

**RICERCA DIDATTICA**  
**NEI CAMPI DI ESPERIENZA, 1989-2010:**  
**CONTRIBUTI SULLA COSTRUZIONE DEI CONCETTI**  
**E**  
**SULL'APPROCCIO AL PENSIERO TEORICO**  
**IN MATEMATICA**

**Paolo Boero, Nadia Douek, Rossella Garuti**

## Scopo della presentazione scritta:

Fornire un quadro delle ricerche condotte, sotto l'ipotesi dell'insegnamento-apprendimento della matematica nei campi di esperienza, tra motivazioni interne e dialogo esterno con la ricerca in Didattica della Matematica a livello internazionale

## Scopo della presentazione orale:

Nel quadro delineato nel testo scritto, sviluppare quattro approfondimenti:

- sulla costruzione dei concetti attraverso l'interazione verbale (inter-soggettiva con cenni all'intra-soggettiva) - **5a - Boero**
  - sulla costruzione dei concetti nel rapporto tra contesti socioculturali diversi - **5b - Douek**
  - sull'approccio mediato al pensiero teorico: il gioco "voci-eco" - **7 Garuti**
  - Sulla ricerca di un quadro unificante per l'approccio alla cultura matematica nel rapporto con le altre culture---> Habermas - **6**
- ..... indicando questioni aperte! **9a - 9b - Boero**

*Un CdE è un settore della cultura umana identificabile dagli allievi come parte della loro esperienza (**effettiva o potenziale**), con **specifiche caratteristiche** che lo rendono (sotto la guida dell'insegnante) adatto per attività di modellizzazione matematica, di problem solving matematico, di costruzione e **sviluppo** di concetti matematici, **ecc.***

*Un CdE è un settore della cultura umana identificabile dagli allievi come parte della loro esperienza (**effettiva o potenziale** costruzione culturale in classe in sinergia con esperienza extrascolastica - CdE della realtà naturale e sociale; **referente da chiarire** - per i CdE della matematica -->**razionalità?**), con **specifiche caratteristiche** (analisi storico-antropologica, da Bishop in poi) che lo rendono (sotto la guida dell'insegnante) adatto per attività di modellizzazione matematica, di problem solving matematico, di costruzione e **sviluppo** (in senso teorico-scientifico) di concetti matematici, **ecc.** (hanno sempre più assunto rilievo CdE per lo sviluppo di dinamiche mentali e forme argomentative proprie dell'attività matematica complessa: problem solving complesso, congetturare e dimostrare)*

*Ogni campo di esperienza può essere considerato sotto tre punti di vista:*

*quello dell'insegnante ("contesto interno dell'insegnante", CII, che comprende le sue rappresentazioni mentali a proposito del campo di esperienza, i suoi schemi che gli permettono di agire con sicurezza in esso, le sue attese a proposito del suo utilizzo didattico in classe, ecc.),*

*quello dell'allievo ("contesto interno dello studente", CIS, che comprende le sue rappresentazioni mentali a proposito del campo di esperienza, i suoi schemi a proposito delle azioni in esso, le sue attese a proposito di come comportarsi in classe per fare fronte alle richieste dell'insegnante relative ad esso, ecc. )*

*e quello degli elementi oggettivi e delle relazioni tra essi che rendono un campo di esperienza riconoscibile dall'esterno ("contesto esterno", CE: gli oggetti materiali, le rappresentazioni grafiche, i testi, **le convenzioni sociali e i vincoli che ne derivano, le relazioni fisiche tra le sue parti e i vincoli che ne derivano**, ecc.).*

***I tre "contesti" evolvono nel corso dell'azione didattica in classe e nell'esperienza a più lungo termine dei soggetti coinvolti.***

**Modello didattico rozzo iniziale** (*più rozzo delle pratiche didattiche degli insegnanti...*)(focusT altrove!):

*in relazione al suo CII, l'insegnante interviene sul CIS sfruttando in modi diversi QUALI? (secondo gli obiettivi di apprendimento e le risorse del CE) il CE stesso. Le reazioni degli studenti alle iniziative dell'insegnante vengono interpretate dall'insegnante secondo il suo CII, e così viene preparato ed effettuato COME? un nuovo intervento DI CHE TIPO? sul CIS (sono sfruttati nuovi elementi del CE, tra i quali anche le produzioni verbali e grafiche degli studenti).*

*Le tre componenti del CdE si modificano nel tempo (compreso il CII, in relazione alla conoscenza degli studenti e, su tempi più lunghi, all'esperienza didattica e culturale via via accumulata).*

Il ciclo didattico delle ipotesi:

**Produzione individuale scritta** dell'ipotesi (“ipotesi argomentata”), se necessario assistita dall'insegnante

**Confronto e discussione** (guidata dall'insegnante) delle ipotesi prodotte, sulla base di ipotesi selezionate dall'insegnante

**Sintesi provvisoria** (individuale o collettiva-guidata) di quanto emerso nella discussione

## **La struttura della DCdE:**

*Eventuali attività preparatorie (discussione di ambientamento; lettura guidata di testi; ...Oppure ciclo precedente...*

**Produzione individuale (o in piccolo gruppo) scritta** (se necessario assistita dall'insegnante)

**Confronto e discussione** (guidata dall'insegnante) di prodotti individuali selezionati dall'insegnante

**Sintesi provvisoria** (individuale o collettiva-guidata) di quanto emerso nella discussione

*...seguita da un nuovo ciclo P / C-D / S*

*...oppure da letture (accesso a fonti culturali, e confronto con sintesi provvisoria, seguito da un nuovo ciclo P/ C-D /S)*

*... oppure da attività sperimentali, e loro confronto con sintesi provvisoria, seguite da P / C-D / S*



*Eventuali attività preparatorie (discussione di ambientamento; lettura guidata di testi; ...Oppure ciclo precedente...*

**CIS (CE sullo sfondo) Produzione individuale (o in piccolo gruppo) scritta** (se necessario assistita dall'insegnante)

**CII/CIS<-->CE Confronto e discussione** (guidata dall'insegnante) di prodotti individuali selezionati dall'insegnante

**CIS (CII) (CE sullo sfondo) Sintesi provvisoria** (individuale o collettiva-guidata) di quanto emerso nella discussione

*...seguita da un nuovo ciclo P / C-D / S*

*...oppure da letture (**accesso a fonti culturali**), e confronto con sintesi provvisoria, seguito da un nuovo ciclo P/ C-D /S)*

*... oppure da **attività sperimentali**, e loro confronto con sintesi provvisoria, seguite da P / C-D / S*

## **ASPETTI COGNITIVI PREVALENTI:**

**ADATTAMENTO INDIVIDUALE, CON IMPORTANZA DIVERSA A SECONDA DEI CASI (“ECO”/IMITAZIONE ATTIVA; ADATTAMENTO A VINCOLI FISICI O SOCIALI EVOCATI) PER ASSIMILAZIONE E ACCOMODAMENTO:**

**CIS (CE sullo sfondo) Produzione individuale (o in piccolo gruppo) scritta**  
(se necessario assistita dall’insegnante)

**MEDIAZIONE (DIRETTA O INDIRETTA, IN TEMPO REALE) DELL’INSEGNANTE (incluse operazioni di “instrumentalisation”- nel senso “mediazione semiotica”) E INTERAZIONE COSTRUTTIVA (vedi tra poco “meccanismi interazione”):**

**CII/CIS<-->CE Confronto e discussione** (guidata dall’insegnante) di prodotti individuali selezionati dall’insegnante

**ADATTAMENTO S (O ADATTAMENTO S CON MEDIAZIONE I)**

**CIS (CII) (CE sullo sfondo) Sintesi provvisoria** (individuale o collettiva-guidata) di quanto emerso nella discussione

## **ASPETTI CULTURALI/ANTROPOLOGICI - prima**

*approssimazione grezza ([approfondimento: Nadia Douek](#))*

*Eventuali attività preparatorie (discussione di ambientamento*

***CIS-Q**; lettura guidata di testi **CE-S**; ...Oppure ciclo precedente...*

**Produzione individuale (o in piccolo gruppo) **CIS-Q** scritta**  
(se necessario assistita dall'insegnante **CII-S**)

**Confronto e discussione (**CIS-Q** / **CII-S**)** (guidata dall'insegnante) di prodotti individuali selezionati dall'ins.

**Sintesi provvisoria** (individuale o collettiva-guidata) di quanto emerso nella discussione (**CIS-Q** / **CIS-S** oppure **CIS-Q** / **CII-S**)

*...eventualmente seguita da letture (accesso a fonti culturali **CE-S**, e confronto con sintesi provvisoria, seguito da un nuovo ciclo)*

- **PRIMO APPROFONDIMENTO:**  
costruzione concettuale in situazioni di  
interazione verbale (Boero)

**SECONDO APPROFONDIMENTO:**  
questione della concettualizzazione  
nei CdE (Douek)

**TERZO APPROFONDIMENTO:**  
Mediazione di forme di pensiero estranee agli  
allievi (Garuti)

# PRIMO APPROFONDIMENTO:

Confronto e discussione (CIS-Q / CII-S) (guidata dall'insegnante) di prodotti individuali selezionati dall'ins.

... e costruzione della **conoscenza matematica** attraverso il dialogo costruttivo interpersonale: le funzioni costruttive/costitutive del linguaggio verbale (Bruner, Sfard)

***Alla ricerca dei meccanismi di costruzione e delle condizioni di attivazione!***

***...perché è importante che gli allievi esperiscano tali meccanismi... socialmente e forse anche personalmente (interiorizzazione- da inter-personale a intra-personale: vedi discussione successiva)***

## MECCANISMO I

–Paolo: Un numero è divisore di un altro numero... significa che lo divide. ... Un numero divide un altro numero quando è contenuto esattamente un certo numero di volte, **e non resta niente** nel dividendo. Qui ho due numeri consecutivi... Un numero e il numero che ... il **numero che viene dopo**. **Non resta nulla** in quello di prima... *(lungo silenzio)*

–Lucia: Un numero è divisibile per un altro numero **se il resto è zero**. Se mi sposto sul **numero successivo**... **Il resto...** *(lungo silenzio)*

–Paolo: Il **numero successivo** è quello di prima aumentato di uno. Allora **il resto è uno**!... Se divido il numero successivo per un divisore del numero di prima, ottengo uno come resto, così il numero successivo non è divisibile... non è divisibile per quel divisore.

## MECCANISMO II

–Rosy: **In caso di divisibilità, il resto è zero**

–Lorena: Mentre nel caso di due numeri consecutivi... (*lungo silenzio*) Mentre **nel caso di non divisibilità**, il **resto non** può essere **zero**

–Daniele: Nel caso di due numeri consecutivi... (*lungo silenzio*)

–Francesca: Nel caso di un numero e **di quello che viene dopo...** (*lungo silenzio*)

–Ivan: Nel caso del **numero che viene dopo ... prima il resto era zero**, e allora **ci spostiamo e il resto è uno**, ... così il numero successivo non è divisibile per il divisore di prima. ... Perché **il resto non è zero**, come ha detto Lorena

### MECCANISMO III

–Maria: Nel caso del **divisore due**, dobbiamo spostarci da un pari al pari che viene dopo, **due posti in avanti**

–Barbara: Mentre nel caso del **divisore tre**, dobbiamo spostarci da uno che ha tre come divisore, a quello dopo divisibile per tre, che è ... tre, sei, nove... **tre posti in avanti.**

–Francesco: E nel caso di quattro, quattro - otto - dodici, **quattro posti avanti!**

–Lorena: La distanza cresce sempre di più, se il divisore cresce... **La distanza è il divisore!** ... *(lungo silenzio)*

–Roberto: Ma allora, se la distanza è uno, **l'unico divisore è uno.**



## MECCANISMO I IN UN ALTRO CONTESTO

•Giulia: No, perché se tu pensi ai dadi... al dado che butti... perché il **risultato è un numero più un numero che fa un certo risultato**. **Prima di essere calcolati quei due numeri sono da soli, non sono già insieme...** perché se uno butta 3 e l'altro 4...

•Roberto: ... tipo, 4 è un numero 3 è un altro numero, come ha detto Giulia, **se li metti insieme fanno 7**, però **prima di metterli insieme il 4 è un numero solitario e il 3 è un altro numero solitario**, poi quando si mettono insieme viene **un numero formato da numeri più piccoli**

•Giulia: ... sì, ma **prima di essere calcolato il risultato**, i **due numeri possono essere degli altri**.

Possibile **obiezione di metodo:**

- ... nessuno può provare che gli sblocchi avvengono grazie ai meccanismi descritti
- **Risposta: evidenze empiriche:**
- nei due casi più estesamente studiati (divisori di numeri consecutivi e avvio al pensiero probabilistico) **oltre il 70% degli sblocchi sono preceduti da scambi in cui sono riconoscibili i tre meccanismi** (da soli, o qualche volta combinati)

***... ma cosa c'entrano i CdE?***

**A priori**, la familiarità condivisa con il “contesto” (CdE) del problema posto appare condizione necessaria per il funzionamento dei meccanismi di scambio costruttivo.

**A posteriori**, su questi temi ed altri si è visto che se non c'è familiarità condivisa *con il CdE del problema* ... i meccanismi di scambio costruttivo non si attivano quasi mai!

***In che cosa consiste la familiarità condivisa?***

--> linguaggio verbale nel registro specifico;

--> “fatti”: proprietà, regolarità, a livello esplicito (S);

--> altro? Dinamiche mentali condivise?

## Ma da cosa dipende l'attivazione dei meccanismi?

- ... oltre che dalla familiarità con il CdE,
- **dal contesto educativo** (gli sblocchi su nodi cruciali si realizzano, in genere attraverso i meccanismi indicati, in percentuali che variano da meno del 20% ad oltre l'80% dei nodi - con correlazioni a volte evidenti con lo "stile educativo" dell'insegnante)

E, per quanto riguarda la **tipologia**,

- anche dalle **dinamiche relazionali/affettive di classe** (e dalla tipologia dei leader...)
- e dalla **natura del problema (*da approfondire!*)**.

## ....E L'INSEGNANTE? E LA DIDATTICA?

- l'insegnante è quasi sempre “assente” nel momento dello scambio costruttivo, che si svolge tra pari (di solito, di livello alto o medio-alto) --->

- **? E a livello medio-basso?**

--->prima di **conclusioni drammaticamente scontate**, necessità di lavoro di ricerca ulteriore (osservazione di gruppi omogenei?)(preparazione alla discussione collettiva?)

**Ma il ruolo dell'insegnante appare cruciale:**

- A) Su scala temporale breve: **nell'innescare del meccanismo** (se no, classi che girano a vuoto)
- B) Su scala temporale lunga: **nella creazione delle condizioni contrattuali e affettivo-relazionali** per il funzionamento dello scambio costruttivo (ascolto/interpretazione degli altri, legittimazione uso prodotti altrui, circolarità dibattito, ...)

# INTERIORIZZAZIONE DEI MECCANISMI

Evidenza sperimentale **occasionale di meccanismi intrapersonali** attraverso risoluzioni ad alta voce e risoluzioni verbalizzate (coerenti con analisi introspettive):

**Nell'esperto** (di fronte a problemi aperti) si attivano meccanismi dei tre tipi spesso attraverso “dialoghi interni”.

Il meccanismo I sembra però richiedere la mediazione del testo scritto (dinamica produzione - interpretazione del testo prodotto - Consogno. CERME 2005- VEDI SEGUITO).

**Mancano studi a lungo termine sugli allievi** che sono stati protagonisti (o spettatori) di scambi costruttivi interpersonali a scuola ---> l'accesso a scambi costruttivi intrapersonali è questione di ***doti personali***, o dipende anche (o prevalentemente) da esperienze di scambi costruttivi vissute con altri? O da altri fattori (affettivi...)?

## DUE ESEMPI DI MECCANISMO I INTRA-PERSONALE DI DIALOGO COSTRUTTIVO CON MEDIAZIONE SCRITTA ESTERNA

*(RARI STUDENTI TERZO ANNO MATEMATICA!)*

Problema:  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabile ovunque

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{2x} = ?$$

**STUD A:** forse, se aggiungo e tolgo  $f(0)$  come altre volte, vedo qualcosa:

$$\frac{f(x) - f(0) + f(0) - f(-x)}{2x}$$

$2x$

Sì, vedo quasi un rapporto incrementale e un altro rapporto incrementale da sistemare... Riscrivo il secondo:  $\frac{f(0) - f(-x)}{2x}$

$2x$

Ora se cambio segno sopra e sotto va a fare mezza derivata (ecc.)

**STUD B:** provo a fare un grafico: *(GRAFICO)*

Sì, ora vedo che assomiglia a uno strano rapporto incrementale. Provo a prendere delle altre  $x$ : *(GRAFICO CON ALTRE DUE SECANTI)*

Si avvicina alla tangente in 0 al grafico!

Ora provo a dimostrarlo con le formule: .....

# AI CONFINI DELLA DIDATTICA

## *(i limiti di azione della didattica!)*

Chi sono gli adulti che praticano il dialogo costruttivo intra-personale?

--->**pochi casi** (*conoscenze personali di laureandi...*): storie di **sicurezze** (nel fare i conti con se stessi, nel gestire il proprio pensiero sapendo prenderne le distanze)...**radicate** in *esperienze di vita importanti...impossibili a scuola* (??)

E chi sono i bambini che partecipano al dialogo costruttivo inter-personale?

--->**parecchi casi** (*conoscenza delle situazioni familiari...*): bambini che hanno diritto di parola in casa, che ricevono spiegazioni e che possono esprimere opinioni e proposte seguite da conseguenze significative nelle decisioni prese dagli adulti...

Situazioni, in gran parte, **impossibili a scuola** (??)