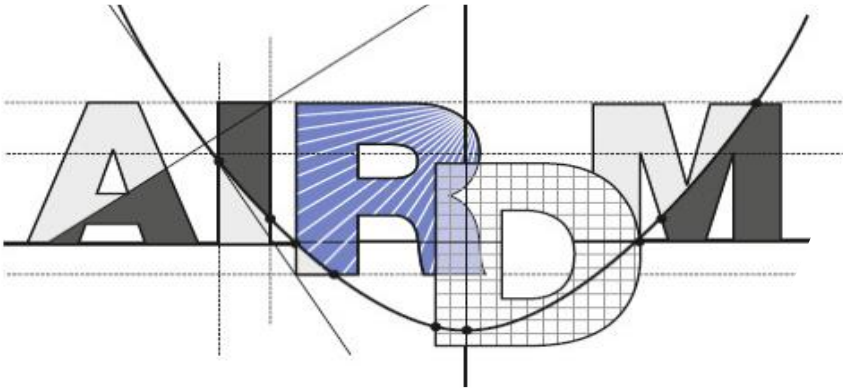




# AperiAIRDM

Incontri di Didattica della Matematica

## L'apprendimento della matematica tra procedure e significati (Scuola secondaria di I grado)

Federica Poli

*English International School of Padua*

Samuele Antonini

*Università di Pavia*

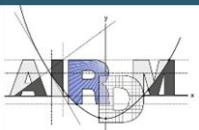
Moderata:

Giulia Lisarelli

# Alla scoperta dei «perché» nascosti: tra procedure e significati nella divisione

Federica Poli

*The English International School of Padua*



# La sperimentazione



Didattica a distanza

2 classi prime  
scuola secondaria  
di primo grado

Ogni classe era  
divisa in due  
sottogruppi  
di 10-13 alunni

# Il percorso si articola su 4 fasi

FASE 1

FASE 2

FASE 3

FASE 4

# FASE 1: il problema delle mascherine

All'ospedale di Pisa è finalmente arrivato un rifornimento di 474 scatole di mascherine.

Mario è l'addetto del magazzino che deve distribuirle tra i vari reparti. Per fare questo Mario utilizza un carrello e in ogni viaggio riesce a trasportare sedici scatole disposte all'interno del carrello, più una scatola appoggiata sopra che tiene aiutandosi con una mano.

Quanti viaggi deve fare Mario per distribuire tutte le scatole di mascherine che sono arrivate?

## FASE 2: capiamo «la canadese»

- Gli studenti ricevono una mail da una studentessa canadese, Nadège, che illustra come ha svolto la divisione necessaria per risolvere il problema.
- Nella mail Nadège non spiega come funziona ogni singolo passaggio di tale procedura ma ne riporta due realizzazioni.
- La consegna per gli studenti consiste nel cercare di capire il metodo di Nadège, che chiameremo «canadese» e svolgere alcune divisioni per provare ad usarlo.

Dear Giulia, thank you for writing. How's the situation in Italy? The TV says that schools are closed, is that true?

I was able to solve the problem that you sent: all I had to do was a simple division and it didn't take long. I wasn't very happy to deal with those numbers, though, so I used two different methods: the first one is slightly longer than the other. I wrote them both down so you can see the procedures I followed.

Basically, I reached the same result with both methods, and the solution to the problem has to be 28 because 27 isn't enough (there would be 15 left).

How did the Italian students solve it? Did they struggle with the numbers? Did they also find different approaches?

Take care, ciao! Nadège

$$\begin{array}{r} 474 \overline{) 17} \\ -170 \phantom{00} \\ \hline 304 \phantom{00} \\ -170 \phantom{00} \\ \hline 134 \phantom{00} \\ - 34 \phantom{00} \\ \hline 100 \phantom{00} \\ - 85 \phantom{00} \\ \hline 15 \end{array}$$

$17 \cdot 1 = 17$   
 $17 \cdot 2 = 34$   
 $17 \cdot 5 = 85$   
 $17 \cdot 10 = 170$

$$474 = (10 + 10 + 2 + 5) \cdot 17 + 15$$

$$\begin{array}{r} 474 \overline{) 17} \\ - 340 \phantom{00} \\ \hline 134 \phantom{00} \\ - 119 \phantom{00} \\ \hline 15 \end{array}$$
$$474 = (20 + 7) \cdot 17 + 15$$

Paola: “Il metodo canadese diciamo taglia un po’ il numero... [l’algoritmo in colonna] lo fa in un’altra maniera però comunque prende un piccolo pezzo e tenta di facilitare le cose”

Ins.: “OK ma nella canadese cosa vuoi dire... che taglia un po’ il numero?»

Paola: “Beh, quando sottrae... cioè piano piano tenta di digerire il numero... possiamo dire così, che al posto di prenderlo tutto di un pezzo lo fa piano piano. Prima smaltisce quel 160 e poi ancora, e poi digerisce ancora e ancora di più fino ad arrivare... fino a quando ...fino ad arrivare a 11.”

$$\begin{array}{r} 395 \overline{) 16} \\ \underline{-160} \phantom{0} 16 \phantom{0} 10 \\ 235 \\ \underline{-160} \phantom{0} 16 \phantom{0} 10 \\ 75 \\ \underline{-64} \phantom{0} 16 \phantom{0} 4 \\ \hline 11 \end{array}$$



# Dalle nostre lavagne

$$\begin{array}{r} \cancel{1}665 \\ - 240 \\ \hline 1425 \\ - 240 \\ \hline 1185 \\ - 120 \\ \hline 1065 \\ - 240 \\ \hline 825 \\ - 480 \\ \hline 345 \\ - 240 \\ \hline 105 \\ - 60 \\ \hline 45 \\ - 36 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 \\ 12 \cdot 20 \\ 12 \cdot 20 \\ 12 \cdot 10 \\ 12 \cdot 20 \\ 12 \cdot 40 \\ 12 \cdot 20 \\ 12 \cdot 5 \\ 12 \cdot 3 \end{array}$$

138

$$\begin{aligned} 12 \cdot 1 &= 12 \\ 12 \cdot 2 &= 24 \\ 12 \cdot 10 &= 120 \\ 12 \cdot 20 &= 240 \\ 12 \cdot 100 &= 1200 \\ 12 \cdot 15 &= 180 \\ 12 \cdot 30 &= 36 \cdot 10 \\ 12 \cdot 8 &= 96 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1665 \\ - 1200 \\ \hline 465 \\ - 360 \\ \hline 105 \\ - 96 \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 \\ 12 \cdot 100 \\ 12 \cdot 30 \\ 12 \cdot 8 \end{array}$$

138

Ottimizzata

## FASE 3: Il confronto

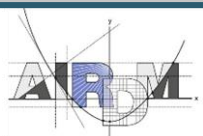
- Confronto tra le due procedure per la divisione: quella «canadese» e quella «italiana».

Consegna:

**Perché se svolgiamo la stessa divisione usando la procedura in colonna italiana e quella canadese otteniamo lo stesso risultato?**

## FASE 4: La risposta a Nadège

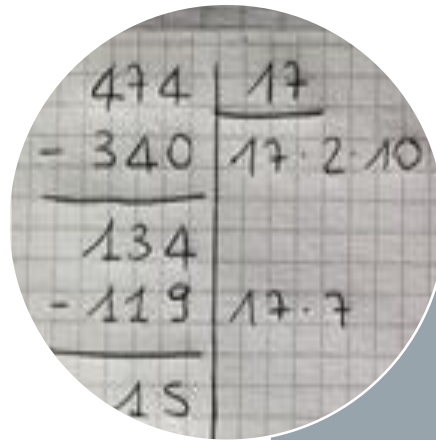
- Rispondiamo alla studentessa canadese con una mail in cui descriviamo la procedura in colonna italiana per svolgere le divisioni.
- Importante: nella mail vogliamo rendere espliciti tutti i «perché». Non è sufficiente riportare la sequenza di passaggi per far capire a Nadège la «nostra» procedura in colonna, ma vogliamo spiegare tutto ciò che abbiamo scoperto dal confronto con «la canadese» che lei conosce.



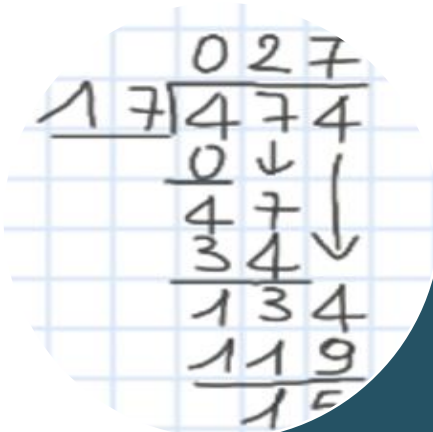
Alcune riflessioni  
a posteriori sul  
percorso

Perché proporre  
alle medie una  
nuova procedura  
per la divisione?

**I NOSTRI OBIETTIVI  
ERANO ALTRI**


$$\begin{array}{r|l} 474 & 17 \\ - 340 & 17 \cdot 2 = 10 \\ \hline 134 & \\ - 119 & 17 \cdot 7 \\ \hline 15 & \end{array}$$

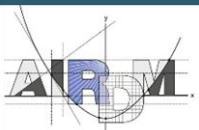
Presentazione di un  
algoritmo più semplice


$$\begin{array}{r} 027 \\ 17 \overline{) 474} \\ \underline{0} \downarrow \\ 47 \downarrow \\ \underline{34} \downarrow \\ 134 \\ \underline{119} \\ 15 \end{array}$$

È compito della scuola  
primaria

NON MI RICORDO SE NON CAPISCO  
E CON TUTTA LA MATEMATICA È COSÌ!

---



# Il focus sul perché!

- Dal confronto tra i vari algoritmi emerge forte l'esigenza del perché!
- Gli studenti della scuola secondaria hanno una maturità diversa per affrontare questo confronto
- L'importanza di far emergere e recuperare significati costruiti alla scuola primaria che vanno raffinati per promuovere lo sviluppo di nuove conoscenze.

# Dalla lavagna e dalla chat....

$$395 : 16$$

$$16 \cdot 1 = 16$$

$$16 \cdot 2 = 32$$

$$16 \cdot 4 = 64$$

$$16 \cdot 5 = 80$$

$$16 \cdot 10 = 160$$

$$\begin{array}{r} 395 \overline{) 16} \\ -160 \quad 16 \cdot 10 \\ \hline 235 \\ -160 \quad 16 \cdot 10 \\ \hline 75 \\ -64 \quad 16 \cdot 4 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$10 + 10 + 4 = 24$$

$$16 \cdot (10 + 10 + 4) + 11 = 395$$

$$\begin{array}{r} 024 \\ 16 \overline{) 395} \\ -0 \downarrow \\ 39 \\ -32 \downarrow \\ \hline 75 \\ -64 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{16 \cdot 5?} \\ \cancel{16 \cdot 4!} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 160 + 160 = 320 \\ 395 - 320 = 75 \end{array}$$



# La comprensione viene dal confronto

Giorgia: io ho capito però sinceramente non capisco a cosa serve cioè, cosa mi serve l'interazione di una e l'altra?

Anna: ti aiuta a capire meglio il DMSB per me

Pietro: big brain

Giorgia: sì vero

Paola: e che ci sono più strade per arrivare alla stessa soluzione

Giorgia: ok

Alessio: Bhe ovvio è la canadese che ci ha portato a capire il dmsb...

395 : 16

16 · 1 = 16  
16 · 2 = 32  
16 · 4 = 64  
16 · 5 = 80  
16 · 10 = 160

395 / 16  
- 160 16 · 10  
-----  
235  
- 160 16 · 10  
-----  
75  
- 64 16 · 4  
-----  
11

10 + 10 + 4 = 24  
16 · (10 + 10 + 4) + 11 = 395

0 24  
16 395  
- 0  
-----  
39  
- 32  
-----  
75  
- 64  
-----  
11

160 + 160 = 320  
395 - 320 = 75

Anna: A me sta aiutando molto il metodo canadese

Leonardo: la canadese è più chiara

Pietro: adesso ho capito

Alessio: Si si

Paola: a saperlo prima potevano insegnarci la canadese già alle elementari

Andrea: si

Pietro: aaannnche a me

Alessio: Ma secondo me non lo sapevano i maestri alle elementari

Anna: mi fa fare le divisione più semplici

[...]

Leonardo: alle elementari ci spiegavano i passaggi, non perché li dovevamo fare

Paola: ci aiuta a dare più senso alla logica...e si chiama logica proprio perché usandola si arriva alle stesse soluzioni

Anna: ok, così è più semplice

## DALLA CHAT DELLA VIDEOLEZIONE

# Dal confronto ai perché!

$$\begin{array}{r}
 685 : 7 \\
 \hline
 630 \quad 7 \cdot 90 \\
 \hline
 55 \quad 7 \cdot 6 \\
 \hline
 13 \quad 7 \cdot 1 \\
 \hline
 7 \\
 \hline
 8
 \end{array}$$

$7 \cdot 1 = 7$   
 $7 \cdot 2 = 14$   
 $7 \cdot 5 = 35$   
 $7 \cdot 10 = 70$   
 $7 \cdot 90 = 630$   
 $7 \cdot 6 = 42$

$685 = (90 + 6 + 1) \cdot 7 + 6$

$$\begin{array}{r}
 097 \\
 \hline
 7 \overline{) 685} \\
 \hline
 - 091 \\
 \hline
 685 \\
 \hline
 - 630 \\
 \hline
 55 \\
 \hline
 - 49 \\
 \hline
 6
 \end{array}$$

Francesca 14:55  
si

Gabriele 14:55  
yesù

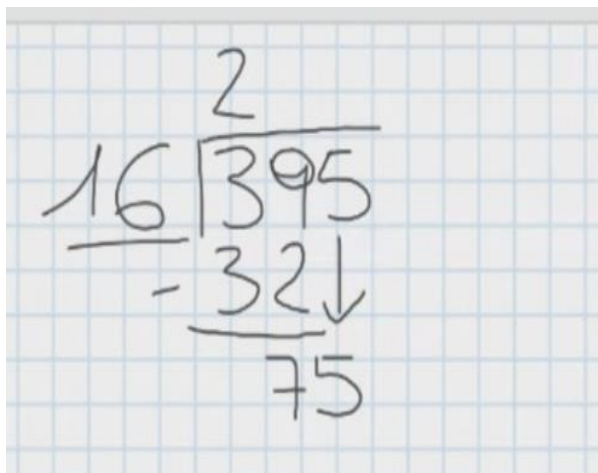
Edoardo 14:55  
si

lucrezia 14:55  
prima lo facevo automaticamente senza pensare

Gabriele 14:55  
\*yes

## Dalla II lezione, sul confronto

Alessio: «Poi bisogna fare 16 per 2 che fa 32 e lo scrivi sotto al 39 del 395. Sì, cos'è che è, 39 meno 32 che fa 7 e adesso io questa mossa qua non l'ho mai capita perché si faceva ma devi portare giù il 5 là al 7 che fa 75. Ricominci, devi fare quante volte il 16 sta nel 75...»



A handwritten long division problem on a blue grid background. The divisor is 2, written above the dividend 395. A horizontal line separates the divisor from the dividend. Below the line, the number 16 is written, followed by a horizontal line. Below that, the number 32 is written with a minus sign to its left. A vertical line is drawn under the 2 of 32, and an arrow points down from the 2 to the 5 of 75. Below 32, the number 75 is written.

$$\begin{array}{r} 2 \\ \hline 16 \overline{) 395} \\ \underline{- 32} \phantom{0} \\ 75 \end{array}$$

# Dalla lezione sulla risposta a Nadège

Giorgia

esempio:  $360 : 3 = 120$

si scrive  $\overline{3} 360$

D M S B

1) DIVISION  $3 : 3 = 1$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \overline{) 360} \end{array}$$

fore tic

D M S B  
✓

2) MULTIPLICATION  $1 \times 3 = 3$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \overline{) 360} \\ \underline{3} \end{array}$$

tic

D M S B  
✓ ✓

3) SUBTRACTION  $3 - 3 = 0$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \overline{) 360} \\ \underline{- 3} \\ 0 \end{array}$$

tic

D M S B  
✓ ✓ ✓

4) BRING DOWN

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \overline{) 360} \\ \underline{- 3} \downarrow \\ 06 \end{array}$$

Tic

D M S B  
✓ ✓ ✓ ✓

si RIPARTE

# Dalla lezione sulla risposta a Nadège

esempio:  $360 : 3 = 120$

Giorgia

si scrive  $\begin{array}{r} 3 \overline{) 360} \end{array}$

DMSB

Alessio: Sì, quello lì che ha fatto Giorgia è utile però poi dobbiamo anche dirgli il perché questo succede sennò poi succede come hanno fatto a noi, cioè io non sapevo cosa voleva dire per esempio quella freccetta!

4) BRING DOWN

si RIPARTE

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \overline{) 360} \\ - 3 \downarrow \\ \hline 06 \end{array}$$

Tic

DMSB  
✓✓✓✓

Sviluppare  
consapevolezza  
della differenza tra



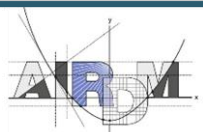
riuscire



capire

...tra «saper fare» e «aver capito»...

Aiuta a sviluppare una corretta  
visione epistemologica della matematica.



La qualità di un algoritmo dipende dall'obiettivo che ci si pone.

Per esempio, se l'obiettivo è l'inclusione, un algoritmo può essere meglio di un altro se dà più sicurezza.

Altra cosa sarebbe se l'obiettivo fosse la velocità.



Rispetto  
all'inclusione



Giorgia: Ora sottrai dal 140 il 40 perché così arrivi al 100

Ins: Quindi perché è comodo Giorgia?

Giorgia: Sì, perché è comodo

Ins: OK. Potevo sottrarre anche qualcos'altro?

Giorgia: Sì anche 80  
Però era più comodo 40

$$\begin{array}{r} 220 : 8 \\ 220 \overline{) 8} \\ - 80 \quad 8 \cdot 10 \\ \hline 140 \quad 8 \cdot 5 \\ - 40 \quad 8 \cdot 10 \\ \hline 100 \quad 8 \cdot 10 \\ - 80 \quad 8 \cdot 2 \\ \hline 20 \\ - 16 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 \cdot 1 = 8 \\ 8 \cdot 2 = 16 \\ 8 \cdot 5 = 40 \\ 8 \cdot 10 = 80 \end{array}$$

Leonardo: "In tutti i casi ti verrà sempre 24? Con i numeri che hai usato della tabellina del 16?"

Pietro: "Io credo di sì perché io ho fatto in un modo diverso"

Paola: "Sì, anche se facciamo  $16 \cdot 4$  e  $16 \cdot 10$  e di nuovo  $16 \cdot 10$  è sempre lo stesso risultato."

|       |       |
|-------|-------|
| 395   | 16    |
| - 160 | 16 10 |
| 235   |       |
| - 32  | 16 2  |
| 203   |       |
| - 80  | 16 5  |
| 123   |       |
| - 32  | 16 2  |
| 91    |       |
| - 80  | 16 5  |
| 11    |       |

$16 \cdot 2 = 32$   
 $16 \cdot 5 = 80$   
 $16 \cdot 10 = 160$

- Gli algoritmi standard sono ottimizzati: non c'è margine di scelta.
- Dal punto di vista inclusivo possono essere, in questo senso, mortali.
- La «canadese non ottimizzata» lascia molta più libertà ed è quindi più inclusiva.



Rispetto  
all'inclusione

# Velocità o sicurezza?



# La discussione degli studenti

Leonardo: non voglio spendere tutto questo per fare  $7 \cdot 10$  e poi ancora  $7 \cdot 10$  ....

Gianluca: Leonardoooo.... Però così vai anche più sul sicuro perché magari sai che  $7 \cdot 10$  faaaa 70 e magari sei anche un po' più tranquillo

Leonardo: ma se tu fai  $7 \cdot 50$  che è anche più facile

Giacomo: bisogna fare  $7 \cdot 5$  e poi aggiungere uno zero

|                 |              |
|-----------------|--------------|
| 685             | 7            |
| 685             | $7 \cdot 10$ |
| 70              |              |
| <del>515</del>  | $7 \cdot 10$ |
| 70              |              |
| <del>445</del>  | $7 \cdot 10$ |
| 70              |              |
| <del>775</del>  | $7 \cdot 10$ |
| 70              |              |
| <del>3105</del> | $7 \cdot 10$ |
| 70              |              |
| <del>2135</del> | $7 \cdot 10$ |
| 70              |              |
| <del>1765</del> | $7 \cdot 10$ |
| 70              |              |
| 195             | $7 \cdot 10$ |
| 70              |              |
| <del>0125</del> | $7 \cdot 10$ |
| 70              |              |
| 55              | $7 \cdot 5$  |
| 35              |              |
| 20              | $7 \cdot 2$  |
| 14              |              |
| 6               |              |

Federico

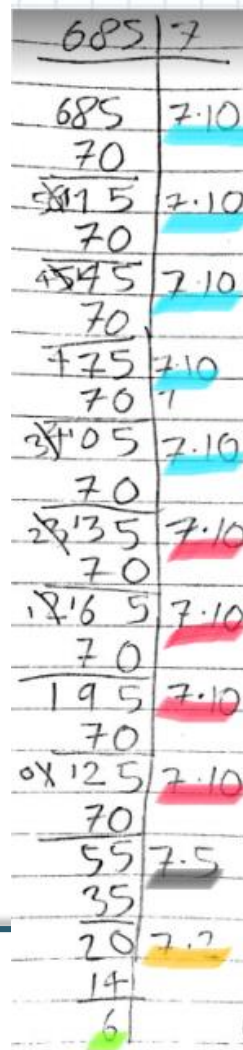
Giacomo

|       |              |
|-------|--------------|
| 685   | 7            |
| - 350 | $7 \cdot 50$ |
| 335   |              |
| - 35  | $7 \cdot 5$  |
| 300   |              |
| - 280 | $7 \cdot 40$ |
| 20    |              |
| - 14  | $7 \cdot 2$  |
| 6     |              |

# La discussione degli studenti

Ins: per qualcuno è vero, magari è più facile  $7 \cdot 50$ , però magari Federico non ci aveva pensato

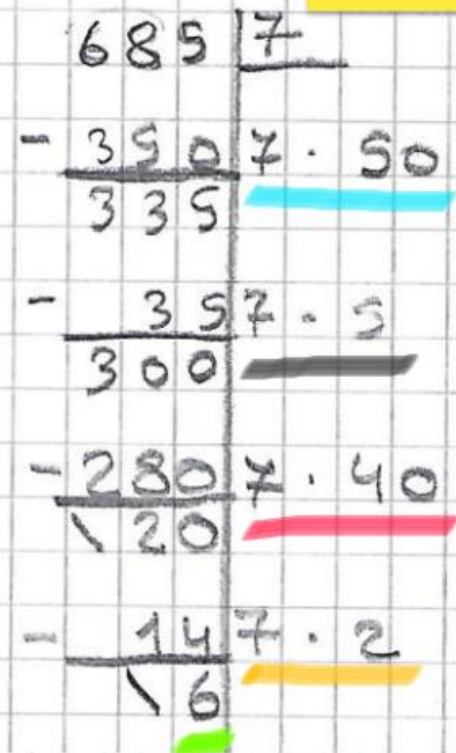
Gianluca: oppure è più prudente, non so. ...eh... però così vai anche più sul sicuro, magari... ho capito che  $7 \cdot 50$  è facile e anche  $7 \cdot 40$  però... così sei più sicuro dei tuoi risultati



Handwritten multiplication table for Federico, showing calculations for  $685 \cdot 7$  and  $685 \cdot 10$ . The table is written on a grid background. The first column contains the numbers 685, 70, 115, 70, 145, 70, 175, 70, 205, 70, 235, 70, 265, 70, 295, 70, 325, 70, 355, 70, 385, 70, 415, 70, 445, 70, 475, 70, 505, 70, 535, 70, 565, 70, 595, 70, 625, 70, 655, 70, 685, 70, 715, 70, 745, 70, 775, 70, 805, 70, 835, 70, 865, 70, 895, 70, 925, 70, 955, 70, 985, 70. The second column contains the results of the multiplications, with some numbers highlighted in blue and others in red.

Federico

Giacomo



Handwritten multiplication table for Giacomo, showing calculations for  $685 \cdot 7$  and  $685 \cdot 10$ . The table is written on a grid background. The first column contains the numbers 685, 70, 115, 70, 145, 70, 175, 70, 205, 70, 235, 70, 265, 70, 295, 70, 325, 70, 355, 70, 385, 70, 415, 70, 445, 70, 475, 70, 505, 70, 535, 70, 565, 70, 595, 70, 625, 70, 655, 70, 685, 70, 715, 70, 745, 70, 775, 70, 805, 70, 835, 70, 865, 70, 895, 70, 925, 70, 955, 70, 985, 70. The second column contains the results of the multiplications, with some numbers highlighted in blue and others in red.

Dalle discussioni emerge che, anche per i più abili con i numeri, spesso la strada scelta è un compromesso tra velocità e sicurezza.

Inoltre è importante insegnare a valutare ad ogni studente cosa sia meglio per lui situazione per situazione. Ovvero aiutarlo a costruirsi la competenza di saper scegliere.

# Velocità o sicurezza?

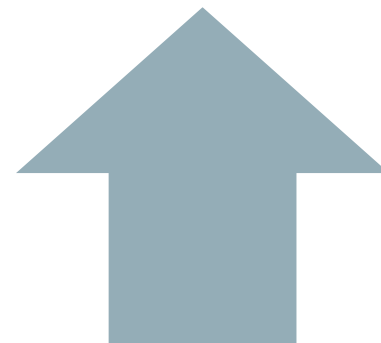
Vedere e capire  
una nuova  
procedura per  
svolgere la  
divisione può  
aiutare a  
sviluppare la  
consapevolezza  
della differenza tra



La divisione:  
l'OPERAZIONE



Come la svolgo:  
l'ALGORITMO





# Operazione o algoritmo?

Aiuta molto in questo senso il vedere più di un algoritmo.

In particolare la canadese non ottimizzata, essendo più «libera», mette in discussione che la divisione sia l'algoritmo con cui la svolgo.

L'identificazione tra operazione e algoritmo dipende molto dalla rigidità degli algoritmi. Se invece c'è libertà di scelta nei passaggi, è più evidente che l'algoritmo non sia l'operazione ma un modo di calcolare l'operazione!

In riferimento ai numerosi e importanti studi di Pietro Di Martino e Rosetta Zan...

Sviluppare la percezione di aver capito, di avere il controllo di quello che sto facendo (che poi non è detto che ci sia), lavora molto sul

SENSO DI  
AUTOEFFICACIA.

Rispetto agli  
aspetti affettivi



...ora possiamo andare a spiegarlo  
anche alle nostre maestre ...



Tra procedure  
e significati

È proprio il confronto  
tra i due algoritmi  
(*e non l'introduzione di  
un nuovo algoritmo in sé*)  
che ci ha portato a  
scoprire i «perché»  
nascosti...

... e ad arrivare  
al cuore della  
matematica!