

La storia della matematica nell'educazione matematica: perché, come, per chi, quando, ...

Fulvia Furinghetti
Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova

Prologo

Da ICMI News 25: October/ November 2013, A Newsletter from the ICMI-International Commission on Mathematical Instruction

1. EDITORIAL

FROM THE DESK OF ICMI VICE- PRESIDENT ANGEL RUIZ President Interamerican Committee of Mathematics Education

Reform in Mathematics Education and the Praxis Perspective in developing countries. The case of Costa Rica
Reform in Mathematics Education and the Praxis Perspective in developing countries. The case of Costa Rica [...]

The new paradigm is reinforced with curricular emphasis operationalized explicitly: to promote positive attitudes and beliefs about mathematics, an intense use of digital technologies (albeit gradual and adequate), and the **use of the history of mathematics** [mia enfasi].

1. Introduzione di carattere informativo riguardante la collocazione dell'International Study Group affiliated to ICMI History and Pedagogy of Mathematics e delle relative ricerche nell'ambito della disciplina "educazione matematica"

Inizio le mie riflessioni sull'uso della storia nell'insegnamento collocandole nel quadro dello sviluppo della disciplina "educazione matematica". Rimando a (Coray, Furinghetti, Gispert, Hodgson, & Schubring, 2003; Furinghetti, 2014; Furinghetti & Giacardi, 2010; Furinghetti, Menghini, Arzarello, & Giacardi 2008) e al sito (Furinghetti & Giacardi 2008) per dettagliate informazioni sulla storia di ICMI. Nel 1908, durante il quarto convegno internazionale dei matematici (ICM), fu istituita una Commissione con lo scopo di fare studi comparativi sui sillabi e dei metodi di insegnamento della matematica nella scuola secondaria delle varie nazioni e sulle riforme (sia quelle già realizzate sia quelle in agenda). Si può considerare questa Commissione la prima incarnazione dell'attuale *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). La Commissione riceveva il mandato dai matematici durante gli ICM e i rapporti erano presentati nell'ICM successivo. Per molti decenni gli ICM, che erano quadriennali furono praticamente l'unica occasione di incontro e discussione sui temi dell'insegnamento matematico, si veda (Furinghetti, 2007a). L'evoluzione della società, le nuove tecnologie, la scolarizzazione di massa evidenziarono l'inadeguatezza di questa agenda. Il presidente di ICMI Hans Freudenthal varò due importanti iniziative: nel 1968 la fondazione del giornale internazionale *Educational Studies in Mathematics* dedicato specificamente all'educazione matematica e l'istituzione di un convegno sull'educazione matematica (*International Congress on Mathematical Education* abbreviato in ICME) sganciato dagli ICM, che dal 1972 divenne quadriennale. Il primo di questi convegni si tenne a Lione nel 1969 e si svolse secondo lo schema tradizionale basato sulla presentazione di contributi, ma già nel secondo a Exeter nel 1972 accanto a conferenze si organizzarono **15** Working Group su vari temi. Uno di essi (WG11) si intitolava "History and pedagogy of mathematics". Nel 1976 durante il terzo ICME a Karlsruhe questo WG ora designato

come HPM (the International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics) e PME (*the International Group for the Psychology of Mathematics Education*) divennero i primi Study Group Affiliated to ICMI. Gli aderenti erano prevalentemente storici con interesse per l'insegnamento.

Gli scopi principali di HPM erano espressi da queste parole (*Historia Mathematica*, 1978, 5, p. 76):

1. To promote international contacts and exchange information concerning:
 - a. Courses in History of Mathematics in Universities, Colleges and Schools.
 - b. The use and relevance of History of Mathematics in mathematics teaching.
 - c. Views on the relation between History of Mathematics and Mathematical Education at all levels.
2. To promote and stimulate interdisciplinary investigation by bringing together all those interested, particularly mathematicians, historians of mathematics, teachers, social scientists and other users of mathematics.
3. To further a deeper understanding of the way mathematics evolves, and the forces which contribute to this evolution.
4. To relate the teaching of mathematics and the history of mathematics teaching to the development of mathematics in ways which assist the improvement of instruction and the development of curricula.
5. To produce materials which can be used by teachers of mathematics to provide perspectives and to further the critical discussion of the teaching of mathematics.
6. To facilitate access to materials in the history of mathematics and related areas.
7. To promote awareness of the relevance of the history of mathematics for mathematics teaching in mathematicians and teachers.
8. To promote awareness of the history of mathematics as a significant part of the development of cultures.

I momenti di incontro di HPM sono:

- Satellite meetings di ICME
- TSG (Topic Study Group) e altre attività all'interno di ICME
- ESU European Summer University)
- WG (Working Group) in CERME
- Sezioni durante i meeting di NCTM
- Incontri organizzati in varie nazioni, specialmente in Brasile
- Convegni HIMED (HISTORY in MATHEMATICS EDUCATION) in UK
- Attività degli IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) in Francia.

Una caratteristica di molti di questi incontri è la notevole partecipazione di insegnanti, non solo come ascoltatori, ma anche come relatori.

Non esistono giornali specifici dedicati ai temi di HPM, articoli su questi temi sono ospitati nei giornali di educazione matematica e nei giornali professionali.

2. Breve rassegna di quello che è avvenuto nel passato riguardo l'uso della storia, dal punto di vista teorico e sperimentale

A partire dalla seconda metà dell'Ottocento, quando i sistemi di istruzione si avviavano ad assumere un assetto moderno, individuiamo tra i primi contributi nel settore l'intervento di G. Heppel (1893) *Association for the Improvement of Geometrical Teaching*, l'associazione da cui nasce l'attuale *Mathematical Association*. L'autore si riferisce ai livelli di scuola elementare e secondaria e ritiene che la storia "gives us stereoscopic views instead of pictures and diagrams. A particular subject may be looked at from many sides, each aspect suggesting a different mode of treatment." (p. 22). Inoltre per Heppel la storia aiuta a chiarire alcune idee di base dei concetti, rende meno arida la matematica e ne fa vedere il contributo al progresso dell'umanità. Egli dà le seguenti indicazioni pratiche (Heppel, 1893, pp. 19-20):

- I. The History of Mathematics should not form a separate subject of education, but be strictly auxiliary and subordinate to Mathematical teaching.

II. Only those portions should be dealt with which are of real assistance to the learner.

III. It is not to be made a subject of examination."

A livello scolastico più avanzato alcuni autori a cavallo del secolo (Loria, Cajori, Zeuthen, Smith, Klein) fissano l'attenzione sul ruolo della storia nella formazione degli insegnanti.

Un'opera molto significativa sul rapporto tra la storia e l'educazione matematica è il trattato sull'insegnamento della matematica di Benchara Branford (1908), che presenta molti metodi didattici innovativi, come l'uso dei manipolativi e dei laboratori di matematica. Inoltre fissa l'attenzione su aspetti non matematici quali le teorie psico-analitiche, in particolare la funzione del sub-conscio. Con questo libro Branford lancia un programma di ricerca empirica in educazione matematica in anni in cui questa non era molto presente in letteratura. Egli si riferisce spesso alla storia ed è nota la figura che delinea il parallelismo tra lo sviluppo matematico nelle civiltà e gli stadi di apprendimento dell'individuo, vedi Figura 1.

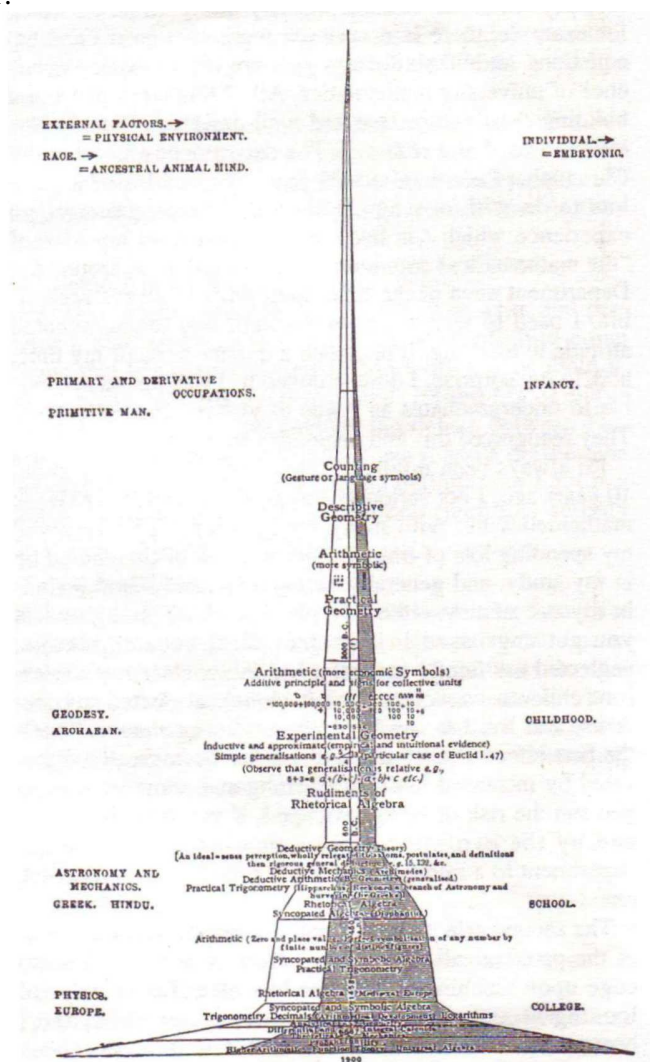


Figura 1. Schema di Branford sullo sviluppo matematico dello studente e delle civiltà

L'uso della storia da parte di Branford è stato considerato come una forma di applicazione della legge di ricapitolazione (l'ontogenesi ricapitola la filogenesi), vedi (Fauvel, 1991). Schubring (2006) mette in discussione questa interpretazione e afferma che "In view of the absence of empirically confirmed propositions concerning the process of learning in mathematics, Branford's approach may be understood as using history of mathematics as a guideline for formulating research questions which then have to be investigated empirically."

Una notevole testimonianza dell'influenza di Branford è l'intervento alla *Mathematical Association* di E. Barwell (1913), che riferisce di aver introdotto a studenti del Training Department dell'Alexandra College (Dublino) and a ragazze di 16-17 anni di altre classi elementi di storia della matematica, quali notazioni, matematica egiziana, sistemi di numerazione, notazioni posizionali, la nascita di algebra e geometria. La Barwell dice che l'introduzione della storia ha suscitato interesse nei suoi alunni, specialmente in quelli più deboli. Come fonte per le notizie storiche cita il famoso testo dedicato alla formazione degli insegnanti *The teaching of elementary mathematics* di David E. Smith (1904. New York: The Macmillan Company) e come ispirazione del metodo storico il libro di Branford. Nell'articolo c'è (p. 332) un adattamento della figura di Branford, vedi Figura 2.

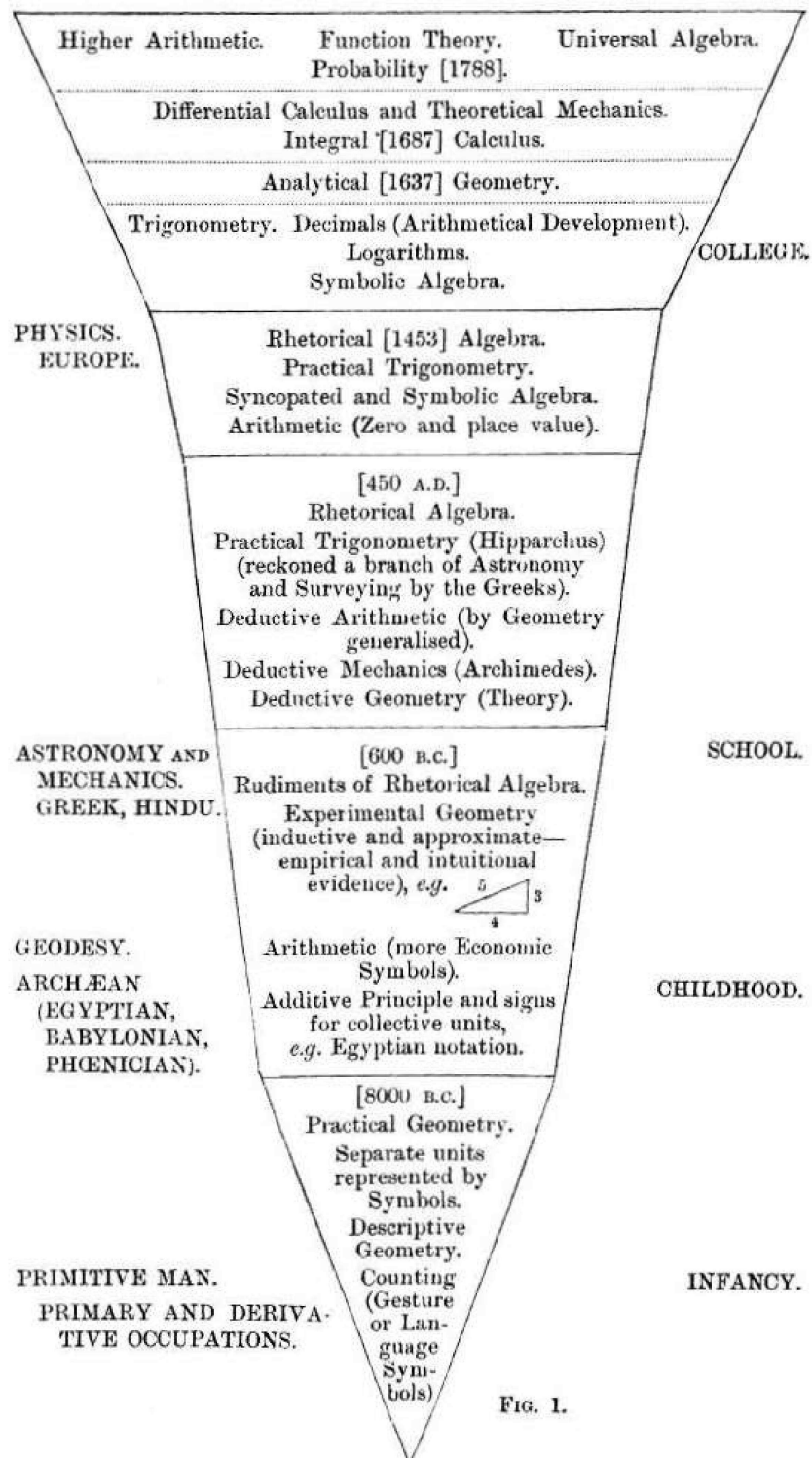


Figura 2. Adattamento dello schema di Branford in (Barwell, 2013)

3. Convergenze e divergenze tra lo sviluppo concettuale nella storia e l'apprendimento matematico in classe. Assunzioni epistemologiche sulla relazione tra la comprensione degli studenti e la storia della matematica

Nel 1874 il biologo tedesco Ernst Heinrich Haeckel pubblicò il libro *Anthropogenie; oder, Entwicklungsgeschichte des menschen. Keimes- und stammes-geschichte* (Leipzig: W. Engelmann) in cui è esposta la sua teoria sul parallelismo embriologico. Secondo questo autore lo sviluppo di un singolo organismo biologico, o ontogenesi, possiede parallelismi e riassume lo sviluppo evolutivo della propria specie, o filogenesi. La legge di ricapitolazione fu traspsta dalla biologia alla psicologia (day Haeckel stesso) con l'affermazione che nel loro sviluppo intellettuale gli studenti percorrono naturalmente più o meno gli stessi stadi percorsi dall'umanità. Come conseguenza, si considerava il funzionamento della mente del bambino come qualcosa che segue lo stesso cammino degli antenati the same path as their ancestors. Questa idea fu assunta come giustificazione per introdurre la storia nell'insegnamento della matematica all'inizio del ventesimo secolo. L'accettazione di questa idea era influenzata dalle teorie sull'educazione di Herbert Spencer. Branford stesso cita l'affermazione di Spencer che "the education of the child must accord, both in mode and arrangement, with the education of mankind, considered historically" (Branford, 1908, p. 326). In seguito le teorie di Haeckel hanno rivelato banchi dal punto di vista sia biologico sia psicologico. Tuttavia, la recapitolazione con le sue varianti è entrata nel discorso dell'educazione matematica, come emerge nell'opera degli psicologi Jean Piaget and Lev Semënovič Vygotskij, vedi (Furinghetti & Radford, 2002; 2008).

La relazione fra storia e insegnamento della matematica ha interessato anche importanti matematici. Henri Poincaré (1899) scrive "Les zoologistes prétendent que le développement embryonnaire d'un animal résume en un temps très court toute l'histoire de ses ancêtres des époques géologiques" (p. 159).

Klein ha usato la storia nei suoi corsi per futuri insegnanti, senza però applicare la legge di ricapitolazione in senso letterale. Come per Poincaré, per lui la storia era un mezzo per abolire l'uso della logica matematica e gli eccessi del rigore di moda in quegli anni. Di conseguenza egli propugnava l'ordine genetico dei temi da insegnare in opposizione al all'insegnamento "sistematico" tradizionale. Molte decadi dopo Thom (1973) espresse opinioni analoghe nella sua critica alla Matematica Modern.

Usare la storia nell'insegnamento non implica necessariamente un'assunzione diretta della legge di ricapitolazione; si può anche usare il cosiddetto "approccio genetico". Nell'introduzione al suo manuale sull'analisi Otto Toeplitz (1963) scrive: "If we were to go back to the origins of these ideas [basic topics in infinitesimal calculus which we teach today as canonical requisites], they would lose that dead appearance of cut and dried facts and instead take on fresh and vibrant life again." Burn (1999) spiega le idee di Toeplitz in questi termini:

The question which Toeplitz was addressing was the question of how to remain rigorous in one's mathematical exposition and the teaching structure while at the same time unpacking a deductive presentation far enough to let a learner meet the ideas in a developmental sequence and not just in a logical sequence. While the genetic method depends on careful historical scholarship it is not itself the study of history. For it is selective in its choice of history, and it uses modern symbolism and terminology (which of course have their own genesis) without restraint." (p. 8)

Freudenthal (1973) fornisce un'interpretazione del metodo genetico tramite il suo metodo di "guided reinvention":

Urging that ideas are taught genetically does not mean that they should be presented in the order in which they arose, not even with all the deadlocks closed and all the detours cut out. What the blind invented and discovered, the sighted afterwards can tell how it should have been discovered if there had been teachers who had known what we know.... It is not the historical footprints of the inventor we should follow but an improved and better guided course of history. (pp. 101, 103)

Van Amerom (2003) ha applicato le idee di Freudenthal nel suo progetto “Reinvention of algebra”, che usa “informal, pre-algebraic methods of reasoning and symbolizing as a way to facilitate the transition from an arithmetical to an algebraic mode of problem solving” (p. 73).

Il tormento dei ricercatori riguardo alla relazione tra la costruzione da parte degli studenti contemporanei della conoscenza matematica e la sua costruzione storica testimonia la necessità di chiarire questa relazione quando si pianificano attività in classe (per studenti o insegnanti). Dgli storici e gli epistemologi hanno fissato l’attenzione sulla reale natura della storia, si veda (Fried, 2001; Grattan-Guinness, 1973; 2004). Come dicono Radford, Boero e Vasco (2000), questo chiarimento concerne da una parte l’ambito psicologico (riguardo all’apprendimento degli studenti contemporanei) e dall’altra l’ambito storico-epistemologico (together with other domainsinsieme ad altri ambiti). A seconda dei differenti insiemi di assunzioni psicologiche ci sono differenti prospettive. Le più conosciute sono quella degli “ostacoli epistemologici” e quella socio-culturale. Le differenze nella metodologia in entrambi gli ambiti è, invero, un segno di più profonde differenze, che non possono essere ignorate nel contesto di un uso pedagogico della storia della matematica. Malgrado le differenze l’ambito storico e quello epistemologico devono essere articolati in maniera specifica (Fried, 2006; Schubring, 2000). Per Brousseau ci sono alcune assunzioni di base. La prima è che gli ostacoli epistemologici appartengono alla sfera della conoscenza, che lui è separata dalle altre sfere. La seconda assunzione è che gli ostacoli epistemologici sono caratterizzati dal loro riapparire nella storia della matematica e nel presente apprendimento della matematica. La terza assunzione epistemologica si basa sull’articolazione “student/milieu”. Secondo Brousseau lo sviluppo della conoscenza è una sequenza di concezioni e ostacoli da superare, con ovvie conseguenze sull’organizzazione delle situazioni di insegnamento.

La prospettiva socio-culturale parte dalle assunzioni epistemologiche di Vygotskij’s in educazione matematica. Radford ha elaborato questa prospettiva in numerosi lavori, si veda (Radford, 1997) e i successivi lavori. Egli assume che la conoscenza è costruita socialmente. In linea con Vygotskij egli fa riferimento all’interiorizzazione quando considera la maniera in cui gli individui si appropriano della conoscenza culturale della loro cultura. L’interiorizzazione non è vista come un processo passivo, bensì attivo, in cui gli individui creano concetti e significati attraverso l’uso di segni e discorso.

4. Presentazione dei due macro filoni nell’uso della storia nell’insegnamento: (A) storia per agire sull’immagine della matematica, (B) storia per agire sulla costruzione del significato degli oggetti matematici.

Il mio percorso nello studio dell’uso della storia parte da quello che avviene in classe. La seguente lista di modi di usare la storia rispecchia abbastanza esaurientemente le attività emerse nelle varie sperimentazioni sviluppate in differenti contesti:

- Mention past mathematicians anecdotally
- Provide historical introductions to concepts which are new to pupils
- Encourage pupils to understand the historical problems to which the concepts they are learning are answers
- Give “history of mathematics” lessons
- Devise classroom or homework exercises using mathematical texts from the past
- Direct dramatic activity which reflects mathematics interaction
- Encourage the creation of posters displays or other projects with a historical theme
- Setting projects about local mathematical activity in the past
- Using critical examples from the past to illustrate techniques or methods
- Explore past misconceptions/errors/alternative views to help in understanding and resolving difficulties for today’s learners

- Devise the pedagogical approach to a topic in sympathy with its historical development
- Devise the ordering and structuring of topics within the syllabus on historically-informed ground

Queste attività possono essere inquadrare in questi due tipi di azione:

- (A) Storia per agire sull'immagine della matematica e sugli atteggiamenti di alcune persone. Un importante risultato atteso è recuperare il valore della matematica vista come parte delle culture attraverso la riflessione sulla natura di questa disciplina vista come processo socio-culturale e impresa umana. La prospettiva storia è una maniera di vivere l'esperienza matematica.
- (B) Storia per trattare concetti e processi matematici. Il risultato atteso è favorire l'appropriazione di significato dei concetti matematici.

In entrambi i casi l'obiettivo finale è rendere migliore l'insegnamento. Ovviamente questi tipi di azione possono avere intersezioni: una buona comprensione dei concetti può contribuire a migliorare l'immagine della matematica e una immagine positiva della matematica può stimolare approfondimenti concettuali. La mia distinzione ha analogie con le distinzioni nei lavori di Adriano Demattè nella locuzione "uso debole e uso forte della storia" e in quelli di Uffe Thomas Jankvist come "history as a tool" e "history as a goal".

L'introduzione della storia può essere attuata attraverso fonti primarie o fonti secondarie. Per le generazioni di insegnanti che non hanno seguito corsi di storia le fonti secondarie, inclusi anche libri di divulgazione, hanno avuto un ruolo significativo nel modificare la loro cultura matematica attraverso l'introduzione di quella visione stereoscopica di cui parlava Heppel. La storia ha avuto quella funzione unificante che i corsi universitari spesso non danno. Come vedremo, le fonti primarie hanno notevoli potenzialità, ma presentano problemi. In passato il primo problema era l'accessibilità ai testi antichi, ma attualmente i programmi di digitalizzazione attuati in molte biblioteche hanno migliorato questo punto. In secondo luogo, l'uso delle fonti primarie richiede una preparazione di tipo storico e conoscenza della lingua utilizzata dal matematico considerato, laddove non esista una traduzione attendibile nella lingua dell'utilizzatore. Tutto ciò rende l'uso delle fonti primarie un fatto di nicchia.

Gli autori del capitolo 9 dell'ICMI Study (Fauvel & van Maanen, 2000) hanno individuato queste potenzialità dell'uso delle fonti primarie, che si possono estendere, in generale, all'introduzione della dimensione storica tout court nell'insegnamento (Jahnke et al., 2000, pp. 291-292):

(i) replacement

Integrating history in mathematics replaces the usual with something different: it allows mathematics to be seen as an intellectual activity, rather than as just a corpus of knowledge or a set of techniques.

(ii) reorientation

Integrating history in mathematics challenges one's perceptions through making the familiar unfamiliar. Getting to grips with a historical text can cause a reorientation of our views. History of mathematics has the virtue of 'astonishing with what comes of itself' (Veyne 1971). All too often in teaching, what happens is that concepts appear as if already existing. This is true for the concept of a set, for example, but just as true for the concept of a triangle or a function. And concepts are manipulated with no thought for their construction. History reminds us that these concepts were invented and that this did not happen all by itself.

(iii) cultural understanding

Integrating history of mathematics invites us to place the development of mathematics in the scientific and technological context of a particular time and in the history of ideas and societies, and also to consider the history of teaching mathematics from perspectives that lie outside the established disciplinary subject boundaries.

Replacement e reorientation sono particolarmente collegate all'insegnamento di concetti e processi (Azione B). Invero passeggiare in un paesaggio sconosciuto come accade usando la storia costringe a guardare in maniera differente e porta alla luce elementi che altrimenti ci sfuggirebbero. In questo contesto si vedono le radici intorno a cui si sono costruiti i concetti nei secoli. Con il riorientamento i discenti sono forzati a trovare la loro strada per l'appropriazione del significato degli oggetti matematici. La terza azione (Quando fonti originali sono usate in classe Jahnke et al. (2000) individuano vantaggi specifici. Il primo ovvio vantaggio è la fedeltà storica al pensiero dell'autore. La fedeltà storica favorisce un contatto profondo con le radici dei concetti. Jahnke (1994), Demattè e Furinghetti (2011) ritengono che l'uso delle fonti originali può essere un mezzo per introdurre gli

studenti all'ermeneutica. Inoltre esse favoriscono contatti con lingue, figure, forme di comunicazione e tipi di situazioni. Da questi elementi il contesto trae connotazioni vive e stimola riflessione culturale sulle civiltà presenti e passate.

Le fonti originali sono una miniera di problemi significativi per i vari livelli scolari e per la formazione degli insegnanti. Swetz (1995) ha individuato molte tecniche pedagogiche particolari contenuti negli antichi testi delle civiltà Babilonesi e Cinesi: l'uso di un discorso nell'educativo; una sequenza logica di problemi matematici e esercizi e l'uso di ausili visuali. Swetz afferma che i testi storici ci dicono molto su come i concetti matematici e le tecniche sono stati concepiti e si sono evoluti. Ma essi ci dicono anche di più: di solito il loro contenuto incorpora una pedagogia, specifiche forme organizzative e metodi usati per insegnare.

5. Cultural understanding e storia per agire sull'immagine della matematica

Molte delle esperienze che ho osservato nel corso degli anni sono nate per iniziative autonome di insegnanti sulla base del fascino di opere secondarie, addirittura di divulgazione, che li hanno attratti e introdotti alla cultura della storia. Il loro scopo, tacito o dichiarato, era quello di cambiare l'immagine della matematica elaborata dai loro studenti e di promuovere forme di cultural understanding. Talvolta ho sentito usare locuzioni quali "umanizzare la matematica". Tymoczko (1994) considera importante il concetto di matematica umanistica, di cui dà una sua interpretazione: "Che cosa [rende] la matematica una delle materie umanistiche? Certo non il solo fatto che gli uomini la praticano; gli uomini praticano anche la scienza. [...] La matematica pura è in definitiva matematica umanistica, una delle materie umanistiche, perché è una disciplina con una prospettiva umana e una storia che conta» (p. 334, mia traduzione). Egli riconosce che i filosofi hanno sbagliato considerando solo la matematica pura, ma nello stesso tempo rimprovera agli educatori di commettere l'errore opposto di puntare troppo sulla matematica utile. Questo approccio non introduce gli studenti alla disciplina matematica o, meglio, alla matematica umanistica; la sua idea è che «introdurre gli studenti alla matematica umanistica è introdurli a un'avventura umana, un'avventura che gli uomini hanno effettivamente condiviso nella storia" (ibidem, p.335).

Nella seconda European Summer University svoltasi a Braga (24-30 luglio, 1996) è stata presented an exhibition entitled "Images made by students about their image of mathematics", see (Gargani, 1996), which is the result of a project developed with Italian students aged 18 of a *Liceo Artistico*, a type of school oriented to give an education in visual arts. Vediamo come si è sviluppato il progetto. Durante gli anni scolastici 1994-95 e 1995-96 gli studenti hanno affrontato problematiche di carattere storico ed epistemologico durante le lezioni di matematica e fisica. Gli studenti hanno effettuato ricerche personali inerenti la storia della matematica tramite enciclopedie o libri specifici, anche consigliati dal docente, come il libro di C. B. Boyer (*Storia della matematica*, I.S.E.D.I., Milano, 1976). Inoltre hanno partecipato a dibattiti guidati dal docente che mettevano in evidenza gli aspetti fondamentali, le linee tematiche che hanno caratterizzato lo sviluppo della matematica.

In seguito gli studenti hanno preparato una serie di bozzetti in formato 50x70 cm relativi ai seguenti soggetti:

- una copertina di un libro di matematica;
- un manifesto per un convegno di matematica;
- un elaborato grafico che esprimesse lo sviluppo storico della matematica.

I bozzetti sono stati fotografati, digitalizzati tramite scanner ed elaborati al computer per mezzo di una serie di programmi di grafica. Gli studenti hanno così confrontato le usuali tecniche grafiche con quelle messe a disposizione dalle nuove tecnologie. È emerso un grande interesse per queste nuove tecniche

grafiche che consentono una rapida manipolazione di un bozzetto e l'immediata realizzazione di un prodotto.

Gli studenti hanno scritto un breve commento che mettesse in evidenza le tecniche e le motivazioni alla base di ciascun elaborato.

Questa è una delle esperienze di cui ho avuto notizia, ma altre sono sviluppate in altre scuole. Segnalo a questo proposito le attività di Francesca Bevilacqua e Caterina Vicentini.

Un'interpretazione diversa dell'umanizzare la matematica (l'autrice scrive di voler mostrare il lato «humanistic» e «human-made» dell'aritmetica) si trova in (Percival, 2001). La storia della matematica e la matematica stessa sono introdotte attraverso un approccio sociale e di cooperazione multiculturale. L'argomento trattato è l'aritmetica elementare. Si lavora in maniera artefattuale: gli studenti fanno loro stessi la costruzione di oggetti antichi (tavole babilonesi, documenti che imitano quelli studiati e antichi strumenti di calcolo in ricostruzione moderna). L'attività concreta procede parallelamente alla costruzione di concetti sui sistemi numerici e la loro manipolazione.

Demattè (2004) ha realizzato un'esperienza di “umanizzazione della matematica” nella scuola secondaria superiore, che si è svolta in due tempi. Dapprima egli ha dato agli alunni alcune nozioni di storia finalizzate a delineare il carattere socioculturale della matematica. Dopo qualche mese è stato distribuito agli studenti un questionario per verificare che cosa essi avevano ritenuto.

Un altro modo di promuovere/umanizzare la matematica è legarla al contesto culturale in cui gli studenti vivono. Il britannico Ransom (1995) e la portoghese Dias (2008), entrambi insegnanti in nazioni con grande tradizione marinara, trattano problemi di navigazione. L'olandese Kool (1992) ha usato testi locali del sedicesimo secolo con studenti in difficoltà.

Nell'ottica del cultural understanding ha lavorato Grugnetti che ha sfruttato l'opportunità di interdisciplinarietà offerta dalla storia, si veda (Grugnetti, 1995; Grugnetti & Jacquet, 1996).

A proposito di cultural understanding segnalo anche le ricerche di Adriano Demattè non solo sull'immagine della matematica, ma anche sul senso della storia tout court posseduto dagli studenti.

6. Storia della matematica per l'appropriazione del significato di concetti e processi

Si è detto che la storia aiuta ad avvicinare le radici dei concetti. In questa linea di pensiero Tall (2003) parla di radici cognitive come concetti che posseggono (potenzialmente) significato per gli studenti e contengono i semi di una espansione cognitiva a definizioni formali e poi a sviluppi teorici. Tall (2003) menziona tre mondi di rappresentazione: embodied, symbolic-proceptual, formal-axiomatic. Questi tre mondi includono differenti modi di operare, che Tall collega con i modi di rappresentazione mentale di Bruner. Il termine “embodied” è usato da Tall (2003, p. 4) “to refer to thought built fundamentally on sensory perception as opposed to symbolic operation and logical deduction. This gives to the term ‘embodied’ a more focused meaning in mathematical thinking”. Il mondo “symbolic-proceptual” si riferisce alla triade “concept, process acting on it, symbol as a pivot between the two”. In classe gli oggetti matematici spesso sono introdotti nel secondo o, ancor peggio, nel terzo mondo. Su questo punto Skemp (1969) afferma che un approccio puramente logico fornisce solo la parte finale della scoperta matematica e non genera negli studenti la percezione i processi attraverso i quali le scoperte matematiche sono fatte. Questo approccio insegna il pensiero, non il pensare, matematico. Quando la matematica è presentata nella forma “rifinita” i discenti hanno difficoltà a individuare le radici cognitive nel magma di processi, concetti e regole che si trovano davanti. Il mondo “embodied” è adatto a generare significato. A questo proposito Tang (2006) parla di “somatic” understanding.

Gravemeijer e Doorman (1999) usano la storia per introdurre la derivata. Con questa attività essi cercano di evitare il fenomeno di “anti-didactical inversion”, per cui, secondo Freudenthal (1973), i risultati del lavoro dei matematici sono presi come punto di partenza per introdurre i concetti. Il loro

percorso parte dagli studi di cinematica condotti a Oxford (Merton College) nella prima metà del quattordicesimo secolo, in cui si investigava sulla velocità come misura del moto e si tentava di fare una descrizione delle distanze percorse da un corpo in movimento con moto uniformemente accelerato. Gravemeijer e Doorman si rifanno poi agli studi di Nicole Oresme e Galileo. In questa maniera esperienze corporali sono il primo passo per introdurre i concetti di analisi.

Furinghetti e Somaglia (1997) usano la visualizzazione offerta dall'ambito geometrico in un'esperienza su derivata e integrale fatta con studenti del triennio di liceo. Il materiale presentato è una rielaborazione della lezione X nelle *Lectioes opticae et geometricae* of Isaac Barrow (1674, London; second edition, t. I and II)

In quest'ottica di lavoro nel primo mondo di Tall io inquadro anche il lavoro sulle macchine matematiche condotto a Modena, si veda (Maschietto, & Bartolini Bussi, 2011).

6. La storia e la formazione degli insegnanti

Una delle idee diffuse nel periodo pionieristico, presente anche in (Loria, 1899), era che la storia è un buon mezzo per rivisitare la matematica elementare da un punto di vista avanzato, opinione da cui segue quasi automaticamente l'utilità della storia nella formazione degli insegnanti. Schubring et al. (2000) nel capitolo dedicato alla storia nella formazione degli insegnanti dell'*ICMI Study* sull'uso della storia nell'insegnamento hanno illustrato vari momenti della discussione su questo tema. All'inizio del capitolo è osservato che già nel 1904 al terzo convegno mondiale dei matematici di Heidelberg era auspicato che la storia delle scienze esatte fosse insegnata nei corsi universitari. Considerando che gran parte degli studenti di matematica di quegli anni (e di molte decadi successive) era destinata ad insegnare, quella indicazione implicava raccomandare la storia per la formazione degli insegnanti. Schubring et al. (2000) citano poi un intervento più recente dello storico olandese Eduard Jan Dijksterhuis in un rapporto ICMI del 1962 sulla formazione degli insegnanti in Olanda. Due sono i punti caratterizzanti questo contributo: l'affermazione che la storia non è essenziale nella formazione matematica generale, ma che è importante per la formazione degli insegnanti di matematica. Dijksterhuis fa riferimento alla funzione motivazionale e di "disciplina mentale" che la storia può introdurre nella classe del futuro insegnante, mentre non menziona il ruolo della storia nello sviluppo della conoscenza matematica degli insegnanti. Dijksterhuis si riferisce a insegnanti di scuola secondaria superiore, come lui stesso è stato, e vede nella matematica greca il campo di studio privilegiato.

Gli studi condotti in tempi più recenti hanno fissato l'attenzione sugli effetti dei corsi di storia sulla visione che gli insegnanti hanno della matematica e del suo insegnamento. Risultati di queste ricerche, riportati in (Furinghetti, 2007b), portano a conclusioni opposte: per alcuni la storia influenza, per altri non influenza le concezioni degli insegnanti. Questa discrepanza può essere dovuta non tanto alla storia, quanto alle strategie di formazione messe in atto in questi corsi. In questa nota riporto le grandi linee di un nostro progetto di uso della storia nei corsi SSIS.

basa sull'integrazione di obiettivi storici e didatticiⁱ.

Sulla base di alcuni aspetti presenti nella letteratura sulla formazione iniziale degli insegnanti abbiamo preso le nostre decisioni di fondo. Ponte e Chapman (2008, p. 255) affermano cheⁱⁱ

Generalmente si hanno risultati interessanti quando gli insegnanti in formazione iniziale si impegnano in approcci esplorativi (a un qualche livello) che offrono ampie opportunità per discutere, arguire, congetturare, testare e validare risultati. Queste situazioni sostengono la loro attività come agenti nel dare significato matematico. Gli insegnanti in formazione iniziale devono essere coinvolti non solo nel fare matematica con significato, ma anche nel riflettere, comunicare, discutere le loro idee matematiche con i loro colleghi e i formatori.ⁱⁱⁱ

Seguendo queste indicazioni abbiamo impostato il nostro corso basandolo sul confronto sia tra pari (insegnanti in formazione) sia tra insegnanti in formazione e docenti.

Questi elementi, insieme all'aver informato già all'inizio del corso gli specializzandi del fatto che essi sarebbero stati protagonisti di un esperimento didattico sull'uso della storia, hanno rafforzato nella classe l'atmosfera di comunità di pratica (*community of practice*) intesa, come dice Schoenfeld (1992), come un gruppo di persone coinvolte in imprese comuni all'interno della propria cultura.

Consapevoli che la mera presentazione di esempi di buona pratica difficilmente porta gli insegnanti a rivedere le proprie idee e ad essere in grado di costruire in modo autonomo propri percorsi didattici secondo il modello dell'insegnante riflessivo, abbiamo colto l'opportunità del corso di storia per avviare un'attività che rendesse gli specializzandi futuri insegnanti riflessivi. L'attività che volevamo proporre doveva *integrarsi* con quanto già conoscevano dei concetti matematici oggetto del nostro lavoro e con quanto avevano appreso nei corsi di didattica.

La storia si presta bene alla messa in discussione delle concezioni degli insegnanti. A questo proposito Furinghetti (2007) ha ripreso la teoria già esposta in (Barbin, 1994) e successivamente sviluppata nel capitolo 9 dell'ICMI Study sull'uso della storia (Jahnke et al., 2000). In questi lavori si parla delle tre azioni promosse dalla storia (il riferimento è in particolare all'uso delle fonti originali). Una di esse è la *consapevolezza culturale* (*cultural understanding*): la storia ci porta a situare lo sviluppo della matematica nel contesto sociale, scientifico e tecnologico di un tempo particolare. Le altre azioni promosse dalla storia sono lo *spaesamento* e il *riposizionamento*, cioè il creare un ambiente in cui teorie, concetti e processi sono visti in luce diversa: queste azioni inizialmente suscitano necessità di fermarsi sugli oggetti matematici e di riflettere sul fatto che essi sono prodotto di un'elaborazione del pensiero e, in un secondo tempo, provocano la messa a fuoco e ridefinizione delle proprie convinzioni sul concetto.

Il fenomeno di spaesamento e riposizionamento indotto dalla storia favorisce l'individuazione delle idee di base di un concetto che la formalizzazione finale ha messo in ombra e stabilisce una dialettica tra livello intuitivo e livello formale, necessaria per una costruzione del senso dei concetti. Nel contesto da noi creato tramite la storia l'acquisizione di senso è avvenuta mettendo a confronto i sensi su un concetto con altri sensi estranei. In (Radford, Furinghetti, & Katz, 2007) ciò è espresso, riprendendo le idee di Bakhtin^{iv}, osservando che i particolari sensi che noi elaboriamo originano nei limiti della nostra esperienza finita, un limite che possiamo superare quando incontriamo nuovi sensi. La storia, mettendoci in contatto con differenti epoche e culture, favorisce questo incontro. L'uso di fonti primarie è essenziale poiché il pensiero dell'autore non è mediato e le radici cognitive^v di un concetto emergono in un gioco di interpretazione del pensiero dell'autore e di ipotesi da parte dell'interpretante. Potremmo dire che per noi la storia presenta i concetti allo stato grezzo e permette agli studenti di lavorare su di essi ad un livello che si basa sulle loro conoscenze empiriche e sensoriali o su conoscenze acquisite precedentemente. L'ipotesi che noi facciamo sull'uso della storia è che, usando la terminologia in (Sfard, 1991), essa fornisca un ambiente in cui le idee collegate ad un concetto possono condensarsi, per poi passare alla fase di reificazione in cui il concetto può dirsi acquisito.

Nel nostro corso la relazione tra il livello intuitivo e il livello formalizzato dei concetti matematici che volevamo affrontare è stata affrontata mettendo gli specializzandi a contatto con pagine storiche opportunamente scelte (si veda il paragrafo sulla metodologia). Essi hanno confrontato le loro convinzioni con quanto scaturiva dalle pagine storiche, acquisendo nuovi sensi per il concetto: sono stati quindi gli specializzandi stessi, con le loro concezioni, a trovare la strada della costruzione dei sensi, integrando la storia con il contenuto matematico e pedagogico. I docenti (G. F. e A. S.) hanno solo guidato il loro percorso. Potremmo dire che nel nostro modello gli insegnanti sono diventati soggetti facenti parte dell'integrazione tra storia e didattica. Ci sembra che il nostro percorso può contribuire a far luce sul ruolo dell'insegnante nel rendere questa integrazione efficace.

I due concetti su cui abbiamo fatto riflettere gli insegnanti sono la definizione e la derivata. Entrambi possono essere presi come paradigmatici delle convinzioni degli insegnanti e dell'azione che

si può svolgere su di esse. In primo luogo, consideriamo il ruolo delle definizioni, che è sottostimato sia nella ricerca in educazione matematica sia nella pratica scolastica.

La derivata è un tipico caso in cui la storia si presta bene a questa messa in discussione, poiché si possono trovare documenti in cui la definizione formale non è ancora fissata, ma si opera o su aspetti collegati alla visualizzazione e alla geometria o su aspetti sensoriali legati al moto. Il nostro modo di vedere l'insegnamento di questo argomento è vicino a quello espresso da Tall (1985a) in risposta a Schwarzenberger (1980). Questo autore sostiene che le difficoltà dell'analisi classica non ammettono spiegazioni semplici, ovvero che ogni formulazione intuitiva contiene implicitamente le difficoltà sottostanti le idee dell'analisi. Secondo Tall il punto di vista di Schwarzenberger (1980) è quello del matematico che interpreta intuitivo come contrario a rigoroso, mentre per lo psicologo intuitivo significa risposta immediata a situazioni. Tall (1991, p. 17) osserva che i matematici per semplificare gli argomenti li frammentano in piccoli pezzi che possono essere ordinati secondo una sequenza logica di cui loro hanno una visione globale. Purtroppo gli studenti vedono i pezzi come pezzi di un jigsaw puzzle senza conoscere la figura intera, o, peggio, senza sospettare che tale figura esista. Per Tall l'insegnamento della differenziazione è un esempio di questo modo di procedere. Egli suggerisce di creare situazioni, quali quelle di tipo sensoriale, che favoriscano un approccio informale su cui si innesta un successivo sviluppo cognitivo: questa introduzione qualitativa e informale dei concetti dovrebbe creare la necessità di una descrizione più formale. Tall (1985a; 1985b; 1986) ha creato queste situazioni con opportuni software che sfruttano la visualizzazione. Come si è detto precedentemente, Vediamo che sulle stesse idee di base si innesta l'uso di due mediatori didattici assolutamente diversi (calcolatore e storia).

Come si è detto, il progetto che descriviamo è stato realizzato nel corso di Storia della matematica della Scuola di Specializzazione all'Insegnamento Secondario dell'Università di Genova nell'anno accademico 2008-09. Gli studenti che hanno regolarmente frequentato sono 19. Il corso prevedeva esercitazioni (in forma laboratoriale) e teoria, organizzate intorno alle seguenti attività:

- Somministrazione di un questionario sulla derivata
- Riflessione sull'insegnamento della derivata
- Introduzione di elementi di storia della matematica
- Richiamo di elementi di teoria di didattica della matematica con particolare riferimento alla letteratura che riguarda la costruzione del significato degli oggetti matematici
- Presentazione del progetto di ricerca
- Lavoro sulle fonti originali
- Proiezione verso il lavoro in classe
- Riflessione degli specializzandi

Si è poi fatto riflettere sull'affermazione di Fischbein et al. (1990, p. 29) "Un'integrazione migliore degli aspetti formali, algoritmici e intuitivi della conoscenza nelle menti degli studenti aumenta la flessibilità dei modelli mentali usati senza distruggere la loro autonomia". Abbiamo discusso i ruoli di questi aspetti e delle rappresentazioni. Secondo Tall (1996), usando differenti forme di rappresentazione si usano differenti forme di conoscenza e ciò ha vantaggi e difficoltà nascoste. Le difficoltà sono messe in evidenza dal seguente passaggio in (Sierpiska, Trgalová, Hillel, Dreyfus, 1999, p. 121):

non c'è un accesso diretto alla conoscenza scientifica: la conoscenza scientifica, per definizione, è mediata semioticamente. [...] In assenza di accesso diretto a un oggetto, una delle questioni principali è: come possiamo dire se due date rappresentazioni sono, di fatto, rappresentazioni dello stesso oggetto? Ogni rappresentazione cattura certi aspetti di un oggetto e ignora altri aspetti, e, allora, la risposta a questa domanda non è ovvia.

Come si vede il punto della nostra proposta è far riflettere tramite la storia sul dualismo tra intuizione e rigore.

Le fonti utilizzate son state: metodo dei massimi e minimi di Fermat^{vi} (*Appendice 1*) con esercizi applicativi; costruzione cinematica della tangente di Roberval (*Appendice 2*); pagina di Barrow con domande guida alla lettura (*Appendice 3*). Si veda (Fenaroli, Furinghetti & Somaglia, 2014) per ulteriori informazioni sull'esperimento e sui risultati. Mi limito a sottolineare che l'idea evolutiva della matematica è stata messa in crisi, in favore di una visione contestuale.

Epilogo

Siu (2006, pp. 268-269), who plays the role of devil's advocate, lists the following unfavorable factors presented in the form of exclamations or questions that mathematics teachers could utter when asked if they use history:

- (1) "I have no time for it in class!"
- (2) "This is not mathematics!"
- (3) "How can you set question on it in a test?"
- (4) "It can't improve the student's grade!"
- (5) "Students don't like it!"
- (6) "Students regard it as history and they hate history class!"
- (7) "Students regard it just as boring as the subject mathematics itself!"
- (8) "Students do not have enough general knowledge on culture to appreciate it!"
- (9) "Progress in mathematics is to make difficult problems routine, so why bother to look back?"
- (10) "There is a lack of resource material on it!"
- (11) "There is a lack of teacher training in it!"
- (12) "I am not a professional historian of mathematics. How can I be sure of the accuracy of the exposition?"
- (13) "What really happened can be rather tortuous. Telling it as it was can confuse rather than to enlighten!"
- (14) "Does it really help to read original texts, which is a very difficult task?"
- (15) "Is it liable to breed cultural chauvinism and parochial nationalism?"
- (16) "Is there any empirical evidence that students learn better when history of mathematics is made use of in the classroom?"

The questions may be grouped under these main points: *integration* (1, 2, 3, 4), *cultural understanding* (5, 6, 7, 8), *looking for meaning* (9, 13, 14, 15), and *teacher training* (10, 11, 12).

- *Integration* refers to the fact that history has not to be added as an additional subject, but it has to be embedded in the teaching as it was shown in the examples presented in this paper. This means to fix educational goals and to choose moments of history and the way to deal with these moments in function of these goals. In this perspective history is a different way of doing mathematics and the problems of time, tests, and grades are overcome.
- *Cultural understanding* refers to a way of looking at mathematics as a vivid matter embedded in the socio-cultural process. History not only adds motivation, illustrations, anecdotes, but also enlightens the problematic situations behind the concepts and the theories taught in school as well as the relationship with other school disciplines and with real life. Then history introduces an epistemological dimension in the teaching and learning of mathematics. Students who do not like history (not only of mathematics, but history in general) have to acquire a "sense of history" in order to be able to interpret the world. As explicitly advocated by (Demattè, 2006), who speaks about the "strong role" that history may have in teaching, and Jankvist (2009), the introduction of history in mathematics teaching may be seen as a goal.

- *Looking for meaning* has to be one of the aims of mathematics teaching and learning. It is teachers' endeavor to find the right tool to pursue this aim. The theoretical considerations and the examples presented in the previous sections should suggest the potentiality of history of mathematics in fostering the construction of meaning and in providing insights.
- *Teacher education* gains from the point of view of cultural understanding and of fostering pedagogical reflection. The short outline in Section 6 should hint how history of mathematics may be an alternative and efficient way of revisiting mathematical concepts and processes as well as beliefs and conceptions.

I put aside the question (16) which, indeed, reflects a main concern of researchers in mathematics education. A part the few cases in which national curricula encompass history of mathematics as a compulsory subject, experimentations of the use of history require a convenient scenario. This scenario includes: a teacher with an adequate preparation on history and with enthusiasm for trying new ways of teaching, as well as the support from the context. All that makes it difficult to establish clear empirical evidence because the particular nature of the pedagogical tool discussed in this chapter allows collecting qualitative rather than quantitative data. I have mainly anecdotal evidence through talking with many school teachers and through my personal experience as teacher trainer. However, I agree with Siu (2006, p. 276) on the fact that "if education is really a learner-teacher-dependent endeavour, then anecdotal accounts can be as useful as, or even more than, large-scale statistical data." Of course, as advocated by Liu (2003), it is a task of the community of HPM to make as clear as possible the role of history in mathematics education.

All that said, I met a number of mathematics teachers happy for integrating history (in some of the ways presented in this chapter) in their teaching. This encourages going on in the studies on this integration. It may be discouraging to note that some doubts put forward in the pioneer attempt developed by Barwell (1913) are again mentioned in the recent attempts, but the fact that in the present days teachers are still attracted by the challenge of introducing history says something about its value. At least, one may share also today Barwell's feeling expressed by the sentence (p. 72) "Does not even a rock appeal more to our imagination when we realise that it has a story? The subject [mathematics] is humanised; it takes a place in the pageant of our race's history."

Bibliografia

- Barwell, M. E. (1913). The advisability of including some instruction in the school course on the history of mathematics. *The Mathematical Gazette*, 7, 72-79.
- Branford, B. (1908). *A study of mathematical education including The teaching of arithmetic*. Oxford, UK: Clarendon Press.
- Burn, B. (1999). Integration, a genetic approach. *Nordisk Matematikk Didaktikk*, 7(1), 7-27.
- Coray, D., Furinghetti, F., Gispert, H., Hodgson, B. R., & Schubring, G. (Eds.) (2003). *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique*, Monographie n. 39 de *L'Enseignement Mathématique*.
- Demattè, A. (1994). Storia, pseudostoria, concezioni. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 17B, 269-281.
- Demattè, A. (2004). A questionnaire for a "strong" role of history of mathematics in the classroom', in F. Furinghetti, S. Kaijser & A. Vretblad (Eds.), *Proceedings of HPM 2004* (Uppsala, Sweden), 190-197.
- Demattè (2006). A questionnaire for discussing the "strong" role of the history of mathematics in the classroom. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, (Eds.) *Proceedings HPM 2004 & ESU 4 – Revised edition* (pp. 218-228). Iraklion, Greece: University of Crete.
- Dias, I. C. (2008). From the original text of Pedro Nunes to the mathematics classroom activities. In E. Barbin, N. Stehlíková, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the 5th European Summer University ESU 5* (pp. 259-260). Plzeň: Vydavatelský servis.
- Dijksterhuis, E. J. (1962). The place of history in the training of a mathematics teacher in the Netherlands. In L. N. H. Bunt (Ed.) *The training of a mathematics teacher in the Netherlands* (pp. 34-43). Groningen: Wolters.

- Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 11(2), 3–6.
- Fauvel, J., & Van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education. The ICMI Study*. Dordrecht / Boston / London: Kluwer.
- Fenaroli, G., Furinghetti, F., & Somaglia, A. (2014). Rethinking mathematical concepts with the lens of the history of mathematics: an experiment with prospective secondary teachers. *Science & Education*. (DOI) 10.1007/s11191-013-9651-0
- Fischbein, E., Tirosh, D., Stavy, R., & Oster, A. (1990). The autonomy of mental models. *For the learning of mathematics*, 10(1), 23-30.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*, Dordrecht: Reidel.
- Fried, M. N. (2001). Can mathematics education and history of mathematics coexist?. *Science & Education*, 10, 391-408.
- Fried, M. N. (2006). Mathematics as the study of patterns: What history can tell us. In F. Furinghetti, S. Kaijser & Tzanakis (Eds.), *Proceedings HPM 2004 & ESU 4* – Revised edition (pp. 568-576). Iraklion, Greece: University of Crete.
- Fried, M. N. Book (2013). Review A cultural-historical perspective on mathematics teaching and learning. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers (Semiotic perspectives on the teaching and learning of mathematics Series), 2011. ix + 184 pp. ISBN 978-94-60091-562-8 (softcover) 83-88 MTL
- Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: case studies linking different domains. *For the learning of mathematics*, 17(1), 55-61.
- Furinghetti, F. (2007a). Mathematics education and ICMI in the proceedings of the International Congresses of Mathematicians. *Revista Brasileira de História da Matemática Especial nº 1 - Festschrift Ubiratan D'Ambrosio* - (December) Publicação Oficial da Sociedade Brasileira de História da Matemática, 97-115.
- Furinghetti, F. (2007b). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 131-143.
- Furinghetti, F. (2014). Part IV, Chapter XXIII. History of international cooperation in mathematics education. In A. Karp, & G. Schubring (Eds.), *Handbook on history of mathematics education*. New York, NY: Springer. ISBN 978-1-4614-9154-5
- Furinghetti, F. & Giacardi, L. (2008). The first century of the International Commission on mathematical instruction (1908-2008). History of ICMI. <http://www.icmihistory.unito.it/>
- Furinghetti, F., & Giacardi, L. (2010). People, events, and documents of ICMI's first century. *Actes d'Història de la Ciència i de la Tècnica, nova època*, 3(2), 11-50.
- Furinghetti, F., Menghini, M., Arzarello, F. & Giacardi, L. (2008). ICMI Renaissance: the emergence of new issues in mathematics education. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 131–147). Rome: Istituto della Enciclopedia Italiana.
- Furinghetti, F. & Radford, L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: rethinking phylogenesis and ontogenesis. In L. English (Ed.) and M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh & D. Tirosh (Ass. Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 631-654). Mahwah, NJ: L. Erlbaum Associates.
- Furinghetti, F. & Radford, L. (2008). Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In L. English (Ed.) and M. Bartolini Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman, & D. Tirosh (Ass. Eds.), *Handbook of international research in mathematics education*, Second edition (pp. 630-659). New York – London: Routledge.
- Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997). Storia della matematica in classe. *L'educazione matematica*, s. 5, 2, 26-46.
- Gargani, G. (1996). Un percorso artistico. *Lettera Pristem*, 22, 47.
- Grattan-Guinness, I. (2004). History or heritage? An important distinction in mathematics for mathematics education. *American Mathematical Monthly*, 111(1), 1-12.
- Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.
- Grugnetti, L. (1995). Storia della matematica e insegnamento interdisciplinare. In B. D'Amore & F. Speranza (Eds.), *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*. Milano: Franco Angeli.
- Grugnetti, L. & Jacquet, F.: 1996, 'Senior secondary school practice', in A. Bishop et al. (editors), *International handbook of mathematics education*, 1-34.
- Heppel, G. (1893). *Nineteenth general report of the Association for the Improvement of Geometrical Teaching*. Bedford: W. J. Robinson, 19-33. See also Heppel, G. (1893). The use of history in teaching mathematics, *Nature*, 48, 16-18).
- Jahnke, H. N. (1994). The historical dimension of mathematical understanding: objectifying the subjective. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Lisboa (Vol. I, pp. 139-156). Lisbon: Departamento de Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.
- Jahnke, H. N. with Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., El Idrissi, A., da Silva, C. M. S., & Weeks, C. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics*

- education: The ICMI Study* (Luminy, Marseille, 1998), chapter 9, (pp. 291-328). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publisher.
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the 'Whys' and 'Hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71, 235-261.
- Kool, M. (1992). Dust clouds from the 16th century. *The Mathematical Gazette*, 76(475), 90-96.
- Liu, Po-Hung (2003). Do teachers need to incorporate the history of mathematics in their teaching?. *Mathematics Teacher*, 96, 370-377.
- Loria, G. (1899). La storia della matematica come anello di congiunzione fra l'insegnamento secondario e l'insegnamento universitario. *Periodico di Matematica*, 14, 19-33.
- Maschietto, M., & Bartolini Bussi. M. G. (2011). *Mathematical machines: from history to mathematics classroom* (O. Zaslavsky, P. Sullivan - *Constructing knowledge for teaching secondary mathematics tasks to enhance prospective and practicing teacher learning* (pp. da 227 a 245). Springer New York Dordrecht Heidelberg London (USA) -
- Poincaré H. (1899). La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. *L'Enseignement Mathématique*, 1, 157-162.
- Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 223-261). New York - London: Routledge.
- Radford, L., Boero, P., & Vasco, C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In J. Fauvel, & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 162-167). Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publisher.
- Ransom, P. (1995). Navigation and surveying: teaching geometry through the use of old instruments. In F. Lalande, F. Jaboeuf, & Y. Nouazé, (Eds.) (1995). *Actes de la première Université d'Été Européenne. Histoire et Épistémologie dans l'Éducation Mathématique* (pp. 227-239). Montpellier, France: IREM de Montpellier, Université Montpellier II.
- Schubring, G. (2006). Ontogeny and phylogeny - Categories for cognitive development. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings HPM 2004 & ESU 4* - Revised edition (pp. 329-339). Iraklion, Greece: University of Crete.
- Schubring, G. with Cousquer, É., Fung, C.-I., El Idrissi, A., Gispert, H., Heiede, T., Ismael, A., Jahnke, N., Lingard, D., Nobre, S., Philippou, G., Pitombeira de Carvalho J., & Weeks, C. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel & J. Van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI Study*, chapter 9, (pp. 91-142). Dordrecht / Boston / London: Kluwer.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36
- Sierpinska, A., Tregalová, J., Hillel, J., & Dreyfus, (1999). Teaching and learning linear algebra with Cabri. In O. Zaslavski (Ed.), *Proceedings of PME 23* (Vol. 1, pp. 119-134). Haifa, Israel: The Technion Printing Center.
- Siu, M.-K. (2006). No, I don't use history of mathematics in my class: Why?. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, (Eds.) *Proceedings HPM 2004 & ESU 4* - Revised edition (pp. 268-277). Iraklion, Greece: University of Crete.
- Skemp, R. (1969). *The psychology of learning mathematics*. Harmondsworth: Penguin.
- Swetz, F. J. (1995). To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88.
- Tall, D. (1985a). The gradient of a graph, *Mathematics Teaching*, 111, 48-52.
- Tall, D. (1985b). Tangents and the Leibniz notation, *Mathematics Teaching*, 112, 48-52.
- Tall, D. (1986). A graphical approach to integration and the fundamental theorem, *Mathematics Teaching*, 113, 48-51.
- Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht.
- Tall, D. (1996). A versatile theory of visualisation and symbolisation in mathematics. In A. Antibí (Ed.), *Proceedings of CIEAEM 46* (Vol. 1, pp. 15-27).
- Tall, D. (2003). Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In L. M. Carvalho, & L. C. Guimarães (Eds.), *Historia e tecnologia no ensino da Matemática* (Vol. I, 1-28). Rio de Janeiro.
- Tang, K.-C. (2006). History of mathematics for the young educated minds: A Hong Kong reflection. In F. Furinghetti, S. Kaijser, & C. Tzanakis, (Eds.) *Proceedings HPM 2004 & ESU 4* - Revised edition (pp. 630-638). Iraklion, Greece: University of Crete.
- Thom, R. (1973). Modern mathematics; does it exist?. In A. G. Howson, (Ed.), *Developments in mathematics education* (pp. 194-209). Cambridge: Cambridge University Press.
- Toeplitz, O. (1963). *The calculus, a genetic approach*. Chicago and London: The University of Chicago Press.
- Tymoczko, T. (1994). Humanistic and utilitarian aspects of mathematics. In D. F. Robitaille, D. H. Wheeler, & C. Kieran (Eds.), *Selected lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education* (pp. 327-339). Québec: Les Presses de l'Université Laval.
- Van Amerom, B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 63-75.

Appendix 1

154 ŒUVRES DE FERMAT. — CORRESPONDANCE.

laquelle confirme la règle tout à fait. Bien loin d'y remarquer des défauts, je crois qu'il y trouvera plus de facilité qu'à la sienne ⁽¹⁾....

XXXI.

MÉTHODE DE MAXIMIS ET MINIMIS

EXPLIQUÉE ET ENVOYÉE PAR M. FERMAT A M. DESCARTES ⁽²⁾.

(A, f^o 62 à 67.)

1. La méthode générale pour trouver les tangentes des lignes courbes mérite d'être expliquée plus clairement qu'elle ne semble l'avoir été.

Soit la courbe donnée ZCA (*fig. 67*), de laquelle le diamètre soit CB. Soit encore donné dans la courbe le point A, duquel soit menée l'appliquée AB sur le diamètre. Il faut chercher la tangente AD, de laquelle le concours avec le diamètre prolongé se fait au point D.

Les lignes AB et BC sont données; supposons que BA s'appelle *B*, et que BC s'appelle *D*. Supposons que la ligne BD, que nous cherchons, s'appelle *A*. Prenons à discrétion un point, tel que E, sur la tangente, duquel soit tirée EF parallèle à AB, et supposons que la ligne BF soit *E*.

⁽¹⁾ La Lettre est évidemment incomplète. D'après la réponse de Descartes à Mersenne, en date du 27 juillet 1638 (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 66, p. 374-375), Fermat y aurait répondu à la question V de Sainte-Croix (*voir* p. 64, note), c'est-à-dire donné le nombre 1 476 304 896, comme quatrième connu dont le double soit égal à la somme de ses parties aliquotes. Descartes ajoute :

« ... il met un pou devant, touchant la quatrième question de M. de Sainte-Croix (*voir* p. 29, note 2), que j'aurai peut-être fait la même équivoque, qui lui arriva la première fois qu'elle lui fut proposée, et que j'aurai cru qu'il suffisoit que les nombres cherchés ne fussent ni quarrés, ni composés de deux quarrés, bien qu'ils fussent composés de quatre, ce qui n'est pas pourtant selon le sens de l'auteur etc. »

⁽²⁾ Pièce jointe à la précédente (*voir* page 152, note 1). — Elle a été publiée par M. Charles Henry dans ses *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat* (pages 184 à 189), d'après le brouillon d'Arbogast. Celui-ci ne l'a connue que par une copie de Mersenne, aujourd'hui perdue.

Appendix 2

80 DES MOUVEMENTS COMPOSEZ.

* Je dirais ainsi : Le point F en FC , se mouvant vers LM , a deux mouvemens droits & uniformes, FL , LO , qui composent un mouvement droit FO .

Semblablement ledit point F en FO , se mouvant vers NM , a deux mouvemens FN , NC , qui composent FC .

Dans ces deux mouvemens FO , FC , sera composé un mouvement FM , qui sera composé de tous ces quatre, & FM est diagonale, &c.

Nous aurons besoin de cette proposition comme d'un lemme, pour les touchantes de la quadratrice, & peut-être de quantité d'autres lignes.

PROBLEME I.

Proposition cinquième.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens meslez.

Mais nous supposons qu'on nous en donne assez de propriétés spécifiques, qui nous fassent connoître les mouvemens qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'Invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

Le principe est assez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura considéré avec un peu d'attention.

Regle générale.

PAR les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante; de tous ces mouvemens composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonstration est mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle est très-générale, & qu'elle peut servir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne sera point à propos de le répéter.

Vous trouverez dans les exemples suivans les touchantes des sections coniques, celles des autres lignes principales qu'ont connu les anciens, & celles de quelques-unes que l'on a décrit depuis peu, comme du Limaçon de Monsieur Paschal, de la Roulette de Monsieur Rob. de la Parabole du second genre de Monsieur Desc. &c.

Premier exemple des touchantes de la parabole.

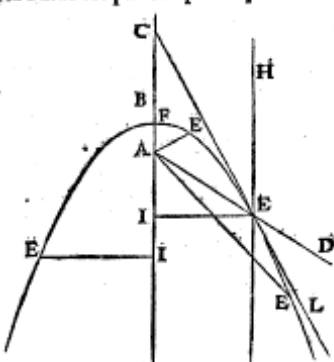
SOIT que l'on nous ait donné la parabole EFE , & le moyen de la décrire par la cinquième méthode générale de Monsieur Mydorge livre second, proposition 25. qui est telle.

Le sommet & le foyer de la parabole étant donnez de position, trouver dans le même plan tant de points qu'on voudra par lesquels la parabole est décrite.

Soit A le foyer, & F le sommet: soit tirée la ligne AF , & prolongée de F vers B , & soit FB égale à AF , la même ligne BFA sera l'axe de la parabole. Prenez dans FA autant de points I qu'il vous plaira, tirez par ces points des lignes perpendiculaires à FA ; du centre A & de l'intervalle d'entre chaque perpendiculaire,

eulaire, & le point B comme BI, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la Parabole passera par les points E.

Cela posé si l'on demande la touchante de la Parabole au point E, soit tiré la ligne AE prolongée comme en D, & la ligne EI perpendiculaire à AB, & encore la ligne HE parallèle à l'axe FAI, alors il est clair par la description cy-dessus, que le mouvement du point E décrivant la Parabole, est composé de deux mouvemens droits égaux, dont l'un est la ligne AE, & l'autre est la ligne HE sur laquelle il se meut de même vitesse que le point I dans la ligne BA, laquelle vitesse est pareille à celle de la ligne AE par la construction, puisque AE est toujours égale à BI. Partant puisque la direction de ces mouvemens égaux est connue, sçavoir suivant les lignes droites AED, HE données de position, si vous divisez l'angle AEH en deux également par la ligne LEC, qui est le diamètre d'un rhombe autour de l'angle AEH, (& par conséquent la direction du mouvement composé des deux HE, AE,) la ligne LEC sera la touchante.



Avant que de passer outre, remarquez deux choses. La première, que nous n'avons pas voulu considérer le point E comme commune section de deux lignes, dont l'une AE infinie se meut circulairement autour du point A; l'autre IE aussi infinie descend parallèlement à soy-mesme, ayant toujours son extrémité I dans la ligne BA, puisqu'il a été plus facile de considérer les mouvemens AE, HE du point E en chaque endroit de la section de ces lignes. Secondement, nous avons dit que les mouvemens AE, HE sont égaux l'un à l'autre, ce qui sera vray, quelque point de la parabole que nous prenions pour E. Mais il ne s'ensuit pas que tous les mouvemens d'un point E soient égaux à tous les mouvemens d'un autre point E de la parabole, chacun d'eux n'en ayant qu'un réciproque de l'autre costé de la parabole & également éloigné du sommet. Vous entendrez la même chose en toutes les autres lignes courbes.

Pour montrer que notre façon de trouver les touchantes de la Parabole, s'accorde avec celle d'Apollonius livre 1. proposition 33, & pour le trouver en quelque façon analytiquement, posons qu'il soit vray que LEC touche la Parabole en E. Si donc nous abaissions l'ordonnée EI, IF sera égale à FC, & ajoutant FB à IF, & FA à CF, les routes CA & IB seront égales (car les ajoutées le sont par la construction) mais IB est égale à AE par notre construction, donc CA & AE sont égales, & l'angle ACE égal à l'angle AEC; mais par notre construction nous avons divisé l'angle AEH en deux également, & par conséquent nous avons fait AEC, CEH égaux entr'eux, dont ACE est égal à CEH son alterne, ce qui est vray, car par la construction EH est parallèle à CI.

Ou si vous aimez mieux, puisque CI, EH sont parallèles, l'angle ACE est égal à CEH; mais par la construction CEH est égal à AEC, donc ACE & AEC sont égaux, & le triangle ACE isoscèle, donc CA est égale à AE. Mais encore par la construction AE est égale à BI, CA est donc égale à BI, & en ostant les égales AF, BF, CF sera égale à FI, & par conséquent la ligne CE touche la parabole, ce qu'il falloit démontrer.

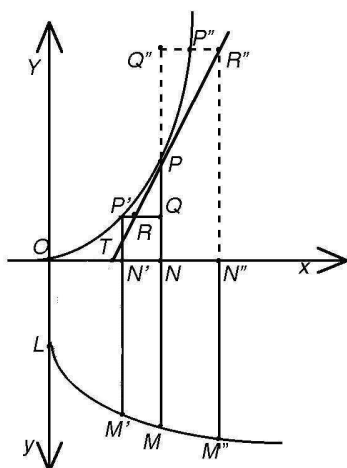
Que si l'on nous eust donné la description de la parabole par un point, comme E se promenant le long de la ligne IE du mouvement uniforme, en même temps que la ligne IE descend parallèlement à soy-mesme d'un mouve-

X

Appendice 3

Rielaborazione della lezione X delle *Lectiones opticae et geometricae* di Isaac Barrow (1674, London; seconda edizione, t. I e II)

Sia data $y = f(x)$ funzione crescente, $MN = f(ON)$. L'asse Oy è rivolto verso il basso. Si prenda un altro asse OY rivolto verso l'alto e si



prolungi MN di un segmento NP di misura uguale all'area $OLMN$. Al variare di M il punto P descrive una nuova curva. Se prendiamo sull'asse x un segmento $NT = NP/MN$ la retta PT sarà tangente in P alla nuova curva. Infatti:

sia $N' \neq N$ $ON' < ON$

$$PQ = NP - QN = NP - P'N' = \text{Area}(OLMN) - \text{Area}(OLM'N') = \text{Area}(MMN'N)$$

I triangoli PQR e PTN sono simili

$$PQ : RQ = NP : TN = NP : NP/MN = MN$$

$$RQ = PQ/MN = \text{Area}(MM'N'N)/MN < MN \cdot NN'/MN = P'Q$$

$RQ < P'Q$, P' è a sinistra della retta

$ON'' > ON$

$Q''R'' > Q'P''$, P'' è a sinistra della retta.

Allora in un intorno di P la curva sta dalla stessa parte rispetto alla retta PT e, quindi, quest'ultima è la retta tangente (come si vede Barrow usa l'antica definizione di tangente).

Il passaggio dalla curva data alla nuova curva significa fare un'integrazione; il passaggio inverso si fa costruendo la tangente PT il cui coefficiente angolare (la nostra derivata della funzione NP) è $NP/TN = MN$ (funzione di partenza).

ⁱ In (Furinghetti & Somaglia, 2006) è descritta un'esperienza analoga, condotta nel laboratorio di didattica della matematica al primo semestre in collegamento con il corso di didattica della matematica del primo anno della SSIS.

ⁱⁱ Generally, interesting results arise when teacher candidates engage in at least at some degree) exploratory approaches that offer broad opportunities for discussing, arguing, conjecturing, testing, and validating results. These situations support their activity as agents in mathematical sense-making. Preservice teachers need to be involved not only in doing meaningful mathematics, but also in reflecting, communicating, and discussing their mathematical ideas with their colleagues and instructors.

ⁱⁱⁱ In questo articolo le traduzioni sono degli autori.

^{iv} Bakhtin M. M. (1986). *Speech genres and other late essays*. Austin: University of Texas Press.

^v La radice cognitiva è descritta da Tall (1989) come un insieme significativo di informazioni su un dato concetto che si possono considerare unitariamente, con tutte le loro relazioni con le altre parti della struttura cognitiva; essa contiene i semi per un'espansione cognitiva verso la definizione formale e verso futuri sviluppi attraverso strategie di estensione e generalizzazione della conoscenza, piuttosto che attraverso ristrutturazioni e riorganizzazioni della rete concettuale; inoltre permane e resiste anche in presenza di conoscenze più sofisticate.

^{vi} Altre esperienze utilizzando il metodo di Fermat sono riportate in (Clapie & Spiesser, 1995; Jozeau, 1990; Ransom, 1992).