

Marta Menghini

La storia dell'insegnamento della matematica

Nasce in epoca piuttosto recente come ambito di ricerca internazionale: nel 2004, con il TSG 29 (*The history of the teaching and the learning of mathematics*) a ICME 10 (International Congress on Mathematics Education) da una costola del TSG *The role of history of mathematics in mathematics education*.

Ovviamente studi in questo settore esistono da tempo, ed erano anche all'interno del gruppo HPM (vedi Furinghetti), ma questo generava equivoci e discussioni perché si tratta effettivamente di campi molto diversi.

E' un terreno che **si espande rapidamente**:

- Nel 2006 nasce una rivista dedicata: *International Journal on the History of Mathematics Education*, sul cui sito compare anche una *bibliografia* di storia dell'insegnamento della matematica.
- Nel 2009 iniziano i convegni specifici biennali, dei quali si è già svolto il terzo. Il titolo della serie degli atti su "On-going research in the History of mathematics education" è *Dig where you stand*, e fa riferimento ad un intervento nel primo convegno in cui Hans Christian Hansen invitava il *mathematics educator* ad approfondire in modo scientifico la propria storia cercando schemi, linee guida, spiegazioni...
- E' in uscita il primo Handbook internazionale. Indice:

Handbook on History of Mathematics Education
Part 1. History and Methodology of the Field.- 1. On historiography of teaching and learning mathematics.- 2. The History of Mathematics Education: Developing a Research Methodology.-
Part 2. Mathematics Education in Different Epochs and in Different Regions: Antiquity and the Middle Ages.- 3. Mathematics Education in Antiquity.- 4. Mathematics Education in Oriental Antiquity and the Middle Ages.- 5. Teaching the Mathematical Sciences in Islamic Societies, 8th-17th Centuries.- 6. Mathematics Education in the European Middle Ages.-
Part 3. Mathematics Education in Different Epochs and in Different Regions: Pre-Modern Period.- 7. Mathematics Education in Europe in the Pre-Modern Period.- 8. Mathematics Education in East Asia in the Pre-modern Period.- 9. Mathematics Education in the Americas in the Pre-Modern Period.-
Part 4. Mathematics Education in Different Epochs and in Different Regions: Modern Period.- 10. Secondary School Mathematics Teaching in Italy from the Early Nineteenth Century to the Mid-Twentieth Century.- Giacardi 11. Mathematics Education in France: 1800-1980.- 12. Mathematics Education in Germany (Modern Times).- 13. Mathematics Education in the United Kingdom.- 14. Mathematics Education in Spain and Portugal.- 15. Mathematics Education in Russia.- 16. Mathematics Education in the United States and Canada.- 17. Mathematics Education in Latin America.- 18. Mathematics Education in Modern Asia.- 19. Mathematics Education in Africa.-

20. Mathematics Education in Islamic Countries in the Modern Time: Case Study of Tunisia.-

Part 5. History of Teaching Mathematical Subjects in School.-

21. History of Teaching Arithmetic.-

22. Notes for a History of the Teaching of Algebra.-

23. History of Teaching Geometry.- **Barbin & Menghini**

24. History of Teaching Calculus.- **Zuccheri & Zudini ?**

25. History of Teaching Vocational Mathematics.-

26. Mathematics Teaching Practices.-

Part 6. Issues and Processes Across Borders.-

27. History of International Cooperation in Mathematics Education.- **Furinghetti**

28. History of Tools and Technologies in Mathematics Education.-

29. History of Mathematics Teacher Education.

- Anche il Third International Handbook on mathematics education (Clements et al. ed) ha dedicato alcuni punti alla storia della didattica (*From mathematics and education to mathematics education...*, Furinghetti, Matos, Menghini).
- Il convegno a Ginevra (2000) per i cento anni dell'Enseignement Mathématique e il convegno di Roma per il centenario dell'ICMI son ostati convegno in cui un'ampia parte è stata dedicata alla ricostruzione storica dell'insegnamento in vari ambiti disciplinari (vedi Atti + Bartolini & Borba ZDM + ...)
- Special Issue ZDM (2012) sulla storia dell'Insegnamento della Matematica, focalizzato su: Modernization processes in mathematics teaching at periods of political and/or socio-cultural changes in several key countries.

Le motivazioni per la nascita della rivista e del Topic Group, ovvero l'utilità di questo tipo di ricerche

La storia dell'insegnamento e dell'apprendimento (?? **Così è scritto nella presentazione del topic group, ma è discutibile cosa sia una storia dell'apprendimento**) della matematica è un campo di studio interdisciplinare; esso può essere visto come parte della storia della matematica, della storia dell'istruzione (v. rivista Belhoste, History of Education), della sociologia; e della didattica della matematica! Gli argomenti comprendono l'evoluzione dei programmi nei diversi paesi (e le relative leggi), lo status della matematica come materia di insegnamento, il ruolo culturale e sociale della matematica, le politiche della formazione degli insegnanti, l'evoluzione della professione di insegnanti di matematica, le associazioni di insegnanti (v. Price: storia della Mathematical Association); le riviste sull'educazione matematica (v. lavori Furinghetti) e i libri di testo; **e l'evoluzione di come vengono trattati alcuni argomenti (p. es. la geometria).**

La maggior parte degli studi ha a che fare con storie nazionali. Gli incontri internazionali contribuiscono a riunire i ricercatori per stabilire modelli comuni e differenze, sviluppare programmi di ricerca che favoriscono lo studio del "generale" all'interno di storie specifiche a livello nazionale; e permettono di individuare vincoli politici, sociali e culturali, di inserire le storie nazionali in una prospettiva comparativa internazionale.

Il principale obiettivo della rivista IJHME è di dotare l'insegnamento della matematica e la didattica della matematica della sua memoria, al fine di rivelare intuizioni conseguite in periodi precedenti (dall'antichità al tardo 20° secolo), e per riconoscere conquiste o errori di eventi passati (ad esempio, l'euforia per la riforma). Swetz riporta uno studio (ESM 1995) sulla pratica di incorporare materiali concreti e supporti visivi nell'insegnamento. Tale pratica si trova già in tavolette d'argilla babilonesi, così come in testi cinesi successivi e in manuali italiani medievali. Secondo Swetz (p. 85), molte tecniche pedagogiche e principi oggi accettati hanno vissuto una storia lunga e diversificata. Tale storia attraversa non solo il tempo ma anche le culture e testimonia il fatto che, se la matematica è universale, in larga misura, lo è la sua pedagogia..

La storia dell'istruzione matematica dovrebbe costituire una delle dimensioni della conoscenza professionale degli insegnanti di matematica, per gestire i problemi che incontrano nella loro vita professionale, e per fare delle scelte.

Molti ricercatori concordano sull'importanza della storia dell'insegnamento nel favorire il concetto di *identità* degli insegnanti, che possono sentirsi protagonisti di un percorso e dei cambiamenti (Sfard, Jeppe Scott). Si tratta in effetti della loro storia.

In Italia diversi insegnanti si sono occupati della riflessione sul proprio percorso e sulla scuola (Scarpis e Fazzari, 1911; Natucci 1957 Archimede; 1967 su giornale Battaglini evoluz. ins., Guareschi 1942 bollettino matem (conti). Castelnovo E. UNESCO 1989, Linati..) e ispettori, come Vita, Ciarrapico.

Lavoro recente di Ciarrapico su Pristem: i programmi per le elementari del '43 elaborati da Washburne (Dewey "partire dal gioco") + maestri + Ferretti:

Enumerazioni e calcoli e misure potran farsi inventare stabilendo i fanciulli una corrispondenza degli oggetti da apprezzare, prima con dita delle due mani chiuse via via sollevate, in un certo ordine, poi con piselli o noccioline, e dividendosi gli spazi, per misurarli, in quadrati uguali. E poi per contare i quadrati, o dei loro corrispondenti più piccoli, disegnati, disegnandovi sopra le noccioline...

Chi si occupa della storia dell'insegnamento? (Alcuni protagonisti: Schubring, Furinghetti, Menghini, Bjarnadottir – e anche Barbin, Giacardi, Gario).

Alcuni tipi di lavori, vecchi e nuovi, in tale ambito: Howson 1982. *A History of Mathematics Education in England*, Cambridge: University Press. Young Jacob W. A. 1920. *The teaching of mathematics in the elementary and the secondary school*. New York: Green & Co....; Herbst ESM 2002 **two column proofs**, Man Keung Siu, influenza del confucianesimo sull'insegnamento.

Scuole: Howson; Keith Jones; Volkert;...

Problemi e filoni aperti: Matematica moderna (anni '60); ruolo dei matematici nel plasmare l'insegnamento, libri di testo, personaggi ...

In generale vi lavorano storici e didattici. C'è differenza di approccio tra storici e didattici?

La metodologia è quella dello storico: fonti, interpretazione. La differenza fra storici e didattici potrebbe essere nella scelta degli argomenti, nell'interpretazione (però – in un confronto con Paola Gario - su molte scelte eravamo d'accordo)

Un esempio tratto dall'ultimo convegno:

Joao Bosco Carvalho (storico): Metodo Lancaster, entrato nelle scuole del Sudamerica agli inizi dell'800 e rimasto fino a verso il 1880. Un metodo basato sul mutuo insegnamento, usato in Europa per la formazione terminale di lavoratori dell'industria e in Sudamerica per le scuole elementari. L'insegnante istruisce alcuni ragazzi più bravi i quali a loro volta... Motivato anche dalla carenza di insegnanti. Il relatore ha fornito una dettagliata informazione su quando e quanto è stato usato; sulla sua trasmissione nelle scuole Normali per preparare gli insegnanti. Poco sui contenuti matematici (aritmetica di base fino alla regola del tre ..., un po' di geometria pratica). Molto poco sui pro e contro del metodo, sul confronto con cosa è venuto dopo (Pestalozzi, Fröbel, ...), su cose anche oggettive quali le critiche e le motivazioni per cui è stato tolto.

Jeremy Kilpatrick sull'opera Warren Coburn (1793-1833): *forse* ispirato da Pestalozzi (non c'è una ricostruzione storica sulle probabili influenze), Coburn fece un lavoro pionieristico con ragazzi di 10-12 anni per introdurre l'aritmetica partendo dall'esperienza, passando da un approccio scritto ad un approccio orale alla matematica, e contribuendo lentamente a rompere con la tradizione dei *cyphering books* (rules to perform addition, subtraction, multiplication, and division). I suoi testi divennero molto popolari e, anche se le sue idee sull'insegnamento furono spesso trascurate o ignorate, la loro influenza durò fino a verso il 1920, quando Thorndike iniziò il movimento di ritorno alla memorizzazione e allo studio deduttivo delle regole. Kilpatrick fa del tutto una analisi *didattica*.

E' difficile fare una distinzione fra storici e didattici generalizzando questi due esempi. Mi limiterò ad illustrare miei lavori e le relative motivazioni.

I miei principali filoni di ricerca sono riassunti in linea di massima nei due lavori "enciclopedici", ovvero (i capitoli sono qui per completezza dei lettori e controrelatori, durante la presentazione saranno citati brevemente solo alcuni argomenti):

EOLLS (ENCYCLOPEDIA OF LIFE SUPPORT SYSTEMS, Unesco).

HISTORY OF MATHEMATICS EDUCATION - ITALY

Contents

1. Introduction: System of education in the period of the unification of Italy
2. The role of mathematics in the Italian educational system
- 2.1. Mathematics in classical and technical instruction**

- 2.2. Arenas for a Debate
- 2.3. Towards a Modern Lycée**
 - 2.3.1. The Modern Lycée: 1911 – 1923
 - 2.3.2. The Programs of the Ispettorato Centrale dell'Istruzione Media
- 3. Mathematics in primary school and the training of the teachers
 - 3.1. The Elementary School
 - 3.2. The Normal School
 - 3.3. The Kindergarten and the Influence of Educational Sciences
 - 3.4. Developments in the Training of Teachers
- 4. Main features of Italian mathematical instruction
 - 4.1 Rational Geometry in the Lycée from 1867**
 - 4.1.1. The Debate
 - 4.1.2. Rigid Body Motions in Italian Textbooks at the End of the 19th Century
 - 4.1.3. The Fusion of Plane and Solid Geometry (Paola).
 - 4.2. Rational Arithmetic and Real Numbers: 1867 – 1923**
 - 4.2.1. Rational Arithmetic
 - 4.2.2. The Approach to Real Numbers
 - 4.3 Projective Geometry in the Technical Institutes: 1871 – 1923**
 - 4.4. Intuitive Geometry in the Lower Grades from 1881
 - 4.4.1. School Programs
 - 4.4.2. The first Textbooks of Intuitive Geometry**
 - 4.4.3. Further Developments
 - 4.4.4. Ugo Amaldi and Emma Castelnuovo
 - 4.5. The Role of Textbooks
 - 5. The reform of 1923 and the birth of the scientific Lycée**
 - 5.1. The Reform of Giovanni Gentile
 - 5.2. Successive Reforms till 1945
 - 6. Attempts for a reform: 1950 to 2010
 - 6.1. Influences of the Modern Math Movement in Italy**
 - 6.1.1. The Royaumont Conference.
 - 6.1.2. The Proposals for Reform in Italy.
 - 6.2. Experimental Programs
 - 6.3. Reforms of Compulsory and Technical Schools
 - 6.3.1. Middle school
 - 6.3.2. Elementary School
 - 6.3.3. Technical Institutes

Handbook on History of Mathematics Education

Chapter XVII. History of teaching Geometry

1. The beginnings of teaching geometry in secondary schools

- 1.1. *The heritage of the Antiquity*
- 1.2. *Geometry teaching from universities to secondary schools*

2. The influence of Cartesian geometry

- 2.1. *The Cartesian influence on the “new elements of geometry” in the 17th century*

3. The teaching of the “Elements of geometry” in the 18th and 19th centuries

- 3.1. *The “Elements of geometry” of Legendre.*
- 3.2. *The Elements of geometry of Lacroix*
- 3.3. *The international diffusion of Legendre’s and Lacroix’s books*

4. Developments in school geometry in the 19th century

- 4. 1. *“Advanced” contents for school geometry in the technical instruction.*
- 4. 2. *The analytic approach to geometry; the case of conic sections.*

4.3. *The search for new methodologies in geometry teaching: Teaching via problems*

4.4. *Discussions about the "Elements"*

5. The 20th century: The international reform movements

5.1. *"Experimental geometry"*

5.2. *Geometrical constructions*

5.3. *The geometry of transformations*

5.4. *The issues of the International Commission on Mathematical Instruction (ICMI)*

Rigor and intuition.

The fusion of plane and solid geometry.

6. The heritage of axiomatic and structural mathematics

6.1. *New axioms for Euclidean Geometry*

6.2. *The effects of Bourbakism*

7. The teaching of geometry in elementary schools: The influence of educators

7.1. *The inquiry of OEEC in 1959*

7.2. *The educators: The schools of Pestalozzi, Dewey, Montessori, Decroly*

7.3. *The psychology of Piaget: From the diagnostic level to the educational one*

7.4. *The projects*

Ma per spiegare le motivazioni che mi hanno portato ad alcuni lavori farò riferimento a ricerche più specifiche.

1) Il metodo euclideo nell'insegnamento della geometria, con W. Maraschini, *L'educazione matematica XIII*, 3 (1992), 161-180.

Il lavoro nasce da un'esigenza degli insegnanti di matematica raccolta da Walter Maraschini, di ricostruire le motivazioni che hanno portato alla tradizionale impostazione geometrica italiana. L'esigenza nasceva in un periodo in cui gli insegnanti avevano, tramite i programmi Brocca e PNI e la maggiore varietà dei libri di testo, una effettiva scelta sulla linea da seguire per l'insegnamento della geometria (vedi anche gruppo di lavoro al convegno Latina 1994).

“[...] è bene programmare, in un quadro di riferimento organico, una scelta delle priorità (teoremi delle figure piane da dimostrare), utilizzando il gruppo delle trasformazioni oppure seguendo un percorso più tradizionale”.

IL METODO EUCLIDEO

Ad unità d'Italia non ancora conclusa, nel 1867, con la riforma Coppino, vengono introdotti gli *Elementi* di Euclide come libro di testo, auspice soprattutto il matematico Luigi Cremona, che faceva parte della commissione per i programmi. L'introduzione ha lo scopo di rafforzare l'orientamento formativo della scuola liceale italiana: la geometria, e in questa il metodo di Euclide, viene vista come «ginnastica del pensiero».

Nello stesso anno esce una edizione degli *Elementi* ad opera di E. Betti e Brioschi, integrata con note didattiche ed esercizi, esplicitamente rivolta agli studenti dei licei.

Su questa scelta si apre una polemica nella comunità matematica italiana, ben testimoniata da alcuni articoli comparsi sul *Giornale di matematiche* diretto da U. Battaglini. Vi compaiono traduzioni di articoli pubblicati in Inghilterra, dove si stava svolgendo un analogo dibattito (al contrario: in Inghilterra si tentava di rompere con la tradizione Euclidea).

Due autentici «atti d'accusa» sono rappresentati dagli articoli di Hirst e Wilson.

Le critiche sono varie. Vi sono critiche di ordine didattico: anziché «avvantaggiarsi di talune semplici e incontrastabili nozioni già possedute dai fanciulli», Euclide si sofferma su un preliminare

«vago, fastidioso e difficile» che produce «permanenti e perniciosi effetti» di «scoraggiamento» (Hirst).

Vi sono poi critiche relative all'assetto dei programmi:

“dovremmo cercare ... di combinare la disciplina intellettuale con l'effettivo progresso delle conoscenze; anziché continuare a disputare come rendersi padroni di quella disciplina per via di esercizi puramente artificiosi e ginnastici” (Hirst. ib.).

Altre critiche riguardano l'impostazione e le connessioni tra gli argomenti (ad esempio il fatto che il concetto di retta non sia collegato a quello di minima distanza) e rilievi tecnici su alcuni errori contenuti in Euclide.

Wilson rafforza queste critiche con motivazioni «moderniste»: egli osserva infatti che, a differenza che nella geometria, in ciascun'altra branca della matematica «a mano a mano che la scienza progredisce, si scrivono nuovi Elementi». Oltre a non essere un testo per scolari, gli Elementi sono dunque un testo antiquato: né un buon trattato d'istruzione né un'opera di esposizione della scienza geometrica.

Brioschi e Cremona replicano duramente: gli argomenti contro Euclide sono gli stessi che «ne' secoli addietro furono riprodotti più volte da coloro i quali andavano in cerca della via regia per apprendere gli Elementi». E ribadiscono:

«Noi crediamo che l'eccellenza logica di Euclide stia appunto in quell'ordinamento che si vuole criticare, e che la pretesa di classificare i teoremi della geometria come gli insetti o le conchiglie in un museo è, a dir poco, non degna della gravità della scienza; [...] i nostri ginnasi e licei sono destinati a dare una cultura elevata, eccezionale. In essi non si mira ad insegnare il disegno geometrico, né importa che i giovani vi apprendano la tale o tal'altra proposizione, né che studino molte cose in poco tempo. Importa invece che apprendano a ragionare, a dimostrare, a dedurre: non giovano dunque i mezzi celeri, né i libri ove la geometria è mescolata coll'aritmetica o coll'algebra: Euclide è veramente il testo che meglio serve a questi fini.

Uno dei punti centrali del metodo euclideo è sottolineato poco oltre:

«D'accordo con il Prof. Hirst accetteremmo un Euclid revised purché non sia un Euclid disfigured: purché si faccia della geometria vera, non già dell'aritmetica».

Oltre a quelle appena viste ci sono altre motivazioni che spingono all'adozione del testo Euclideo:

- a) liberarsi dai testi stranieri, primo fra tutti Legendre, in un periodo in cui si stava facendo l'unità d'Italia
- b) Un certo “conflitto di interessi” (Betti e Brioschi erano coinvolti con Cremona nella stesura dei programmi; Cremona era di fatto coinvolto nell'edizione degli Elementi di Euclide).

Pochi anni dopo la riforma Coppino, gli Elementi di Euclide non sono più considerati il libro di testo obbligatorio e vengono addirittura banditi con regio decreto due concorsi per un trattato di geometria elementare che «si attenga rigorosamente al metodo euclideo». All'uso diretto del testo di Euclide si oppongono sempre più obiezioni «tecniche» e questioni che riguardano l'assetto logico stesso della geometria.

Tra le obiezioni di tipo tecnico, valga per tutte quella relativa alla I proposizione degli Elementi: in essa, come è noto, Euclide, nel costruire il triangolo equilatero dato il lato, trascura di dimostrare che le due circonferenze con centri nei due estremi del lato effettivamente si intersecano.

Per quanto riguarda le obiezioni più generali, l'analisi dei fondamenti e il riassetto della geometria operato da vari autori (e che troverà in Hilbert la sistemazione “definitiva”) non permettono più, a cavallo del secolo, di accettare le definizioni e i postulati nel modo in cui erano da Euclide esposti. Anche qui, basti per tutte, la tautologica definizione euclidea di angolo come «inclinazione reciproca di due linee su un piano le quali si incontrano fra loro e non giacciono in

linea retta» . **Su Euclide vedi anche intervento Gario.**

Superata la questione se fosse più o meno corretto od opportuno l'uso diretto degli Elementi come libro di testo, rimase (e rimane) tuttavia in piedi il problema se fosse giusto o meno, e in quale misura, «attenersi» al metodo euclideo (chiarendo al tempo stesso che cosa si intende con l'espressione «metodo euclideo»).

Ci sembra che la questione abbia tre aspetti:

a) L'impianto ipotetico-deduttivo e il suo rapporto con l'intuizione geometrica: in particolare, poiché nessuno nega né la necessità che gli studenti acquisiscano familiarità con i fatti geometrici prima che essi vengano rigorosamente sistemati, né l'esigenza che una buona formulazione matematica e geometrica debba prevedere una attività dimostrativa, il problema si concentra su quale sia la migliore età in cui effettuare questo passaggio e se vi sia la possibilità di effettuarlo con gradualità.

Non affronteremo qui tale questione, volendo invece puntare l'attenzione sugli altri due aspetti.

b) Come si debba fondare **l'uguaglianza delle figure geometriche**; in particolare quale ruolo debbano avere i «movimenti» oppure le «trasformazioni» nella analisi dei fatti geometrici.

c) La **purezza** della geometria: se essa, cioè si debba «mescolare» con l'aritmetica e l'algebra, appoggiandosi (anche se non esplicitamente) ad una qualche precedente teoria dei numeri reali, oppure debba essere da essa indipendente.

3. IL «MOVIMENTO RIGIDO» NEI LIBRI DI TESTO ITALIANI ALLA FINE DELL'800

Come abbiamo detto, alla fine dell'800 molti noti geometri italiani si cimentarono nella stesura di nuovi trattati di geometria. Si rispettarono le indicazioni ministeriali di attenersi piuttosto fedelmente al testo euclideo e quindi ad una trattazione «pura» della geometria.

Per quanto le posizioni di Felix Klein e di David Hilbert non fossero ancora molto note (il *Programma di Erlangen*, pubblicato nel 1872, fu tradotto in italiano nel 1889; i *Grundlagen der Geometrie* apparvero, in tedesco, nel 1899), possiamo dire che le proposte italiane oscillavano fra Klein e Hilbert. Mentre Klein si riferisce infatti ancora ad uno spazio fisico, scegliendo degli assiomi che lo descrivano, Hilbert rifiuta tale riferimento e costruisce un'assiomatica che rispetti esigenze più logiche che geometriche, con assiomi indipendenti, che definiscono implicitamente gli oggetti geometrici.

Nei nuovi libri di testo italiani non si badò molto all'indipendenza degli assiomi e si cercò, contemporaneamente, di mantenere un riferimento con lo spazio fisico, in particolare nelle premesse didattiche.

Pur con questi intenti comuni, troviamo due opposte tendenze nella stesura dei manuali. Alcuni autori cercano di «emendare» Euclide nel punto dolente dei «movimenti rigidi», creando per essi nuovi assiomi: sono questi assiomi a determinare poi i criteri di uguaglianza delle figure. Altri autori, avvicinandosi maggiormente a Hilbert, preferiscono evitare il ricorso ai movimenti rigidi per introdurre l'uguaglianza, e assumono come primitivo il concetto di uguaglianza tra determinati enti (generalmente segmenti e angoli), collegandosi anche al concetto di corrispondenza biunivoca.

Delle due impostazioni, la prima sembra aver riscosso un maggiore successo scolastico, ed è sostenuta da autori quali A. Sannia e E. D'Ovidio, R. De Paolis, A. Faifofer; a favore della seconda troviamo G. Veronese e, in parte, F. Enriques e E. Amaldi.

Vediamone, più in dettaglio, alcune caratteristiche, attraverso le opere di De Paolis e di Veronese. Il primo postulato di De Paolis riguarda proprio il movimento:

«Postulato I:

- I. In tutto lo spazio è possibile il movimento delle figure geometriche.
- II. Una figura si può muovere tenendo fisso uno dei suoi punti.
- III. Una figura si può muovere tenendo fissi tutti i suoi punti situati sopra una stessa retta.
- IV. Per fissare una figura è necessario e sufficiente fissare tre dei suoi punti, non situati sopra una stessa retta».

Riconosciamo dunque le isometrie (che nello spazio si riducono a quelle dirette), che non vengono però illustrate in modo operativo, nel senso che le proprietà espresse non consentono di costruire in pratica l'immagine di una figura in una isometria. Notiamo inoltre che la formulazione risulta poco accettabile dal punto di vista odierno.

In una delle note in fondo al libro, De Paolis spiega la necessità del primo postulato:

«N. XVII Per dimostrare l'uguaglianza di due figure bisogna far vedere che possono coincidere, ciò suppone che sia possibile il loro movimento senza deformazione. È manifesta dunque l'importanza del postulato I, dovendo ricorrere ad esso ogni volta che si tratti di vedere se due figure sono o no uguali».

Di tutt'altro genere è il primo postulato di Veronese:

«Post. I: Esistono punti distinti»

De Paolis può dare, dopo il suo primo postulato, la definizione di uguaglianza; più precisamente:

1a. Diremo che due figure sono coincidenti, quando ogni punto di una è un punto dell'altra e viceversa.

2a. Due figure si dicono uguali quando trasportate convenientemente nello spazio possono coincidere».

Veronese fornisce invece gli assiomi dell'uguaglianza di segmenti nell'ambito della definizione di linea retta (si tratta dei classici postulati di congruenza o uguaglianza):

I. Se a e b sono due segmenti del sistema (lineare di punti), considerati in un dato verso, ha luogo uno o l'altro dei seguenti fatti, il primo dei quali esprimiamo dicendo che b è uguale ad a , l'altro dicendo che b non è uguale ad a . Se b è uguale ad a , ha luogo fra b ed a una corrispondenza biunivoca e del medesimo ordine si che le parti di b sono pure uguali alle parti corrispondenti di a .

Ogni segmento a è eguale ad a , nessun segmento è eguale e non eguale ad un altro segmento b ; se a è eguale a b , altresì b è eguale ad a . E se a è eguale a b e b è eguale a c , è pure a eguale a c .

II. Un segmento non è eguale ad una sua parte, un segmento AB qualsiasi è eguale al segmento BA .

III. Dato sulla retta un punto A e un segmento qualunque XY , esistono due segmenti AB , AC eguali ad XY .

Vedremo poi che sull'uguaglianza di segmenti si basa l'uguaglianza delle altre figure.

Per entrambi gli autori, il termine «distanza» è introdotto come *locuzione*, cioè per comodità di linguaggio. Non vi è un riferimento alla misura:

«La locuzione: i punti A e B e i punti A' e B' hanno la stessa distanza o distanze eguali significa: i segmenti AB e $A'B'$ sono eguali.» (Veronese).

Il nostro scopo è quello di mostrare come, secondo le due impostazioni, si arrivi alle uguaglianze di figure.

De Paolis definisce *le figure elementari*, cioè quelle figure che hanno per elementi due punti, o due rette, o due piani (in particolare quindi segmenti ed angoli).

Segue un nuovo postulato:

«Postulato VI. Data una figura elementare, è sempre possibile far coincidere contemporaneamente ciascuno dei suoi due elementi con l'altro» (De Paolis, ib.).

Questo postulato appare necessario per completare la definizione di uguaglianza, e viene infatti utilizzato per definire l'uguaglianza di angoli: «due angoli $P.AB$, $P'.A'B'$, convessi o concavi sono uguali se possiamo far coincidere contemporaneamente P' con P , $P'A'$ con PA , $P'B'$ con PB » (con $P.AB$ si intende l'angolo che ha «per origine il lato PB e per termine il lato PA »); il postulato VI permette di asserire che $P.AB = P'.A'B'$. Così, in 33, Teorema I, si dimostra che due angoli opposti al vertice sono uguali (...).

Seguiamo il procedimento di Veronese partendo da due definizioni (n. 14):

«Def I - Per *corrispondenza univoca e del medesimo ordine* tra due figure F e F' intenesi una

corrispondenza univoca tale che ad ogni serie di punti dell'una corrisponde nel medesimo ordine una serie dell'altra; in particolare a punti situati in segmenti della prima figura corrispondono punti situati nei segmenti corrispondenti.

Def II - Due figure rettilinee F e F' si dicono *eguali* quando si può stabilire fra i loro punti una corrispondenza univoca e del medesimo ordine tale che ai segmenti dell'una corrispondono segmenti eguali dell'altra».

Per stabilire l'uguaglianza di angoli, definiti come coppie di semirette (raggi), Veronese introduce il postulato:

“Post. VI: La coppia di raggi (a, b) di vertice O è uguale alla coppia inversa (b, a)”

Si noti l'analogia di questo postulato «di simmetria» con il postulato VI di De Paolis.

La dimostrazione di Veronese del fatto che angoli opposti al vertice sono uguali, non è concettualmente diversa da quella di De Paolis; oggi diremmo che entrambi fanno riferimento ad una simmetria assiale:

Solo più avanti Veronese stabilisce un lemma sul confronto di angoli comunque posti:

«Se due coppie rettilinee con vertice sono uguali, gli angoli determinati dai loro lati sono uguali. E reciprocamente».

La dimostrazione si riconduce dunque all'uguaglianza di segmenti e ad una proprietà analoga al terzo criterio di uguaglianza dei triangoli. In questo senso i criteri di uguaglianza dei triangoli non sono molto importanti per Veronese; sono delle «proprietà ulteriori» .

Veniamo quindi alla dimostrazione del primo criterio, che per entrambi è un teorema. De Paolis utilizza il movimento, portando a coincidere una coppia di lati dei triangoli, e procedendo quindi nel modo classico. Veronese dimostra invece in questo modo:

28. Teor. I -Due triangoli aventi due lati e l'angolo compreso rispettivamente uguali sono uguali.

Siano ABC e A'B'C' i due triangoli dati, e sia $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\angle BAC = \angle B'A'C'$. Nella corrispondenza di uguaglianza degli angoli BAC, B'A'C' i punti B, C corrispondono ai punti B', C' e per ciò il triangolo ABC corrisponde al triangolo A'B'C' e per il Teor. II, 14 i due triangoli sono uguali».

Anche in questo caso l'idea non è molto diversa da quella di De Paolis, ma si evita accuratamente il ricorso ai movimenti.

[...]

Una delle principali varianti utilizzate per temperare il rigido mondo euclideo è il *mescolare l'algebra alla geometria*, utilizzando fortemente proprietà algebriche o numeriche per far capire fatti geometrici.

Questo era apparentemente il motivo del rifiuto del testo di Legendre, il quale era in realtà abbastanza “puro”, ma c'era qualche ricorso all'intuizione e soprattutto era direttamente algebrica la teoria delle proporzioni, e i rapporti erano rapporti fra numeri. Grandezze e misure erano talvolta interscambiabili. La geometria aveva del resto lo scopo di “misurare”.

Nella realtà scolastica italiana - quella più «pesante» dal punto di vista della formazione matematica, quale il liceo scientifico - la geometria che «si fa» è, fondamentalmente, *geometria analitica*. In essa, il «ragionamento» è fortemente appoggiato sul «calcolo». Le relazioni geometriche sono tradotte in formule algebriche. Si ha in modo ancora più forte che nel passato, ciò che Betti e Brioschi denunciavano nella prefazione alla loro edizione degli *Elementi*, criticando i testi quali quelli di Legendre: «al rigore del ragionamento si è sostituito il meccanismo del processo aritmetico».

Analogamente “legendrista” (nell'accezione precedente) appare anche una assiomatica possibile a livello di scuola superiore che fortemente utilizzi la struttura dei reali (sia pure non chiarita in modo del tutto rigoroso) per assegnare attributi numerici (ad esempio: la distanza) a fatti geometrici (ad esempio: una coppia di punti). Tale era l'assiomatica di Choquet, e tante impostazioni risalenti al periodo Bourbakista post anni '60. [...]

Questo lavoro ha avuto un certo successo quando è stato presentato all'estero. Ma per motivi diversi da quelli che ci aspettavamo. Qui emerge l'importanza del *contesto* in cui si colloca una scelta didattica: molti paesi che da tempo hanno abbandonato la geometria euclidea sentono il bisogno di ritornarvi, e apprezzano quella dichiarazione di Brioschi e Cremona che noi riportavamo invece con una lieve ironia.

Un secondo ambito di ricerca riguarda lo sviluppo della geometria pratico-intuitiva nell'insegnamento (non solo italiano)

2) MENGHINI M (2010). *La Geometria Intuitiva nella Scuola Media Italiana del '900. La Matematica nella Società e nella Cultura*, vol. III, p. 399-429.

Menghini M. (2012). *From practical geometry to the laboratory method: the search for an alternative to Euclid in the history of teaching geometry. Regular Lectures, ICME 12.*

L'interesse per questi lavori è partito da un lavoro fatto con Lucilla Cannizzaro sui livelli dell'apprendimento geometrico (van Hiele), e, contemporaneamente dalla curiosità suscitata dalla lettura del testo di Vita sulle alterne vicende che nei programmi scolastici ebbe la *geometria intuitiva*.

Le ricerche fatte per la preparazione dell'Handbook mi hanno poi portato a ripercorrere anche lo sviluppo dell'insegnamento della *geometria pratica*.

Una sintesi di questi lavori è stata presentata al convegno UMI-CIIM di Salerno 2013.

LA GEOMETRIA PRATICO-INTUITIVA NELLA STORIA DELL'INSEGNAMENTO

I due aspetti della geometria

La geometria è stata sempre caratterizzata da due aspetti: quello astratto "speculativo", rappresentato da Platone e dagli Elementi di Euclide, e quello pratico, rappresentato dalle applicazioni. Nell'*insegnamento* della geometria, sono confluiti entrambi gli aspetti: più volte nel corso della storia dell'insegnamento si è presentata l'alternativa tra un approccio deduttivo / razionale e un approccio pseudo-pratico/intuitivo. L'enfasi posta sul secondo aspetto nel XIX e XX secolo, in un periodo di crescente attenzione allo sviluppo mentale del bambino, ha portato alla geometria sperimentale e a metodi che hanno favorito la trattazione della geometria nella scuola di base.

La Geometria pratica

La geometria pratica è sempre stata presente nella storia della geometria, ed era presente anche nel mondo greco di cui però ricordiamo principalmente quel sistema di logico culminato con l'opera di Euclide che ha – come è noto - fortemente influenzato l'insegnamento della geometria.

I Romani erano interessati soprattutto alla geometria pratica (agrimensura, macchine da guerra), anche per l'insegnamento nelle loro scuole. Proprio in questo ambiente troviamo uno dei primi apprezzamenti didattici della geometria pratica: "Riguardo alla geometria, si afferma che in parte è utile per le tenere età. Sostengono, infatti, che gli animi ne sono stimolati e l'ingegno sollecitato [...] ma pensano che quella scienza, a differenza delle altre, non è utile quando è acquisita, ma nell'atto di venire appresa (Quintiliano, Istitutio Oratoria, I, 34, ecc.) Con queste parole Quintiliano attribuisce alla geometria pratica un ruolo educativo, attraverso l'attenzione al processo di

apprendimento.

1. "DE PRACTICA GEOMETRIAE"

Iniziamo un excursus tra i libri di testo di geometria pratica con *De practica geometriae* di Fibonacci (1223). L'opera di Leonardo di Pisa (Fibonacci) ha dato il via a quella corrente della geometria pratica che caratterizza il Basso Medioevo e presenta da un lato regole e metodi molto pratici per il calcolo di distanze e aree, ma dall'altro anche problemi che, nel corso del Medioevo, si trasformarono in "giochi matematici" (come nei *Ludi matematici* di Leon Battista Alberti).

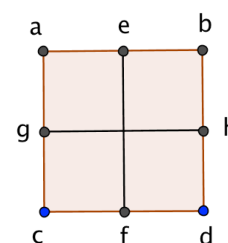
Il testo di Fibonacci fu utilizzato nelle Scuole d'abaco, scuole comunali per alunni che volevano imparare un mestiere. In queste scuole gli alunni dovevano per lo più memorizzare regole, ma nel testo di Fibonacci c'è qualcosa che va al di là di questo.

Il libro di Fibonacci non è contrasto con gli Elementi di Euclide. Al contrario, il riferimento a proposizioni euclidee è frequente. La sua geometria è semplicemente una cosa diversa. Non si parla mai di assiomi o teoremi, ma all'inizio sono elencate definizioni e "principi", che sostanzialmente corrispondono a assiomi o a costruzioni che si possono eseguire. Fibonacci usa i numeri, l'aritmetica, ed esempi pratici; le dimostrazioni sono spesso solo verifiche numeriche.

Fibonacci non presenta strumenti per misurare o disegnare. Non parla nemmeno di angoli. La sua geometria ha lo scopo di "misurare tutti i tipi di campi" e "dividere campi" fra eredi. Una delle prime regole indicate da Fibonacci riguarda proprio il *calcolo della superficie di un quadrato*. Come sempre, la regola è data con un esempio:

Dato un campo quadrilatero, equilatero e equiangolo di 2 pertiche per lato, dico che la sua area si trova moltiplicando il lato ac per il suo lato adiacente ab , cioè 2 pertiche per due pertiche.

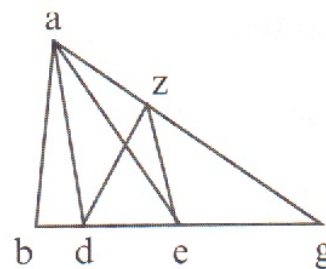
Le rette ab e cd siano divise in due parti uguali nei punti e e f , si tracci la retta ef . Lo stesso [...] si tracci la retta gh . Allora il quadrilatero $abcd$ è diviso in quattro quadrati, ognuno dei quali misura una pertica per lato. Quindi ci sono 4 *pertiche piane* in tutto il quadrilatero $abcd$.



"Dimostra" che i quadrilateri sono effettivamente dei quadrati osservando che se ef è uguale a e e equidistante da ac e bd , e se gh è uguale a e e equidistante da ab e cd , anche ae è uguale a e e equidistante da cf . Quindi l'angolo $ae f$ è uguale all'angolo retto $ac f$...

I molti problemi relativi alla "divisione dei campi" in parti equivalenti sono più astratti, anche se nascono da problemi concreti. Qui iniziamo a trovare "rompicapi", sfide. Per esempio "Per dividere un triangolo in due parti uguali con una linea che parte da un dato punto su un lato":

Nel triangolo abg , sia dato il punto d . Divido il lato bg in due parti uguali nel punto e , e traccio le linee ad e ae . Per il punto e costruisco ez parallela a ad , e traccio dz . Dico quindi che il triangolo abg è diviso in due da dz . Si dimostra come segue: i due triangoli uguali ade e adz di base ad hanno uguali altezze e sono equivalenti. A entrambi i triangoli aggiungo il triangolo abd e [ottengo risp.] il triangolo abe e il quadrilatero $abdz$. Ma triangolo abe è la metà di abg . Donde anche il quadrilatero $abdz$ è la metà di abg . Pertanto triangolo abg è diviso in parti uguali dalla linea dz .



Non troviamo questo tipo di problemi in Euclide. Nei secoli successivi diventeranno tipici dei testi di geometria pratica.

Libri simili a quello di Fibonacci, eventualmente con qualche dimostrazione più euclidea in più, sono esistiti per oltre 300 anni e hanno influenzato l'insegnamento non solo nelle vecchie università, ma anche nelle prime scuole secondarie del 16° secolo. Esempi sono i testi di Luca Pacioli in Italia (1494) e di Orontius Finaeus in Francia (1556).

2. "GEOMETRIAE LIBRI": LA VIA ALLA GEOMETRIA

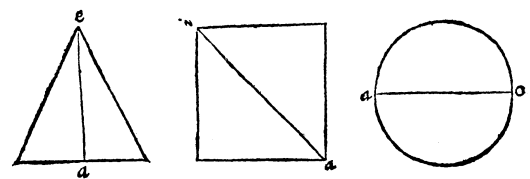
Nel Rinascimento, l'Italia cede il suo "primato" matematico alla Francia. Nel 16° secolo troviamo l'interessante opera di Pierre de la Ramée (Petrus Ramus). Il testo di Ramus (1569) *dovrebbe* essere di geometria pratica. Ma, anche se Ramus presenta più strumenti da disegno e lavoro di Fibonacci, è anche un filosofo e un educatore e critica esplicitamente la presentazione di Euclide. Si presenta quindi come alternativo a Euclide.

Ramus scrive nella prefazione che "la geometria è l'arte di misurare bene" (Geometria est ars bene metiendi). Per misurare bene, è necessario considerare la natura di tutto ciò che deve essere misurato: per confrontare queste cose una con l'altra, per capirne rapporto, proporzione e somiglianza ...

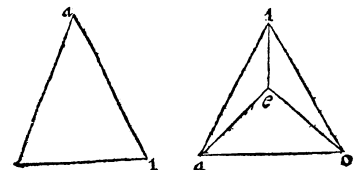
Ramus inizia con una estesa presentazione di entità geometriche e figure attraverso disegni, misure e costruzioni semplici. Potremmo chiamare questa una geometria *osservativa*, attraverso la quale il lettore acquista familiarità con le figure e le loro proprietà. Possiamo dire che in Ramus troviamo l'idea dei diversi livelli apprendimento geometrico. Per raggiungere il suo scopo, Ramus presenta anche oggetti e relazioni insolite. Alcuni esempi (Libro 4):

6. [Il diametro è una linea retta inscritta in una figura per il suo centro]. I diametri di una stessa figura sono infiniti.

- se una figura ha diametri tutti uguali allora è un cerchio.

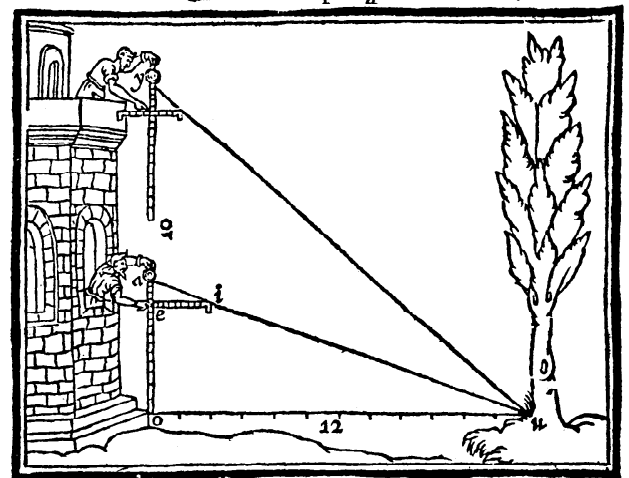


11. Una figura prima è una figura che non può essere suddivisa in figure più semplici



Ramus arriva quindi ai problemi "classici" di geometria pratica, con regole (e strumenti) per la misurazione di segmenti (Libro 9):

Nel testo di Ramus la misura è ancora l'obiettivo principale della geometria, ma *l'attività di misurazione* è preceduta da una parte molto interessante ed originale di osservazione, di "gioco" con le figure. I teoremi che vengono presentati appartengono in genere alla tradizione classica, ma le dimostrazioni sono fortemente supportate da costruzioni geometriche, e il disegno si aggiunge alla attività pratica di misurazione con strumenti adeguati.



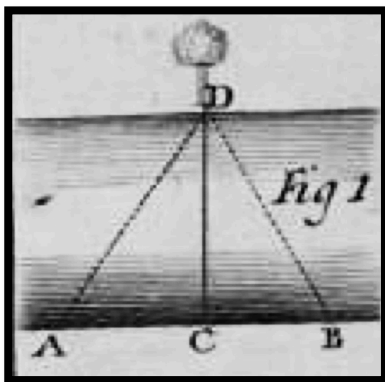
Notiamo che i "rompicapo" della geometria pratica del Medioevo e i giochi di Ramus sono caratteristici di una libertà che non appartiene alla tradizione Euclidea. Euclide non è "giocosso" (può piacere, ma non diverte).

3. "ELEMENTS DE GÉOMETRIE": COSTRUZIONI GEOMETRICHE

Nel 1741, sempre in Francia, Alexis Clairaut scrisse i suoi *Elements de geometrie*. Il primo capitolo riguarda la misurazione dei campi, tuttavia Clairaut *non* era interessato all'insegnamento della geometria pratica. Con Clairaut vediamo il passaggio dalla misura come obiettivo alla misura come un *mezzo* per insegnare geometria per problemi. Questo è evidenziato dal fatto che la parte relativa alla misura non contiene numeri; c'è solo un accenno alla necessità di un confronto con una misura conosciuta.

Scopo di Clairaut è risolvere un problema "costruendo" gli elementi che vogliono misurare. L'attenzione si concentra sul *processo* di costruzione e sulla sua *narrazione*.

[...] un uomo posto in D sulla riva di un fiume vuol sapere, quanto v'è dal luogo

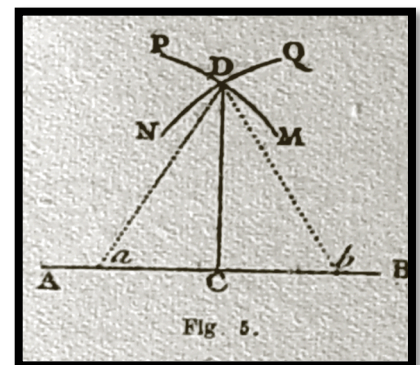


dove egli sta, all'altra riva AB. E' chiaro che in questo caso, per misurar la distanza cercata, bisogna prender la più corta di tutte le linee rette DA, DB etc., che si posson tirare dal punto D alla retta AB. Ov'è facile il vedere, come questa linea più corta, di cui si ha di bisogno, è la linea DC, che si suppone non pendere né verso A, né verso B. Questa è dunque quella linea (chiamata perpendicolare) sulla quale bisogna riportare la nota misura per aver la distanza DC dal punto D alla retta AB. [...] Dunque era necessario, che vi fosse un metodo per tirar delle perpendicolari."

Clairaut indica altri casi in cui è necessaria una perpendicolare, per esempio per disegnare un rettangolo, e poi prosegue con la costruzione:

[il punto C potrebbe essere trovato con prove ripetute, ma questo metodo lascerebbe la mente insoddisfatta, allora:]. si prenda una comune misura, per esempio una corda, un compasso di una determinata apertura, secondo che l'operazione si farà o sul terreno o sulla carta...

Anche se molti dettagli sono stati omessi, la citazione riportata mostra la precisione della descrizione. Non c'è una definizione di perpendicolare, ma il termine è chiaro al momento in cui viene compare. Possiamo notare qui l'importanza del "momento" di apprendimento, citato da Quintiliano.



Il testo di Clairaut non contiene dimostrazioni, ma costruzioni e argomentazioni. La terza parte del testo presenta anche modelli concreti per la geometria dello spazio.

La seconda parte del testo è più rigorosa, come afferma Clairaut stesso, non per la presenza di dimostrazioni, ma perché gli strumenti consentiti sono solo riga e compasso. Clairaut continua con il suo metodo di soluzione di problemi.

L'applicazione del teorema sugli angoli alla circonferenza è uno dei pochi problemi impegnativi del testo di Clairaut.

Le sfide di Clairaut non consistono nel risolvere problemi difficili, ma piuttosto nella richiesta allo studente di seguirlo nel processo della soluzione di un problema, prestando attenzione alle costruzioni necessarie.

Il successo di Clairaut arrivò un secolo dopo la stesura del suo testo. Nel 1836 fu tradotto per le scuole irlandesi fu ristampato in francese nel 1852 e adottato ufficialmente. Fu utilizzato anche nelle scuole tecniche italiane (corrispondenti ai primi tre anni di istruzione tecnica) fino agli inizi del 20° secolo.

Più di Ramus, Clairaut si concentra sulle attività da svolgere, che sono ora finalizzate alla *costruzione* degli elementi geometrici da misurare. I problemi di partenza sono meno importanti del processo che porta alla loro risoluzione.

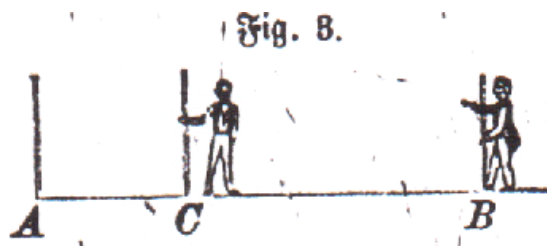
4. “ANFANGSGRÜNDE DER GEOMETRIE”: DISEGNI, COSTRUZIONI, DIMOSTRAZIONI.

Nel 1846 Franz (Ritter von) Mocnik scrisse un testo che ebbe molte ristampe e adattamenti fino all'inizio del 20° secolo. Fu utilizzato nei territori austro-ungarici, compreso il nord d'Italia prima dell'unificazione italiana, ed era indirizzato principalmente alle scuole tecniche e professionali. Si tratta ancora di un testo per le applicazioni pratiche della geometria, ma abbiamo ora a che fare con un manuale volto a un sistema scolastico esteso, e iniziano anche ad emergere teorie pedagogiche.

Mocnik divide il suo testo in una prima parte denominata *Formenlehre*, che comprende disegno a mano libera, alcuni suggerimenti relativi alla geometria proiettiva e a misure pratiche, e una seconda parte chiamata *Grundlehre*, che include costruzioni con riga e compasso (come in Clairaut) e anche le dimostrazioni. *Formenlehre* ci ricorda l'educatore Johann Heinrich Pestalozzi, che riscosse particolare successo nei paesi del nord- e mittel- Europa, e che sosteneva un primo approccio all'insegnamento basato sull'intuizione.

Mocnik inizia con indicazioni pratiche su come rappresentare punti, su come disegnare una retta a mano libera o con un righello. Dà molti esercizi che richiedono il disegno a mano libera. Ci sono anche problemi applicati all'agrimensura, come

Se vogliamo piantare un palo in un campo, che sia allineato con gli altri due pali A e B, dobbiamo metterci dietro al palo B mentre un assistente va con il palo C dove esso pressappoco dovrebbe essere piantato. Poi gli possiamo indicare con la mano dove spostarsi in modo che possiamo vedere il palo C è allineato con A e B



Il concetto di distanza è primitivo, e un esercizio richiede, per esempio, di disegnare cinque linee orizzontali a distanze uguali; poi Mocnik suggerisce di confrontare in modo approssimato le lunghezze dei due segmenti e disegnare la loro somma o differenza (non c'è riferimento a misure numeriche). Si richiede anche il disegno approssimato di multipli o sottomultipli di un segmento.

Immagini geometriche, come le diagonali di un quadrato, aiutano gli alunni a capire il concetto, e quindi a essere in grado di tracciare le perpendicolari a mano libera.

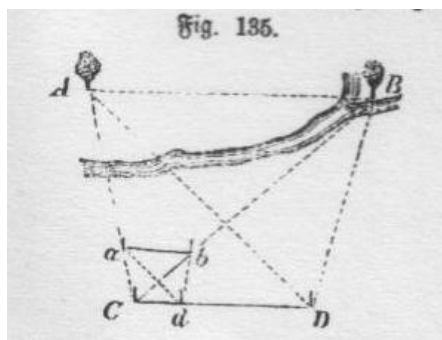
Strumenti per misurare e disegnare sono introdotti solo dopo che un concetto è stato esplorato con il disegno a mano libera.

Il lavoro proposto mira a dare all'allievo familiarità con gli argomenti. In un certo senso, ha qualcosa in comune con Ramus. E infatti Mocnik aumenta lentamente il livello di rigore.

Nella prima parte del testo, triangoli congruenti sono semplicemente triangoli che hanno tre lati uguali e tre angoli uguali. Mocnik suggerisce di disegnarli usando movimenti. Nella parte relativa alla *Grundlehre*, la prima dimostrazione è relativa all'uguaglianza di due triangoli che hanno tre lati uguali. Sono date indicazioni su come costruire, con riga e compasso, un triangolo uguale a un altro, e poi su come costruire un triangolo dati tre elementi.

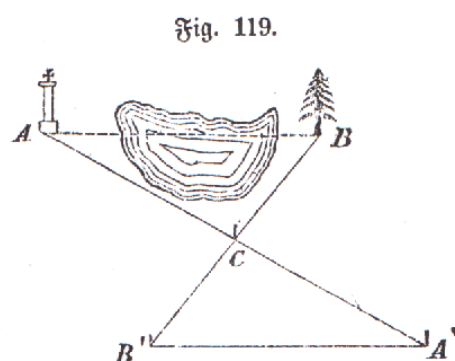
I teoremi sono sempre seguiti da esercizi che richiedono costruzioni. Troviamo applicazioni pratiche della congruenza dei triangoli:

Determinare la distanza dei due punti in un campo, se questa non può essere misurata direttamente per via di un ostacolo tra essi, ma è possibile misurare la distanza da entrambi di un terzo punto per entrambe ... (p. 93).



...e applicazioni

pratiche della similitudine (p.104): “determinare la distanza tra due punti inaccessibili” si devono fissare due punti C e D e misurare gli angoli CDB...



5. GEOMETRIA SPERIMENTALE E GEOMETRIA INTUITIVA

All'inizio del 20° secolo, in molti paesi si riconobbe la necessità di nuove metodologie per l'insegnamento della geometria. C'era una considerazione più ampia dei processi mentali del bambino e il riconoscimento che i programmi scolastici andrebbero costruiti su principi pedagogici (Young 1920, pp 1-8). Un corso di geometria introduttivo (propedeutico) basato su considerazioni intuitive o sperimentali e sul disegno prima di iniziare la trattazione della geometria razionale fu considerato essenziale. Un tale approccio intuitivo avrebbe permesso di introdurre l'insegnamento della geometria in ciò che oggi chiamiamo scuola media (Howson 1982, p 148). Queste idee avevano avuto un preludio nel 19° secolo, ma ricevettero ora un forte impulso internazionale, perché vi si impegnarono matematici importanti, quali Felix Klein, Emile Borel, Carlo Bourlet, John Perry, Charles Godfrey, Peter Treutlein.

In molti paesi furono elaborati nuovi programmi e libri di testo.

Tra questi, la *geometria sperimentale* di Perry ebbe la maggiore influenza a livello internazionale. Perry (1901) sottolineò il valore educativo di procedure *sperimentali* nel primo approccio alla geometria euclidea. Riteneva che una parte importante della geometria elementare dovesse essere assunta come primitiva e che la materia dovesse essere insegnata con riferimento alla sua utilità (oltre ad essere interessante per gli alunni) (Howson, 1982; Barbin & Menghini,

2013).

Il testo di geometria pratica di Joseph Harrison (1903) fu scritto in base alle proposte di Perry e presenta anche un apprezzamento di Perry stesso nella prefazione.

Harrison afferma, nella prefazione, che molte delle scuole britanniche sono dotate di laboratori in cui si possono effettuare "lavori sperimentali che coinvolgono misure quantitative", ed è l'ora di "riconoscere che la matematica elementare dovrebbe essere insegnato in relazione a tale tipo di lavoro".

Si noti che non si tratta di una geometria propedeutica, perché il corso non prosegue con la geometria razionale. Non sto proponendo questo testo come esempio positivo.

Harrison fornisce una dettagliata descrizione degli strumenti di misura e disegno e del loro uso. Presenta poi un problema iniziale analogo a quello di Clairaut, che richiede di determinare la larghezza di un fiume.

La figura mostra come la larghezza di un fiume potrebbe essere accertata da una persona su una sponda. Potrebbe selezionare e misurare una base BC. Poi notare qualche oggetto voluminoso A sull'altra sponda, e con un sestante misurare i due angoli ABC e ACB. Potrebbe quindi tracciare su un foglio il triangolo ABD, e misurarne larghezza (p. 61).

(Harrison non suggerisce di lavorare in scala; la sua soluzione non è molto pratica...)

Le "dimostrazioni" presenti nel testo sono del genere seguente:

"L'angolo inscritto in una semicirconferenza è un angolo retto":

Verifica: Disegna una qualunque semicirconferenza di diametro AA'. Traccia diversi angoli ABA' nella semicirconferenza. Verifica [con il goniometro] che in tutti i casi l'angolo ABA' è di 90°.

In questa *geometria pratica* del '900 c'è qualcosa che ricorda Fibonacci: se Fibonacci verifica i teoremi sostituendo assegnando delle misure numeriche ai segmenti coinvolti, Harrison li verifica misurando. L'uso di strumenti da disegno è centrale in Harrison; ma non troviamo nulla che possa essere considerato un stimolo per l'alunno-

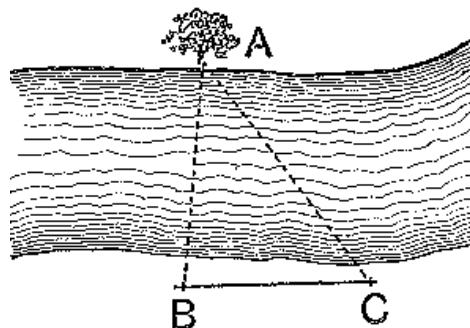
E' abbastanza ovvio che si trovarono presto obiezioni a questa metodologia.

Nonostante le critiche, un approccio precoce alla geometria intuitivo - sperimentale era considerato, come già detto, un buon aiuto per superare le difficoltà causate dalla deduzione logica del libro di testo di Euclide.

Nacquero così testi di geometria intuitiva o propedeutica dedicati alle classi inferiori, e furono influenzati non solo dalla cosiddetta geometria sperimentale, ma più in generale dall'intera corrente di testi di geometria pratica (Menghini, 2010).

Così troviamo il disegno a mano libera (Veronese, 1901), l'uso di strumenti da disegno (Borel, 1905), l'uguaglianza dei triangoli stabilita attraverso la possibilità di costruirli (come in Clairaut), la misura, l'uso dei numeri... Si aggiunge anche l'uso della piegatura della carta (vedi dopo) e del materiale concreto (già presente in Clairaut).

In quel periodo vengono (ri)proposte anche le trasformazioni geometriche (nate nel 19° secolo a partire dalle trasformazioni proiettive), perché corrispondono ad operazioni eseguibili in pratica e risultano utili per confrontare segmenti e figure, e anche per introdurre semplici concetti; per esempio le rette parallele possono essere introdotte tramite la simmetria centrale o la traslazione.



I metodi derivanti dalla geometria pratica non furono usati solo per la scuola dell'obbligo, come propedeutica. Ci furono libri di testo che riuscirono a creare un'alternativa alla geometria razionale classica con un maggior uso delle trasformazioni geometriche, un maggior ricorso alla misura (ovvero all'uso dei numeri), un maggiore riferimento a problemi concreti. Tali testi presentano nuove dimostrazioni (p. es. con l'uso delle trasformazioni) e nuovi teoremi (sulla composizione di trasformazioni, o sugli invarianti), e applicazioni di geometria pratica (problemi di agrimensura), l'uso di strumenti di disegno e misura, e soprattutto problemi di misura che lo studente doveva risolvere *attivamente*.

L'introduzione della geometria intuitiva in Italia agli inizi del '900.

In Italia l'esigenza di un approccio intuitivo alla geometria fu riconosciuta prima che in molti paesi Europei. Forse per via del fatto che nel 1867 i libri di Euclide erano stati introdotti per l'insegnamento della geometria nel Ginnasio-Liceo.

Nel 1881 *Geometria Intuitiva e disegno geometrico* vengono introdotti nei primi tre anni del ginnasio. La geometria intuitiva doveva

procurare ai giovanetti, con metodi facili e per quanto sia possibile con prove di fatto, le prime e più importanti nozioni della geometria, ... far desiderare lo studio razionale della stessa geometria, che è riservato al liceo.

Ma nel 1884, il ministro Coppino abolisce lo studio della geometria intuitiva nel ginnasio inferiore e anticipa la geometria razionale al 4° anno di ginnasio. La decisione è dovuta al matematico Eugenio Beltrami.

Scriva Beltrami (Relazione per l'insegnamento delle matematiche per il ginnasio ed il liceo, 1884):

la determinazione dei limiti e dell'indole di questo insegnamento non è suscettibile di forma assoluta e non è d'altronde supplita praticamente da una tradizione secolare.

...Una linea di separazione ... è ... alquanto indecisa e quindi variamente tracciata dagli intelligenti, perde ogni precisione e sfuma quasi compiutamente agli occhi degli insegnanti superficiali.

Tutto ciò non riguarda la Scuola Tecnica, dove dal 1867 si suggeriva un metodo grafico-intuitivo anche per produrre semplici deduzioni.

Nel 1900 la geometria intuitiva del ginnasio inferiore è ripristinata. Per evitare inconvenienti, il programma prevede soltanto *nozioni elementari riguardanti la terminologia delle figure geometriche più semplici, e le regole di calcolo per le lunghezze, aree e volumi, nonché i primi rudimenti di disegno geometrico*. Il nuovo programma

costituisce una ripetizione ed un ampliamento delle nozioni acquistate dagli alunni nelle scuole elementari ed è visto sotto l'aspetto pratico...

LIBRI DI TESTO AGLI INIZI DEL 1900:

Uno dei primi libri di testo di geometria intuitiva fu il testo di *Giuseppe Veronese* del 1901.

Nel suo testo, Veronese non cerca di spiegare teoremi, ma di spiegare gli *assiomi*. Fedele ai programmi, il suo scopo principale è quello di introdurre gli assiomi per anticipare quello che gli alunni vedranno in seguito. Nella scuola superiore gli assiomi non saranno "giustificati" intuitivamente. Veronese presenta dunque gli assiomi di incidenza e di ordinamento, ed "esagera" un po' presentando anche tutti gli assiomi di *congruenza* (cosa che oggi non si fa più neppure a

livello di scuola superiore). La parola assioma non è però mai menzionata e gli assiomi sono introdotti con esempi pratici:

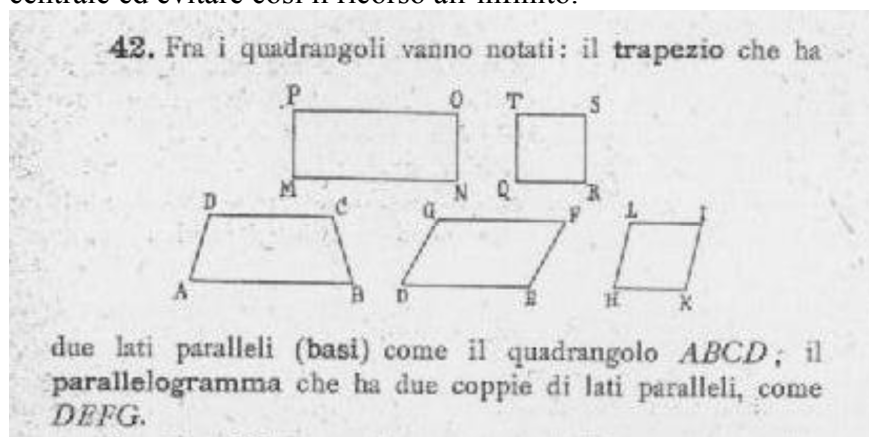
Un segmento di una retta non è congruente ad una sua parte, per esempio il segmento AB della figura non è congruente a CD . Ciò può essere verificato ad occhio, o con una striscia di carta o con il compasso.

$\underline{A \quad C \quad D \quad B}$

Indubbiamente tali assiomi non sono di per se difficili, ma appaiono ovvi ed è dunque difficile comprendere il valore dell'argomentazione portata a supporto.

Veronese elenca poi le definizioni elementari di particolari triangoli, quadrilateri e poligoni senza nominare alcuna proprietà di queste figure, ma facendo riferimento solo ad una figura (fig) Di fatto l'unico teorema che troviamo afferma che in una simmetria centrale a retta corrisponde retta.

Questo serve a Veronese per definire parallele due rette che si corrispondono in una simmetria centrale ed evitare così il ricorso all'infinito.

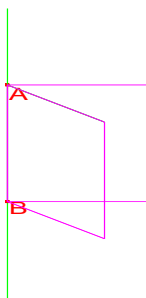


Nello stesso anno appare il testo di Giovanni Frattini.

Frattini illustra proprietà (di fatto *assiomi di incidenza*) per il piano e per lo spazio. Per esempio, che

per una retta e per un punto fuori di essa passa un piano, e non vi passa che quello.

Si consideri una retta AB e un punto O fuori di essa.



Per la retta si faccia mentalmente passare un piano, e poi s'immagini che una delle due bande nelle quali il piano è diviso dalla retta, giri intorno a la retta stessa, come un'immensa banderuola intorno all'asta. La banda, compiendo un giro, descriverà tutto lo spazio: passerà dunque a un certo istante per il punto O , ma non vi passerà che una volta sola.

Ma Frattini dà anche più peso, rispetto a Veronese, alle proprietà dei poligoni, con qualche semplice dimostrazione. Vediamo la caratteristica di alcune di esse:

In un piano per un punto a una retta si può condurre una perpendicolare, e non si può condurre che quella.

Si pieghi infatti il piano, quasi immenso foglio di carta, per ottenerne l'angolo retto; e si faccia in modo che, delle piegature, una segua la retta alla quale si vuol condurre la perpendicolare, e l'altra contenga il punto pel quale la perpendicolare deve passare. Quindi si spieghi il foglio, e vi si vedrà impressa la traccia della perpendicolare dal punto alla retta.

A loro volta le rette perpendicolari sono già state definite informalmente in base ancora a quanto si vede su un foglio piegato due volte.

Un'altra dimostrazione di Frattini è la seguente:

Le diagonali di un parallelogramma si dividono scambievolmente per metà.

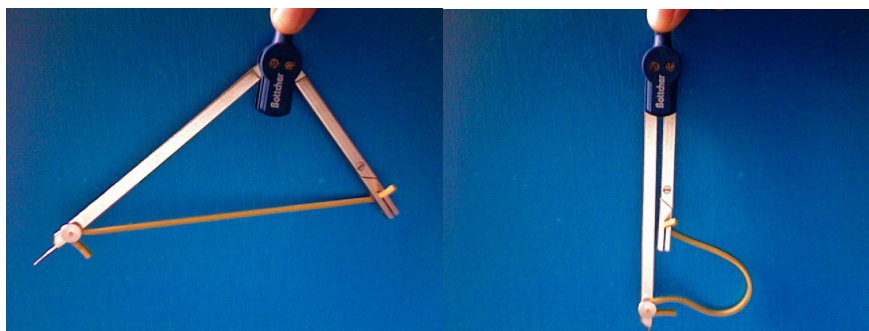
Se infatti il parallelogramma ... venisse staccato dal foglio del disegno, esso lascerebbe un vuoto che potrebbe essere colmato, o rimettendo il parallelogramma nella posizione di prima, o mettendo l'angolo A segnato con archetto sull'eguale C, il lato AD sull'eguale CB e il lato AB sull'eguale CD. In tal modo le diagonali delle figura, sebbene rovesciate, tornerebbero nella posizione di prima. Lo stesso farebbe il loro punto di incontro. E i due segmenti OC e OA si scambierebbero: segno che sono uguali..

Anche qui vediamo di fatto l'uso della simmetria centrale, usata – come spesso accade in quel periodo – in modo pratico, come strumento.

Interessante è ancora la seguente dimostrazione:

Ciascun lato di un triangolo è maggiore della differenza tra gli altri due.

S'immagini infatti un triangolo di cui due lati sieno rappresentati da aste unite a cerniera come le gambe di un compasso, e il terzo da un filo teso. Ravvicinando le due aste, fino a riportare la minore sulla maggiore, il filo si rallenta tra un estremo e l'altro della loro differenza. Questa differenza è dunque minore della lunghezza del filo, cioè del terzo lato del primitivo triangolo.



Non è chiaro, nel testo di Frattini, se egli ritenga che agli alunni debbano operare effettivamente con tagli della carta o piegature, o se chiedi loro solo di immaginare tale procedimento. Più probabilmente egli lascia la scelta all'insegnante; ma pensando alla scuola di allora, è forse più verosimile la seconda ipotesi. Però è facile realizzare ciò che Frattini suggerisce, come nella precedente dimostrazione.

Possiamo dire che Frattini vuole presentare alcune dimostrazioni con metodi pratici. Cerca di coinvolgere gli alunni “immaginando” materiali concreti.

Altri libri di testo

Costanzo e Negro (1905). Non ci sono argomentazioni di carattere sperimentale né dimostrazioni, ma troviamo spesso la frase “l’esperienza insegna e la geometria elementare dimostra” o “con la solita verifica sperimentale...”

Veronese (1907) aggiunge alcune verifiche pratiche (costruire un triangolo equilatero usando come compasso una striscia di carta lunga quanto la base), ma presenta anche vere e proprie dimostrazioni (per es. sull’uguaglianza degli angoli alterni interni).

Pisati (1907). “i risultati ottenuti sembrano dimostrare che nelle scuole medie inferiori voler prescindere interamente dall’indirizzo formale sarebbe grave errore. Le menti degli alunni nei primi anni sono di natura formaliste... L’insegnamento intuitivo della geometria non è poi più facile di quello formale”. Il testo presenta teoremi e dimostrazioni classiche.

Ulteriori sviluppi

1905, il Ministro Bianchi ricorda di rifuggire da esposizioni e dimostrazioni fatte in modo astratto, e di usare semplici ragionamenti induttivi per l’insegnamento delle verità richieste dal programma.

1923, riforma Gentile. L’insegnamento della geometria non deve avere altro scopo che quello di mantenere vivo il ricordo delle nozioni geometriche apprese nelle scuole elementari e di fissare bene la nomenclatura.

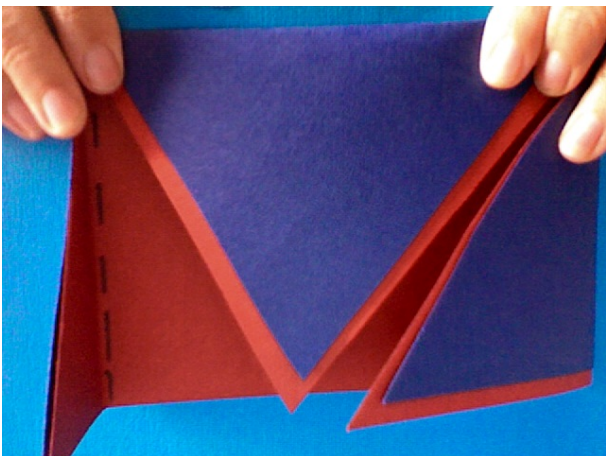
1940. Vengono unificati, nella *Scuola Media*, i trienni inferiori del ginnasio, della scuola tecnica e dell’istituto magistrale.

Per quanto riguarda la geometria le avvertenze suggeriscono di valorizzare le proprietà evidenti attraverso numerosi e convenienti esempi ed esercizi, che possano talvolta anche acquistare carattere dimostrativo...

Nel 1941 troviamo il testo di Ugo Amaldi.

Amaldi arresta completamente il processo di *razionalizzazione* della geometria. Misure e costruzioni geometriche sono integrate con gli altri argomenti. Nel testo vi sono molte figure a riferimenti alla vita reale.

Suggerisce di tagliare e piegare per verificare varie proprietà di triangoli e quadrilateri. Per conoscere la somma degli angoli di un triangolo, suggerisce di ripiegare le punte di un triangolo di carta e di affiancarle, verificando così che esse formano un angolo piatto:



Un altro metodo suggerito da Amaldi consiste nel tracciare sul pavimento una grande triangolo, prolungandone un po' i lati. Un ragazzo percorrerà con un braccio teso in avanti il lati del triangolo fino a ritrovarsi nella posizione di partenza. Avrà alla fine ruotato di 360° , corrispondenti alla somma dei tre angoli esterni. Insieme ai rispettivi angoli interni adiacenti daranno $3 \times 180^\circ = 540^\circ$. Togliendo i 360° degli angoli esterni, rimangono 180° corrispondenti alla somma degli angoli interni.

1945. Dopo la fine della guerra una Commissione nominata dai Governi Alleati formula dei programmi poi ripresi dal MPI ed estesi a tutto il territorio nazionale. Il programma per la scuola media torna all'aspetto pratico e sperimentale.

Nel 1948 appare il testo *Geometria Intuitiva* di Emma Castelnuovo.

La Castelnuovo procede sulla scia del testo di Amaldi, con disegni, figure, riferimenti alla realtà e integrazione delle costruzioni e delle misure. Il libro si rivolge allo studente, non solo per chiedergli di seguire un ragionamento o di fare una verifica, ma per porre problemi.

Emma suggerisce l'uso di "materiale povero", come il *metro snodabile*, che permette di confrontare, ad esempio, diagonali, angoli, area di rombo e quadrato (sull'opera di Emma Castelnuovo rimando agli altri interventi in questo convegno).

Conclusioni

Le sfide matematiche proposte nella geometria pratica del tardo Medio Evo sono entrate solo occasionalmente nei libri di testo nei periodi successivi, ma riconosciamo l'eredità della geometria pratica in una certa libertà nella scelta di problemi e metodi (inclusa l'intuizione).

Un'altra eredità è fornita dal cambio di significato del termine "pratico", da "utile per le applicazioni" a "che può essere eseguito concretamente"; un cambio avvenuto già verso la fine del Medio Evo all'interno della stessa geometria pratica. Questo è il significato che più ha valenza didattica.

La geometria pratica suggerisce metodologie per una conoscenza che "include il processo di apprendimento".

Da tutto il percorso precedente l'aspetto che appare più rilevante per un approccio intuitivo è il ruolo attivo dell'alunno. In diversi momenti i programmi hanno cercato di negare questo ruolo, ed esso è stato interpretato diversamente dai vari autori. Emma Castelnuovo ha aperto la strada all'uso dei materiali concreti.

Lo scopo di questo lavoro era di analizzare i modi di realizzazione di un insegnamento non razionale della geometria. Singole parti del lavoro *possono* essere trasformate dall'insegnante in lezioni per la classe (cosa che non avviene con gli altri lavori), quindi ci può essere più commistione (e confusione) con la storia della matematica *nell'insegnamento*. Lo scopo non è comunque fornire materiale diretto per la classe.

Altri due lavori riguardano la ricostruzione della nascita in Italia del liceo scientifico e il confronto con scuole ad orientamento scientifico (sezione fisico-matematica e liceo moderno). La presentazione ad una rivista internazionale ha portato poi ad

approfondire le difficoltà a far nascere un liceo di tipo *moderno* in Italia e il loro legame con le concezioni sul ruolo che la matematica deve svolgere nell'insegnamento.

3) Marchi M.V., Menghini M. (2011). *La matematica nel liceo scientifico*.

ARCHIMEDE, vol. LXII, p. 87-94;

Italian Debates About a Modern Curriculum in the First Half of the 20th Century.

The International Journal for the History of Mathematics Education

Presentato in parte al convegno DiFiMa di Torino.

Il curriculum di Matematica: un secolo di leggi e proposte

Si ripercorre la storia degli indirizzi classici, tecnici e scientifici nella scuola italiana. Attraverso i programmi e le relative discussioni si cerca di mettere in evidenza le finalità che si attribuivano ai percorsi soprattutto scientifici, nell'alternanza tra aspetti applicativi e culturali. Le posizioni dei matematici come Castelnuovo, o dei filosofi come Gentile, rispecchiano punti di vista che ancora troviamo nella scuola di oggi.

Il ruolo della matematica nella scuola alla fine dell'ottocento.

Come è noto il Liceo Scientifico nasce con la legge Gentile del 1923. E' però interessante lo studio di quanto è avvenuto prima e dopo questa data.

Alla fine dell'ottocento abbiamo due tipi di scuole superiori:

- Il Ginnasio - Liceo (2 anni di ginnasio superiore + 3anni di liceo), con 2+2+3+3+2 ore di matematica settimanali (nel 1867 erano ben di più).
- L'Istituto Tecnico, con 6 + 5 ore di matematica al biennio comune a tutte le sezioni, cui si aggiunge la Sezione fisico-matematica, con 5+5 ore settimanali.

È chiaro che si tratta di scuole con carattere molto diverso, una "culturale" (speculativa), di preparazione all'Università, l'altra tecnico-scientifica, con particolare attenzione alle applicazioni e alle professioni future.

Le caratteristiche sono ben definite già nella legge Coppino del 1867 (R.d. 10.10.1867). Per quanto riguarda l'istruzione classica leggiamo, nella prima pagina:

La matematica nelle scuole secondarie classiche non è da riguardarsi solo come un complesso di proposizioni o di teorie, utili in sé, delle quali i giovanetti debbano acquistare conoscenza per applicarle poi ai bisogni della vita; ma principalmente come un mezzo di coltura intellettuale, come una ginnastica del pensiero, diretta a svolgere la facoltà del raziocinio, e ad aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza.

Mentre il ruolo della matematica nell'istruzione tecnica è così descritto:

Il fine dell'insegnamento delle matematiche nelle scuole tecniche è quello di fornire ai giovanetti in tempo assai ristretto la maggior somma possibile di cognizioni utili per le applicazioni nelle arti e nei mestieri.

Per esempio, mentre al ginnasio-liceo si svolgono i Libri di Euclide, per l'insegnamento della geometria nelle scuole tecniche si consiglia un metodo grafico-intuitivo.

"Non importa che la via battuta per dimostrare una proposizione sia rigorosamente scientifica: importa bensì che gli scolari acquistino la cognizione di quella proposizione e la persuasione della sua verità" (r.d. 10-10-1867 n.1942).

Fa eccezione la sezione fisico-matematica dell'Istituto Tecnico, perché – essendo preparatoria all'iscrizione ai corsi di Ingegneria – non ha carattere professionalizzante, e infatti vi si raccomanda di “*rafforzare la facoltà del ragionamento*”, come avviene nel Liceo. La funzione preparatoria si riflette nei programmi di matematica, che contengono argomenti moderni, utilizzati nei corsi universitari.

Il Liceo Moderno

Il Ginnasio-Liceo Moderno è istituito nel 1911, a titolo sperimentale e solo in alcune province, come sezione del Liceo Classico. Esso differisce dal Liceo classico solo nelle ultime due classi del triennio. Il fine di preparare agli studi universitari, non necessariamente scientifici, si realizza attraverso lo studio del latino, delle scienze e delle lingue moderne. La matematica interessa in quanto linguaggio adatto a descrivere i fenomeni naturali e perciò i suoi programmi (1913), curati da Guido Castelnuovo, presentano significative novità. “Il rinnovamento delle matematiche del XVII secolo è legato al rifiorire delle scienze sperimentali. In quest'ottica” si dice “l'insegnante dovrà far notare come i concetti fondamentali della matematica moderna, quello di funzione in particolare, siano suggeriti dalle scienze d'osservazione e, precisati poi dalla matematica, abbiano a loro volta esercitato un benefico influsso sullo sviluppo di questa” (Castelnuovo, 1913).

La nozione di funzione e il calcolo infinitesimale sono introdotti per la prima volta in modo ufficiale proprio in questa scuola, con il suggerimento di usare un approccio sperimentale e induttivo, che completi il metodo deduttivo, e di armonizzare il corso con quello di fisica.

Ma in generale si rifiuta – nel liceo - l'aspetto *utile* della matematica. Per esempio Veronese, in ambito internazionale (Fehr 1911, p.464), dichiara che i matematici devono combattere contro il prevalere del materialismo utilitario nella scuola secondaria. Non è d'accordo con il matematico inglese John Perry, se vuole proporre il suo metodo anche nelle scuole che prevedono l'accesso all'Università. Il metodo proposto da Perry prevedeva infatti da una lato un approccio sperimentale alla geometria, dall'altro lo studio delle applicazioni della matematica. Secondo Veronese, la Matematica ha un valore educativo, deve “servire alla cultura dello spirito”.

Significativa è anche la posizione di opposizione degli stessi matematici (anche quelli della Mathesis) al precedente tentativo di riforma Orlando del 1904 (R.d. 11.11.1904)

Tale riforma rappresentava un primo passo verso un liceo moderno e consentiva la scelta, negli ultimi due anni di Liceo, tra greco e Matematica. Tale scelta viene accusata di snaturare il valore educativo del Liceo, e i professori di matematica (Consiglio Direttivo, 1909) considerano “inopportune e assurde” – scientificamente e didatticamente:

- la risoluzione delle equazioni di 2° grado in 1° Liceo separata dall'esposizione delle proprietà generali delle radici delle equazioni;
- la teoria dei logaritmi fatta scendere da quella delle progressioni;
- il calcolo o il cenno dei radicali prima dei numeri irrazionali;
- la teoria della misura senza quella degli irrazionali;

1923: la riforma Gentile e la nascita del Liceo Scientifico

Giovanni Gentile riorganizza l'istruzione secondaria secondo gli stessi principi di Casati: i Licei, in cui prevale la cultura classica, preparano all'università, mentre gli Istituti Tecnici sono esclusivamente professionalizzanti. Così laconicamente sono caratterizzati i vari indirizzi (R.d. 31 dicembre 1922, n. 1679)

Art. 39 – l'Istruzione classica ha per fine di preparare alle Università e agli Studi superiori.

Art. 60 – I Licei scientifici hanno per fine di sviluppare ed approfondire l'istruzione dei giovani che aspirino agli studi universitari nelle Facoltà di Scienze e di Medicina e Chirurgia, con particolare riguardo alla cultura scientifica.

Art. 45 – L'istruzione tecnica ha per fine di preparare all'esercizio di alcune professioni.

Vengono quindi soppressi la sezione fisico-matematica, per il suo carattere “*ibrido*” e la “*discorde duplicità*” dei fini (Gentile, 1923), e il Liceo Moderno, perché ogni scuola deve “*corrispondere ad una cultura ben definita*”. Al loro posto è istituito il Liceo Scientifico, “*un liceo speciale in cui i bisogni della cultura scientifica abbiano la loro piena soddisfazione*” (Gentile, 1925). In esso la matematica non avrà lo scopo di diffondere una moderna cultura scientifica (come nel Liceo Moderno), né quello di preparare specificatamente alle facoltà scientifiche (come nella sezione fisico-matematica), ma dovrà sviluppare, come scrive Gentile, “*l'attività analitica e sistematica dello spirito*” (Gentile, 1902).

Anche il Liceo Scientifico ha però un carattere “*ibrido*”, infatti, a differenza delle altre scuole, non ha un corso preparatorio. Vi si può accedere dopo quattro anni dall'esame di licenza elementare, come avviene per l'Istituto Tecnico, che ha un corso inferiore quadriennale. Ha le stesse materie del Liceo Classico ad eccezione del greco, ma ha durata quadriennale come l'Istituto Tecnico e condivide con questo il programma di matematica di ammissione alla prima classe, con l'unica precisazione che, avendo il liceo un carattere più culturale, si “*richiederà una più profonda e seria capacità mentale*”.

La collaborazione con la comunità matematica riunita nella Mathesis è problematica, perché i matematici non vogliono prescindere dai programmi del 1918¹, di cui Gentile non condivide l'impostazione di fondo. E infatti, Castelnuovo rifiuta la collaborazione e al suo posto viene incaricato Gaetano Scorza.

Le opinioni di Scorza sul ruolo della matematica nella scuola sono antitetici a quelle di Vailati e di Castelnuovo. “*Il suo miglior titolo [...] per essere inclusa tra le materie d'insegnamento*” deve essere cercato, egli dice, “*sul terreno etico*”. Infatti “*chi ha inteso una dimostrazione [...] ha vivo il senso di aver raggiunto una verità in assoluta pienezza di persuasione [...] di non aver prestato il suo consenso ad altra autorità che a quella del suo pensiero*”. In quest'ottica che ignora ogni esigenza didattica, la matematica può “*prescindere dalle interpretazioni concrete delle sue teorie, [...] perfino da quelle [...] che le hanno fatte sorgere*” (Scorza, 1921).

A chi sostiene che la matematica così trattata non abitua all'osservazione e alla sperimentazione, risponde che “*osservare non è solo osservare stelle come fanno gli astronomi, animali, piante o minerali, come i naturalisti; e che sperimentare non è soltanto usar storte, alambicchi o fiale, macchine termiche o macchine elettriche. Anche numeri e figure possono essere oggetto di osservazione e di esperimento.*”

Infine, alla critica che nell'insegnamento medio non siano portati i procedimenti pieni d'interesse e di vita che hanno condotto alle scoperte, ma solo la noiosa catena di definizioni, enunciati, postulati e teoremi, risponde che è vero “*che nelle nostre scuole si è adoperato assai più spesso un metodo d'insegnamento passivo e dogmatico, che un metodo attivo o euristico*”, ma questo è da attribuire ai cattivi insegnanti e a ragioni estrinseche, quali la scarsità delle ore dedicate alla materia. Non molto, quindi, si può fare se le autorità scolastiche dimostrano di non attribuire importanza alla matematica assegnandole poche ore proprio nei licei, le scuole che accolgono una materia esclusivamente per il suo valore formativo (Scorza, 1921).

Il nuovo ruolo della matematica rende non solo possibili, ma addirittura “*opportune [...] notevoli riduzioni nei [...] programmi*” (Gentile, 1902). Nel Liceo Scientifico alla matematica sono dedicate

¹ Si tratta dei programmi elaborati dall'Ispettorato centrale dell'Istruzione media nel 1918; proposta di riordino dei programmi di tutte le scuole secondarie curata dal Direttore Generale Vittorio Fiorini, già membro della *Commissione Reale*. Non si suggeriscono modifiche per il Liceo Moderno, ma si raccolgono le indicazioni della *Commissione Reale* anche per la sezione fisico-matematica.

perciò 5 ore nella prima classe e solo 3 nelle tre successive, a fronte delle 4 per ogni classe attribuite al latino.

Per garantire la libertà d'insegnamento i piani di studio non prevedono una scansione annuale, ma forniscono gli argomenti del conclusivo esame di Stato.

Il programma di matematica è suddiviso in due parti e queste in più punti, apparentemente indipendenti, ottenuti smembrando sezioni omogenee dei precedenti programmi.

La conoscenza delle *“teorie”* di carattere *“algoritmico”*, contenute nella prima parte, si dimostra risolvendo esercizi che richiedono solo *“l'applicazione immediata di formule e teoremi fondamentali”*. Si dà prova della preparazione sulle teorie contenute nella seconda, che sono quelle *“che meglio si prestano a saggiare la capacità del candidato a comprendere e far sua una rigorosa sistemazione deduttiva”*, indicando *“l'andamento generale della loro sistemazione logica”* ed esponendo *“le dimostrazioni dei teoremi che ad esse si riferiscono”* (R.d. 6.5.1923).

Così i logaritmi, definiti attraverso le progressioni aritmetiche e geometriche, compaiono, con l'uso delle tavole, nella parte algoritmica. Le equazioni esponenziali, che ne sono la naturale applicazione, sono presenti invece solo nella parte teorica, con i numeri reali. Nel Liceo Moderno, dove si erano introdotte le potenze a esponente reale, i logaritmi erano definiti a partire dalle equazioni esponenziali. Nell'Istituto Tecnico, definiti attraverso le progressioni, erano poi applicati al calcolo dell'interesse semplice e composto.

Nella parte algoritmica compaiono la trigonometria e i triangoli sferici che nell'Istituto Tecnico erano applicati alla navigazione. Ora nessun riferimento, teorico o applicativo, ne giustifica la presenza.

L'aritmetica (limitata ora ai numeri naturali) trattata più ampiamente che nei precedenti programmi, ma in forma facoltativa, comprende la funzione di Eulero e il teorema di Fermat.

Viene così soppressa l'aritmetica razionale (forse giustamente ...).

Facoltativi sono anche i numeri reali, introdotti con le *“operazioni su di essi”* e quindi in modo quasi *“assiomatico”*, come avveniva nella sezione fisico-matematica.

L'interesse del Fascismo per la cultura tecnica e scientifica porta, uscito Gentile dal governo, a modificare i programmi di matematica tenendo presenti quelli del 1918.

Nel 1925 (Ministro Fedele, R.d. 31-12, n. 2473) sono ancora membri del Consiglio Superiore Luigi Bianchi e Scorza, nominati da Gentile nel 1923. In questo anno s'introducono, come nel Liceo Moderno, le coordinate cartesiane e la rappresentazione grafica delle funzioni indipendentemente dal calcolo differenziale. Anche l'interpretazione fisica e meccanica di alcune semplici funzioni elementari è suggerita prima del loro studio con limiti e derivate. Tutte le nozioni del calcolo infinitesimale sono associate al loro significato geometrico o fisico. Le equazioni esponenziali sono collegate ai logaritmi, mentre meno evidente è il legame tra questi e le progressioni. Resta comunque l'uso delle tavole.

Più che nel Liceo Moderno, la costruzione dei numeri reali è collegata alle proporzioni tra grandezze geometriche. Segue alla costruzione di decagono e pentadecagono e alla teoria della misura.

Nel 1933 (Ministro Ercole, R.d. 29-6, n. 892) la parte algoritmica viene posposta a quella teorica, di cui si evidenzia la maggior importanza. Si raccomanda che i vari argomenti siano trattati in modo semplice e armonico, evitando lo sviluppo fine a se stesso di alcuni di essi. La trigonometria sferica, limitata all'eccesso dei triangoli, è associata nella parte teorica ai solidi di rotazione e, come già questi, resa facoltativa. L'aritmetica è ulteriormente ridotta (già nel 1925 si era eliminato il teorema di Fermat), restano ora solo gli argomenti tradizionali. I numeri reali precedono le proporzioni e si suggeriscono *“cenni”* sulle loro operazioni, ma sono sempre derivati dalla misura di grandezze.

Nel 1936 (Ministro De Vecchi, R.d. 7-5, n. 762) si redigono i programmi che con poche, ma non insignificanti, modifiche sono rimasti in vigore fino al 2010.

La struttura di questi programmi è nuova: sono suddivisi per anno e non contengono la distinzione tra argomenti “algoritmici” e “teorici”. Il loro contenuto ha un carattere più “tecnico” di quelli precedenti: in particolare, s’introducono i numeri reali come decimali e compaiono elementi di probabilità, già presenti nella sezione fisico-matematica.

L’eliminazione della divisione fra “matematica che fa ragionare” e “matematica per la quale basta aver raggiunto una certa abilità di calcolo” è senza dubbio positiva, ma purtroppo tardiva. La distinzione gentiliana è rimasta nell’immagine più diffusa della matematica.

Nel 1936 i numeri reali vengono introdotti subito, al primo anno, come numeri decimali. Questo fatto, unitamente alla scansione temporale indicata, rende chiaro che la geometria analitica può essere introdotta anche senza aver prima trattato le proporzioni tra grandezze. Infatti, nello stesso anno si introducono le coordinate cartesiane e lo studio delle funzioni. Ovviamente si parla anche – in un successivo paragrafo ancora relativo al primo anno - del confronto fra grandezze come introduzione alla similitudine. Purtroppo anche questa presa di posizione è tardiva e non entrerà nelle consuetudini italiane; la maggior parte dei libri di testo continuerà ad introdurre la geometria analitica solo dopo la completa trattazione della geometria euclidea (ovvero nell’attuale terzo anno).

Nonostante Severi sia ancora membro del Consiglio Superiore, non è tra i convocati alla riunione in cui si discutono i programmi, che, per la matematica, vengono presentati da Enrico Fermi.

Infatti nel programma non compaiono più alcuni punti che caratterizzavano la sua posizione.

In particolare i reali non sono introdotti *geometricamente*.

S’intravede anche un riferimento ai programmi del 1918 per la sezione fisico-matematica nella raccomandazione ad utilizzare gli strumenti “superiori”. *“Così le nozioni di calcolo integrale faranno ritrovare con metodi semplici regole già apprese per il calcolo di aree e volumi, e la conoscenza delle derivate servirà a chiarire concetti fisici e a risolvere numerose questioni”*.

Si noti comunque che, dal 23 in poi, le indicazioni nei programmi tendono a ridursi se non proprio a scomparire.

Nel 1937 (Ministro Bottai, R.D. 10-6, n. 876) si specificano gli argomenti della prova orale dell’esame di Stato, pur lasciando invariati i programmi del 1936. Compare per la prima volta la sezione aurea e sembra si voglia suggerire di non abbandonare l’approccio geometrico alla costruzione dei numeri reali quando si scrive *“numero decimale come rapporto di due grandezze”*. Si fa un passo indietro, la maggior parte degli argomenti proposti per la maturità riguarda la geometria.

I “piani di studio del 1944”

Nel 1940 (Ministro Bottai, Legge 1.7.1940), nell’ambito di una riforma più ampia, interrotta dallo scoppio della guerra, i corsi inferiori del Ginnasio e dell’Istituto Tecnico confluiscono nella neo-istituita Scuola media triennale. Il Liceo Scientifico si trova così ad avere durata inferiore di un anno a quella del Classico².

Nel 1945 viene istituito un quinto anno, ma nessun intervento ufficiale disciplina i piani di studio del nuovo Liceo. In alcune circolari ministeriali del 1945, successive all’istituzione della classe di collegamento, si fa riferimento a quelli del 1936 e a quelli concordati con la *Sottocommissione Alleata dell’Educazione* e distribuiti a cura della stessa nel 1944. Nel decreto del 1952, che riforma l’esame di maturità, si rimanda, per gli argomenti, a future ordinanze.

I piani di studio in circolazione, editi da tipografie private, recano la dicitura “Ufficiali”, ma non fanno riferimento ad alcun atto normativo.

Il programma delle ultime quattro classi è quello del 1936, con piccole modifiche che sembrano tener conto dei programmi del 1937. Le progressioni sono ridotte a “cenni”, sono scomparsi la

² <http://www.liceo-classico.it/wordpress/wp-content/uploads/2014/04/1940-1945.pdf>

distanza tra rette sghembe, ogni accenno alla geometria sferica e il calcolo delle probabilità. Si sono eliminate anche le indicazioni del 1936.

In alcune edizioni compare una breve ma significativa indicazione di carattere metodologico, in cui si afferma, tra l'altro

“Il metodo d'insegnamento non deve essere esclusivamente razionale, anzi si deve dar spazio all'intuizione, al senso comune, alla realtà fisica, all'origine psicologica e storica delle teorie”.

Come abbiamo visto, i programmi in vigore fino al 2010, e tutt'ora in vigore nell'ultima classe delle scuole superiori, non sono stati approvati con una legge, ma sono stati distribuiti da case editrici e non sono tra loro uniformi. Poche scuole li hanno, pochi insegnanti li conoscono. Eppure si sente dire è/non è nei programmi. Non c'è niente nei programmi che giustifichi l'impostazione tradizionale del liceo scientifico, in particolare la famosa discussione parametrica, né il ritardo nell'introduzione della geometria analitica. Non c'è neppure scritto che la geometria deve esser trattata in modo razionale.

Un'altra osservazione: Gentile è stato ministro solo due anni. Perché gli si attribuiscono tante colpe? E' vero, ha fatto dei programmi brutti, non piacevano neppure al fascismo; ma sono stati cambiati dopo due anni. E nessuno se ne è accorto.

Il problema è che Gentile ha incarnato un'idea diffusa, diffusa anche tra diversi matematici e insegnanti di matematica, e che risale ai programmi del 1867 (cui per esempio Castelnuovo attribuisce la massima colpa). È l'inerzia di queste idee e della tradizione, portata avanti anche da molti libri di testo, che ha impedito una rilettura dei programmi e che rischia di vanificare anche gli sforzi per attuare proficuamente i nuovi.

Indicazioni Nazionali del 2010 (<http://nuovilicei.indire.it>).

Le indicazioni nazionali (<http://nuovilicei.indire.it>) sono poco programmi, e molte indicazioni. Da un lato questo è positivo; è da molto tempo (dal 1913) che non si avevano ufficialmente indicazioni complete su come andavano interpretati i programmi (non parliamo dei programmi PNI, che erano sperimentali).

Queste Indicazioni non sono Gentiliane. Il concetto di modello matematico è una buona mediazione tra teoria e pratica. E anche il contesto storico lo è.

Leggiamo cosa dicono sul ruolo della matematica nel Liceo scientifico:

Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale.

Questa parte richiama la visione della matematica presente nell'introduzione ai programmi del Liceo Moderno.

Un'accusa che si può però fare a queste indicazioni, oltre alla mancanza di una chiara descrizione dei programmi – è di essere poco “didattici”. In questo sono ben diversi dalle avvertenze del Liceo moderno, che accompagnavano l'insegnante nello svolgimento dei nuovi argomenti. Vediamo ad esempio il seguente passaggio:

Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.

Qui si presenta una teoria senza dare alcuna indicazione pratica sul raggiungimento di questi obiettivi.

Ritengo importante che gli insegnanti conoscano la storia dei vari tentativi di modernizzare i programmi, e chiariscano quale idea della matematica ha portato e porta ai vari argomenti.

Devono conoscere i programmi e hanno possibilità di decidere che tipo di matematica insegnare.