

**“La storia della matematica nella formazione degli insegnanti” o, meglio,  
“La storia della matematica: dalla formazione degli insegnanti alle  
applicazioni didattiche”**

**Paola Gario**

Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques"  
Università degli Studi di Milano  
paola.gario@unimi.it

**P. 1**

La formazione iniziale dell'insegnante: formazione disciplinare vs formazione professionale. Dal modello SSIS al modello LM + TFA. Qualche riflessione sull'esperienza del primo (e per ora unico ciclo) di TFA transitorio.

**P. 2**

Cultura storica e cultura storica per l'insegnamento. Il caso della geometria. Leggere gli “Elementi” di Euclide da diversi punti di vista. La storia e le scelte dell'insegnante.

**P. 3**

L'uso della storia in classe: qualche riflessione sulle sue funzioni alla luce dell'esperienza di un laboratorio per l'avvio alla dimostrazione (cfr. 6).

**Rimini, gennaio 2014**

## Bibliografia essenziale indicata

1. Gario P., I corsi di Guido Castelnuovo per la formazione degli insegnanti (Pubblicazioni del Centro Studi Enriques; 6). - In: Da Casati a Gentile: momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia / M-T Borgato, A. Brigaglia, S. Di Sieno, F. Furinghetti, P. Gario, L. Giacardi, L. Pepe, E. Luciano, O. Faracovi; [a cura di] L. Giacardi. - Lugano: Agorà, 2006. - ISBN 88-606-7008-X. - pp. 239-268
2. Gario P. , Quali corsi per la formazione del docente di matematica? I congressi dei professori di matematica- In: Bollettino della Unione matematica italiana. A. - ISSN 0392-4033. - 9-A:1(2006), pp. 483-497.
3. Gario P., Quali corsi per il futuro insegnante? L'opera di Klein e la sua influenza in Italia - In: Bollettino della Unione matematica italiana. A. - ISSN 0392-4033. - 9-A:2(2006), pp. 483-498.
4. Gario P., Percorsi di lettura attraverso i primi libri degli "Elementi" di Euclide: introduzione - In: Insegnamento della matematica e delle scienze integrate. - ISSN 1123-7570. - 32B:2(2009 Apr), pp. 109-132.
5. Gario P., Percorsi di lettura attraverso i primi quattro libri degli Elementi di Euclide: teoria delle parallele, teoria dell'equivalenza e poligoni regolari - In: Insegnamento della matematica e delle scienze integrate. - ISSN 1123-7570. - 32B:4(2009), pp. 455-472.
6. La dimostrazione in contesto geometrico [Text] / P. Gario, F. Giannoli, R. Ambrosetti; [a cura di] P. Gario, F. Giannoli, R. Ambrosetti. - Disco ottico. - Milano: Dipartimento di Matematica, 2009. - ISBN 978889043613.

Estratto da:

**Formazione dell'insegnante e  
insegnamento della matematica**

La versione integrale è pubblicata sulla pagina web del Centro Interdipartimentale di Ricerca e di Formazione permanente dell'Università di Roma Tor Vergata, <http://crf.uniroma2.it/archives/1913>



# La tabella riassume ed evidenzia l'esistenza di scuole specifiche per la formazione degli insegnanti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1861								S N S	1870
		S S	S M						1880
									1890
									1900
									1910
									1920
									1930
									1940
									1950
									1960
									1970
									1980
									1990
								SSIS	2000
									2010
2011	TFA transitorio								

L'area verde copre solo 1/3 degli oltre 150 dello Stato unitario! Essa si estende tra l'ultimo quarto del 1800 e il primo ventennio del 1900 e occorre aspettare la fine di questo secolo per ritrovarla.

**NO**

**SI**

**Sospesa**

La tabella evidenzia il lungo periodo di esistenza delle Scuole di Magistero (SM), scuole biennali, specifiche per la formazione degli insegnanti della scuola di II grado

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1861								S N S	1870
		S S	S M						1880
									1890
									1900
									1910
									1920
									1930
									1940
									1950
									1960
									1970
									1980
									1990
									2000
									2010
2011	TFA transitorio								

Sorgono spontanee le domande:  
**come spiegare la scomparsa delle SM**  
**dopo oltre 40 anni di esistenza?**  
 e la mancanza per buona parte del '900  
 di scuole specifiche di formazione?

Nella parte che segue (fino  
 alla slide 41) si ripercorre la  
 storia delle SM e si cerca  
 di dare una risposta a  
 queste due domande.

NO

SI

Sospesa



# 1859 Legge Casati

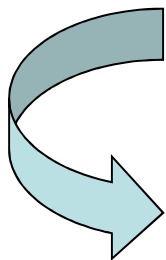
## Le due finalità dell'istruzione universitaria

*Del fine dell'Istruzione superiore e degli Stabilimento in cui è data (Art. 47).*

**L'Istruzione superiore ha per fine**

**di indirizzare la gioventù, già fornita delle necessarie cognizioni generali, nelle **carriere sì pubbliche che private** in cui si richiede la preparazione di accurati studii speciali,**

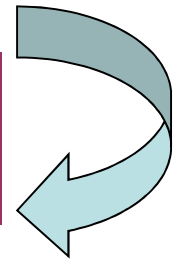
**e di mantenere ed accrescere nelle diverse parti dello Stato la **cultura scientifica e letteraria.****



**formazione  
professionale**

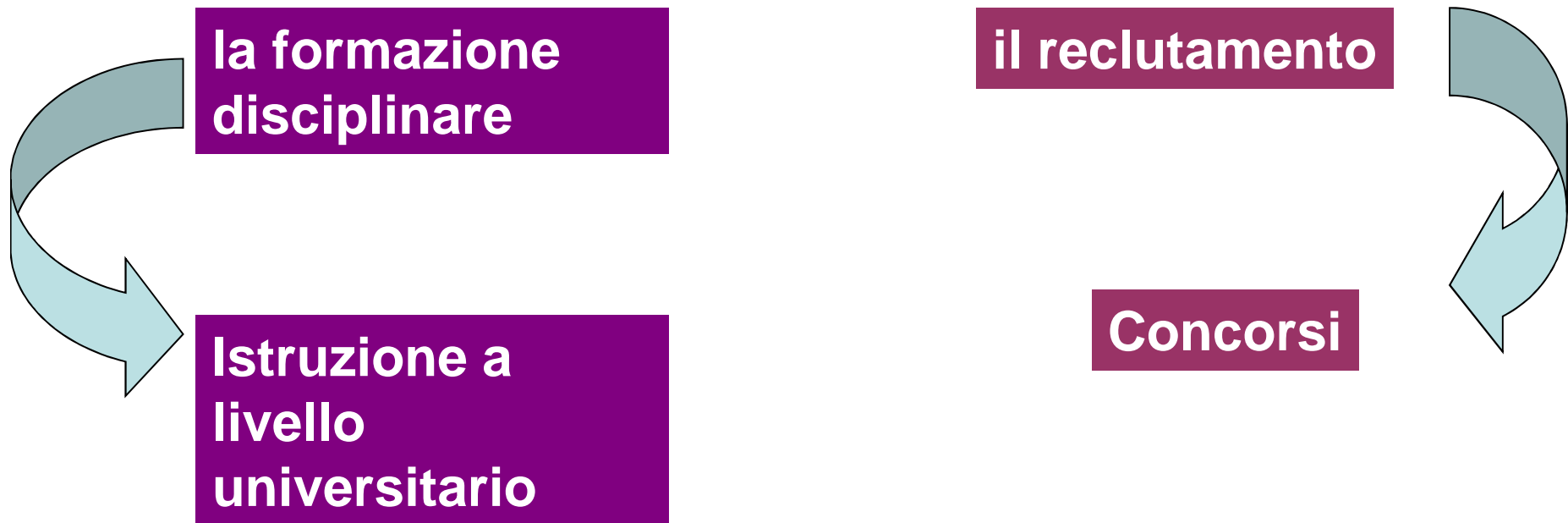


**formazione  
culturale**



# 1859 Legge Casati

La figura giuridica dell'insegnante



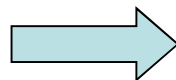
# La formazione professionale del docente 1860 - 1873

**Il progetto delle  
Scuole Normali Superiori**  
(De Sanctis-1861)

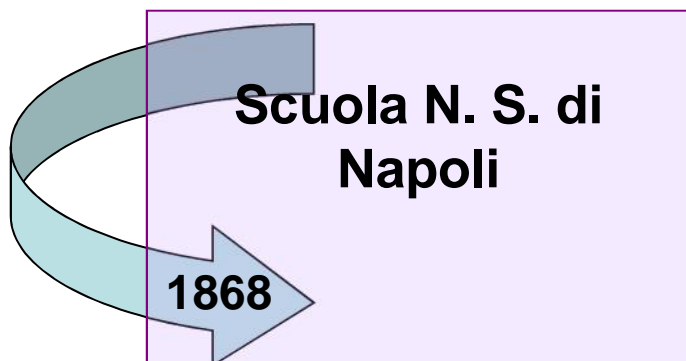


***La Scuola N. S. di Pisa***  
(Matteucci-1862)

**La formazione in servizio**  
(Matteucci-1862)



***Le Conferenze pedagogiche  
straordinarie***  
(Matteucci-1862)





# Nascita delle Scuole di Magistero 1874 - 1876

## Il duplice ufficio

La collocazione della  
struttura formativa



Scuole annesse alle Facoltà di  
Lettere e di Scienze MFN

La durata



Biennale

La struttura dei curricula  
**consecutivo - simultaneo**



Modello simultaneo: accesso  
per concorso dopo il 1° biennio

Gli studi di magistero consistono, oltre che in quelli richiesti per la corrispondente laurea, anche in **esercitazioni speciali** dirette a rendere gli studenti non solo **atti alla ricerca ed alla esposizione originale delle dottrine scientifiche**, ma anche **esperti dei metodi e dei limiti dell'insegnamento**. (Art. 25)

# Scuole di Magistero

## Il regolamento Boselli del 1889

La durata

Biennale



Quadriennale per  
alcune sezioni

[Sezione di  
matematica.doc](#)

La Scuola di Magistero ha per fine **la preparazione pratica all'insegnamento secondario** (**classico, tecnico, normale**) mediante **esercitazioni** su le materie appartenenti ad alcuna delle discipline proprie della Facoltà a cui è annessa.

Queste esercitazioni, le quali devono esser fatte nella Scuola di Magistero con orario speciale e distintamente dalle lezioni pubbliche, consistono **nell'esame dei postulati della scienza, in lavori scritti e in lezioni degli studenti sopra soggetti** scelti da loro con l'approvazione del professore, o indicati da questo. Vi sarà compresa **la discussione delle regole didattiche** da applicarsi alle suddette materie nell'insegnamento secondario. (Art. 2)

**Gli studenti di tutte le Sezioni** (della Facoltà di Scienze) **devono frequentare, almeno per un anno, nella Facoltà di lettere le lezioni pubbliche e le conferenze di letteratura italiana.**

(Art. 9)

SIC!

# Scuola di Magistero

## Il regolamento Villari del 1891



La Scuola di Magistero ha per fine **la preparazione pratica all'insegnamento secondario (classico, tecnico, normale)**.  
(BOSELLI, Art. 2)



Le Scuole di Magistero hanno per fine di rendere gli **alunni esperti nell'arte d'insegnare le discipline** che, secondo le vigenti leggi, sono insegnate nei Licei, nei Ginnasi, nelle Scuole tecniche e normali e negli Istituti tecnici. (VILLARI, Art.2)

### Scopo delle Conferenze

Le conferenze (...) hanno uno scopo strettamente didattico. In esse il professore dovrà quindi:

1° esporre il metodo da seguirsi nelle Scuole secondarie per l'insegnamento della materia a lui affidata, determinandone l'estensione e i limiti;

2° fare eseguire agli alunni opportune esercitazioni che valgano ad abituarli alla applicazione del metodo insegnato. Fra queste esercitazioni sono anche saggi di lezioni date nelle Scuole di magistero, e, quando si possa, anche in una Scuola secondaria;

3° far conoscere ed esaminare i migliori libri di testo per le Scuole secondarie. (Art. 6)

Le conferenze di didattica generale, nelle Scuole in cui vengono istituite, sono obbligatorie per tutti gli studenti. (Art. 13)

# Scuola di Magistero: le innovazioni del regolamento Nasi del 1902

<b>Scopi</b>	<i>... preparazione pedagogica all'insegnamento</i>	<b>art.</b> 1
<b>Durata</b>	2 anni: sono ammessi gli studenti del 4° anno	3
<b>Tirocinio</b>	E' istituita e regolamentata l'attività presso le Scuole; è previsto il <i>direttore di tirocinio</i> .	4, 6, 14
<b>Rapporto Scuola-Università</b>	E' valorizzato il ruolo della Scuola anche con la presenza, nel Consiglio e nelle Commissioni d'esame finale, di docenti di Scuola secondaria.	4, 6, 14
<b>Aree formative</b>	Sono individuati 4 distinti ambiti.	12
<b>Area comune</b>	E' istituita l'area comune presso la Facoltà di Lettere obbligatoria per tutte le sezioni	12
<b>Lingua straniera</b>	E' previsto l'accertamento conoscenza l.s.	18
<b>Tesi e esame finale</b>	E' valorizzata la tesi e l'esame finale.	16,19

Gli insegnamenti della Scuola di Magistero si svolgono in **conferenze generali comuni** alle due scuole di magistero, di scienze e lettere, in **conferenze speciali alle singole sezioni**, in **esercitazioni orali e pratiche**, in **discussioni**, nell' **assistentato o tirocinio**.

**I 4 ambiti  
formativi**

[NASI- AREA COMUNE.doc](#)

[NASI\\_tirocinio.doc](#)

# La restaurazione del regolamento Orlando del 1903

Le Scuole di Magistero annesse alle facoltà di filosofia e lettere e di scienze fisiche, matematiche e naturali hanno per fine di rendere gli alunni esperti nell'arte di insegnare le discipline filosofiche, letterarie e scientifiche nei licei, nei ginnasi, nelle scuole tecniche e normali e negli istituti tecnici. **(ORLANDO, Art. 1)**

~~Essa dovrà considerarsi come preparazione pedagogica all'insegnamento che si impartisce nelle scuole secondarie. (NASI, Art. 1)~~

Gli alunni di tutti le sezioni delle due scuole assisteranno alle conferenze di pedagogia e a quelle di legislazione scolastica comparata, **dove esistono**. Art. 15

**Quando le condizioni lo consentano**, potrà il Consiglio della scuola, d'accordo col capo d'uno degli istituti d'istruzione secondaria classica o tecnica o normale della città in cui ha sede l'Università, ordinare che gli alunni della Scuola di Magistero frequentino una determinata scuola secondaria e si esercitino sotto la direzione dell'insegnante, nella correzione dei temi e nella pratica dell'insegnamento. Art. 16.



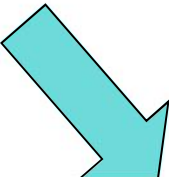
# Le finalità delle Scuole di Magistero: 1889-1903

**... la preparazione pratica all'insegnamento secondario** (classico, tecnico, normale)

BOSELLI, Art. 2, 1889

**... rendere gli alunni esperti nell'arte d'insegnare le discipline** che, secondo le vigenti leggi, sono insegnate nei Licei, nei Ginnasi, nelle Scuole tecniche e normali e negli Istituti tecnici.

VILLARI, Art. 2, 1892



**... rendere gli alunni esperti nell'arte di insegnare** le discipline scientifiche che, secondo le vigenti leggi, sono prescritte per le scuole secondarie classiche, tecniche, normali e complementari. Essa **dovrà considerarsi come preparazione pedagogica all'insegnamento** che si impartisce nelle scuole secondarie.

NASI, Art. 1, 1902

**... rendere gli alunni esperti nell'arte di insegnare le discipline** filosofiche, letterarie e scientifiche nei licei, nei ginnasi, nelle scuole tecniche e normali e negli istituti tecnici.

ORLANDO, Art. 1, 1903

# I condizionamenti interni

**La questione delle due finalità  
dell'istruzione universitaria**

**La funzione della pedagogia**

# I condizionamenti esterni

## **Ostacoli**

### **sociali e economici**

L'eredità delle scuole pre-unitarie

La necessità urgente di ampliare il corpo docente

La professione poco attraente sul piano economico

I pochi laureati prodotti dalle università

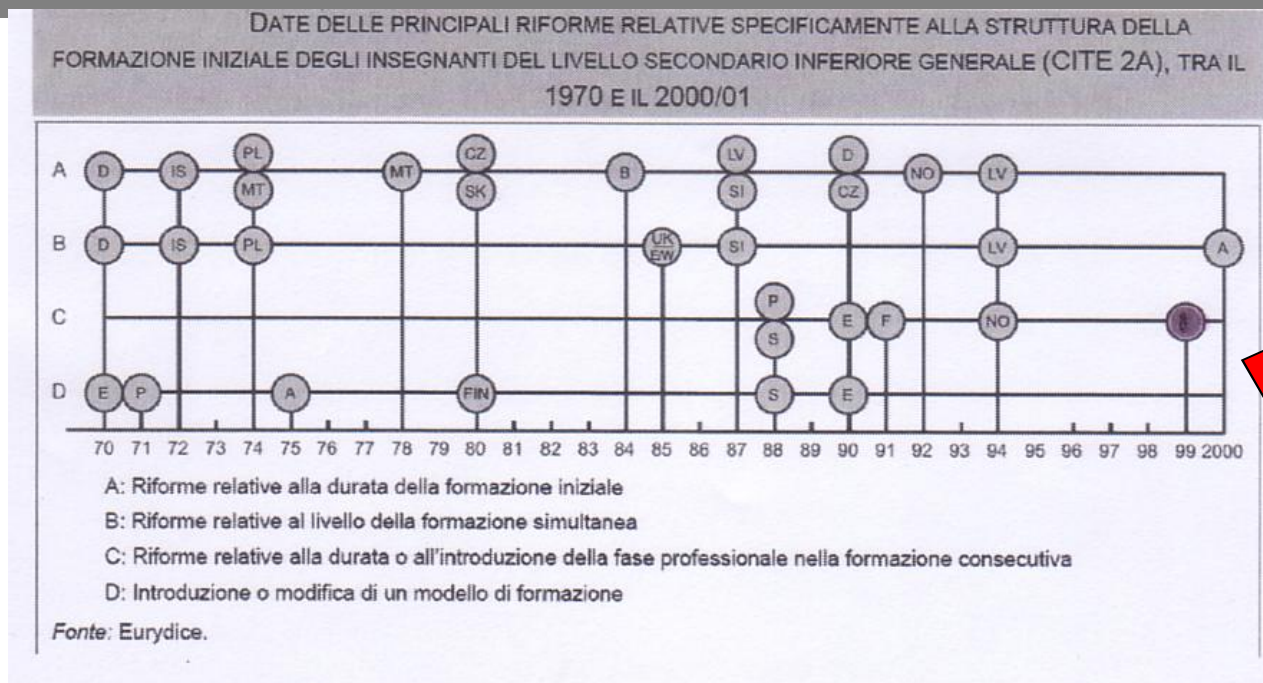
Nel 1898  
a Milano solo 3  
professori  
provenivano dal  
Magistero e  
nessuno aveva  
svolto il tirocinio!

# Le Scuole di Magistero un progetto di formazione

**Pochi i professori diplomati**

**Regolamenti parzialmente attuati**

**Un progetto di formazione  
che si realizzerà nel 1999.**



**SSIS**

# I 150 anni dell'Unità d'Italia e le Scuole per la formazione degli insegnanti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1861								SNS	1870
		SS	SM						1880
									1890
Le Scuole di Magistero: sono un progetto di formazione che non riuscirà a realizzarsi se non in modo sporadico e parziale									1900
									1910
									1920
									1930
									1940
									1950
									1960
									1970
									1980
									1990
								SSIS	2000
									2010
2011	TFA transitorio								

# Il *progetto* delle **Scuole di Magistero** le ricadute culturali e istituzionali

**AREA COMUNE**



**La pedagogia**

**TIROCINIO**

[pedagogia.doc](http://pedagogia.doc)

**“LABORATORI”**

**CORSI DISCIPLINARI**

Nel corso dell'ultimo decennio del XIX secolo si rendono protagoniste le **nuove generazioni**, nate nell'Italia post-unitaria e attente al dibattito internazionale sui temi dell'insegnamento secondario.

Emergono nuovi soggetti, le **associazioni degli insegnanti**.

L'evoluzione della **scena politica** ed **economica** del secolo che si stava per aprire orienta in chiave democratica il dibattito sul sistema di istruzione.

# Le ricadute per la matematica e il suo l'insegnamento

## I TEMI

Ordinamenti scolastici e programmi di matematica

Corsi di matematica per gli insegnanti

## I nuovi PROTAGONISTI

L'associazione *Mathesis*, fra gli insegnanti di matematica delle scuole medie (1895-96)

La FEDERAZIONE Nazionale Insegnanti Scuola Media (1901)

ESITI

**Iniziative editoriali  
(Manuali, Riviste, Collectanea)**

**Iniziative legislative**

# Quali Corsi di matematica per il futuro insegnante?

Sul finire del secolo molti giovani matematici in piena attività nel campo della ricerca avanzata furono coinvolti sul tema della formazione disciplinare dell'insegnante di matematica. Ispiratore del processo, che portò a riconoscere anche in Italia il valore di una formazione disciplinare specifica per il futuro insegnante, fu Felix Klein.



# Felix Klein

## e l'insegnamento della matematica

Le finalità dell'insegnamento universitario

È senza dubbio vero che l'Università deve soprattutto introdurre lo studente all'**ideale scientifico** e, per tale motivo, gli **studenti devono spingere i loro studi matematici ben al di là dei campi elementari che potranno insegnare più tardi**. Ma quell'ideale non deve essere scelto talmente distante e talmente lontano dalle loro necessità immediate, da far diventare difficile o anche impossibile coglierne la portata sul futuro lavoro, nella vita pratica. In altri termini, **l'ideale dovrebbe essere tale da ispirare al futuro professore entusiasmo per la sua carriera e non disprezzo per un lavoro che altrimenti considererà terra a terra e indegno**.

(Felix Klein 1893, 153; ed. it. a cura di P. Nastasi 2000)

Conferenze americane (1893)

### apprendimento - insegnamento della matematica

Lo sforzo principale si è posto lo scopo di **diminuire la difficoltà degli studi matematici**, mediante il perfezionamento dei *seminari*. Non solo si sono fondate delle biblioteche speciali per i seminari, ma si sono anche messe delle sale di studio a disposizione degli studenti che desiderino accedere a quelle biblioteche. Si sono pure formate delle collezioni di modelli e sono stati attivati dei corsi di disegno, sempre allo scopo di ridurre l'ostilità verso l'eccessivo **carattere astratto dell'insegnamento universitario**.

(Klein 1893, 56)

### Le matematiche elementari dal punto di vista superiore

Questo Corso di lezioni deve la propria origine al desiderio di **porre in armonia lo studio della Matematica nelle Università con gli interessi della Scuola secondaria superiore**, più di quanto prima si usasse. Ciò non ostante non è un corso da principianti, perché tratta i proprii temi non scolasticamente, ma *da un punto di vista più elevato*.

(Klein 1894)

# Klein in Italia: il ruolo di Corrado Segre

1872

## L' *Erlanger Programm*

... je n'oublierai jamais l'effet qu'on produit sur moi, la première fois que les ai lus, vos travaux des premiers tomes des Mathematische Annalen et le **programme de 1872**...

così scriveva Segre a Klein nel 1884. Fu Segre a proporre al suo giovane allievo **Gino Fano** la traduzione del *Programma di Erlangen* che pochi conoscevano. Dopo l'edizione italiana del 1890 il *Programma* ebbe una nuova edizione tedesca a cui seguirono le edizioni nelle varie lingue che lo renderanno celebre in tutto il mondo assegnandogli un posto nella Storia della Matematica.

S. a K., 1.9.1884



Dopo la laurea Fano (1892) andò a perfezionarsi a Gottinga, dove nel frattempo Klein si era trasferito.

# L'organizzazione degli studi in Germania

## I Corsi per gli insegnanti

Di ritorno dalla Germania, Fano ne descriverà (1894) l'organizzazione degli studi sottolineando l'interesse dei corsi compresi sotto il nome di *Encyclopaedie der Elementarmathematik*, i quali avevano

**lo scopo di gettare luce da un punto di vista alquanto più su questioni di matematica elementare.**

... ogni anno nelle vacanze Pasquali gli insegnanti di Scuole secondarie sono invitati a riunirsi, quelli delle province orientali a Berlino, quelli delle province occidentali a Gottinga; e li rimangono circa quindici giorni, a contatto degli insegnanti universitari. Conferenze e lezioni permettono da un lato ai numerosi convenuti di tenersi al corrente dei tanti e tanti progressi che la scienza va continuamente facendo, mentre d'altra parte anche gli insegnanti di Università hanno modo di rendersi conto dei bisogni e dei desideri dei primi. **(Fano 1894)**

La notizia delle **Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare** giunge così in Italia dove saranno pubblicate nel 1896.

In Italia invece, le università

**vivono e anche prosperano senza quasi curarsi  
degli Istituti d'istruzione secondaria**

Fano 1894

L'invito a curarsene verrà raccolto nel volgere di pochi anni, **sul piano del progetto culturale**, da **Federigo Enriques** che unirà un gruppo di docenti universitari e di docenti di scuola secondaria per le sue *Questioni riguardanti la geometria elementare* (1900), poi ampliate nelle *Questioni riguardanti le Matematiche elementari* (1912-1914).

Ora vengo a parlarti di un **progetto**, che spero di attuare con poca fatica. Si tratta di un **libro dedicato a tutte le questioni che interessano la geometria elementare** (fra queste vi sono anche quei problemi non di 2° grado trattati dal Klein ma le questioni sono moltissime). Mi propongo non di farlo, ma di farlo fare a giovani laureati e ad insegnanti delle scuole secondarie, serbando a me, o a qualche matematico che volesse occuparsene, la trattazione di qualche argomento più delicato.

E. a Castelnuovo, 5/1899

# I nuovi manuali scolastici

Nelle due decadi tra otto-novecento si assiste a una ricca produzione di manuali di matematica per la Scuola secondaria.

A sollecitare questa produzione furono le ricerche sui fondamenti della matematica, diffuse anche nel nostro paese, e l'esigenza di trasporre i risultati sul piano didattico. **L'interesse è soprattutto sulla geometria.** I manuali si distinguono per le soluzioni proposte per affrontare i nodi concettuali più delicati.

Ai trattati *classici* di **Sannia** e **D'Ovidio** e di **Faifofer** seguirono quelli di

**De Paolis 1884**

**Lazzeri e Bassani 1891**

**Enriques-Amaldi 1903**

**Ingrami 1904, De Franchis 1909, Veronese 1909, Marletta 1912**



“fusione” tra geometria piana e solida

In ciascuno di questi libri si parte dagli enti geometrici più semplici (...) assunti come enti primitivi e dopo averne fissato il senso (agli effetti della trattazione deduttiva) con opportuni postulati, si procede alla costruzione e allo studio di quelli meno semplici; cosicché per essi, **meglio che di un metodo razionale deduttivo, può parlarsi, con l'ENRIQUES, di un metodo razionale (genetico) e induttivo**, se pure soltanto nel libro dei sigg. ENRIQUES e AMALDI **il procedimento induttivo sia adoperato sistematicamente in conformità di vedute pedagogiche-filosofiche, più che in omaggio alla squisita raffinatezza del senso logico moderno.**

G. Scorza, *Sui libri di testo di geometria per le scuole secondarie superiori*,

Bollettino *Mathesis*, 1912



# Le origini del pensiero didattico di Federigo Enriques

**Nell'avviamento di un metodo, che pur essendo razionale, accentua il carattere *induttivo*, Ella potrà riconoscere una influenza delle sue idee e delle conversazioni di Gottinga.**

Enriques a Klein 10.1.1905, in occasione della II edizione degli "Elementi di geometria ..."

# FEDERIGO ENRIQUES

## pensiero filosofico vs pensiero didattico

All'origine dei *Problemi della Scienza* (1906)

L'occasione di apprezzare e conoscere il Wundt, il più meraviglioso ingegno filosofico, fisiologico, psicologico, matematico ecc. ; uomo pur così poco conosciuto in Italia dove solo la filosofia di Spencer è popolare.

Leggi la *Logik* del Wundt quella parte almeno che riguarda i metodi della matematica, e pensa che è un fisiologo che scrive così: un fisiologo che non teme di salire l'erta della concezione kantiana per illuminare dall'alto il gran corso delle scienze!

[Enriques filosofia.doc](#)

Lettera di E. a Castelnuovo 4 maggio 1896

# 1905: l'insediamento della *Commissione Reale*

**Le molte iniziative culturali degli anni a cavallo dei due secoli non ebbero adeguato riscontro sul piano istituzionale.**

**Il regolamento delle Scuole di Magistero del 1903, del ministro Orlando, aveva cancellato le parti più innovative e operative del testo di Nasi.**

**L'anno seguente Orlando emanava un decreto che consentiva la scelta tra il Greco e la Matematica al secondo anno del Liceo.**

**In seno alla *Mathesis* ci fu chi propose di sciogliere l'associazione in segno di protesta. Il decreto sarà abrogato solo nel 1911.**

**Sull'onda delle proteste suscitate dai provvedimenti di Orlando il nuovo ministro della P.I. Leonardo Bianchi nominò, con decreto reale, una *Commissione* con l'incarico di studiare l'ordinamento degli studi secondari e di proporre le norme per il suo migliore funzionamento.**

# I lavori della Commissione Reale

## Le indicazioni programmatiche

**Per ovviare all'ingiustizia sociale che una scelta prematura del percorso di istruzione medio poteva causare, Bianchi suggeriva la creazione di un **ginnasio unico**, senza latino, seguita da Corsi di studio distinti e ben caratterizzati, in cui avrebbero avuto spazio le lingue moderne e le scienze, di cui si riconosceva il valore formativo.**

## L'indagine conoscitiva e il dibattito sulla riforma

## La proposta della Commissione

**Ginnasio triennale  
unico**

[Scuola Media Unica.doc](#)

**Liceo classico** (latino- greco)

**Liceo moderno** (latino – l. moderne)

**Liceo scientifico** (l.moderne- scienze)

**Scuole professionali**

# Il dibattito sui nuovi programmi

Primo estensore dei programmi di matematica per il Ginnasio unico e per i 3 Licei fu **Giovanni Vailati**. I programmi per il ginnasio unico sono permeati dalle sue innovative e coraggiose idee pedagogiche.

I programmi di matematica per i nuovi Licei furono presentati al primo Congresso della *Società Italiana per il Progresso delle Scienze* (1907) creata per **promuovere il progresso, la coordinazione e la diffusione delle scienze e delle loro applicazioni**.

La proposta Vailati si confronta con una platea internazionale durante il IV Congresso internazionale dei Matematici tenutosi a Roma nel 1908.

**I nuovi programmi per il Ginnasio unico e i 3 Licei vengono pubblicati nel 1909 nella “Relazione” della Commissione Reale.**

# I programmi del 1909 per i 3 nuovi Licei

Il programma di matematica era comune ai primi 4 anni del **Liceo classico** e del **Liceo moderno**. Il programma del III anno prevedeva l'introduzione della trigonometria e delle sue applicazioni alla fisica e alla **determinazione della distanza o delle dimensioni di oggetti inaccessibili**. Quello del IV anno comprendeva le **interpretazioni geometriche e fisiche del concetto di derivata**. I programmi si differenziavano all'ultimo anno.

Quello del Liceo classico dava spazio alla Storia della Matematica e alla lettura critica degli *Elementi* di Euclide. Il programma comprendeva lo studio della geometria solida, i metodi classici per la determinazione dei volumi (cilindro, sfera e cono), l'introduzione di elementi di cosmografia e un accenno allo **sviluppo delle idee cosmografiche e astronomiche dei Greci**.

Nel Liceo moderno il programma del V anno prevedeva l'introduzione di elementi di **probabilità** e di **statistica** e lo studio di questioni di **massimo e minimo** con l'uso delle **derivate**.

Il **Liceo scientifico** sostituiva la Sezione fisico-matematica degli Istituti tecnici ed era dunque orientato verso la matematica per le **applicazioni di carattere fisico e tecnologico** (l'uso di strumenti topografici). Era prevista l'introduzione del calcolo infinitesimale e del calcolo delle probabilità.

L'**analisi infinitesimale** sarebbe stata così introdotta in tutta la scuola secondaria.

La riflessione su insegnamento e formazione dell'insegnante aveva portato a riconoscere due temi fondamentali per la cultura matematica del docente.

**Le matematiche elementari  
dal punto di vista superiore**



Federigo Enriques

**La matematica per le  
applicazioni alle altre discipline**



Guido Castelnuovo

## Formazione dell'insegnante

### Insegnamento della matematica

Oltre vent'anni di riflessione sui temi dell'insegnamento matematico e della formazione culturale e professionale dell'insegnante produssero importanti iniziative editoriali e progetti di riforma, ma risultati sul piano istituzionale quasi nulli.

Il Liceo Moderno ebbe vita breve.

Le Scuole di Magistero furono soppresse dal Ministro della P. I. Benedetto Croce nel 1920, e sostituite da lì a pochi anni dalle **Lauree Miste**.

L'Italia era rimasta *la sola Nazione civile che non ha più nessuna organizzazione per la preparazione degli insegnanti.*

(G. Loria, *Mathesis*, Genova 1921)



Tale improvviso e violento provvedimento ha commosso profondamente tutti i cultori delle scienze positive, i quali riconoscevano che le Scuole proditoriamente spente, **se anche non erano di struttura abbastanza robusta per assicurare una completa preparazione ai futuri insegnanti medi, rappresentavano però un ponte, l'unico esistente fra insegnamento superiore ed insegnamento medio**, epperò avevano ragione e diritto di vivere.

( Loria, 1921)

**Non è chi conosce i metodi degli altri o chi sa più cose, il migliore insegnante, ma chi ha più agile e aperta intelligenza, più squisito senso dell'arte, cioè in sostanza più chiara coscienza di sé ... Chi è in una parola più armoniosamente, universalmente uomo.**

(Citazione da Santoni Rugiu 1981, 263)

scriveva nel 1917 Ernesto Codignola, nella *Riforma della cultura magistrale*, esponendo il punto di vista dell'idealismo sul problema della formazione dell'insegnante, che si imporrà sulle diverse tendenze culturali che nel decennio precedente si erano contese il primato in campo pedagogico.

# S M vs SSIS

**AREA COMUNE**

**TIROCINIO**

**“LABORATORI”**

**CORSI DISCIPLINARI**

**La struttura dei curricula**  
**Simultaneo vs consecutivo**

Le SSIS nascono come scuole di specializzazione post- laurea di durata biennale.

L'articolazione delle attività in area è del tutto analoga a quella SM.

**Nelle SSIS La struttura del curriculum è consecutivo: la formazione culturale è disgiunta dalla formazione professionale. In realtà la durata biennale consentiva di recuperare le lacune formative.**

# Laurea vo + SSIS

vs

# LM + TFA

**AREA COMUNE**

**TIROCINIO**

**“LABORATORI”**

**CORSI DISCIPLINARI**

La struttura dei curricula  
**Simultaneo**

Il percorso formativo prevede 2 anni di laurea magistrale specifica per l'insegnamento (nuove LM dedicate) e, in continuità, un anno di corso post-laurea (TFA). L'articolazione delle attività nell'ambito dell'anno di TFA è del tutto analoga a quella storica delle SM e delle SSIS.

Le LM dedicate +TFA realizzano, insieme, un curriculum simultaneo, pur con una differenza di accento tra la parte relativa alla LM e la parte post laurea. Viene riconosciuta l'opportunità a livello di LM di un curriculum specifico, anche nell'ambito delle discipline, per chi intende dedicarsi al loro insegnamento.

**LM + TFA → TFA transitorio**

**2013 nasce il TFA transitorio**

La struttura del curriculum  
**simultaneo → consecutivo**

**TIROCINIO**

**AREA M-PED**

**“Corsi e laboratori di  
didattica disciplinare**

~~Corsi disciplinari~~

**Estratto da:**

**Leggere Euclide: percorsi  
attraverso gli “Elementi”**

Centro MatNet, Università di Bergamo  
febbraio 2013

# ***le Indicazioni per i nuovi licei***

## ***linee generali***

Per quanto riguarda la geometria sintetica a fine percorso lo studente deve possedere:

[...] gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio **entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico** (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);

[...] una chiara visione delle caratteristiche **dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna** e delle sue specificità rispetto **all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica**.

# ***le Indicazioni per i nuovi licei***

## ***obiettivi specifici*** (primo biennio)

### **Il primo biennio**

avrà come obiettivo la conoscenza dei **fondamenti della geometria euclidea del piano**.

Verrà chiarita l'**importanza e il significato** dei concetti di **postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione**, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli *Elementi* di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale.

In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo **non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica**.

# *le Indicazioni per i nuovi licei*

## *obiettivi specifici* (primo biennio)

Al **teorema di Pitagora** sarà dedicata una particolare attenzione affinché ne siano compresi sia gli aspetti geometrici che le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali) insistendo soprattutto sugli **aspetti concettuali**.

La realizzazione di **costruzioni geometriche** elementari sarà effettuata sia mediante **strumenti tradizionali** (in particolare la **riga e compasso**, sottolineando il **significato storico** di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante **programmi informatici** di geometria.



# ***Le Linee guida*** **per gli Istituti Tecnici e Professionali**

## **Conoscenze**

Gli enti fondamentali della geometria e il **significato** dei termini, **postulato**, **assioma**, **definizione**, **teorema**, **dimostrazione**.

**Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio.**

# **Le *Linee guida* per gli Istituti Tecnici e Professionali**

## **Abilità**

Eseguire **costruzioni geometriche** elementari utilizzando la riga e il compasso e/o strumenti informatici.

Porre, analizzare e risolvere **problemi del piano e dello spazio** utilizzando **le proprietà delle figure** geometriche oppure **le proprietà di opportune isometrie**.

Comprendere **dimostrazioni** e sviluppare **semplici catene deduttive**.

# La nostra scuola

2012-13

**popolazione**

**560 181**

Licei (tutti)

**47.4 %**

L. Scientifico

18.1 %

Istituti Tecnici

**31,0 %**

Istituti Professionali

**21,6 %**

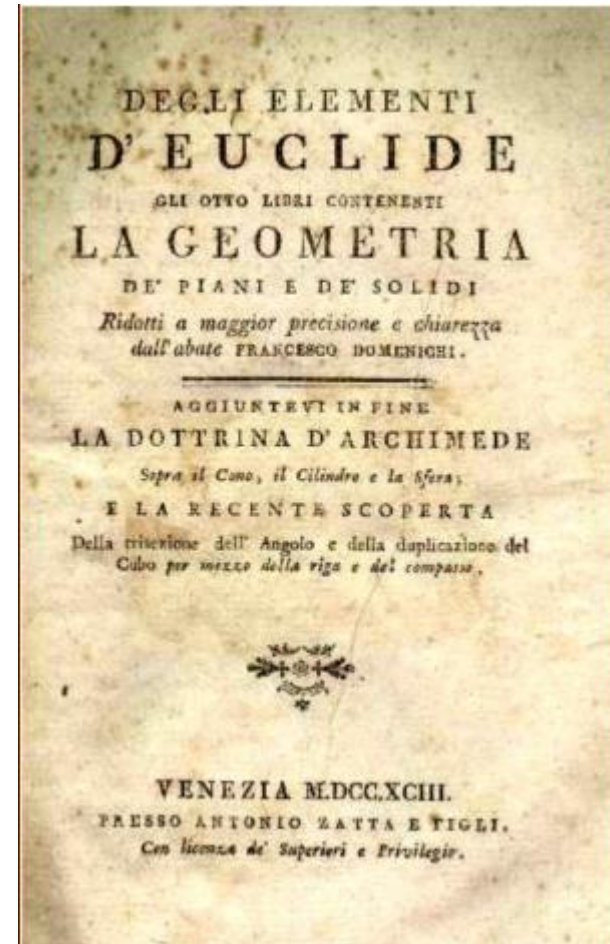
# il **modello** del modo di ragionare in matematica.

Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di

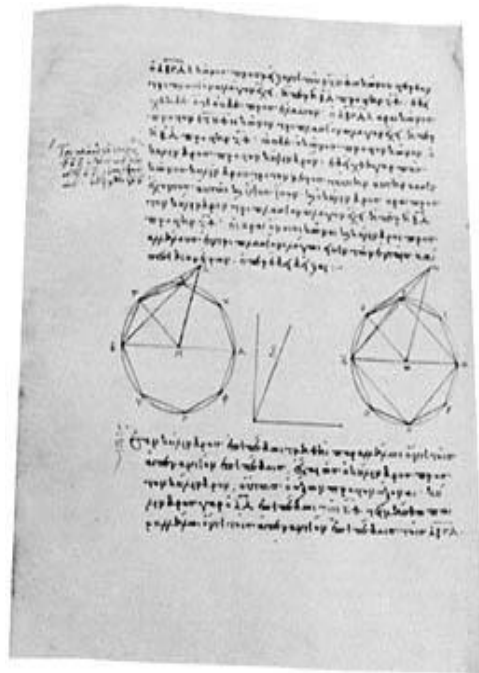
postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione,

con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli *Elementi* di Euclide,

essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale.



Circa 300 a.C.



In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente,

l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.

### ***Abilità***

Eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando la riga e il compasso e/o strumenti informatici.

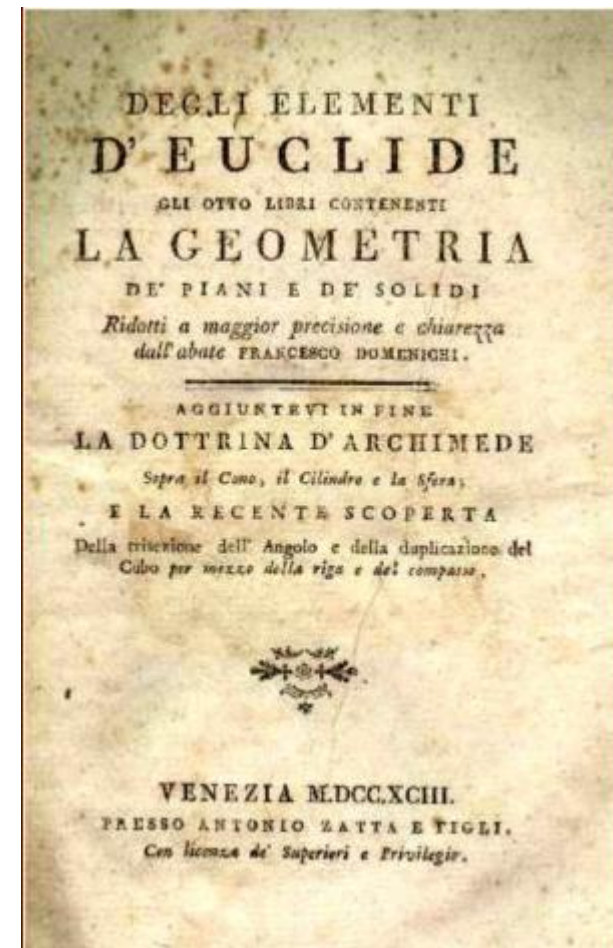


### ***Indicazioni***

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.

# riga e compasso

Le basi concettuali delle costruzioni con riga e compasso





# PERCORSI di LETTURA

## *“Le costruzioni geometriche”*

- I.1 (costruzione del triangolo equilatero),**
- I.2 (trasporto del segmento), I.3 (trasporto del  
segmento secondo una data direzione),**
- I.9 (costruzione della bisettrice),**
- I.10 (costruzione del punto medio di un segmento),**
- I.11 (costruzione della retta perpendicolare ad una retta  
data per un suo punto),**
- I.12 (costruzione della retta perpendicolare ad una retta  
data da un punto esterno ad essa),**
- I.22 (costruzione del triangolo di dati lati),**
- I.23 (trasporto dell'angolo),**
- I.46 (costruzione del quadrato)**

# Il metodo della sovrapposizione

Prop. I.4

**Dati i due triangoli  $ABC$  e  $DEF$  tali che**

$$AB = DE, AC = DF \text{ e } \hat{BAC} = \hat{EDF},$$

*se il triangolo  $ABC$  è sovrapposto al triangolo  $DEF$  ed il punto  $A$  viene a coincidere con il punto  $D$  e la retta [segmento]  $AB$  con la retta [segmento]  $DE$ , anche il punto  $B$  verrà a coincidere col punto  $E$  essendo  $AB$  uguale a  $DE$ ; coincidendo dunque  $AB$  con  $DE$ , anche la retta [segmento]  $AC$  coinciderà con la retta [segmento]  $DF$  essendo l'angolo  $BAC$  uguale all'angolo  $EDF$ , cosicché pure il punto  $C$  coinciderà col punto  $F$  essendo, nuovamente, uguale  $AC$  a  $DF$ . Tuttavia anche  $B$  ha coinciso con  $E$ , cosicché la base  $BC$  verrà a coincidere con la base  $EF$ .*



# Su **quali postulati Euclide** fonda la **sovrapposizione dei due triangoli?**

## *Nozioni comuni*

- N. C. 1- *Cose che sono uguali ad una stessa sono uguali anche fra loro.*
- N. C. 2 - *E se cose uguali sono addizionate a cose uguali, le totalità sono uguali.*
- N. C. 3 - *E se da cose uguali sono sottratte cose uguali, i resti sono uguali.*
- N. C. 4 - *E cose che coincidono fra loro sono fra loro uguali.*
- N. C. 5 - *E il tutto sia maggiore della parte.*

**Una seconda lacuna nel sistema assiomatico**

# Una seconda lacuna nel sistema assiomatico di Euclide



Hilbert

Si postula il primo criterio di congruenza dei triangoli (Euclide, prop. I.4): è ciò che fa David Hilbert nei suoi *Fondamenti della Geometria* (è il quinto dei suoi assiomi di congruenza!)



Klein

Si postula l'esistenza di *movimenti rigidi*, più precisamente l'esistenza di un gruppo di movimenti che soddisfa a certe condizioni e che agisce in un certo modo sul piano.

E' l'idea di Felix Klein che nel *Programma di Erlangen* (1872) fonda lo studio della geometria su quello del gruppo di trasformazioni che possono agire in quella geometria.

# PERCORSI di LETTURA

## *“La teoria delle parallele”*

*E che, se una retta venendo a cadere su due rette forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti (= tali che la loro somma sia minore di due retti), le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti (= la cui somma è minore di due retti).*

**I.27 – 28 (inversa del 5° postulato, ovvero criteri di parallelismo),**

**I.29 (contronominale del 5° postulato),**

**I.30 (transitività del parallelismo),**

**I.31 (costruzione della retta parallela ad una retta data e per un punto dato),**

**I.32 (proprietà sulla somma degli angoli interni di un triangolo).**

# PERCORSI di LETTURA

## *“La costruzione dei poligoni regolari”*

Libro III- la circonferenza

Libro IV- circonferenze e poligoni

**Costruzione della circonferenza inscritta o circoscritta ad un poligono regolare dato.** Propp IV 13-14 (per il pentagono regolare).

**Costruzione del pentagono regolare.**

Propp: II.11 (costruzione della sezione aurea di un segmento), IV.10 (costruzione di un triangolo isoscele in cui ciascuno degli angoli alla base sia il doppio dell'angolo restante), IV.11-12 (costruzione del pentagono regolare inscritto e circoscritto ad una circonferenza data).

**Costruzione dell'esagono regolare. Prop. IV.15.**

**Costruzione del pentadecagono regolare. Prop. IV.16.**

# PERCORSI di LETTURA

## *“La teoria dell'estensione”* - parallelogrammi

**I.33-34 (proprietà dei parallelogrammi),**

**I.35 (equivalenza dei parallelogrammi compresi tra due rette parallele e che insistono sulla stessa base),**

**I.36 (equivalenza dei parallelogrammi compresi tra due rette parallele e che hanno basi congruenti),**

**I.37-38 (analoghe delle precedenti per i triangoli),**

**I.41 (dati un parallelogramma e un triangolo compresi tra due rette parallele e che insistono sulla stessa base, il parallelogramma è il doppio del triangolo),**

**I.46 (costruzione del quadrato),**

**I.47 (teorema di Pitagora), I.48 (inverso del teorema di Pitagora),**

**II. 12-13 (generalizzazioni del teorema di Pitagora)**

# L'estensione secondo Euclide

*Le Nozioni Comuni* al servizio dell'estensione

***Se due figure sono equiestese con una terza, lo sono anche tra loro.***

***Se a due figure tra loro equiestese si sommano (sottraggono) due figure tra loro equiestese, si ottengono figure equiestese.***

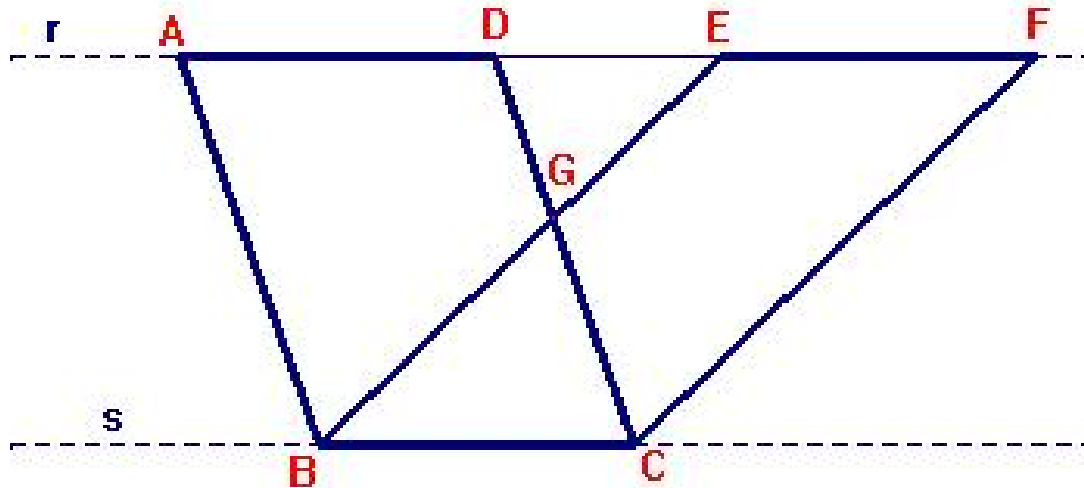
***Figure congruenti sono equiestese.***

***Il tutto è maggiore della parte.***

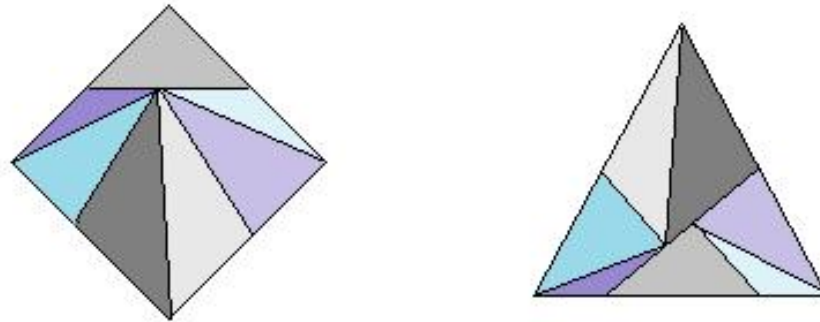
# La proposizione chiave

## Prop. I. 35

*Parallelogrammi che siano posti sulla stessa base e fra le stesse parallele sono uguali [equiestesi] fra loro.*



# L'equiscomponibilità



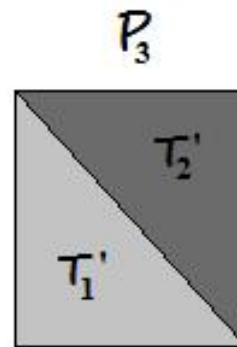
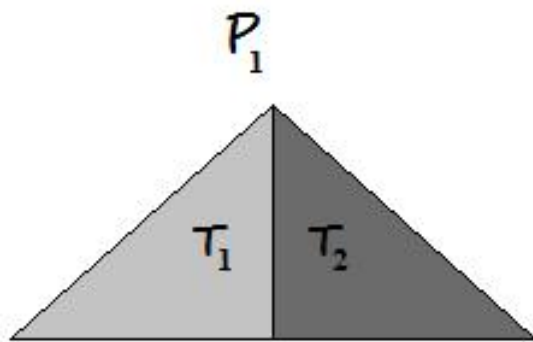
$P \text{ eqs } Q$

**In *parole povere*... due poligoni si dicono equiscomponibili se si possono decomporre in unioni di uno stesso numero finito di poligoni, in particolare triangoli, due a due senza punti interni comuni rispettivamente congruenti.**



# L'equiscomponibilità

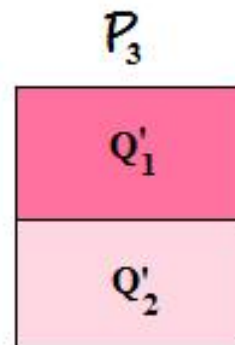
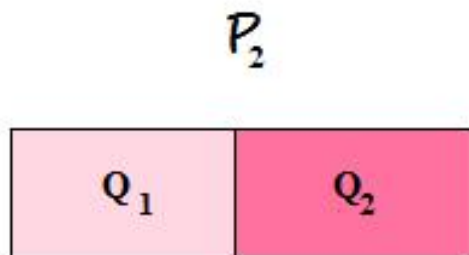
proprietà transitiva



$$P_1 = T_1 \cup T_2$$

$$P_3 = T_1' \cup T_2'$$

$$T_i \equiv T_i'$$

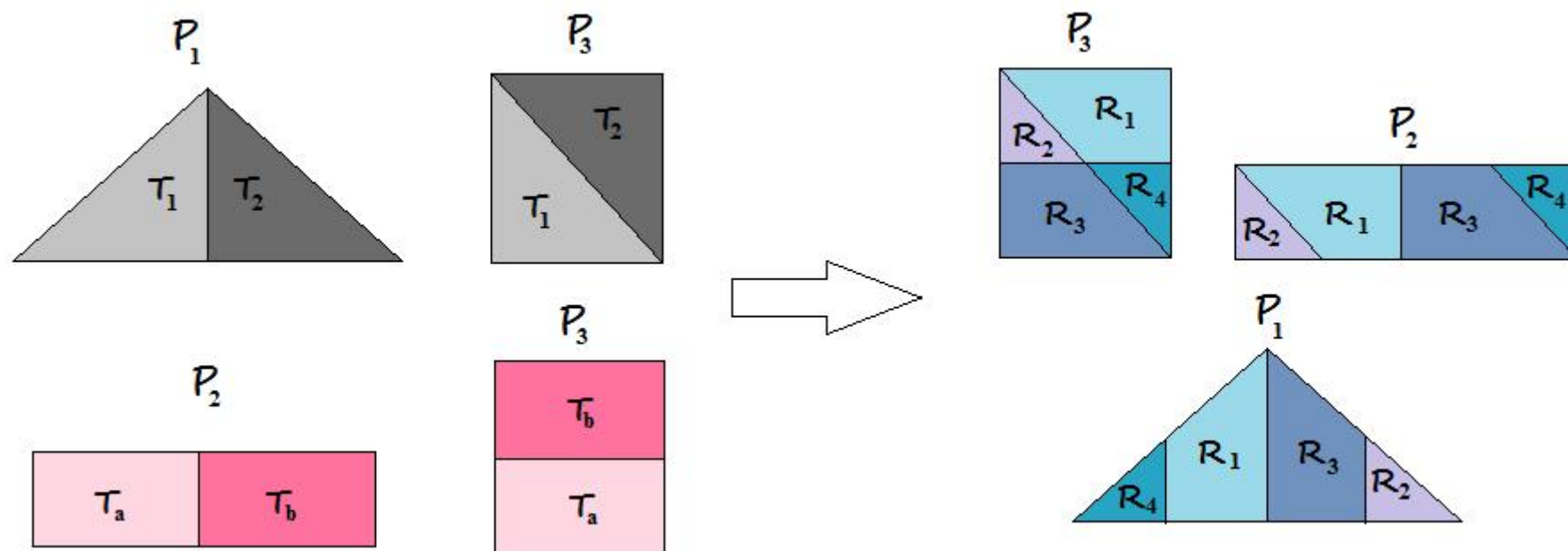


$$P_2 = Q_1 \cup Q_2$$

$$P_3 = Q_1' \cup Q_2'$$

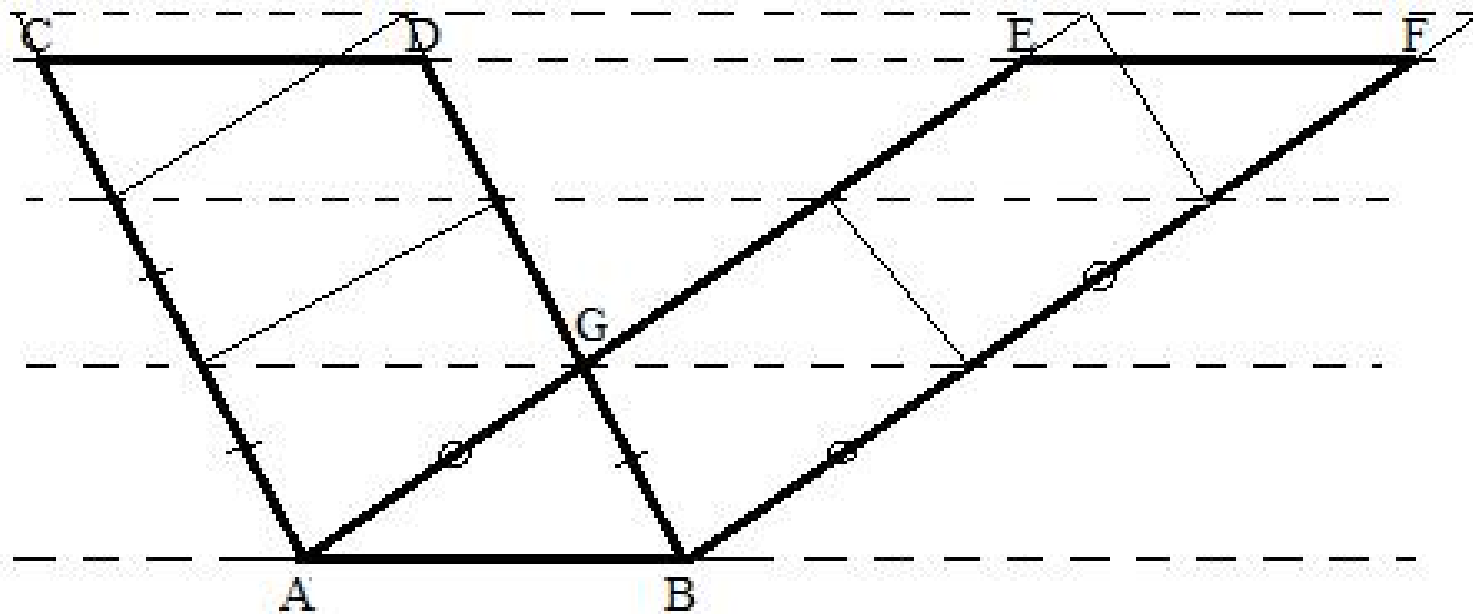
$$Q_i \equiv Q_i'$$

# proprietà transitiva: la dimostrazione



# L'equiscomponibilità

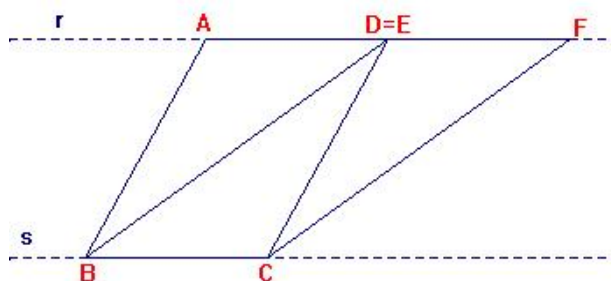
# Una dimostrazione di tipo costruttivo



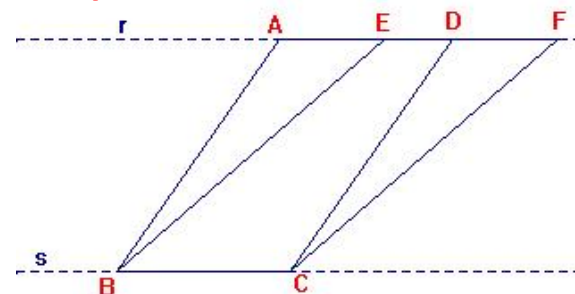
# L'equiscomponibilità

Una dimostrazione di tipo esistenziale

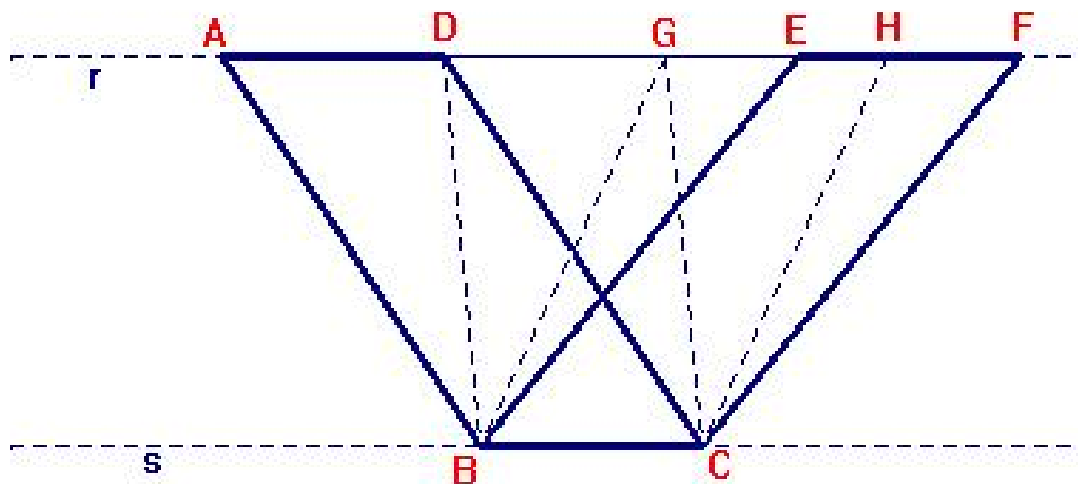
Caso  
a)



Caso b)



Caso c)

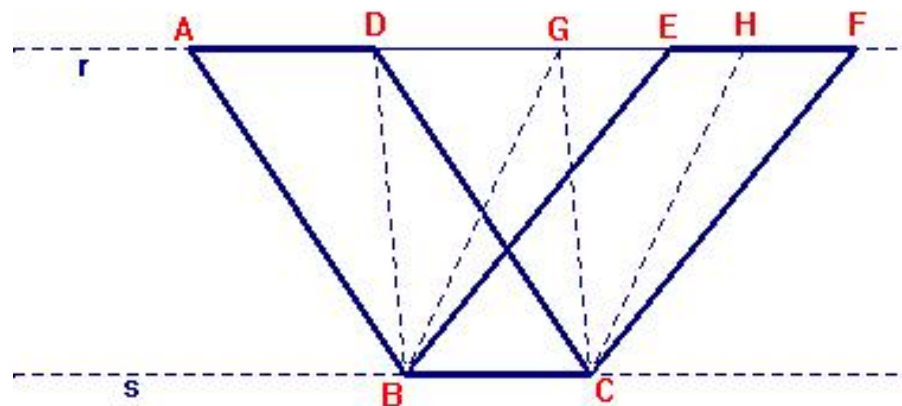


# L'equiscomponibilità

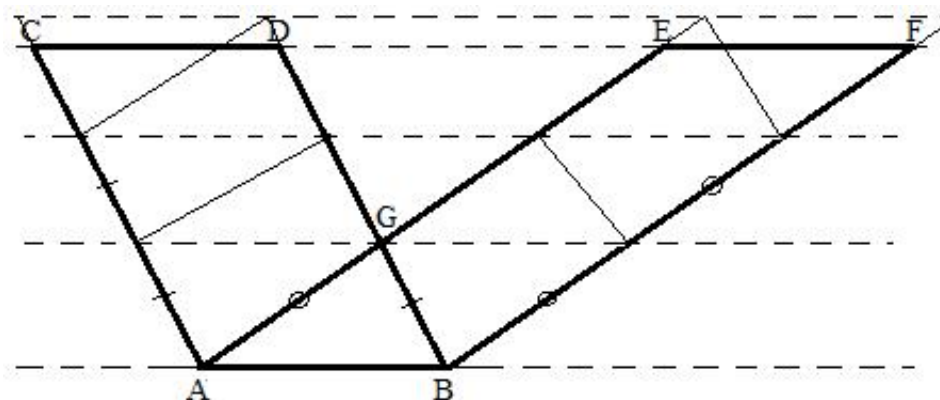
Il postulato nascosto

?

trovo un multiplo del  
segmento  $AD$  che è  
maggiore del  
segmento  $AE$ ...



trovo un multiplo del  
segmento .... che è  
maggiore del  
segmento ...



ciò è garantito dal **Postulato di Archimede**,  
che negli *Elementi* viene introdotto nel  
libro V e in Hilbert è l'assioma v.1 [Assioma di Archimede.doc](#)

# Prop. I.35: cosa ha dimostrato Euclide?

$P$  e  $P'$  sono i due parallelogrammi dati e  $Q$  è il triangolo  $DGE$ .

Si ha che

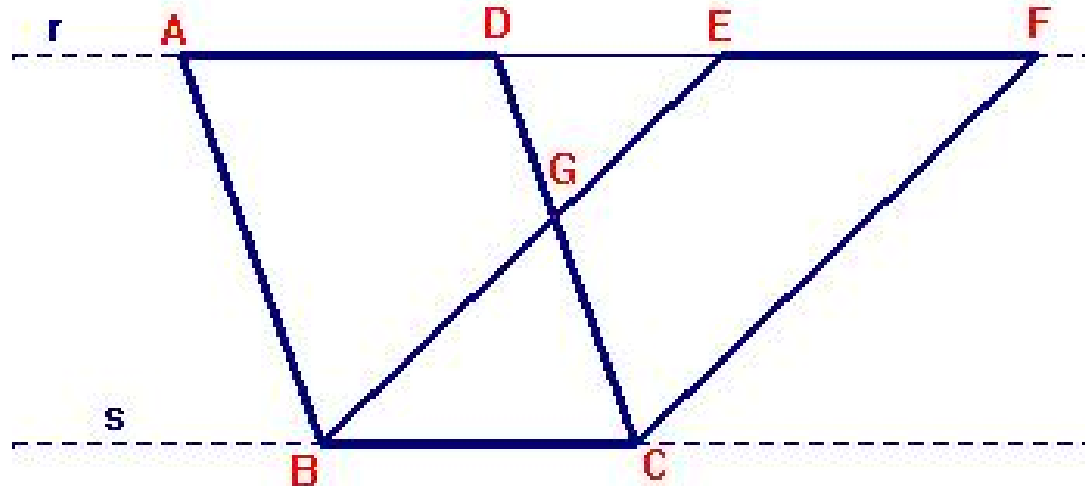
$$P \hat{=} Q = ABE \hat{=} GBC$$

$$P' \hat{=} Q = DCF \hat{=} GBC$$

e poiché  $ABE = DCF$ ,

$Q$

$$P \hat{=} Q \text{ eqs } P' \hat{=}$$



# L'equiampliciabilità

Due poligoni  $P$  e  $P'$  sono **equiampliciabili** se esistono due poligoni  $Q$  e  $Q'$  tra loro equiscomponibili tali che  $P \hat{=} Q$  e  $P' \hat{=} Q'$  siano equiscomponibili.  
(Hilbert)

Euclide nella prop. I.35 dimostra  
l'equiampliciabilità dei due  
parallelogrammi dati.



# **EQS vs EQA**

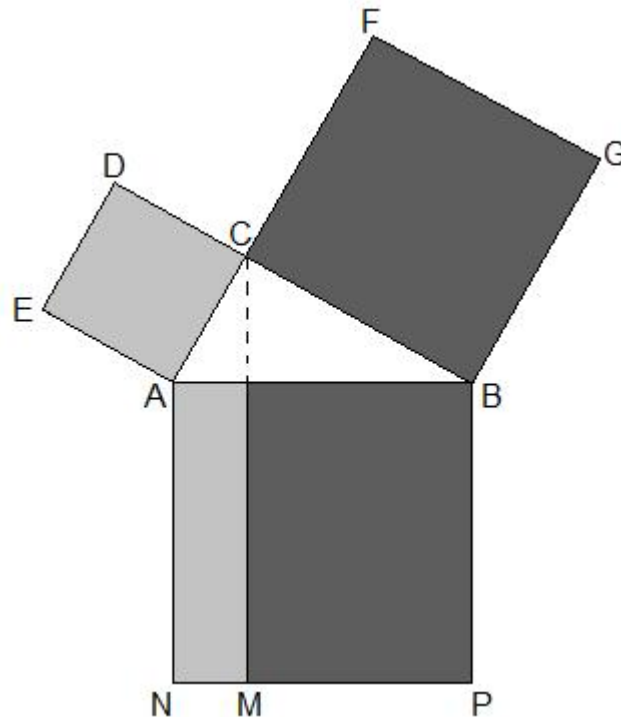
**EQS  $\not\subset$  EQA ovvio!**

**EQA  $\not\subset$  EQS ?**

**Si, se nella nostra geometria vale  
il postulato di Archimede  
(il controesempio di Hilbert)**

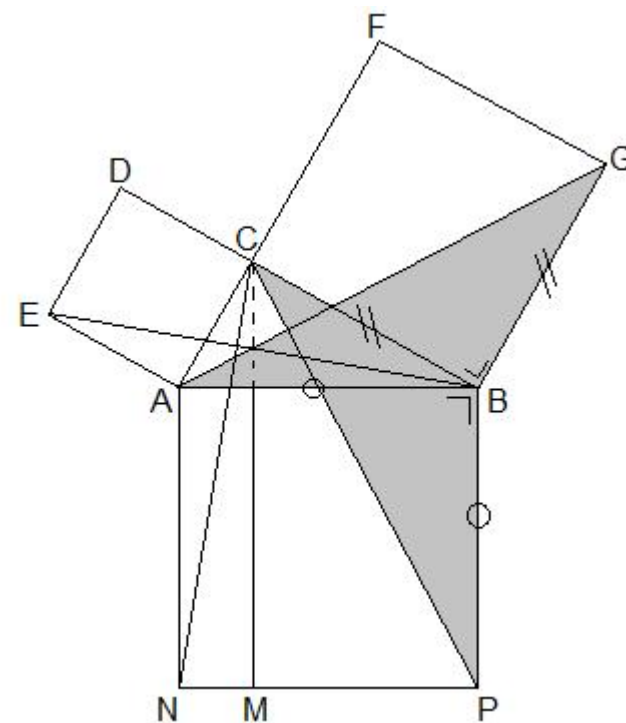
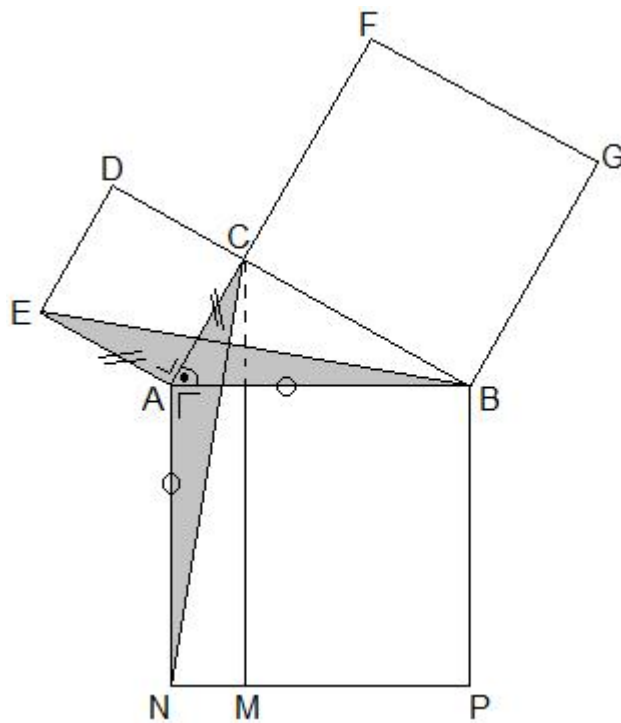
Al teorema di Pitagora sarà dedicata una particolare attenzione affinché ne siano compresi sia gli aspetti geometrici che le implicazioni nella teoria dei numeri (introduzione dei numeri irrazionali) insistendo soprattutto sugli aspetti concettuali.

## verso il teorema di Pitagora



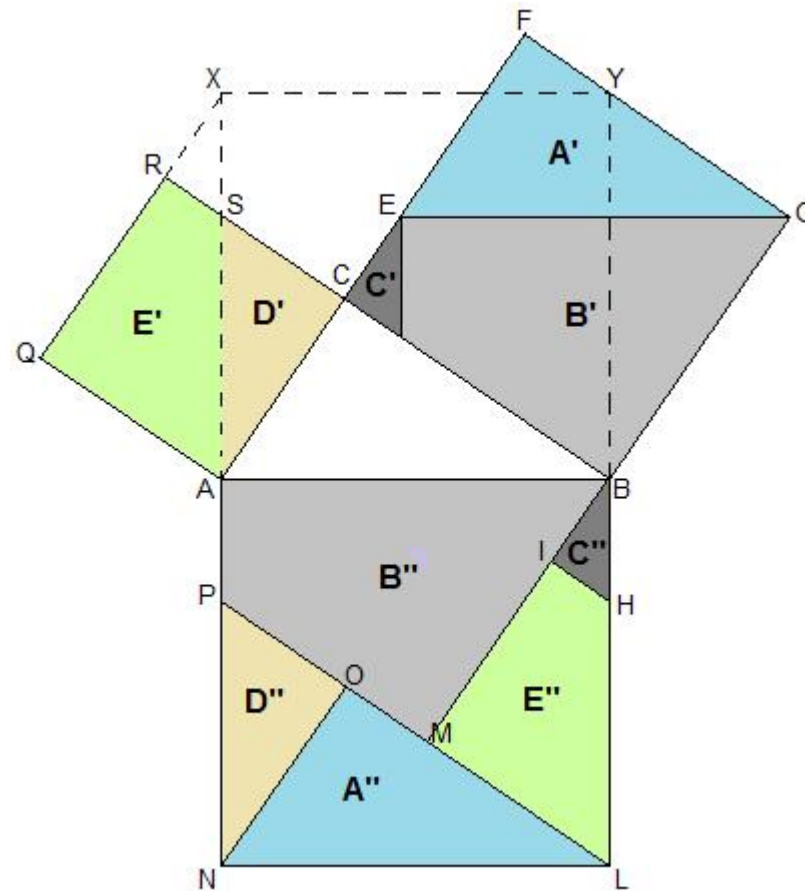
# Il teorema di Pitagora

La dimostrazione di Euclide (Prop. I.47)



# Il teorema di Pitagora

Una dimostrazione dell'**equiscomponibilità**...

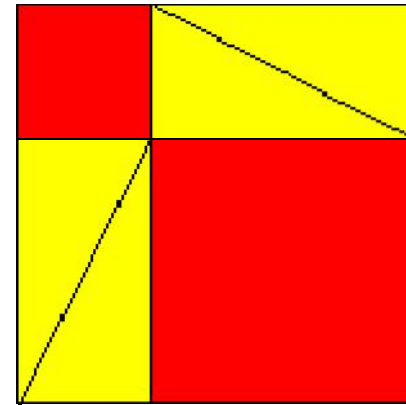
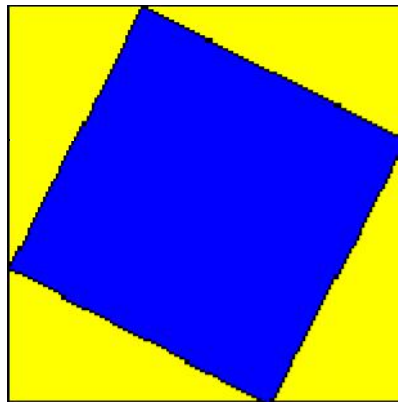


# Il teorema di Pitagora

in matematica i diagrammi facilitano i  
“**nostri esperimenti mentali**”

(Hao Wang , *Dalla matematica alla filosofia*, Boringhieri 1984)

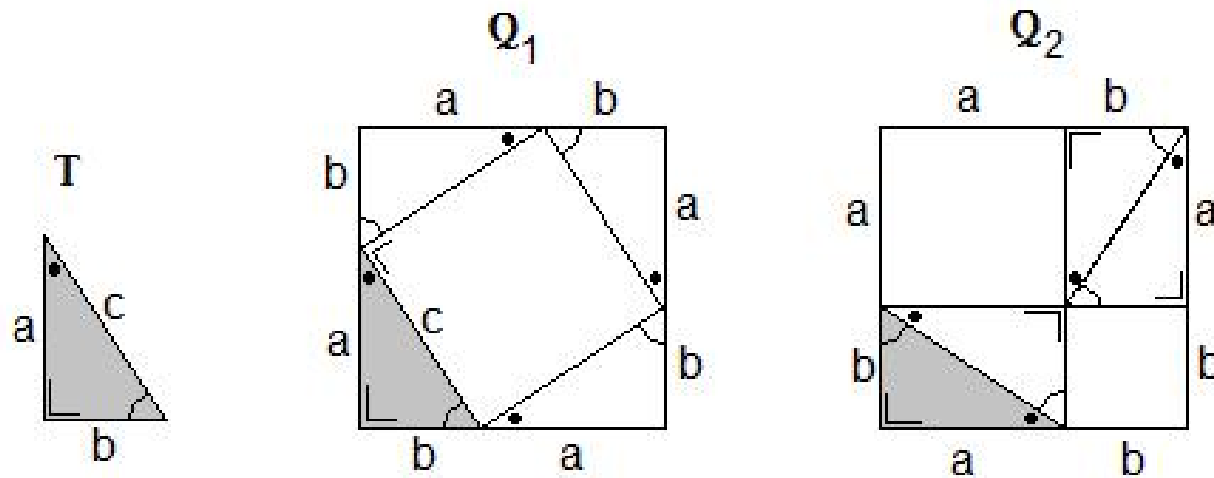
**Diagrammi «parlanti»**



**Nell'accettare questi diagrammi come una dimostrazione  
si sottointende un preciso quadro concettuale!**

# Il Teorema di Pitagora

Dai diagrammi alla figura



Cosa dimostro?

Il quadrato costruito sull'ipotenusa è **equiampoliabile**  
alla somma dei quadrati costruiti sui cateti

# PERCORSI di LETTURA

*“La teoria dell'estensione”* - quadratura

**I.42 (costruzione di un rettangolo equivalente ad un triangolo dato),**

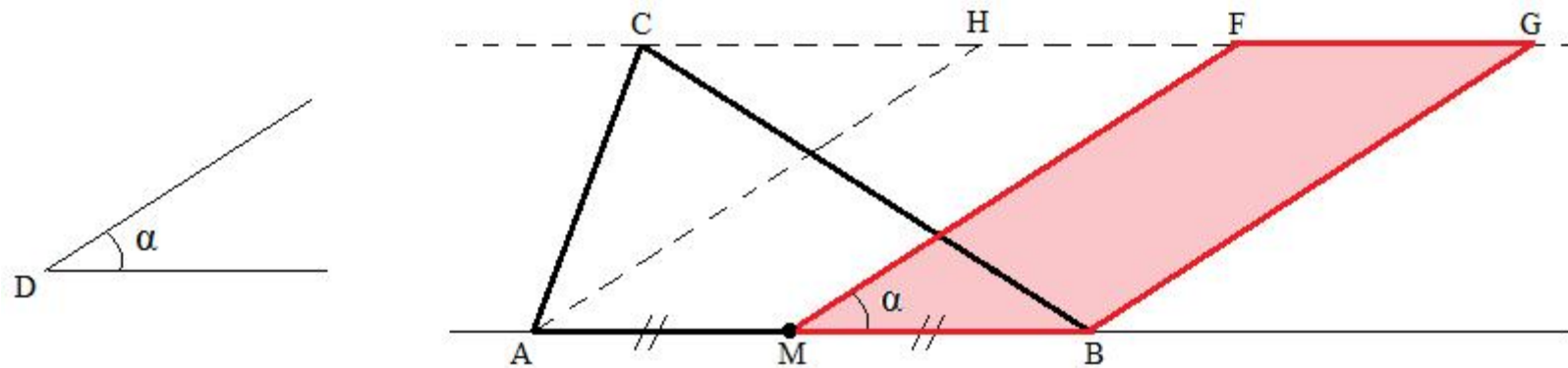
**I.43-44 (gnomone e costruzione del rettangolo di dato lato ed equivalente ad un triangolo dato),**

**I.45 (conclusione: costruzione di un rettangolo equivalente ad un poligono dato),**

**II.5 (costruzione di due quadrati la cui differenza sia equivalente ad un rettangolo dato),**

**II.14 (conclusione: costruzione del quadrato equivalente ad un poligono dato).**

**I.42 - *Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo uguale[equivalente] ad un triangolo dato.***

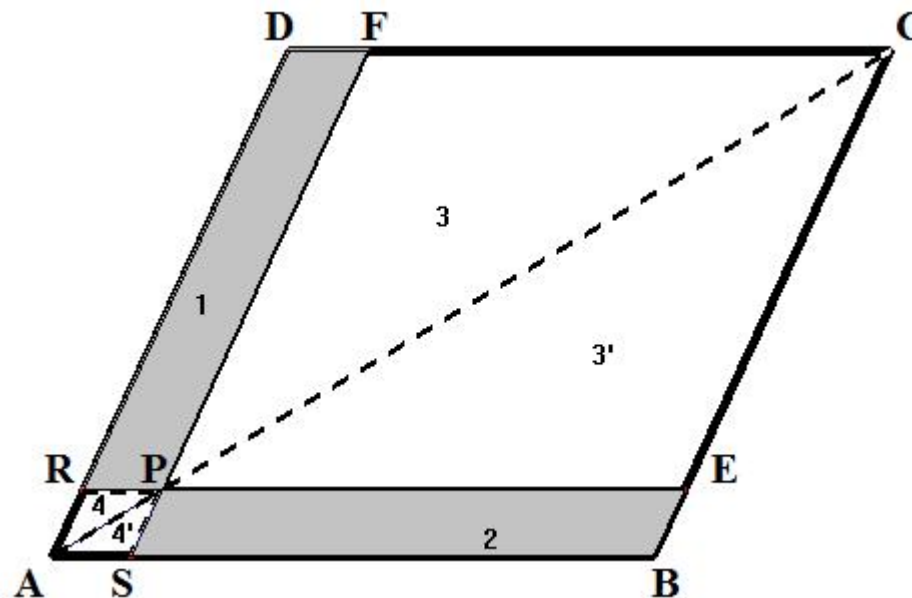


... in particolare costruire un rettangolo



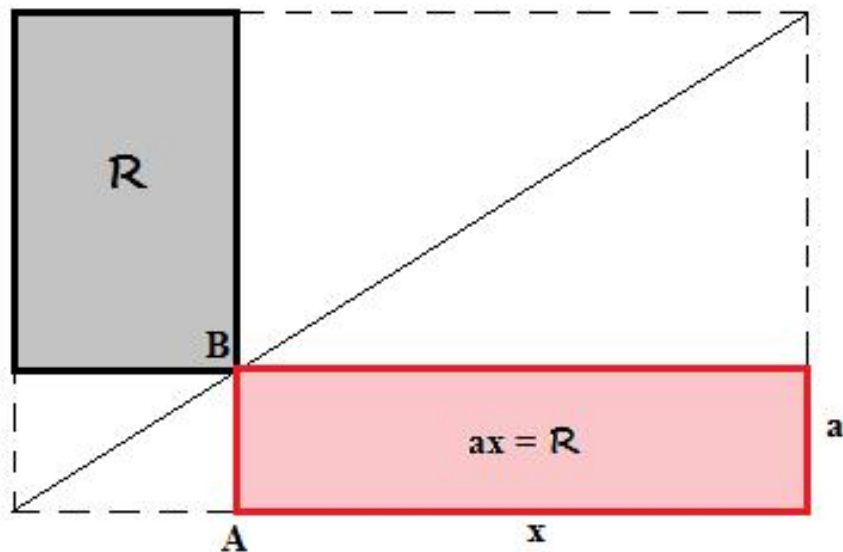
**I. 43** (Teorema dello Gnomone)

*In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi posti intorno alla diagonale sono uguali [equivalenti] fra loro.*



## Proposizione 44, Libro I

*Applicare ad una retta data, in un dato angolo rettilineo, un parallelogrammo uguale [equivalente] ad un triangolo dato.*

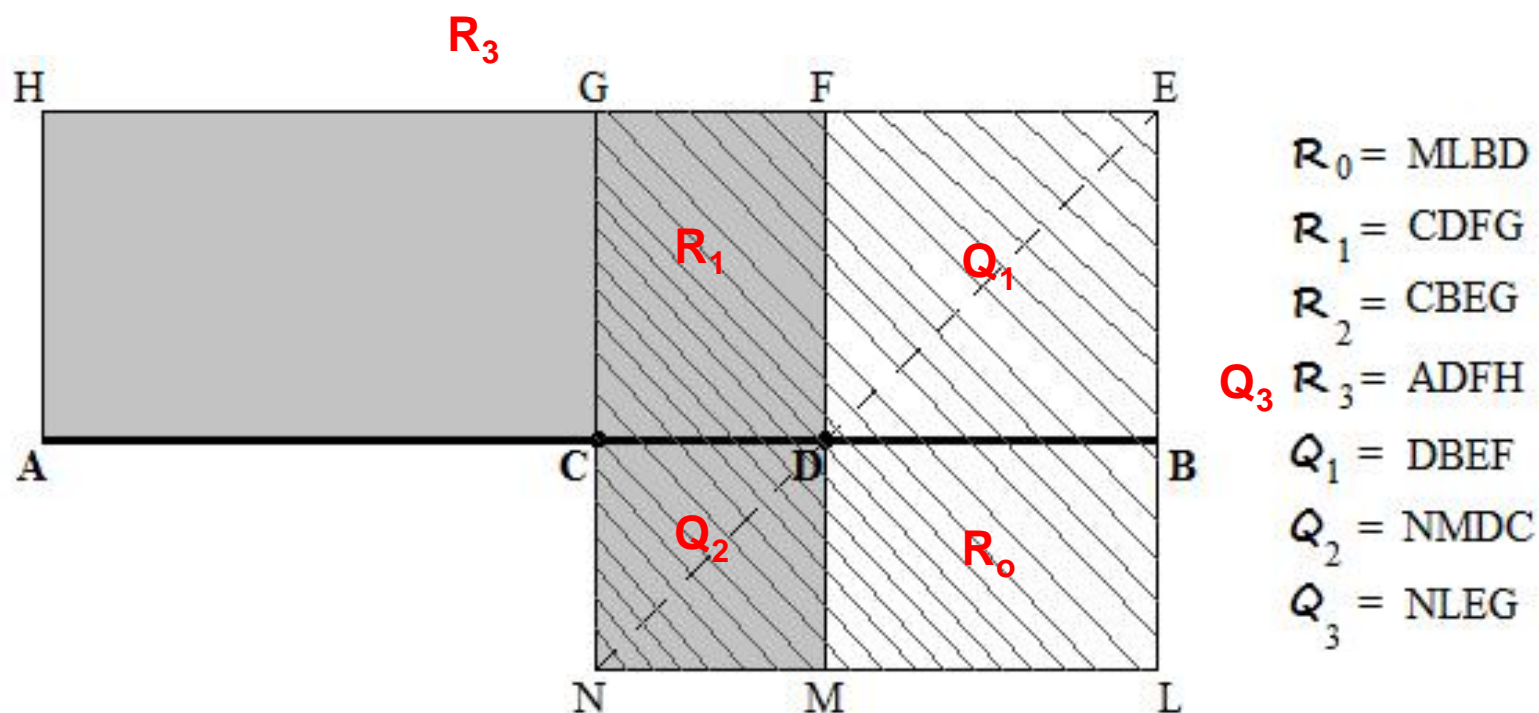


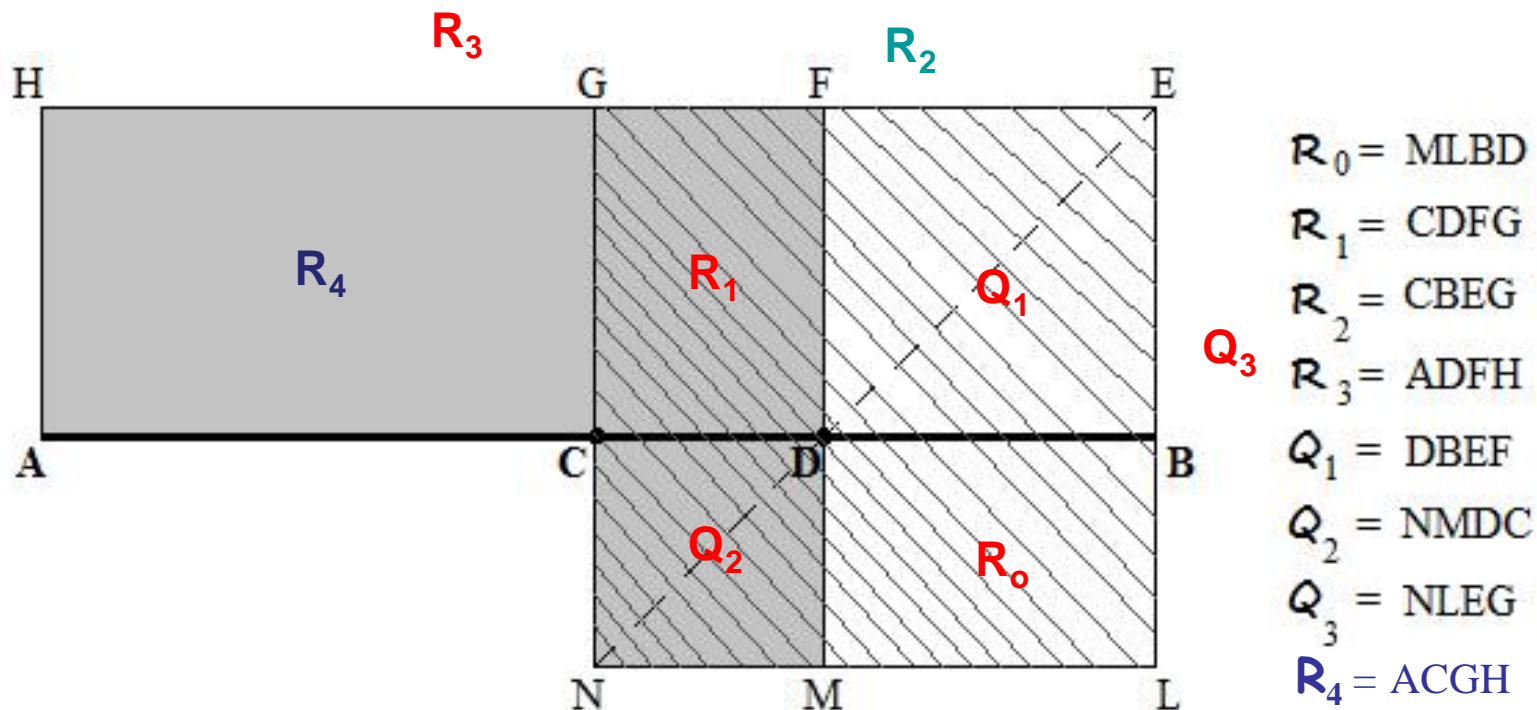
**In particolare dato un rettangolo, si costruisce un rettangolo ad esso equivalente di lato fissato.**

**I. 45** *Costruire un parallelogrammo uguale [equivalente] ad una figura rettilinea data in un dato angolo rettilineo.*

Si suddivide il poligono dato in triangoli, tracciando ad esempio le diagonali da un vertice. Si **fissa un segmento** e per ciascun triangolo si costruisce il **rettangolo** ad esso equivalente e con un lato uguale al lato fissato. Questi rettangoli “uniti insieme” daranno il rettangolo equivalente al poligono dato.

**II. 5** *Se si divide una retta in parti uguali e disuguali, il rettangolo compreso dalle parti disuguali della retta [il rettangolo i cui lati sono i due segmenti disuguali in cui è stato diviso il segmento] insieme al quadrato della parte compresa fra i punti di divisione, è uguale al quadrato della metà della retta.*





$R_1 \text{ eq } R_0$  (per la prop. I.43 - Gnomone)

proprietà visive :

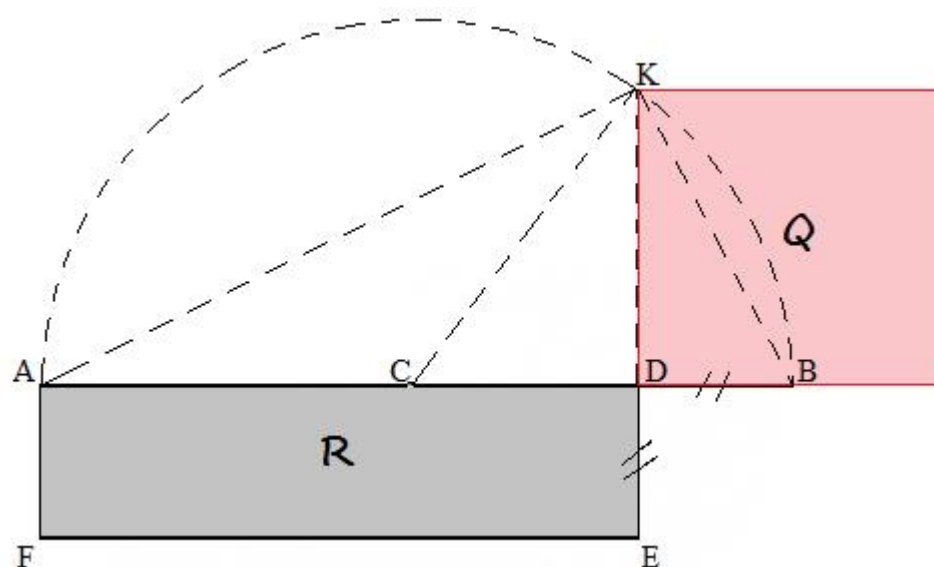
$R_2 \text{ eq } Q_1 \hat{=} R_1 \text{ ( eq } Q_1 \hat{=} R_0 \text{ )}$  e  $R_3 \text{ eq } R_1 \hat{=} R_4 \text{ eq } (R_1 \hat{=} R_2)$

$Q_3 \text{ eq } R_0 \hat{=} R_1 \hat{=} Q_1 \hat{=} Q_2$

Allora, togliendo  $Q_2$  da  $Q_3$  ciò che resta è equivalente a

$R_0 \hat{=} R_1 \hat{=} Q_1 \text{ eq } R_1 \hat{=} R_2 \text{ eq } R_3$

## II. 14 *Costruire un quadrato uguale [equivalente] ad una figura rettilinea data.*



$R \hat{=} CD$  **eq**  $CB$  (per la prop. II.5)  
 $CD$  **eq**  $CK$  (per costruzione)  
 $CK$  **eq**  $CD \hat{=} Q$  (per il teorema di Pitagora)

Dal confronto, per sottrazione, segue  **$R \text{ eq } Q (= DK)$**

P. 3

L'uso della storia in classe: l'esperienza di un laboratorio per l'avvio alla dimostrazione (cfr. 6).

Si vedrà il laboratorio

**La dimostrazione  
in contesto geometrico**  
laboratorio PLS

Rimini, gennaio 2014