche tenuto conto del punto di partenza: quando meno di trent'anni fa abbiamo cominciato a partecipare al dibattito scientifico internazionale nel campo della didattica della matematica abbiamo dovuto imparare quasi tutto dagli altri, oltre che segnalare la nostra differenza da altri didatti italiani allora più noti che rifiutavano di lavorare in una

prospettiva di ricerca sistematica secondo gli standard internazionali che si venivano definendo in quegli anni.

Ma vorremmo anche aggiungere un'osservazione che riguarda il lavoro di tutti i gruppi di ricerca italiani che in questi anni si sono impegnati nel quadro della ricerca internazionale in didattica della matematica: la crisi dell'Italia in così tanti campi dipende anche dall'ignoranza su quello che succede all'estero (con l'inevitabile conseguenza che quando dei cambiamenti diventano necessari si adottano acriticamente le soluzioni che vanno per la maggiore all'estero). Nel campo dell'insegnamento della matematica i *nostri gruppi hanno contribuito in questi anni a tenere aperte le frontiere*, in particolare per quanto riguarda quelle idee (provenienti dalla ricerca in didattica della matematica ma anche da altre ricerche) che da un lato orientano i cambiamenti dei metodi e dei contenuti dell'insegnamento, e dall'altro possono consentire di analizzare criticamente tali cambiamenti.

-- UNA BIBLIOGRAFIA COMPLETA VERRA' DISTRIBUITA DURANTE IL SEMINARIO -