

**XXXVII SEMINARIO NAZIONALE  
DI DIDATTICA DELLA MATEMATICA “GIOVANNI PRODI”**

**Gennaio 2020**

**DALLA DEFINIZIONE DI COMPETENZA  
MATEMATICA AI PROFILI COGNITIVI E  
AFFETTIVI  
*IL DIFFICILE EQUILIBRIO TRA RICERCA DI UNA  
DEFINIZIONE TEORICA DEI COSTRUTTI E  
SVILUPPO DI STRUMENTI DI OSSERVAZIONE E  
INTERVENTO***

Anna Baccaglioni-Frank, Università di Pisa

Pietro Di Martino, Università di Pisa

Mirko Maracci, Università di Pavia

# Indice

<b>INTRODUZIONE</b> .....	<b>3</b>
<b>1 LA NOZIONE DI COMPETENZA E DI COMPETENZA MATEMATICA</b> .....	<b>6</b>
1.1 INTRODUZIONE .....	6
1.2 LA NOZIONE DI <i>COMPETENZA</i> NEL LINGUAGGIO COMUNE .....	8
1.3 LA NOZIONE DI COMPETENZA NEL CONTESTO DELLE SCIENZE SOCIALI E DELL'EDUCAZIONE.....	9
1.3.1 <i>Cenni sull'evoluzione dell'idea di competenza</i> .....	10
1.3.2 <i>Le diverse possibili caratterizzazioni dell'idea di competenza</i> .....	12
1.3.3 <i>Caratteristiche di una proto-definizione in ambito educativo</i> .....	15
1.3.4 <i>La dimensione del compito</i> .....	17
1.3.5 <i>La dimensione individuale/sociale/istituzionale della competenza</i> .....	19
1.3.6 <i>La valutazione della competenza</i> .....	20
1.3.7 <i>Ulteriori spunti di riflessione</i> .....	23
1.4 LA NOZIONE DI <i>COMPETENZA</i> NEL QUADRO NORMATIVO.....	24
1.5 LA NOZIONE DI <i>COMPETENZA MATEMATICA</i> .....	27
1.5.1 <i>L'idea di habits of mind</i> .....	28
1.5.2 <i>L'idea di mathematical proficiency</i> .....	29
1.5.3 <i>La nozione di mathematical competence nel progetto KOM</i> .....	30
1.5.4 <i>La nozione di mathematical literacy nelle rilevazioni OCSE-PISA</i> .....	34
1.5.5 <i>Una sintesi provvisoria</i> .....	37
1.5.6 <i>Promuovere lo sviluppo della competenza matematica</i> .....	39
<b>2 L'ATTEGGIAMENTO NEI CONFRONTI DELLA MATEMATICA</b> .....	<b>42</b>
2.1 IL PROBLEMA E GLI OBIETTIVI DI CERCARE UNA DEFINIZIONE.....	42
2.2 I RIFERIMENTI ALL'ATTEGGIAMENTO NEL PANORAMA ITALIANO .....	43
2.3 LE PRIME RICERCHE SULL'ATTEGGIAMENTO IN EDUCAZIONE MATEMATICA.....	44
2.4 LA SVOLTA INTERPRETATIVA.....	47
2.5 LA NECESSITÀ E LA COMPLESSITÀ DI DEFINIRE L'ATTEGGIAMENTO.....	50
2.6 LA DEFINIZIONE DI ATTEGGIAMENTO NEI CONFRONTI DELLA MATEMATICA: LA NOSTRA RICERCA .....	51
2.7 DALLA DEFINIZIONE DI ATTEGGIAMENTO ALLE DIVERSE CARATTERIZZAZIONI DI ATTEGGIAMENTO NEGATIVO.....	56
<b>3 IL COSTRUTTO DELLA "DISCALCULIA"</b> .....	<b>60</b>
3.1 "DISCALCULIA", "MATHEMATICAL LEARNING DISABILITY", O...: LA DIFFICOLTÀ DI ARRIVARE AD UNA DEFINIZIONE CONDIVISA.....	60
3.1.1 <i>La discalculia nel panorama italiano</i> .....	64
3.1.2 <i>Diagnosticare discalculia in Italia: un esempio di diagnosi</i> .....	66
3.1.3 <i>Modelli teorici di riferimento nei test diagnostici italiani: il caso dei test AC-MT e ABCA</i> .....	69
3.1.4 <i>La potenziale modificabilità dei profili di discalculia grazie alle esperienze didattiche</i> .....	72
3.1.5 <i>Il lessico utilizzato socialmente</i> .....	75
3.2 ALCUNE CRITICHE AL COSTRUTTO DI MLD E DI COME VIENE DIAGNOSTICATA, SECONDO UN PUNTO DI VISTA DIDATTICO .....	75
3.3 UN NUOVO MODELLO INTERDISCIPLINARE E MULTIDIMENSIONALE .....	80
3.3.1 <i>Il modello dei quattro domini e il MathPro Test</i> .....	80
3.3.2 <i>La standardizzazione italiana del MathPro Test e la lettura dei "profili"</i> .....	83
3.3.3 <i>Nuove ipotesi didattiche - work in progress</i> .....	86
<b>CONCLUSIONI</b> .....	<b>88</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b> .....	<b>93</b>

## Introduzione

Il seminario si focalizza su tre costrutti distinti – competenza matematica, difficoltà di apprendimento in matematica, atteggiamento nei confronti della matematica – e su ricerche portate avanti da tre ricercatori diversi, in stati di avanzamento diversi: dalla ricerca conclusa sui profili di atteggiamento a quelle in corso su profili cognitivi e competenze. La diversità, o meglio la differenziazione, è dunque un tratto distintivo del seminario, quasi una metafora di un messaggio di fondo che pervaderà la discussione: differenziare per comprendere meglio, per distinguere, ma anche per vedere la stessa cosa da più punti di vista.

D'altra parte, i tre costrutti hanno anche tanti aspetti in comune. Il più evidente e forse meno originale è che sono costrutti diventati molto rilevanti nell'ambito della mathematics education (ME), ma che hanno origine in ambiti diversi dalla ME.

Oltre a ciò sono costrutti usati correntemente nella pratica didattica, potenzialmente di grande impatto sulla scuola sia per la pratica didattica che per la politica educativa.

Infine – ma è proprio il caso di dire ultimo ma non ultimo perché è uno dei motivi principali dei nostri studi – sono costrutti spesso usati nella pratica didattica per “etichettare”, in positivo e in negativo, gli studenti, piuttosto che strumenti per progettare percorsi o intervenire su difficoltà. Relativamente alle difficoltà, possiamo dire che in un certo senso l'etichettatura legata a questi costrutti diventa quasi un alibi per non intervenire a vari livelli (l'insegnante, la scuola, la politica): un modo di dire “non c'è niente da fare”.

La convinzione comune che muove i nostri studi invece è proprio quella che si possa e debba fare molto, e che la ricerca teorica possa dare strumenti per ‘fare’ nella giusta direzione.

Mettere insieme gli aspetti che uniscono le nostre ricerche e i nostri approcci, e contemporaneamente riflettere sulle diversità, vuole nelle nostre intenzioni provare a dare un contributo in questo senso. Il confronto infatti può, a nostro avviso, essere interessante sotto diversi punti di vista.

Per prima cosa, il confronto porta all'esplicitazione delle scelte e alla condivisione di un tema che è stato centrale per le ricerche che abbiamo condotto: quello della *buona* definizione dei costrutti. Nella diversità emerge infatti da subito un aspetto in comune alla ricerca relativa ai tre costrutti: tutti e tre, molto richiamati sia a livello di ricerca educativa che di pratica didattica, sono usati con numerose accezioni diverse. Per questo appare necessario interrogarsi su cosa significhi cercare una buona definizione del costrutto.

Un secondo aspetto, strettamente legato alla natura stessa dei costrutti di cui discuteremo, è la riflessione sul tema delle difficoltà in matematica, sia sul piano della riflessione teorica che del suo possibile risvolto nella pratica didattica. La definizione di ‘competenza matematica’ ha come naturale

rovescio della medaglia la definizione di cosa significhi ‘non essere competente’, e dunque è intimamente legata all’idea di difficoltà in matematica. D’altra parte, gli studi sulla caratterizzazione di difficoltà di apprendimento e di atteggiamento affrontano, con approcci diversi e su piani diversi (cognitivo e affettivo), proprio il tema della definizione della difficoltà in matematica e del suo possibile riconoscimento in ottica di intervento. Anche in questo caso, approcci e punti di vista diversi ma legati da un aspetto fondamentale: l’obiettivo di fondo, ovvero quello di sviluppare studi teorici per comprendere fenomeni in modo da fornire strumenti interpretativi e di intervento mirato per la pratica didattica.

Il terzo aspetto su cui speriamo il seminario possa offrire degli spunti di riflessione è di natura teorica: confrontare e integrare tra loro ricerche distinte, ma profondamente intrecciate può sperabilmente portare un contributo di riflessione sulle peculiarità, le somiglianze, le necessità e le difficoltà delle ricerche del tipo di quelle che abbiamo condotto. In definitiva, l’intenzione è anche quella di proporre una riflessione, a livello meta: sulle scelte alla base della caratterizzazione dei costrutti in Mathematics Education (ME), sulle difficoltà a caratterizzare tali costrutti, soprattutto quando quotidianamente usati, con mille significati diversi, nella pratica didattica, e sulle difficoltà, una volta caratterizzati i costrutti, a sviluppare strumenti di osservazione coerenti.

Se ‘differenza’, ‘differenziazione’ e ‘complessità’ possono essere riconosciute dunque come parole chiave del seminario, se il seminario nasce da tre voci e tre esperienze distinte, è anche vero che la proposta di questo seminario nasce dalla convinzione che le ricerche e i nostri punti di vista siano sì diversi, ma profondamente intrecciati e intrecciabili.

L’essere intrecciati al presente è ciò che ha permesso la progettazione di questo seminario, è l’individuazione di un filo narrativo a priori e fa riferimento ai chiari legami che esistono tra i tre costrutti in gioco, ma anche e soprattutto ai nostri interessi comuni di ricerca.

In particolare, un interesse comune è l’interesse per le difficoltà in matematica, così come in comune c’è la volontà di sviluppare studi teorici che possano fornire chiavi interpretative nuove, e, allo stesso tempo, suggerire interventi di prevenzione e recupero delle difficoltà strumenti mirati.

L’intrecciabilità al futuro rimanda invece al lavoro per il seminario e a questi mesi di confronto tra noi; da una parte, come detto, è stato un punto di partenza, dall’altra è un obiettivo del seminario: se saremo riusciti a restituirla lo sapremo solo al termine del seminario stesso.

Pisa, 22 dicembre 2019

Anna, Mirko e Pietro

# 1 La nozione di competenza e di competenza matematica

## 1.1 Introduzione

L'idea di *competenza* ha acquisito negli ultimi anni grande importanza nell'ambito del dibattito sull'istruzione e la formazione promosso in Europa, e conseguentemente in Italia, a seguito della cosiddetta "strategia di Lisbona". L'interesse per l'idea di competenza non è comunque ristretto al contesto europeo né in Europa al dibattito sulla strategia di Lisbona.

In effetti il termine *competenza* è utilizzato al di là del contesto istituzionale delle politiche per l'educazione in diversi ambiti delle scienze sociali, della psicologia e delle scienze dell'educazione con particolare riferimento al mondo del lavoro, alla formazione professionale in ingresso e in itinere, alla qualificazione professionale, alla mobilità... è un termine utilizzato poi al di fuori del contesto prettamente professionale nell'ambito dell'educazione e delle didattiche disciplinari, e in particolare, quel che maggiormente ci riguarda, nell'ambito della ME.

Ci può essere la tentazione di considerare la nozione di competenza come "boundary object" (Cobb, Mclaine, Lamberg & Dean, 2003; Star & Griesemer, 1989); cioè come oggetto che si trova al confine tra diverse aree e possiede in ciascuna di esse un significato abbastanza ben delineato e allo stesso tempo abbastanza flessibile da divenire un mezzo che rende possibile la comunicazione e il confronto tra diverse comunità che operano nelle diverse aree.

Boundary objects are objects which are both plastic enough to adapt to local needs and constraints of the several parties employing them, yet robust enough to maintain a common identity across sites. They are weakly structured in common use, and become strongly structured in individual-site use. They may be abstract or concrete. They have different meanings in different social worlds but their structure is common enough to more than one world to make them recognizable, a means of translation. The creation and management of boundary objects is key in developing and maintaining coherence across intersecting social worlds. (Star & Griesemer, 1989, p.393)

Il concetto di boundary object assume particolare interesse, quindi, quando si considerano attività interdisciplinari e la collaborazione tra diverse comunità o diverse organizzazioni come elemento catalizzatore.

Tale prospettiva sembra presupporre tuttavia che all'interno delle diverse comunità il significato del boundary object in questione sia relativamente condiviso e stabile, e come vedremo per quel che riguarda il costrutto di competenza la situazione non è proprio così.

Nella prima parte di questo contributo analizzeremo l'origine del costrutto di competenza, la sua evoluzione e come è concettualizzato da diversi autori in diversi ambiti. Questa analisi ci sembra

importante da un lato perché rileva tutta la complessità dell'idea che si è cercato e si cerca di catturare con il costrutto di competenza, e dall'altro perché solo facendo emergere questa complessità si può sperare di rendere il costrutto realmente operativo e utile alla pratica e alla ricerca educativa, e solo così la discussione tra le diverse comunità che ruotano attorno al mondo dell'educazione può liberarsi di ambiguità e diventare proficua. Al contrario, in assenza di tale riflessione l'uso anche estensivo del termine competenza non potrà che dare solo una superficiale parvenza di condivisione e convergenza di punti di vista. Gilbert e Parlier evidenziano questo rischio riferendosi al termine competenza usando la metafora (di Albert Jacquard) della "parola-spugna":

[...] le terme de compétence est désormais un des plus employés, c'est aussi l'un des moins conceptualisés. La diffusion rapide de la notion de compétence dans le discours social est source d'ambiguïté et de faux sens.

[...] Comme l'éponge absorbe peu à peu les substances qu'elle rencontre, le mot compétence s'enrichit de tous les sens attribués par ceux qui l'emploient. Pressée, une éponge se vide; de même exprimé à tout propos, le terme de compétence ne restitue plus aucune signification. (Gilbert & Parlier, 1992, p.15)

Anche se Gilbert e Parlier scrivono nel 1992, il pericolo che indicano è almeno in parte tuttora presente.

Prima di sviluppare questa riflessione è opportuno osservare due ulteriori aspetti:

- Il termine "competenza" fa parte anche del linguaggio comune, e anzi fa parte del linguaggio comune prima che di quello scientifico o istituzionale; la sua adozione/importazione nel discorso scientifico o istituzionale può quindi conservare, al di là delle intenzioni e delle definizioni esplicite (quando assunte), tracce del senso che il termine ha nel contesto quotidiano e in questo senso influenzare tacitamente il modo con cui usiamo e interpretiamo il termine. Appare quindi interessante esaminare innanzitutto il significato che esso assume nel contesto quotidiano.
- Alcune delle idee che il costrutto competenza vuol catturare non sono certo nuove e sono state frutto di diverse elaborazioni. La storia di queste elaborazioni e delle riflessioni ad esse collegate non coincidono con la storia del termine competenza, e comunque contribuiscono alla riflessione attuale. Data la vastità della letteratura, prenderemo in esame le riflessioni riferibili al concetto di competenza, al di là dell'uso del termine, solo relativamente alla matematica.

## 1.2 La nozione di *competenza* nel linguaggio comune

Il dizionario Treccani (vocabolario online, <http://www.treccani.it/vocabolario/>) riporta tra i primi significati del termine *competenza*:

- L'essere competente; idoneità e autorità di trattare, giudicare, risolvere determinate questioni.
- Capacità, per cultura o esperienza, di parlare, discutere, esprimere giudizi su determinati argomenti.

E per il termine *competente*:

- Che ha capacità o autorità di esercitare un determinato ufficio, di esprimersi su determinate questioni
- Che è in grado di parlare o giudicare autorevolmente su argomenti di un'arte, di una disciplina.

Come si vede i due termini sono collegati alla capacità o autorità ad esprimere un giudizio, mentre resta più sfumato, per non dire assente, il riferimento alla capacità o autorità di svolgere un'attività "pratica", di agire per risolvere determinati problemi, che appare oggi la componente maggiormente valorizzata nell'ambito delle scienze sociali e dell'educazione.

Tale riferimento è presente invece nel significato che il dizionario Garzanti Linguistica (<https://www.garzantilinguistica.it/>) assegna al termine *competente*:

- che, chi ha la capacità, le qualità, le conoscenze, l'esperienza necessarie a fare bene qualcosa, a ben valutare, giudicare ecc.
- che è investito di una funzione, di un potere ed è nel diritto esclusivo di esercitarli.

Ci sono quindi due dimensioni in gioco, due dicotomie, per così dire: quella tra qualità e capacità personali, da un lato, e ruolo, funzione e autorità e responsabilità che da essi derivano, dall'altro; e quella tra componente pragmatica che sottende l'agire e componente riflessiva, dichiarativa che sottende la formulazione e l'espressione di un giudizio.

Queste due dimensioni sono presenti già nei significati dei termini latini da cui i termini *competenza* e *competente* derivano: *competentia* e *competens*; entrambi da *competere* (unione di *cum* – insieme – e *petere* – andare verso, dirigersi – propriamente "andare insieme") con il significato di "gareggiare, concorrere", ma anche "appartenere, spettare" (Pianigiani *Vocabolario etimologico della lingua italiana*, online [www.etimo.it](http://www.etimo.it); Treccani, vocabolario online, <http://www.treccani.it/vocabolario/>).

E sono presenti, osserva Mulder (2007, p.6), anche in altre lingue dell'Europa occidentale: Francese, Inglese, Olandese, Spagnolo. In queste, i termini corrispettivi di *competenza* e *competente* sono utilizzati in diversi contesti – professionale, giuridico, istituzionale, personale – con significati legati a quelli di accreditamento, appropriatezza, approvazione, autorizzazione, certificazione, titolo, giurisdizione, responsabilità, qualifica (ibidem, p. 6).

Concludiamo menzionando la connotazione spregiativa che spesso assume il termine “incompetente”. Infatti, se alcuni, come il vocabolario Treccani, attribuiscono al termine incompetente il significato di “non competente”:

- di persona che non è in grado di parlare o giudicare autorevolmente su un argomento o una disciplina, per non averne sufficiente cognizione o esperienza

altri gli attribuiscono piuttosto il significato di “opposto” a competente, come ad esempio il Dizionario WordReference.com (<https://www.wordreference.com/>):

- sfornito delle cognizioni e dell’esperienza necessarie a pronunciarsi o a operare con sicurezza e dignità.

### **1.3 La nozione di competenza nel contesto delle scienze sociali e dell’educazione**

L’obiettivo di questo paragrafo è discutere l’origine del costrutto di competenza, la sua evoluzione e le sue diverse concettualizzazioni al di fuori dell’ambito della ME. Il titolo del paragrafo menziona le scienze sociali e le scienze dell’educazione, ma il contesto in cui il costrutto di competenza si è sviluppato è molto più ampio e comprende le scienze dello sviluppo, la psicologia, la linguistica, la sociologia, le scienze politiche, l’economia... La letteratura di riferimento è estremamente vasta e spesso i contributi dei diversi autori nei diversi ambiti restano isolati, scarsamente connessi gli uni agli altri. In questo panorama è difficile rintracciare con chiarezza la nascita e le linee di sviluppo del concetto di competenza. Ed è allo stesso modo difficile, anzi impossibile, individuare una definizione scientifica comune largamente (se non universalmente) condivisa. D’altra parte, la nozione di competenza rimane una delle più elusive in ambito educativo (Kilpatrick, 2014, p. 85): il termine viene spesso usato senza essere definito; spesso si assume implicitamente che il significato del termine sia chiaro, intuitivo o facilmente intuibile nel contesto in cui è usato, o comunque condiviso dai lettori; oppure lo si definisce facendo ricorso a termini che ne sono quasi sinonimi: capacità, abilità, padronanza...

Resta comunque condiviso il tentativo di caratterizzare il termine competenza come sistema di “prerequisiti” o “condizioni”, individuali o collettive, per poter intraprendere azioni efficaci nel contesto di determinate attività.

Nonetheless, in all of these disciplines, competence is interpreted as a roughly specialized system of individual and/or collective abilities, proficiencies, or skills that are necessary or sufficient to reach a specific goal. This can be applied to individual dispositions or to the distribution of such dispositions within a social group or an institution. (Weinert, 2001, p. 45)

Ciò che rende difficile sistematizzare la nozione di competenza non è solo la varietà di significati esplicitamente attribuiti al termine, ma anche di quelli che emergono in modo implicito dall'uso stesso di esso.

The variety of meanings given to the concept of competence is seen not only in its many uses, but also in the construction of compound words to express competence [...] It is not possible to discern or infer a coherent theory out of these many uses. There is no basis for a theoretically grounded definition or classification from the seemingly endless inventory of the ways the term 'competence' is used (Weinert, 2001, p. 46).

Quanto scritto basta per comprendere che rinunciamo all'ambizione di ricostruire l'intera storia dell'evoluzione del costrutto di competenza (gli autori che se ne sono occupati mettono, essi stessi, in evidenza tratti di questa evoluzione diversi e non facilmente riconciliabili) e di sviluppare una panoramica organica sulle sue diverse concettualizzazioni e articolazioni. Invece, da un lato, ci limiteremo a delineare solo alcuni elementi dell'evoluzione di questa idea, e, dall'altro, tenteremo, facendo riferimento in particolare ai lavori di Mulder e Weinert, già citati sopra, di evidenziare alcuni aspetti legati alla complessità del costrutto di competenza che ne mettano in evidenza il carattere multi-dimensionale.

### 1.3.1 Cenni sull'evoluzione dell'idea di competenza

Come emerge dal paragrafo precedente la nozione di competenza ha radici lontane. Il termine era in uso già presso i Latini con accezioni "vicine" a quelle attuali, anche se l'origine dell'idea può essere ricondotta alla filosofia greca (Mulder, Weigel & Collins, 2006; Pellerey, 2013).

Diversi autori individuano diverse origini dell'uso del termine competenza in diversi ambiti, apparentemente tra loro indipendenti.

In ambito educativo, secondo Pellerey (2004), l'idea di competenza comincia ad essere esplorata intorno agli anni Sessanta, quando ha inizio un movimento che tende a considerare con maggior attenzione e a definire in maniera più precisa i risultati attesi in corrispondenza dei diversi interventi educativi. Risultati che cominciano ad essere intesi come "**comportamenti** finali osservabili e, in qualche modo, misurabili" (p.35, grassetto in originale). La declinazione degli obiettivi didattici in termini di comportamenti osservabili e misurabili e con essa l'identificazione dell'idea di competenza con quella di prestazione hanno pervaso per lungo tempo i contesti educativi scolastici in conseguenza di un'impostazione di tipo comportamentista dominante in quegli anni. La nozione di competenza si arricchisce grazie alla riflessione che si sviluppa nell'ambito del mondo del lavoro a partire dalla fine degli anni Settanta. A partire da quegli anni si assiste alla cosiddetta "detaylorizzazione" del lavoro (Terraneo & Avanzino, 2006), che porta a un radicale cambio di

paradigma nella concezione dei rapporti tra lavoro e produzione, e dell'organizzazione del lavoro stesso. In un'organizzazione del lavoro di tipo tayloriana, l'attività che il lavoratore deve eseguire è decomposta in semplici unità, operazioni prescritte, completamente e dettagliatamente predefinite. Quando l'organizzazione del lavoro deve fare appello all'iniziativa e alla versatilità del lavoratore, occorre che questi abbia sviluppato e sappia mobilitare competenze che gli consentano di affrontare un imprevisto, innovare e decidere in situazioni incerte. Questo mutato paradigma porta a ripensare la formazione professionale e con essa l'educazione più in generale. Appare in questo contesto particolarmente rilevante l'apporto di McClelland (1973, citato in Pellerey, 2004; in Mulder, 2007; e in Mulder, Weigel & Collins, 2007) che ha avviato una serie di studi volti a promuovere presso le aziende la valutazione delle competenze come strumento per la selezione di personale. Negli anni precedenti, il lavoro di Chomsky (1968) introduce, in ambito linguistico, la distinzione tra prestazione e competenza. Anche se il significato che Chomsky attribuisce al termine "competenza" differisce da quelli generalmente assunti in ambito educativo e anche se il suo influsso sulla ricerca educativa si avverterà solo più tardi (Pellerey, 2004), nondimeno questa distinzione è di importanza cruciale. La competenza viene ad essere quindi concepita come la capacità astratta posseduta da un individuo, mentre la prestazione viene considerata come la possibile manifestazione di una competenza (Bara, 1999). Allo stesso modo, viene riconosciuto che la qualità della prestazione non dipende solo dall'insieme di conoscenze e abilità che l'individuo potrebbe possedere o meno, ma si basa su un numero di fattori non direttamente osservabili.

Questa breve panoramica dà un'idea della ricca elaborazione avvenuta attorno a questa idea, che negli anni ha risentito dell'influenza di diversi approcci e paradigmi teorici<sup>1</sup>, e dei molti intrecci che questa elaborazione ha visto svilupparsi. Pur in questa eterogeneità sono rintracciabili linee di tendenza generali nello sviluppo dell'idea di competenza. Basandosi sull'analisi di Mulder, Weigel e Collins (2007), Marzano e Iannotta (2015) suggeriscono che si possano individuare tre direzioni principali lungo cui è avvenuto lo sviluppo della nozione di competenza.

- *Dal semplice al complesso.* La nozione di competenza è stata ampliata per comprendere la dimensione cognitiva, motivazionale e emotiva. Anche se, osserviamo noi, non tutti gli autori includono le dimensioni metacognitiva e affettiva nel costrutto di competenza.
- *Dall'esterno verso l'interno.* Si richiama l'attenzione su dimensioni soggettive che non sono direttamente osservabili dall'esterno, ma che costituiscono la base del comportamento individuale.

---

<sup>1</sup>Mulder, Weigel e Collins (2007) mettono in evidenza 3 tipi di approccio teorico alla nozione di competenza: comportamentista, generale, e cognitivo (p.72).

- *Da teorico a pragmatico*. La competenza è correlata alla capacità dell'individuo di utilizzare strategie operative per la soluzione di problemi relativi a specifiche dimensioni della cultura e del contesto.

La definizione di Pellerey (2004) sembra condensare efficacemente questa evoluzione:

“La competenza è la capacità di affrontare un compito o una serie di compiti, essere in grado di avviare e orchestrare le proprie risorse interne - cognitive, affettive e volitive - e utilizzare quelle disponibili esterne in modo coerente e fruttuoso” (p.12).

Ma si tratta solo di una possibile proposta, per quanto secondo noi molto interessante, ma ci torneremo in seguito. Come vedremo nel prossimo paragrafo le elaborazioni dell'idea di competenza sono comunque molteplici

### 1.3.2 Le diverse possibili caratterizzazioni dell'idea di competenza

Si può dire che il processo delineato sopra ha condotto a un comune sentire secondo il quale le competenze possono essere considerate come un insieme di abilità di varia natura che costituiscono prerequisiti necessari per soddisfare con successo determinate richieste (Mulder, 2017, p.1080). Tuttavia come abbiamo già anticipato, ci sono differenze significative nel panorama delle scienze umane e del comportamento. Per avere un'idea di questa varietà possiamo riferirci all'analisi di Weinert (2001), il quale individua 9 differenti connotazioni teoriche che hanno caratterizzato o caratterizzano il costrutto di competenza come elaborato nell'ambito delle scienze sociali e del comportamento: (a) *general cognitive competence*, (b) *specialized cognitive competencies*, (c) *the competence-performance model*, (d) *modifications of the competence-performance model*, (e) *cognitive competencies and motivational action tendencies*, (f) *objective and subjective competence concepts*, (g) *action competence*, (h) *key-competencies* and (i) *metacompetencies*.

Anche se la descrizione di questi diversi approcci al costrutto di competenza e al suo utilizzo e la distinzione tra essi non sono sempre così chiari<sup>2</sup>, quello che emerge con forza è che il termine competenza è caricato di molteplici significati, talvolta contraddittori tra loro. Osserva a tal proposito Weinert (2001):

“Unless one argues that the individual prerequisites for the array of cognitive performances and goal directed actions must include all primary mental abilities, all learned skills, knowledge and strategies, the entire complex of learning and achievement motives, and all important vocational

---

<sup>2</sup> Rinunciamo in ogni caso qui a proporre queste descrizioni, perché ci porterebbe lontano dagli obiettivi di questo lavoro. Osserviamo, a conferma della complessità della situazione, che Weinert stesso subito dopo aver introdotto questa classificazione, accorpa alcune “voci” e si orienta su una classificazione per così dire “minimale” che comprende 7 categorie (“To capture the differences between the various theoretical approaches and perspectives, it is necessary to differentiate at least seven different ways in which the concept is used”, Weinert, 2001). In letteratura, si trovano sia autori che citando Weinert si riferiscono alla classificazione “completa” dei 9 approcci, sia autori che si riferiscono a quella “minimale” con 7 approcci.

skills, the various definitions of competence listed in the first sections of this report are mutually exclusive on a phenomenological, conceptual or theoretical level”

Emergono infatti, anche se in modo ancora indistinto, diverse dimensioni, opposte polarità, che vengono prese o meno in considerazione in questi diversi approcci.

Uno studio che più di questo tenta di estrapolare dalle definizioni usate in letteratura (in particolare in riferimento alla formazione professionale) e mettere quindi a fuoco le varie dimensioni che possono essere coinvolte nella definizione del costrutto di competenza è quello di Mulder (2017, e 2002 citato in Mulder et al., 2007). Come ci si può aspettare il quadro delle dimensioni del costrutto di competenza ha subito negli anni ad opera dello stesso Mulder una rielaborazione piuttosto decisa. Qui ci riferiamo in particolare alla proposta più recente, quella del 2017, che appare più matura e meglio definita; la integreremo comunque con quella del 2002, quando possibile e opportuno, perché troviamo interessante il tentativo fatto allora di definire le dimensioni tramite opposte polarità. Prima di descrivere le dimensioni, premettiamo che Mulder utilizza i termini *competence* e *competency* (soprattutto al plurale *competencies*) senza una definizione esplicita (cosa d'altra parte forse inevitabile dato il tipo di lavoro). Le dimensioni sono dunque:

- *Contextuality*. Questa dimensione indica fino a che punto la competenza viene considerata come una capacità generale, indipendente dal contesto o specifica di un determinato contesto. Esistono su questo approccio molto vari e totalmente opposti, come messo in evidenza anche da Weinert.
- *Developability*. Indica fino a che punto la competenza è considerata modificabile come risultato di un processo di apprendimento o, al contrario, come un tratto psicologico immutabile della persona.
- *Measurability*. Indica fino a che punto si ritiene che la competenza possa essere misurata. Secondo alcuni è impossibile misurare la competenza; altri sostengono che lo si possa fare a partire dall'osservazione, in senso lato e con diverse modalità, del comportamento di un individuo.
- *Transferability*. Indica fino a che punto si ritiene che la competenza possa essere applicata con successo in diverse situazioni. La trasferibilità è legata alla generalità delle competenze; più sono generali, più sono trasferibili. Ovviamente anche competenze specializzate possono essere mobilitate in contesti molto diversi se il dominio al quale si riferiscono entra in questi contesti (si pensi ad esempio a competenze aritmetiche).

- *Centrality*. Indica fino a che punto una competenza è considerata come periferica o centrale per un dato ambito. Le competenze centrali sono essenziali per prestazioni efficaci e vengono utilizzate frequentemente, mentre le competenze periferiche sono meno importanti.
- *Definibility*. Indica fino a che punto si ritiene che sia possibile definire la competenza. Ci sono autori che sostengono che sia impossibile farlo; ma nel campo dell'educazione sembra impossibile rinunciare a una definizione.
- *Knowledge inclusion*. Indica fino a che punto la competenza è concepita/rappresentata in termini di conoscenza piuttosto che di abilità o capacità. Mulder osserva che c'è (stato) il rischio che una formazione basata sulle competenze possa trascurare il ruolo della conoscenza, mentre invece una conoscenza solida è un ingrediente essenziale della competenza (anche) professionale.
- *Dynamic nature*. Indica fino a che punto si riconosce che l'attivazione di una competenza dipenda da diverse circostanze, la cui natura non è meglio precisata. Tra le "circostanze" che influenzano la mobilitazione di una competenza alcuni autori inseriscono fattori quali: fiducia, opportunità, aspettative, percezioni, intenzioni e possibilità di riconoscimenti.
- *Mastery level*. Indica fino a che punto si ritiene che la competenza possa essere posseduta ed esercitata a diversi livelli (es: mediocre, sufficiente, adeguata, buona, molto buona ed eccellente) delle competenze. Il rischio è quello di considerare nella formazione solo livelli minimi di competenza.
- *Performativity*. Indica fino a che punto la competenza è considerata come orientata alla prestazione. Il rischio, in un certo senso opposto al precedente, è che l'istruzione sia orientata esclusivamente al raggiungimento di livelli più alti di prestazione solo in quei settori che sono osservabili e misurabili.

Una osservazione che ci sembra importante fare subito riguarda il fatto che l'inclusione nel costrutto di competenza di componenti che attengano alla dimensione metacognitiva e affettiva non appare tra le dimensioni rilevate da Mulder. Invero fattori metacognitivi e affettivi vengono citati nella dimensione *dynamic nature*, ma il termine *circumstances* che adotta Mulder per descrivere questa dimensione non sembra, al di là degli esempi, potersi riferire in modo specifico a questi fattori. Questo contrasta in qualche misura con il fatto che Weinert abbia individuato tra i principali approcci teorici al costrutto di competenza proprio quelli che valorizzano il ruolo dei fattori metacognitivi e

affettivi. Questa discrepanza ci sembra confermare ulteriormente la varietà di approcci che sembra dipendere anche dall'ambito scientifico di riferimento (il lavoro di Muder si inserisce nell'ambito della formazione professionale, mentre quello di Weinert riguarda l'ambito più vasto delle scienze sociali).

### 1.3.3 Caratteristiche di una proto-definizione in ambito educativo

Al di là degli specifici aspetti che le due indagini mettono in evidenza e della rispondenza o meno tra questi, c'è un'importante differenza nell'impostazione che riguarda quali dati sono stati estrapolati dalle due ricognizioni e come sono stati organizzati i risultati. Le categorie messe in luce da Weinert si riferiscono ad approcci al costrutto di competenza che l'autore ha riscontrato nella sua ricognizione, che ha considerato nella loro complessità e tentato di accomunare sulla base di caratteristiche comuni; ciascuna categoria dunque ha dei rappresentanti, è "non vuota". Mulder invece ha identificato per ciascuna delle definizioni, che ha esaminato, i rispettivi tratti fondamentali (le dimensioni) che poi ha isolato e di cui ha dato una formulazione astratta; il risultato è uno spazio multi-dimensionale con dimensioni apparentemente indipendenti tra loro. Da un lato, nella misura in cui la ricognizione di Mulder è completa, possiamo (di principio) collocare in questo spazio una qualunque determinata definizione di competenza, dall'altra possiamo chiederci se sia possibile usare questo frame per costruire definizioni *ad hoc* fissando a piacere diversi valori su ciascuna di queste dimensioni. Ci rendiamo conto che espresso in questi termini, questo può apparire un gioco formale sterile senza nessun interesse; ma quello che vogliamo mettere in evidenza è la potenzialità *generativa* di questa descrizione che può funzionare come cornice per l'elaborazione di una definizione di competenza.

Torniamo a considerare i risultati delle due ricognizioni nella loro globalità. Se consideriamo la competenza come il sistema di prerequisiti che un individuo deve possedere per poter svolgere un'attività in modo efficace, è chiaro che ciascuno degli approcci descritti da Weinert e ciascuna delle dimensioni rilevate da Mulder mette in evidenza elementi assolutamente pertinenti. Per dirlo banalmente, sembra incontestabile che una prestazione efficace in un determinata situazione possa richiedere sia abilità cognitive sia meta-cognitive, sia generali indipendenti dal contesto sia altamente specializzate e riferibili a una determinata eventualmente ristretta classe di situazioni, modificabili o meno attraverso l'educazione, riferibili o meno a un ben determinato ambito di conoscenze...

La nozione di competenza, dunque, intesa come sistema di prerequisiti per una prestazione efficace, è intrinsecamente multi-dimensionale, e questa complessità non è riducibile a meno di trascurare alcuni aspetti.

Allo stesso tempo, riteniamo che l'interesse per una definizione di un costrutto in ambito educativo, ma diremmo più in generale nell'ambito delle scienze umane, è quello di poter funzionare come strumento per organizzare, inquadrare, chiarire, affrontare determinati fenomeni, situazioni o problemi. Per poterlo fare le definizioni devono essere abbastanza ricche per essere rilevante in una situazione complessa, ma allo stesso tempo puntare a ridurre questa complessità ed essere dunque abbastanza semplici per essere operative.

Si pone quindi la questione di quale approccio teorico (se uno) assumere nella definizione di competenza, quali dimensioni includere e quali trascurare. Questa considerazione fa finalmente emergere una questione centrale che però sia Mulder sia Weinert sembrano considerare come non problematica, o forse implicitamente condivisa: ***rispetto a quale obiettivo è necessario/opportuno definire la nozione di competenza?***

Gli obiettivi possono essere molteplici e non è detto che una stessa definizione possa essere ugualmente adatta per ognuno di essi, ad esempio: definire in un certo ambito professionale criteri per la selezione di lavoratori a diversi livelli, anche manageriale, organizzare e strutturare il curriculum di una certa tipologia di scuola, realizzare studi comparativi in un certo ambito, e altro ancora...

Un modello della nozione di competenza, in ambito educativo e nello specifico nell'ambito della ME, potrebbe a priori risultare utile per interpretare determinate difficoltà degli studenti nel realizzare il livello atteso per un certo tipo di prestazioni o per realizzare contesti idonei allo sviluppo di quei prerequisiti che possono poi essere mobilitati per ottenere certe prestazioni. Torneremo in un secondo momento sulla possibilità di ricorrere al costrutto di competenza per interpretare difficoltà; per ora ci concentriamo sull'obiettivo di promuovere lo sviluppo di certe abilità e quindi di promuovere lo sviluppo di certe competenze.

Va da sé che se l'obiettivo vuol essere favorire lo sviluppo di determinate competenze, la nozione di competenza dovrebbe essere costruita/centrata su aspetti modificabili con interventi didattici mirati o con l'esperienza accumulata. In secondo luogo le prestazioni che vogliamo che un individuo possa realizzare riguardano in prima istanza, specificamente, la matematica e i contesti in cui la matematica gioca un ruolo; allo stesso tempo riteniamo importante porsi il problema della formazione più generale dell'individuo e quindi siamo indotti a considerare quegli aspetti suscettibili di contribuire alla formazione in senso più ampio e pieno. In ambito educativo ci pare poi più importante concentrarsi sugli aspetti centrali potenzialmente coinvolti in un'ampia gamma di attività matematiche, riferibili sia alla dimensione pragmatica sia alla dimensione più propriamente riflessiva

della disciplina. Un ultimo punto ha una importanza generale in ambito educativo: quando si valutano gli apprendimenti, deve essere possibile rilevare diversi livelli di apprendimento...

Se riferiamo quanto tratteggiato sopra alle dimensioni individuate da Mulder emerge una “proto-definizione” che valorizza in particolare gli alti livelli di: developability, contextuality (dove i contesti di riferimento sono sia extra- che intra- matematici), centrality, dynamic nature, trasferability, knowledge inclusion...

Si vede bene a questo punto che l’elaborazione del costrutto di competenza per quel che riguarda le prestazioni in contesti matematici o in contesti in cui la matematica gioca un ruolo deve coinvolgere una riflessione esplicita dell’attività matematica, delle sue forme caratteristiche, e dei contesti in cui si realizza. Prima di muovere in questa direzione, sviluppiamo ancora alcune riflessioni generali sul costrutto di competenza. Ci sono infatti ancora diverse questioni che non abbiamo toccato.

Per fissare l’attenzione e organizzare al meglio queste ultime riflessioni, riprendiamo la definizione di Pellerey introdotta in precedenza.

“La competenza è la capacità di affrontare un compito o una serie di compiti, essere in grado di avviare e orchestrare le proprie risorse interne - cognitive, affettive e volitive - e utilizzare quelle disponibili esterne in modo coerente e fruttuoso” (Pellerey, 2014, p.12).

Che a sua volta evoca da vicino la definizione di Perrenaud (1996, citato in Terraneo e Avanzino, 2006) secondo cui la competenza è:

“L’ensemble des ressources que nous mobilisons pour agir. [La compétence est] la capacité d’un sujet de mobiliser tout ou une partie de ses ressources cognitives et affectives pour faire face à une famille de situations complexes. Cela laisse entière la question de la conceptualisation précise de ces ressources, des relations qu’il faut établir entre elles et de la nature du «savoir mobiliser». Penser en terme de compétence, c’est penser la synergie, l’orchestration de ressources cognitives et affectives diverses pour affronter un ensemble de situations présentant des analogies de structures.” (pp.15-16)

Queste definizioni hanno diverse caratteristiche della “proto-definizione” abbozzata sopra. Nella misura in cui si precisa la natura e l’ambito dei compiti menzionati nella definizione e si considerano risorse interne - cognitive, affettive e volitive – modificabili, specifiche dell’ambito di compiti considerato, e suscettibili di contribuire alla formazione più generale dell’individuo, queste potrebbero costituire il punto di partenza per una definizione di competenza in matematica. Ma, ora, appunto, ci vogliamo focalizzare su altri aspetti. Ribadiamo che non vogliamo sviluppare una critica specifica su queste definizioni ma utilizzarle per illustrare riflessioni di carattere generale.

### **1.3.4 La dimensione del compito**

Le due definizioni fanno riferimento a un compito, o un insieme di compiti, o situazioni complesse da affrontare. Ma cosa intendiamo come compito? Terraneo e Avanzino (2006) propongono di

distinguere, nell'ambito della psicologia del lavoro, per una analisi più fine del lavoro, tra compito come prescrizione esterna all'individuo e attività, ciò che l'individuo mette in atto per risolvere o realizzare il compito, e tra compito prescritto e compito effettivo, tra prescrizione esplicita e prescrizione implicita. È un tipo di distinzione assolutamente pertinente anche in ambito educativo e che ritroviamo in effetti anche in ME in studi nell'ambito del problem-solving. Ad esempio Zan (2007), sulla base della definizione di problema proposta da Duncker (1935) come qualcosa che nasce quando un essere vivente ha una meta ma non sa come raggiungerla, introduce due interessanti distinzioni: quella tra problema e compito (proprio in base all'esistenza di una meta), e quella tra problema e esercizio (in base al fatto che il solutore abbia o non abbia a disposizione in partenza una procedura per raggiungere la meta).

Notiamo inoltre che Perrenaud parla di "situazioni complesse" altrove Pellerey usa l'espressione "situazioni sfidanti". Questa scelta merita qualche riflessione. Se una situazione è genuinamente sfidante allora devo prendere in considerazione seriamente la possibilità che l'individuo che affronta tale situazione possa fallire. Questa situazione non sembra facilmente conciliabile con una visione della valutazione (o misura) delle competenze basata sull'analisi della prestazione, sul raggiungimento di un risultato. È invece coerente con la visione sopra esposta dell'opportunità di distinguere tra la valutazione della prestazione riferita a un compito e la valutazione dell'attività svolta per raggiungere quella prestazione. D'altra parte è chiaro che non appena l'idea di competenza si mette in relazione all'idea di risoluzione di un compito complesso, non routinario, a una situazione problematica nuova e impegnativa, occorre prendere in considerazione (come fanno Pellerey e Perrenaud) non solo le conoscenze che un individuo possiede o le procedure che è in grado di riprodurre, ma anche dimensioni quali le abilità di gestione delle proprie conoscenze, le motivazioni che spingono l'individuo ad agire, tutta la sfera emozionale (notiamo incidentalmente che si tratta di dimensioni già individuate dalla ricerca sul problem-solving e sul problem-solving matematico in particolare: Schoenfeld, 1985; Zan, 2007).

Un'ultima osservazione su questo punto riguarda l'uso in ambito educativo e valutativo di prove che simulano o evocano un contesto reale o simulato. Estendendo all'intero contesto dell'educazione formale l'analisi di Palm (2002) sulla matematica, possiamo dire che l'uso di questi compiti ha in genere due obiettivi: facilitare lo sviluppo di abilità di transfert di conoscenze e abilità da contesti propri dell'educazione formale a contesti esterni (o valutare tali abilità), promuovere esperienze in cui conoscenze e abilità apprese nel contesto dell'educazione formale sono utili ed efficaci per affrontare situazioni in contesti reali. Per perseguire questi scopi è però necessario che i compiti siano

*autentici*<sup>3</sup>, che siano cioè compiti in cui (a) la *situazione* descritta deve essere percepita o percepibile come effettivamente possibile, (b) la *richiesta* possa essere effettivamente posta e abbia senso nel contesto reale, (c) lo *scopo* della richiesta nel contesto reale sia chiaro e condivisibile, (d) le *informazioni* date siano coerenti con quelle che sarebbero effettivamente disponibili in un contesto reale, e che siano presentate in forme e linguaggio compatibili con quelle del contesto reale, e che siano ugualmente coerenti: (e) le *circostanze* e le possibilità di azione, inclusa la disponibilità di strumenti, e (f) le *possibili strategie*. Quand'anche ci fosse questa piena rispondenza tra compito reale e simulato, resta il fatto che un compito presentato nel contesto dell'educazione formale, è comunque un compito inserito in questo contesto (che non è eliminabile) con tutte le aspettative, gli obiettivi, le possibilità di azione, e la carica emozionale a cui questo contesto dà forma. D'altra parte si tratta di una criticità riconosciuta anche da altri autori nell'ambito dell'educazione professionale in riferimento alla valutazione: la valutazione delle prestazioni in contesti professionali simulati non garantisce che lo stesso individuo sarà competente anche nei contesti professionali reali (Mulder, Weigel, Collins, 2007, p.82).

### 1.3.5 La dimensione individuale/sociale/istituzionale della competenza

Le definizioni proposte sopra – e in effetti anche la nostra proto-definizione – descrivono la competenza come una capacità o un insieme di capacità astratte proprie dell'individuo. Questa visione emerge anche dalle ricognizioni di Mulder e Weinert esaminate nei paragrafi precedenti. Tuttavia, in particolare nell'ambito professionale ma anche in molte occasioni in ambito educativo, il focus è sulla prestazione di un gruppo o addirittura di un'istituzione e non di un singolo, su come un gruppo affronta una situazione e raggiunge o no determinati risultati. E il focus è tale perché è la prestazione del gruppo che in molti ambiti e in particolare, appunto, negli ambiti lavorativi è importante: accade ad esempio quando la complessità della situazione è tale da superare la competenza individuale ed occorrono competenze complementari. Questo porta a chiedersi se non sia opportuno definire l'idea di una *competenza collettiva*, cioè di una competenza propria di un gruppo o di una istituzione, e quali siano le relazioni tra competenza collettiva e competenza individuale.

La dimensione interpersonale può essere presa in conto in modi diversi in diverse definizioni del costrutto di competenza. Ad esempio Pellerey include tra le “risorse esterne disponibili” per lo svolgimento di un compito le altre persone in esso coinvolte. Il riferimento ad altri *agenti* resta implicito e la definizione resta centrata sull'individuo. Più esplicita la definizione di Zarifian (1999, citato in Terraneo & Avanzino, 2006):

---

<sup>3</sup> Quella che segue è una nostra riformulazione del quadro elaborato da Palm (2002, 2007).

“La compétence est la faculté à mobiliser des réseaux d’acteurs autour des mêmes situations, à partager des enjeux, à assumer des domaines de coresponsabilité.” (Zarifian, 1999, p. 77)

che però non chiarisce chi abbia la facoltà e la responsabilità di mobilitare i diversi attori.

Chi rende esplicita la possibilità di attribuire la competenza chiaramente a un collettivo come tale è Wittorski (1998, citato in Terraneo & Avanzino, 2006) che con la sua definizione introduce parallelamente il tema del riconoscimento sociale (che non affrontiamo qui):

“Finalisée, la compétence est produite par un individu ou un collectif dans une situation donnée et elle est nommée/reconnue socialement.” (Wittorski, 1988, p. 80)

Si continua a porre la questione delle relazioni tra competenze dell’individuo e competenze del collettivo; non si risolve introducendo il riferimento a generiche competenze relazionali (pure importanti): occorre che gli individui sviluppino un’immagine comune dell’attività da svolgere nel suo complesso, delle diverse fasi e dei vari apporti individuali, e che sviluppi un linguaggio specifico per gestire l’interazione. Considerata da questo punto di vista possiamo dire che la competenza relazionale si specializza in relazione all’ambito di riferimento.

Il fatto che lo svolgimento di un compito richieda la partecipazione di competenze complementari non significa che tali competenze debbano/possano essere meno sviluppate: “Paradoxalement, plus la compétence collective est forte, plus les compétences individuelles deviennent indispensables” (Terraneo & Avanzino, 2006, p. 19).

In ambito educativo, spostare l’attenzione dalle competenze dell’individuo a quelle del collettivo pone questioni delicate sia in riferimento alla valutazione individuale sia in riferimento a come promuovere in modo equilibrato lo sviluppo delle competenze del singolo individuo e quelle del collettivo. È un tema su cui ci sembra necessario porre attenzione ma che non svilupperemo qui.

### **1.3.6 La valutazione della competenza**

Quando si affronta il tema della valutazione molto spesso soprattutto a livello delle politiche dell’educazione si pone per primo il problema di come valutare. Rischiano di rimanere fuori dal dibattito i temi di cosa viene valutato, da chi e per quali obiettivi. Non vogliamo trattare il tema della valutazione in termini generali ma solo promuovere una riflessione su questi aspetti per quanto specificamente attiene alla questione della valutazione delle competenze. È chiaro che per poter anche solo pensare di affrontare questo tema occorre delineare al meglio cosa si intende per competenza.

Come abbiamo visto l’idea di competenza comincia ad essere esplorata in ambito educativo quando emerge la tendenza a declinare i risultati attesi in termini di comportamenti osservabili e misurabili.

L'iniziale approccio di tipo comportamentista ha fatto sì che per molti anni l'idea di competenza coincidesse con quella di prestazione. Le successive elaborazioni del concetto di competenza mettono in crisi l'idea che esista una relazione diretta tra competenza e prestazione; per dirla con Mulder e colleghi, la relazione non può essere considerata una relazione uno-a-uno, non c'è un nesso diretto tra le due (Mulder et al. 2007, p.67, 81).

Questo è inevitabile nel momento in cui l'idea di competenza viene messa in relazione a quella di risoluzione di un compito complesso, non routinario, a una situazione problematica nuova e impegnativa che coinvolge non solo le conoscenze che un individuo possiede o le procedure che è in grado di riprodurre, ma anche dimensioni quali le abilità di gestione delle proprie conoscenze, le motivazioni che spingono l'individuo ad agire. Si tratta di dimensioni non direttamente accessibili. Quando osserviamo la prestazione di un individuo osserviamo solo la manifestazione (o l'assenza di manifestazione) delle competenze dell'individuo medesimo. La presenza o meno di una competenza può essere solo inferita e non rilevata. Quel che rende complessa la valutazione della competenza, poi, non è solo il ruolo fondamentale dei fattori meta-cognitivi e affettivi non direttamente accessibili. Ma anche la dipendenza della prestazione da fattori di contesto (fisici, sociali, relativi al compito) altrettanto importanti. Più la competenza è definita in termini di qualità generali dell'individuo più fallisce a cogliere l'importanza dei fattori di contesto.

La valutazione della competenza, in definitiva, non può esaurirsi nella valutazione di una prestazione, anche se la dimensione dell'azione è fondamentale nell'idea di competenza.

Se anche le osservazioni sopra sviluppate hanno una valenza generale, il tema della valutazione va poi declinato rispetto agli obiettivi della valutazione. Dallo studio della letteratura emergono diversi obiettivi della valutazione delle competenze che si intrecciano tra loro:

- descrivere l'attività dell'individuo in riferimento ad alcuni aspetti dell'attività stessa definiti a priori e ritenuti di particolare rilevanza;
- interpretare le ragioni del successo o del fallimento di un individuo nello svolgimento di un insieme di compiti;
- predire il successo professionale o educativo di un individuo, o predire differenti prestazioni tra individui;
- programmare interventi educativi finalizzati allo sviluppo delle competenze.

Quest'ultimo punto ci sembra quello meno sviluppato (e forse il più importante in ambito educativo). La letteratura conferma quello che crediamo essere esperienza comune di molti di coloro che

lavorano nell'ambito della scuola. Declinare gli obiettivi educativi in termini di competenze che devono essere sviluppate non porta necessariamente a progettare e realizzare interventi didattici più efficaci. Questo avviene soprattutto quando valutazione del raggiungimento di tali obiettivi è affidata non all'insegnante ma a terzi. Ci sembra che in particolare in questi casi ci sia uno sbilanciamento dell'attenzione verso la valutazione più che verso la promozione dello sviluppo delle competenze, con il rischio che addirittura la valutazione frustri l'apprendimento e lo sviluppo delle competenze più che sostenerli (Mulder et al., 2007).

Per quel che riguarda la predittività della valutazione delle competenze rispetto a future prestazioni abbiamo già detto che fin tanto che la valutazione riguarda l'analisi dell'attività svolta dall'individuo in contesti simulati non c'è nessuna garanzia che lo stesso individuo agisca allo stesso modo nei contesti reali. Ma anche l'attendibilità di altre forme di valutazione, quali la "behavioral event interview"<sup>4</sup> proposta da McClelland, resta controversa (Weinert, 2001).

Rispetto alla possibilità di fornire chiavi per l'interpretazione dei comportamenti messi in atto dagli individui e in particolare del loro successo o fallimento, occorre rilevare il rischio che se la competenza è descritta come sistema di prerequisiti per lo svolgimento di compiti, interpretare il successo o il fallimento nello svolgimento di un compito in termini di livello di competenza è tautologico; non contribuisce a fornire una interpretazione del successo o del fallimento dell'individuo.

Resta infine la questione di chi valuta e secondo quali criteri. Anche considerando la sola valutazione della prestazione, si presentano a seconda dei contesti molte diverse possibilità: infatti la valutazione può essere fatta dallo stesso individuo che agisce o da un esterno (o da un gruppo di esterni), chi valuta può essere o no un esperto, e i criteri di valutazione possono essere espliciti o no. Ad esempio in alcuni casi, anche in ambito educativo, si possono immaginare situazioni che abbiano in sé caratteristiche tali da consentire all'individuo di auto-valutare l'efficacia della propria azione. In molti casi la valutazione coinvolge l'approvazione sociale; anche nella vita quotidiana in effetti sappiamo che la reputazione è una componente della valutazione della competenza di un individuo. In ambito educativo generalmente c'è un esperto che definisce i comportamenti attesi rispetto a determinati compiti e valuta la prestazione in riferimento ai questi. Tuttavia la valutazione della prestazione sola non è sufficiente per gettare luce sulla qualità delle risorse interne di un individuo e sulla sua capacità, astratta e potenziale, di mobilitarle e orchestrarle. Da un lato c'è la necessità di una

---

<sup>4</sup> La Behavioral Event Interview è un'intervista in cui viene chiesto all'intervistato di fornire descrizioni dettagliate su come ha raggiunto risultati lavorativi che considera importanti. Il compito dell'intervistatore è quello di suscitare storie complete che descrivano comportamenti, pensieri e azioni specifici dell'intervistato in situazioni reali.

valutazione sistematica su un numero ampio di prestazioni in compiti vari e non su una singola prestazione. Dall'altro c'è la necessità di aver accesso alle risorse motivazionali, affettive e di gestione delle proprie risorse di un individuo.

Per quel che riguarda la modalità di valutazione, l'analisi più lucida ci sembra quella di Pellerey (2004). Pellerey evidenzia l'importanza in chiave educativa di un'analisi che non sia limitata ai risultati delle prestazioni, i quali per altri costituiscono un elemento di valutazione fondamentale. Occorre tener presente, secondo Pellerey, tutto il processo che porta a un determinato risultato, a determinate prestazioni. A tal fine Pellerey propone di integrare diverse modalità di osservazione e documentazione del percorso di formazione di un individuo in modo da rendere effettivamente possibile un processo di triangolazione tra i dati e le informazioni raccolte con le diverse modalità. In particolare Pellerey (2004, p.139) individua tre dimensioni o *polarità* (riprese poi anche da Marzano e Iannotta, 2015) che devono essere tenute in considerazione nella valutazione delle competenze: la polarità *oggettiva*, la polarità *soggettiva* e la polarità *intersoggettiva*.

- La polarità *oggettiva* è quella che attiene alla rilevazione ed eventualmente misurazione dei comportamenti direttamente osservabili, l'analisi dei risultati delle prestazioni, documentati in modo sistematico.
- La polarità *soggettiva* attiene alla rilevazione di elementi da cui poter inferire i significati personali che lo studente dà alla propria esperienza di formazione, e alla propria attività in riferimento a un dato insieme di compiti. Questa dimensione sollecita l'innescare di un processo di riflessione e *autovalutazione* dello studente, che consente di far emergere il suo coinvolgimento e la sua motivazione rispetto al compito proposto.
- La polarità *intersoggettiva* attiene alla rilevazione del giudizio di altri sulle prestazioni richieste, coinvolge la ricerca di un confronto, un consenso sulla valutazione. Tale consenso può essere cercato, ad esempio, da parte di un insegnante presso altri insegnanti (ad esempio del consiglio di classe), ma anche presso altri studenti. Possono infatti essere coinvolti in questa valutazione tutti coloro che hanno condiviso in certa misura l'esperienza dell'individuo e sono o sono stati impegnati nel processo di co-costruzione di significati e abilità. Marzano e Iannotta parlano per questa polarità di *eterovalutazione* ("hetero-assessment", 2015, p.14)

Ciascuna di queste polarità richiede la messa in atto di diverse modalità di rilevazione.

### 1.3.7 Ulteriori spunti di riflessione

Quanto fin qui esposto ha voluto presentare la complessità propria dell'idea di competenza che come abbiamo visto non si riduce alla difficoltà di catturare questa idea in una singola definizione.

Rimangono ancora diversi aspetti non esplorati, ne citiamo qui alcuni, quelli che sembrano più rilevanti per il proseguo del nostro discorso che vuole affrontare ora l'idea di competenza matematica.

***L'ambito di una competenza.*** Fin qui abbiamo cercato di sviluppare l'analisi dell'idea di competenza nel modo più neutro possibile. Sappiamo di non esserci riusciti fino in fondo; in molti punti, soprattutto negli ultimi paragrafi, la nostra analisi ha risentito della nostra intenzione di parlare poi di competenza matematica e della nostra convinzione che questa sia una nozione rilevante in ambito educativo e sociale. Tuttavia occorre rimarcare che c'è una tensione tra competenze generali, non specificamente riferite a un ambito del sapere o dell'esperienza umana, da un lato, e competenze specifiche, dall'altro. Si tratta quindi di affrontare la questione di cosa sia l'ambito di una competenza (o di un insieme di competenze) e se sia una nozione rilevante in ambito educativo o in altri.

***Competenza e conoscenze.*** Abbiamo già accennato al tema della relazione tra conoscenza e competenza; se la conoscenza debba essere inclusa tra gli aspetti che definiscono la competenza. Questo tema si presenta con maggior intensità se si ammette che una competenza possa essere specificamente riferita a un dato ambito del sapere, storicamente e culturalmente ben determinato, la matematica nel nostro caso.

***Componenti di una competenza.*** Se viene individuato in modo chiaro un ambito di competenza, occorre poi affrontare la questione se le risorse interne o esterne che un individuo deve mobilitare per affrontare determinati compiti possono essere descritte in termini specifici relativi al dato ambito. Si tratta di quella che Glaesser (2019) definisce la struttura di una competenza: l'insieme delle componenti che la caratterizzano. Se si vuole descrivere la struttura di una competenza occorre non solo descrivere queste componenti ma anche spiegare la loro relazione rispetto alla competenza in esame (p.74).

***I livelli di competenza.*** Un'ultima questione riguarda la definizione di livelli di competenze, cioè le differenze qualitative tra i diversi compiti che diversi individui riescono a affrontare con successo. Sempre Glasser (2019) a tal proposito nota criticamente che i diversi livelli sono raramente definiti a priori in base a considerazioni teoriche e poi sottoposti per la validazione ad analisi empiriche, ma direttamente riconosciuti a posteriori:

In models of competence levels, the theoretical expectation of qualitative differences between people on different levels is not always tested empirically. Instead, levels are frequently defined post-hoc by determining score-based thresholds for levels and assigning test takers to a level based on their overall performance. (p. 74).

## 1.4 La nozione di *competenza* nel quadro normativo<sup>5</sup>

Non intendiamo soffermarci troppo sull'uso della nozione di competenza nell'ambito istituzionale e normativo, ma ci sembra importante fornire alcuni riferimenti essenziali, dato che è proprio per effetto delle iniziative intraprese a livello istituzionale, in ambito europeo (in particolare come effetto della cosiddetta strategia di Lisbona), che la nozione di competenza si è imposta negli ultimi anni nel dibattito sull'educazione in Europa. Istituzioni politiche (quali il Parlamento e il Consiglio Europeo) e organizzazioni economiche (quali l'OCSE) premono affinché nell'ambito della formazione, non solo scolastica, si assuma un approccio olistico non limitato ai contenuti delle singole discipline tradizionalmente oggetto di insegnamento. In questo contesto, la nozione di competenza, con la prospettiva che sembra suggerire, è presentata come la chiave per un ripensamento generale sulla formazione; vale la pena osservare che sin da subito il riferimento è alla formazione permanente, il discorso quindi non è limitato né riguarda specificamente il contesto scolastico.

La competenza è definita, in ambito istituzionale europeo, come la

“comprovata capacità di utilizzare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e personale. Nel contesto del Quadro europeo delle qualifiche le competenze sono descritte in termini di responsabilità e autonomia” (Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 23 aprile 2008 sulla costituzione del Quadro Europeo delle qualifiche per l'apprendimento permanente. Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea 6.5.2008).

Troviamo in questa definizione il riferimento a diverse dimensioni analizzate nei paragrafi precedenti, ma restano pure alcuni dei nodi critici e delle ambiguità segnalate. Il quadro di riferimento europeo delinea inoltre otto competenze chiave:

“[...] sono quelle di cui tutti hanno bisogno per la realizzazione e lo sviluppo personali, la cittadinanza attiva, l'inclusione sociale e l'occupazione. [...] 1) comunicazione nella madrelingua; 2) comunicazione nelle lingue straniere; 3) competenza matematica e competenze di base in scienza e tecnologia; 4) competenza digitale; 5) imparare a imparare; 6) competenze sociali e civiche; 7) spirito di iniziativa e imprenditorialità; 8) consapevolezza ed espressione culturale” (Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente 30.12.2006 Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea L 394/10).

Si vede qui che le competenze individuate come competenze-chiave sono molto varie; questa eterogeneità non aiuta a dare un senso preciso al termine competenza. Tra queste compare la definizione di competenza matematica, che viene definita come:

---

<sup>5</sup> Il contenuto di questo paragrafo è una rielaborazione dei seguenti lavori: Magenes & Maracci (2015); Maracci & Martignone (2016, 2017).

“La competenza matematica è l’abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico-matematiche, l’accento è posto sugli aspetti del processo e dell’attività oltre che su quelli della conoscenza. La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, schemi, grafici, rappresentazioni).”

Questa definizione può apparire povera se confrontata con la riflessione sviluppata nel paragrafo precedente, riteniamo comunque che vada letta nel quadro complessivo dei documenti per l’educazione europei che forniscono come abbiamo visto sopra una elaborazione del termine competenza più ricca. Ci sono poi alcuni aspetti in questa definizione che riteniamo particolarmente interessanti.

- È presente il riferimento all'uso della matematica e alle forme di pensiero che le sono caratteristiche per la soluzione di problemi in situazioni quotidiane, e ciò si riflette anche nell'attenzione crescente che si registra in diversi contesti verso i problemi di modellizzazione. Manca invece, un po' sorprendentemente, il riferimento alla soluzione di problemi di matematica; forse si assume implicitamente che una persona è competente in matematica solo se sa risolvere problemi di matematica?
- Viene data grande enfasi agli aspetti di processo che da molti anni sono valorizzati dalla ricerca in didattica della matematica ma che restano talvolta trascurati nella pratica scolastica, spesso più attenta agli aspetti, comunque fondamentali, di “prodotto”.
- Per ultimo, ma è l'aspetto che vorremmo maggiormente evidenziare, la competenza matematica è definita in termini generali unitari. Intendiamo con questo che essa è definita allo stesso modo per adulti e bambini, a prescindere dai possibili ambiti dell'esperienza individuale, ma anche indipendentemente dai settori in cui la matematica come disciplina si articola (aritmetica, algebra, geometria, probabilità, ecc.).

La “Raccomandazione del Parlamento europeo e del Consiglio” pur fornendo un quadro di riferimento di cui si raccomanda l'adozione, lascia a ciascuno Stato la libertà e la responsabilità di darne precisa attuazione articolandolo secondo i propri sistemi di istruzione e formazione.

L'articolazione della nozione di competenza che si realizza nei documenti ministeriali per il curriculum, che a quella raccomandazione si ispirano, appare fortemente disomogenea, sia in verticale (tra I e II ciclo) sia in orizzontale (tra diversi ordini di scuola), tradendo in questo modo uno degli obiettivi che generalmente in ME motiva la strutturazione dei curricula per competenze: quello di restituire un'immagine unitaria della matematica.

In generale possiamo riscontrare nei documenti istituzionali italiani il riferimento sia a competenze che potremmo definire disciplinari, come quella matematica, sia a competenze che potremmo definire trasversali. Spesso in ambito educativo si centra l'attenzione proprio su queste ultime; molti degli esempi che riguardano la progettazione di attività volte a promuovere lo sviluppo di competenze o la loro valutazione fanno riferimento alle competenze trasversali. Da un lato questo è comprensibile se si pensa al fatto che proprio le problematiche legate allo sviluppo delle competenze trasversali sono probabilmente quelle maggiormente trascurate nella didattica tradizionale. Dall'altro si presenta un duplice rischio:

- trascurare la rilevanza delle “competenze disciplinari” in sé e rispetto allo sviluppo delle competenze trasversali e quindi sottovalutare il problema del loro sviluppo da parte dello studente;
- ritenere che il contributo alla formazione delle competenze trasversali che proviene dallo studio delle discipline sia limitato ai soli contenuti delle discipline medesime, da mobilitare a seconda dei contesti e dei particolari compiti affrontati.

### 1.5 La nozione di *competenza matematica*

*Mathematical competence, mathematical literacy, mathematical proficiency, numeracy, mastery of mathematics...* sono molte le espressioni utilizzate in ME che sono in qualche misura collegabili all'idea di *competenza* esplorata nella sezione 1.3, alcune di queste introdotte prima che il termine *competenza* conquistasse la diffusione che ha attualmente. Non si tratta di differenze solo lessicali, gli autori che per una ragione o l'altra adottano questi termini o ne coniano di nuovi, lo fanno perché ritengono che i termini esistenti non colgano quello che effettivamente loro vorrebbero cogliere. Ad esempio, a proposito della scelta dell'espressione *mathematical proficiency* per il progetto *Adding it up* Kilpatrick rivela:

[...] *mathematical literacy, numeracy, mastery of mathematics, and mathematical competence.* Each of these terms captured to some extent what it means to learn mathematics successfully, but none of them seemed suitable. They were either too unfamiliar, seemed too limited in scope, or had acquired undesirable connotations in U.S. discourse on education. (2001, p. 105)

Analogamente l'espressione *mathematical literacy* è stata adottata nel quadro di riferimento del PISA anche perché meno diffusa e quindi potenzialmente meno ambigua di altre espressioni che avrebbero potuto essere usate per veicolare gli stessi significati (Stacey & Turner, 2015, p.13).

Emerge quindi anche in ME una varietà di significati e possibili approcci a tema connessi a quello della competenza matematica. Ancora Kilpatrick (2014), nella *Encyclopedia of Mathematics*

*Education*, dopo una breve sintesi su alcuni quadri per le competenze in ME osserva che pur declinando l'idea in modi diversi:

Competency frameworks are designed to demonstrate to the user that learning mathematics is more than acquiring an array of facts and that doing mathematics is more than carrying out well-rehearsed procedures. School mathematics is sometimes portrayed as a simple contest between knowledge and skill. Competency frameworks attempt to shift that portrayal to a more nuanced portrait of a field in which a variety of competences need to be developed. (p. 87)

Il messaggio generale appare dunque, secondo Kilpatrick, condiviso ma su come catturare questa idea in modo più preciso non c'è un accordo generale. Per illustrare questa varietà, discutiamo ora brevemente 4 differenti approcci all'idea di competenza sviluppati nell'ambito della ME: l'idea di *habits of mind* (Cuoco et al. 1996), l'idea di *mathematical proficiency* (Kilpatrick et al., 2001), l'idea di *mathematical competence* (Niss, 2003; Niss & Højgaard, 2011), l'idea di *mathematical literacy* (Stacey & Turner, 2015). Vista la varietà di termini usati e la difficoltà di renderli in italiano, ci riferiremo a questi costrutti utilizzando i termini inglesi, useremo l'italiano *competenza matematica* per riferirsi all'idea generale, ancorché vaga, a prescindere dall'approccio specifico.

### 1.5.1 L'idea di *habits of mind*

Cuoco, Goldenberg e Mark (1996) partono da una critica feroce su come sono organizzati, almeno negli USA, i curriculum di matematica della scuola secondaria:

For generations, high school students have studied something in school that has been called mathematics, but which has very little to do with the way mathematics is created or applied outside of school. (p. 375)

e propongono l'idea di *habits of mind* come principi, perni attorno sui quali incardinare l'organizzazione del curriculum in matematica.

There is another way to think about it, and it involves turning the priorities around. Much more important than specific mathematical results are the habits of mind used by the people who create those results. (Cuoco et al., 1996, p.375)

Gli autori non danno una definizione esplicita di *HM* ma dagli esempi che forniscono emerge che gli *HM* sono particolari modi di pensare, di affrontare le situazioni, e di disporsi ad agire nelle diverse situazioni. Lo sviluppo di questi *HM* dovrebbe essere assunto come esplicito obiettivo didattico e orientare quindi l'azione didattica. Dunque secondo la proposta degli autori, gli studenti dovrebbero diventare, ad esempio, *pattern sniffers, describers, tinkers, inventors, visualizers, conjecturers, guessers*. Questi sono esempi di *HM* generali che hanno una portata ampia che oltrepassa il limite della singola disciplina. A questi sono affiancati modi di pensare e abilità più specifici alla matematica – quali *mathematicians use multiple points of view* o *mathematicians mix deduction and*

*experiment* – o di specifici ambiti di essa. Cuoco e i colleghi stilano un repertorio di possibili *HM* e modi di pensare verso cui dovrebbe tendere l'insegnamento della matematica (e ogni insegnamento). Questo repertorio è stilato sulla base di una riflessione esplicita su come il matematico esperto affronta i problemi nel proprio ambito di esperienza e cercando poi di distinguere forme di pensiero più generali e quelle specificamente matematiche; anche se non rilevato esplicitamente questi *HM* non coinvolgono solo la dimensione cognitiva, dimensione affettiva e volitiva appaiono fondamentali per la loro attivazione.

Notiamo infine che lo sviluppo di adeguati *HM* è considerato prioritario non solo per gli studenti indirizzati dopo la scuola secondaria a proseguire i propri studi in matematica ma anche per chi seguirà altre strade.

Many of the ways of thinking – especially what we have called the “general habits of mind,” but even the specifically mathematical approaches – bring power and important perspective to domains other than mathematics. Using these ways of thinking as the organizer of a curriculum helps to emphasize them and bring them to the fore. (Cuoco et al., 1996, p. 401)

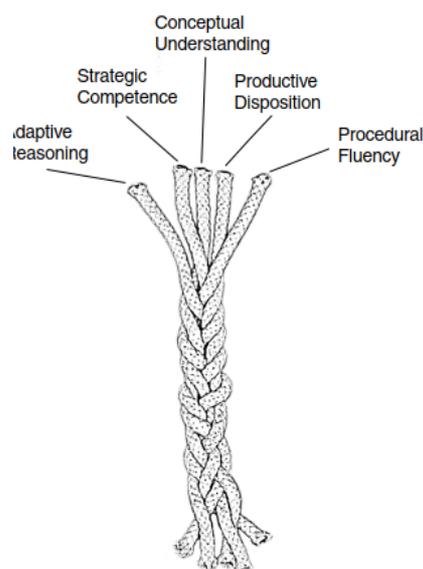
### 1.5.2 L'idea di mathematical proficiency

Il costrutto di *mathematical proficiency (MP)* viene elaborato nel contesto di un progetto promosso dal National Research Council (NRC) statunitense il cui obiettivo era elaborare raccomandazioni per l'insegnamento della matematica, la formazione degli insegnanti e la formazione dei curricula, basate sulla ricerca, al fine di migliorare la qualità dell'apprendimento di tutti gli studenti negli anni tra pre-kindergarten e grade 8; tutto questo in un momento in cui il dibattito sull'educazione matematica era segnato da forti contrasti (Kilpatrick et al., 2001). Si è posto quindi all'interno del progetto il problema di caratterizzare quello che si può definire un apprendimento efficace (o di successo) della matematica. Lo si è cercato di fare introducendo l'espressione *MP* che è definita attraverso le sue componenti (*strands*):

- *conceptual understanding*, che si riferisce alla comprensione dello studente di concetti, operazioni e relazioni matematici;
- *procedural fluency*, l'abilità dello studente di eseguire procedure matematiche in modo flessibile, accurato, efficiente e appropriato;
- *strategic competence*, la capacità dello studente di formulare, rappresentare e risolvere problemi matematici;
- *adaptive reasoning*, la capacità di pensiero logico e di elaborare riflessioni, spiegazioni e giustificazioni di argomenti matematici; e

- *productive disposition*, che include l'inclinazione a vedere la matematica come materia sensata, utile e utile da apprendere, unita alla convinzione nel valore del lavoro e nella propria auto-efficacia.

Tra queste componenti sono prese in considerazione in modo esplicito sia la dimensione della conoscenza disciplinare, sia la dimensione metacognitiva (*strategic competence*), sia, ancora la dimensione affettiva con il riferimento alla disposizione personale (*productive disposition*). Tutte le componenti sono intrecciate e interdipendenti: la *MP* non è un tratto monodimensionale, non può essere raggiunta concentrandosi solo su uno o due di queste (Kilpatrick et al., 2001, p.116).



*Figura 1: Intreccio delle componenti della MP in Kilpatrick et al. (2001)*

Questo significa in particolare che anche lo sviluppo della *conceptual understanding* si nutre via via dello sviluppo delle altre componenti, e viceversa. Gli autori usano l'immagine della treccia per veicolare questa idea (*Figura 1*).

Un'importante differenza rispetto alla proposta di Cuoco e colleghi è che le componenti della *MP* sono state individuate sulla base di studi in ME e psicologia cognitiva, oltre che della esperienza professionale dei membri del progetto. In particolare, rispetto alla letteratura in ME, si possono riconoscere diverse consonanze tra il costrutto *MP* e la ricerca sul mathematical problem-solving (Schoenfeld, 2007).

### 1.5.3 La nozione di *mathematical competence* nel progetto KOM<sup>6</sup>

Il progetto KOM<sup>7</sup> (Niss, 2003; Niss & Højgaard, 2011) viene promosso dal Ministero dell'educazione danese tra il 2000 e il 2002 con l'obiettivo di individuare da un lato eventuali elementi di criticità del

<sup>6</sup> Il contenuto di questo paragrafo è un rielaborazione del lavoro di Magenes & Maracci (2015).

sistema educativo danese e dall'altro gli strumenti adeguati ad affrontare tali criticità. Tra questi ultimi viene evidenziata l'eterogeneità con la quale la matematica è considerata e trattata nei diversi livelli scolastici.

*[...] mathematics is perceived and treated so differently at the different levels that one can hardly speak of the same subject, even if it carries the same name throughout the system [...]. In other words, there are problems with the identity and coherence of mathematics as a subject across the levels (Niss, 2003, p.3).*

In questo contesto, la nozione di *mathematical competence*<sup>8</sup> (*MC*) assunta quale elemento unificante per poter definire cosa significhi “padroneggiare la matematica” a tutti i livelli scolastici, e quindi quale strumento per poter articolare la descrizione dei curricoli e dei risultati di apprendimento attesi al termine di ogni ciclo di istruzione, e per descrivere i progressi di apprendimento in matematica degli studenti attraverso i diversi livelli scolari. All'origine di questo come dei 2 approcci già esaminati c'è dunque la comune preoccupazione di definire delle dimensioni, delle piste lungo le quali costruire e organizzare il curriculum. A tal fine, parte del lavoro del progetto KOM è stato diretto all'elaborazione della nozione di *MC*.

*Mathematical competence then means the ability to understand, judge, do and use mathematics in a variety of intra- and extra-mathematical contexts and situations in which mathematics plays or could play a role. (Niss, 2003, p. 7)*

L'intero quadro del progetto KOM è stato recentemente rivisitato con l'obiettivo di aggiornare la terminologia e precisare meglio alcune definizioni pur mantenendo invariato l'impianto complessivo (Niss & Højgaard, 2019). In particolare la competenza matematica viene ora definita come “someone's insightful readiness to act appropriately in response to all kinds of *mathematical challenges pertaining to given situations*” (Niss & Højgaard, 2019, p.12). In questa nuova formulazione emerge con maggiore chiarezza la *natura sfidante* delle situazioni in cui si dovrebbe manifestare la competenza – anche Pelleroy e Perrenaud pongono l'accento su questo carattere (sezione 1.3) – viene al contempo eliminato il riferimento (esplicito nella precedente definizione) a contesti e situazioni interni alla matematica. Da notare anche l'uso dell'espressione *readiness* che però vuol riferirsi esclusivamente agli aspetti cognitivi e non a quelli volitivi e affettivi (Niss & Højgaard, 2019, p.12). In effetti la dimensione affettiva e volitiva è intenzionalmente, deliberatamente esclusa dalla definizione di *MC*:

Since a person's affective, dispositional and volitional traits are multivariate functions of multitudes of background variables, life trajectory and experiences produced within and outside

---

<sup>7</sup> KOM sta per “Kompetencer og matematiklæring” traducibile come “Competenze e apprendimento della matematica”.

<sup>8</sup> Si osservi che i lavori del progetto KOM sono precedenti alla redazione della “Raccomandazione del Parlamento europeo e del Consiglio” del 2006.

schooling and education, these traits are highly individualised. For that reason, and in order to maintain analytical clarity, we have decided to omit affective, dispositional and volitional factors from the notion and definition of mathematical competencies. (Niss & Højgaard, 2019, p.18)

Questa decisione distingue in modo netto l'approccio alla *MC* assunto nel progetto KOM e portato avanti dagli autori e l'approccio alla *MP* visto in precedenza. La nozione di competenza matematica viene articolata in componenti denominate *mathematical competencies*, che definiscono, in un certo senso la natura e le caratteristiche delle azioni matematiche da intraprendere per affrontare le diverse sfide che possono emergere in diverse situazioni.

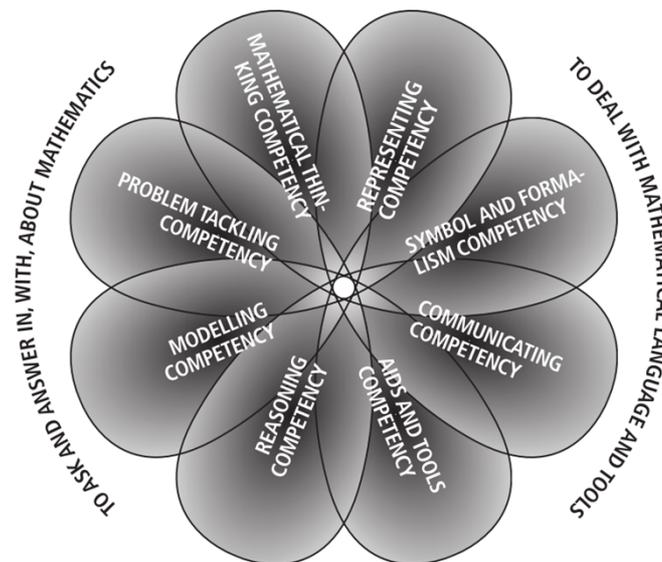


Figura 2: Rappresentazione della MC in Niss (2003)

Sono otto le *mathematical competencies* (Figura 2) individuate nell'ambito del progetto<sup>9</sup>:

- *mathematical thinking competency* riguarda elementi caratteristici del pensiero matematico, quali per esempio la consapevolezza del tipo di domande che caratterizzano l'attività matematica e del tipo di risposte che la matematica può fornire;
- *problem tackling c.* riguarda la formulazione e soluzione di problemi di matematica (con consegna aperta o chiusa, formulati da sé o da altri);
- *modelling c.* riguarda tutti processi di modellizzazione di situazioni extra-matematiche e di analisi di modelli matematici;
- *reasoning c.* riguarda l'abilità di comprendere e produrre non solo dimostrazioni ma più in generale argomentazioni matematiche intese in senso ampio;

<sup>9</sup> Continuiamo a fare riferimento al lavoro di Niss (2003).

- *representing* c. riguarda l'abilità di comprendere e utilizzare diverse forme di rappresentazione di oggetti matematici, fenomeni, problemi o situazioni;
- *symbol and formalism* c. riguarda in modo specifico la gestione delle rappresentazioni simboliche;
- *communicating* c. riguarda l'abilità di comprendere e produrre "testi" matematici scritti e orali in una varietà di registri linguistici diversi;
- *aids and tools* c. riguarda l'uso di strumenti di supporto per l'attività matematica (software, calcolatrici, riga, compasso, abaco...).

Ciascuna di esse ha una duplice natura: analitica, che consiste nell'abilità a comprendere ed esaminare aspetti dell'attività matematica condotta da altri, e produttiva, che consiste nell'abilità a svolgere attività matematica in prima persona.

A differenza dei 5 *strands* che definiscono la *MP*, queste otto *competencies* pur legate l'una all'altra sono indipendenti: ciascuna ha elementi propri non riconducibili alle altre. Ad esempio, nell'attività di modellizzazione viene mobilitata la competenza di *modelling*, ma anche elementi delle competenze di *representing*, nel momento in cui vengono rappresentati matematicamente oggetti reali, e di *problem tackling*, nel momento in cui viene affrontato il problema formulato in termini matematici. D'altra parte alcuni elementi sono specifici della competenza di *modelling*: si pensi per esempio all'abilità a interpretare la soluzione del problema matematizzato nel contesto della situazione di partenza. Le relazioni tra le competenze sono rappresentate come un "fiore" (Niss & Højgaard, 2011) in cui ciascuna competenza forma un singolo petalo in parte sovrapposto agli altri.

Come gli *HM* di Cuoco queste *competencies* sono individuate a partire dall'analisi delle caratteristiche dell'azione potenziale di un esperto, caratteristiche che vanno quindi a costituire il termine di riferimento per lo sviluppo della competenza in matematica da parte degli studenti.

Abbiamo osservato sopra che tutti i 3 approcci presentati nascono per offrire strumenti per organizzare i curricula in matematica a prescindere in certa misura dalle conoscenze matematiche specifiche e dai livelli scolari. Apparentemente questo può fare pensare che allora quel che distingue gli obiettivi didattici a livelli scolari diversi siano le conoscenze matematiche coinvolte e non il livello di competenza matematica (comunque declinata) sviluppata. In effetti non è così, la competenza matematica, per come la intendiamo noi e per quel che emerge anche dagli autori qui considerati, non è qualcosa che si possiede oppure no; esistono diversi livelli di sviluppo e padronanza della competenza. Nell'ambito del progetto KOM stato fatto il tentativo di definire esplicitamente il grado di sviluppo della *MC* da parte di un individuo, facendo ricorso a 3 dimensioni:

- *Degree of coverage of a competency*, ovvero il grado con cui un individuo ha sviluppato in un dato momento tutti gli aspetti che caratterizzano una determinata *competency*.
- *Radius of action of a competency*, ovvero la varietà di contesti e situazioni in cui un individuo può attivare una determinata *competency*.
- *Technical level*, ovvero la varietà e il grado di sofisticatezza di concetti, procedure, teorie matematiche che un individuo può mobilitare quando attiva una determinata *competency*.

Queste dimensioni non hanno nessuna connotazione quantitativa, la loro natura è qualitativa. Possono forse in linea di principio contribuire a definire un ordine parziale rispetto al livello di sviluppo di una singola *competency*. Passare da questi a un ordinamento totale sul livello di sviluppo della competenza matematica pare discutibile, poco rilevante e scarsamente utile dal punto di vista dell'azione didattica.

Concludiamo la presentazione citando 3 possibili funzioni che il quadro della *MC* può svolgere (Niss, 2003) una funzione *normativa* volta a contribuire a definire gli obiettivi di apprendimento attesi a un determinato livello scolastico, una funzione *descrittiva*, volta a contribuire ad organizzare la descrizione delle pratiche di insegnamento e dei risultati di apprendimento, una funzione *metacognitiva*, finalizzata ad aiutare gli insegnanti a prendere consapevolezza dell'importanza di questi aspetti dell'attività matematica e aiutare loro e i propri studenti a monitorare il proprio insegnamento e apprendimento rispettivamente.

#### 1.5.4 La nozione di *mathematical literacy* nelle rilevazioni OCSE-PISA

Il quadro della *MC* del progetto KOM ha influenzato pesantemente, almeno all'inizio insieme all'approccio noto come Realistic Mathematics Education, l'elaborazione del costrutto della *mathematical literacy (ML)* e del quadro di riferimento adottato per le rilevazioni in matematica di OCSE-PISA (Stacey & Turner, 2015). Negli anni poi, come è ovvio, il quadro di riferimento ha subito varie evoluzioni. Ma ha mantenuto una struttura generale che corrisponde a quelle del quadro KOM. La definizione formale assunta per la rilevazione del 2012 è la seguente<sup>10</sup>:

Mathematical literacy is an individual's capacity to formulate, employ, and interpret mathematics in a variety of contexts. It includes reasoning mathematically and using mathematical concepts, procedures, facts, and tools to describe, explain, and predict phenomena. It assists individuals to

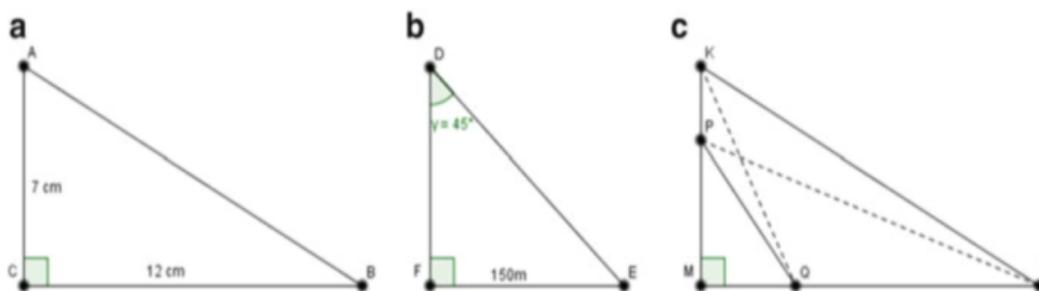
---

<sup>10</sup> La bozza del quadro di riferimento per la matematica del 2021 (<https://pisa.e-wd.org>) definisce la ML in questo modo: "Mathematical literacy is an individual's capacity to reason mathematically and to formulate, employ, and interpret mathematics to solve problems in a variety of real-world contexts. It includes concepts, procedures, facts and tools to describe, explain and predict phenomena. It assists individuals to know the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective 21st century citizen".

recognise the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective citizens. (OECD 2013, p. 25)

Questa definizione mette in evidenza la prospettiva di OCSE-PISA: la ML è funzionale ad aumentare la comprensione dell'individuo della realtà che lo circonda e supportare il processo decisionale in tutti i contesti. Di conseguenza risultano centrali in questa prospettiva i processi di modellizzazione e matematizzazione (Niss, 2015, p.52).

Chiaramente non ha senso porsi il problema di quale definizione sia la “migliore” o la più adatta se non esplicitiamo l'obiettivo. Per mostrare questo punto ricorriamo a un esempio discusso da Stacey e Turner (2015, p. 8). I due propongono di considerare alcuni possibili problemi che riguardano, o evocano il teorema di Pitagora (**Error! Reference source not found.**).



**Fig. 1.1** Diagrams for sample problems involving Pythagoras's theorem

- Sample Problem 1. State Pythagoras's theorem.
- Sample Problem 2. ABC (see Fig. 1.1a) is a triangle right-angled at C. AC has length 7 cm. BC has length 12 cm. Calculate the length of side AB.
- Sample Problem 3. In triangle DEF (see Fig. 1.1b), angle F is  $90^\circ$ , angle D is  $45^\circ$  and side EF is 150 m. Calculate the length of side DE.
- Sample Problem 4. A large kite is flying at an angle of  $45^\circ$  to the ground at height of 150 m. How long is the rope tethering it?
- Sample Problem 5. KLM (see Fig. 1.1c) is a triangle right-angled at M. P is a point on KM and Q is a point on LM. Prove that  $KQ^2 + LP^2 = KL^2 + PQ^2$ .
- Sample Problem 6. Prove Pythagoras's theorem.

*Figura 3: Problemi che riguardano, o evocano il teorema di Pitagora in Stacey e Turner (2015, p. 8)*

Di questi, tutti “validi” nel contesto scolastico, solo il problema 4 – dicono – potrebbe essere considerato adatto alla rilevazione OCSE-PISA. Ora, poniamoci al di fuori del contesto OCSE-PISA e chiediamoci se tra gli obiettivi didattici della scuola debba/possa esserci che gli studenti possano risolvere questi problemi, se pensiamo che un individuo che consideriamo “competente” debba potenzialmente sapere risolvere questi problemi. Se la risposta è positiva, occorrerà tentare di includere nell'idea di competenza matematica anche le risorse e i processi che sottendono la soluzione di questo tipo di problemi. La risposta, positiva o negativa, dipende dagli obiettivi, le

funzioni per i quali si intende definire la nozione di competenza e dal sistema di valori - sull'educazione, sulla matematica,... - personali o socialmente condivisi che vogliamo rappresentare.

L'obiettivo delle rilevazioni OCSE-PISA per quanto riguarda la *ML* è quello di sviluppare indicatori che mostrino quanto efficacemente i Paesi che aderiscono preparino i rispettivi studenti a usare la matematica efficacemente in tutti gli aspetti quotidiani della loro vita personale, sociale e professionale. L'obiettivo quindi è la valutazione del sistema e non la valutazione del singolo studente (e in effetti la valutazione delle prestazioni degli studenti è una delle componenti della valutazione OCSE PISA, anche se spesso quella che ha maggior risonanza). Scopo del quadro di riferimento è quello di definire l'approccio e descrivere gli strumenti per questa valutazione di sistema. Il quadro di riferimento risultante è estremamente articolato, e la definizione di *ML* è funzionalmente inserita in questo quadro e legata agli obiettivi della rilevazione.

La nozione di *ML*, dunque, a differenza delle altre 3 declinazioni dell'idea di competenza matematica esaminate, ha come obiettivo diretto non quello di contribuire all'organizzazione di un curriculum o alla descrizione delle pratiche didattiche, anche se ovviamente punta ad avere, di riflesso, un impatto sulle decisioni e sulle azioni in materia di educazione in vari contesti e a diversi livelli, non solo a livello di decisori politici.<sup>11</sup>

Entrando un po' più nel dettaglio la *ML* è declinata rispetto tra aspetti: il contesto in cui la situazione problematica è situato; il contenuto matematico utile per poter risolvere il problema; i processi matematici che è necessario attivare per collegare contesti e contenuti matematici e per risolvere il problema. I processi si distinguono in *fundamental mathematical capabilities*<sup>12</sup>, che descrivono in astratto i tipi di attività che sottendono l'attività matematica in ogni contesto, e i 3 processi *formulate – employ – interpret* che descrivono la relazione tra il problema in contesto e il problema matematico. Per una descrizione completa del quadro di riferimento OCSE-PISA rimandiamo alla lettura dei documenti ufficiali e degli altri lavori citati in bibliografia (in particolare OCSE, 2013; Stacey e Turner, 2015).

A fronte di un quadro così complesso e articolato, la valutazione della *ML* degli studenti coinvolti nella rilevazione OCSE PISA, presenta molte criticità riferibili ad aspetti anche tra loro molto diversi della rilevazione, alcuni inevitabili.

---

<sup>11</sup> Nel volume dedicato alla valutazione della *ML* nella rilevazione OCSE-PISA edito da Stacey e Turner (2015) c'è una intera sezione che documenta l'impatto delle rilevazioni OCSE-PISA sui Paesi che hanno partecipato ad esse.

<sup>12</sup> Negli anni i termini utilizzati sono stati modificati, le *fundamental mathematical capabilities* corrispondono a ciò che inizialmente era definito come *competencies*.

- La valutazione appare appiattita sulla prestazione, inevitabilmente episodica. Pensiamo, per contrasto, alla complessità della valutazione delle competenze come evidenziata dal lavoro già citato di Pellerrey. È vero che la rilevazione PISA comprende elementi volti a indagare fattori affettivi e fattori collegati ai contesti socio-economici, ma anche la valutazione di questi e il loro collegamento con le prestazioni restano altamente problematici. E comunque quello che emerge in modo preponderante, anche nelle comunicazioni dirette ai decisori politici e al grande pubblico, è la valutazione delle prestazioni in sé.
- La valutazione ricorre a compiti simulati, (inevitabilmente) etero-posti, dove non c'è possibilità per l'individuo di definire i propri obiettivi e orchestrare le proprie risorse in riferimento a quelli. D'altra parte avevamo già accennato ai limiti intrinseci dell'uso di compiti simulati per la valutazione delle competenze messi in evidenza dalla letteratura (Mulder, Weigel, Collins, 2007, p.82).
- I livelli di ML sono definiti a posteriori. Se questo può aver senso nell'ambito di una rilevazione come quella di OCSE PISA, sarebbe quanto meno discutibile in ambito educativo in cui gli obiettivi di apprendimento, compresi il grado con cui tali obiettivi sono raggiunti devono essere definiti a priori.

These [the levels of proficiency] are helpful for providing a summary of a person's performance, but they may also be misleading: the term 'level' implies a threshold between levels, and the theoretical assumption is indeed that there are qualitative differences between individuals on different levels. However, the PISA levels, like those of many other studies which propose a model of competence levels, were constructed by assigning individuals to levels post-hoc, based on the distribution of test scores. In other words, the levels did not play a part in test construction. This means that the thresholds between levels are somewhat arbitrary. (Glaesser, 2019, p. 75)

- Nonostante il costrutto di *ML* sia definito come costrutto multidimensionale in cui sono presenti varie componenti indipendenti non riconducibili una alle altre, la valutazione schiaccia tutte queste dimensioni una sull'altra.

The fundamental mathematical capabilities cannot be individually assessed and reported by PISA, because from a psychometric point of view there are too many of them, and because they are rarely activated in isolation (Stacey & Turner, 2015, p. 23).

In effetti il modello di ML è via via rifinito per adattarsi sempre meglio a una valutazione di tipo psicometrico. C'è il rischio di un rovesciamento, in un certo senso, della direzione della relazione, che non va più dalla definizione di un costrutto che sia significativo dal punto di vista educativo allo sviluppo di modalità di valutazione adatte, ma dalla definizione di modalità di valutazione compatibili con determinati vincoli all'elaborazione di un costrutto valutabile con tali modalità (Niss, 2015, p.51).

### 1.5.5 Una sintesi provvisoria

I costrutti che abbiamo presentato nei paragrafi precedenti illustrano 4 diverse declinazioni dell'idea di competenza matematica nell'ambito della *ME*. Come abbiamo visto, ci sono affinità tra i diversi costrutti ma anche inevitabilmente differenze:

- Gli obiettivi sono di complessivamente di due tipi diversi: organizzare il curriculum secondo principi generali che prescindono dall'organizzazione della matematica in sotto-ambiti e dall'individuazione di specifici contenuti (la cui importanza è comunque riconosciuta) e descrivere coerentemente gli obiettivi di apprendimento attesi; organizzare la valutazione delle prestazioni degli studenti in riferimento a situazioni problematiche in diversi contesti.
- I contesti delle situazioni problematiche rispetto alle quali viene definita la competenza matematica: alcuni approcci considerano solo situazioni extra-matematiche, altri anche situazioni intra-matematiche. Abbiamo già evidenziato che questa scelta dipende dagli obiettivi, ma anche dai valori personali, sociali o culturali, che si vuole vengano riflessi nella definizione.
- Il livello di difficoltà delle situazioni problematiche: alcuni approcci non sono espliciti riguardo a questo punto, altri mettono in risalto la natura sfidante delle situazioni nelle quali la competenza viene messa alla prova.
- La presa in carico dei fattori affettivi e metacognitivi: l'importanza di questi fattori è chiaramente sottolineata in tutti gli approcci considerati, ma solo il costrutto della *MP* li incorpora nella definizione stessa di competenza.
- L'articolazione della competenza in componenti: in tutti gli approcci la nozione di competenza è articolata in componenti, la natura di queste componenti e le relazioni tra essi sono diverse da approccio ad approccio, e diversa è la modalità di analisi che ha condotto gli autori a definire quelle componenti. Tutte però riguardano fattori modificabili, e tutte sono riferite specificamente all'attività matematica.
- La dimensione della conoscenza matematica, come questa si coniughi con le componenti dei costrutti elaborati non è presa in conto in modo esplicito, almeno non a livello di definizione del costrutto.

Al termine dell'analisi della letteratura sull'idea generale di competenza (sezione 1.3.3) avevamo tentato di precisare alcune caratteristiche di quella che abbiamo chiamato una proto-definizione di competenza in *ME*:

la nozione di competenza dovrebbe essere costruita/centrata su aspetti modificabili con interventi didattici mirati o con l'esperienza accumulata. In secondo luogo le prestazioni che vogliamo che un individuo possa realizzare riguardano in prima istanza, specificamente, la matematica e i contesti in cui la matematica gioca un ruolo; allo stesso tempo riteniamo importante porsi il problema della formazione più generale dell'individuo e quindi siamo indotti a considerare quegli aspetti suscettibili di contribuire alla formazione in senso più ampio e pieno. In ambito educativo ci pare poi più importante concentrarsi sugli aspetti centrali potenzialmente coinvolti in un'ampia gamma di attività matematiche, riferibili sia alla dimensione pragmatica sia alla dimensione più propriamente riflessiva della disciplina. Un ultimo punto ha una importanza generale in ambito educativo: quando si valutano gli apprendimenti, deve essere possibile rilevare diversi livelli di apprendimento...

La discussione sopra evidenzia come in effetti diversi di questi aspetti siano presi in conto dagli approcci esaminati. Resta problematica la dimensione della valutazione, ma anche quella delle relazioni con la conoscenza matematica intesa come insieme di risultati e tecniche. Tuttavia c'è un diverso, ultimo punto che intendiamo affrontare prima di concludere.

### **1.5.6 Promuovere lo sviluppo della competenza matematica<sup>13</sup>**

La discussione sviluppata finora non risolve il problema della definizione di competenza matematica. Speriamo però che contribuisca a porlo in una diversa prospettiva: la scelta di un approccio alla definizione di competenza mette in gioco obiettivi e sistema di valori, il primo passo per poter avviare un confronto fruttuoso su questo tema, a qualunque livello, è quello di esplicitare gli uni e gli altri.

Il dibattito sul tema delle competenze si concentra spesso sulla questione della valutazione. Ma la richiesta forte che viene fatta agli insegnanti dalle istituzioni è quella non solo di valutare ma anche progettare “per competenze”. Questo richiede di sviluppare e mettere in pratica in modo sistematico, e non episodico, attività didattiche suscettibili di promuovere negli studenti non solo la costruzione delle conoscenze e abilità relative ai contenuti specifici delle singole discipline oggetto di insegnamento, ma anche la costruzione e l'affinamento di tutte le altre dimensioni delle competenze che si intendono promuovere attraverso l'insegnamento.

Ci sembra che gli approcci che abbiamo esaminato tendano, almeno in prima istanza, a trascurare la riflessione su come promuovere lo sviluppo della competenza. L'indicazione generale sembra quella di presentare agli studenti quelle situazioni problematiche intra- o extra-matematiche in cui la matematica gioca un ruolo fondamentale senza però preoccuparsi di come promuovere

---

<sup>13</sup> Questa parte riassume parte del lavoro di Maracci & Martignone (2017) a cui si rimanda per la discussione completa.

contestualmente l'apprendimento dei contenuti disciplinari e chiarire meglio le caratteristiche che le situazioni problematiche devono avere per favorire questo processo.

Rispetto a questo obiettivo ci sembra promettente combinare la prospettiva sull'idea di competenza elaborata da Pellerey con l'analisi delle componenti della *MC* sviluppata nell'ambito del progetto KOM.

Per cui la competenza matematica risulta definita come

La competenza è la capacità di affrontare un compito o una serie di compiti, essere in grado di avviare e orchestrare le proprie risorse interne - cognitive, affettive e volitive - e utilizzare quelle disponibili esterne in modo coerente e fruttuoso

dove quindi sono messe in evidenza la dimensione affettiva e volitiva e dove le risorse cognitive interne comprendono le *competencies* della *MC*. L'insieme dei compiti cui si fa riferimento in questa definizione sono quelli interni alla matematica o esterni ad essa in cui la matematica può giocare un ruolo. Preciseremo meglio questo aspetto nelle prossime righe.

Riprendendo il discorso, la nostra posizione è dunque che sia necessario promuovere un insegnamento in cui lo sviluppo delle conoscenze disciplinari e, contestualmente, di tutte le altre dimensioni che compongono la competenza matematica sia costantemente al centro dell'azione didattica. Perché questo sia possibile occorre individuare e proporre attività agli studenti che da un lato stimolino lo sviluppo di abilità legate all'argomentare, al comunicare, al matematizzare, ecc. e dall'altro offrano contesti di riferimento significativi per lo sviluppo di conoscenze matematiche, attività che possano funzionare da situazioni di riferimento per la costruzione di concetti matematici (Vergnaud, 1990).

L'idea di *campo di esperienza* elaborato alla fine degli anni '80 ci sembra particolarmente efficace per concepire la progettazione di attività didattiche in linea con un approccio di questo tipo. Per campo di esperienza si intende anzitutto un ambito dell'esperienza culturale dell'uomo riconosciuto come omogeneo e unitario (Boero et al., 1995). Essendo un ambito dell'esperienza culturale dell'uomo, non è detto che sia a priori un ambito dell'esperienza attuale, vissuta dallo studente; ma è un ambito che può diventare tale. Dal punto di vista della didattica della matematica, quel che interessa sono i campi di esperienza interni alla matematica o i campi di esperienza che si prestano ad attività di matematizzazione e modellizzazione (gli scambi economici, la rappresentazione dello spazio, le ombre del sole, la genetica, i giochi...). I campi di esperienza offrono i contesti in cui situare l'attività di esplorazione, di costruzione e di soluzione di problemi, di produzione di congetture, ecc. e forniscono i vincoli naturali o sociali che contribuiscono, sotto la guida dell'insegnante, alla costruzione da parte dello studente del senso che lo studente dà all'intera attività, dei significati

matematici e delle strategie di risoluzione di problemi pertinenti con la matematica e con il campo di esperienza medesimo.

L'articolo allegato (Maracci & Martignone, 2017) discute alla luce delle considerazioni svolte sopra alcuni esempi classici tratti dai progetti “Bambini, maestri, realtà” (<http://didmat.dima.unige.it/documenti/RT/rtind.htm>) e “Uomo e Natura” e ne mostra le loro potenzialità rispetto agli obiettivi didattici sopra indicati.

L'esempio citato sopra è un esempio felice, ma in generale la possibilità di rileggere l'enorme bagaglio di risultati solidi, in ME alla luce di un approccio centrato sulla nozione di competenza non è scontata. Nel corso degli anni, la ricerca in ME si è concentrata su molte delle componenti evidenziate, ad esempio abilità metacognitive, atteggiamenti, sistema di convinzioni, da un lato, e processi di problem-solving, argomentazione, rappresentazione e così via, dall'altra; ma più spesso che no, questi componenti sono stati esaminati come entità separate. Occorre dunque sviluppare un approccio più ampio che consideri queste componenti in modo interconnesso (Maracci & Martignone, 2016).

## 2 L'atteggiamento nei confronti della matematica

### 2.1 Il problema e gli obiettivi di cercare una definizione

In questa parte del seminario cercheremo di ripercorrere la storia degli studi sull'atteggiamento nei confronti della matematica fino ad arrivare ai motivi e i metodi che hanno portato alla definizione del modello tri-dimensionale di atteggiamento nei confronti della matematica.

Al di là di quanto sarà descritto rispetto al costrutto specifico di atteggiamento – sottolineando in particolare il consolidarsi nel tempo della certezza che gli aspetti affettivi abbiano un ruolo di primo piano nel processo di apprendimento e insegnamento della matematica – si tenterà di discutere alcuni aspetti a livello meta che, a nostro avviso, legano fortemente gli studi relativi all'atteggiamento con gli studi sulla competenza in matematica e quelli sulle difficoltà di tipo cognitivo. In particolare, come osservato nell'introduzione, i tre termini sono correntemente usati (con accezioni spesso molto diversificate) nella pratica didattica: sono cioè termini tecnici della ricerca che hanno un corrispettivo colloquiale. Diventa dunque particolarmente importante che almeno in ambito della ricerca il loro significato sia, se non univoco, almeno ben esplicitato e non dipendente dagli strumenti di osservazione utilizzati. E altresì fondamentale che i costrutti siano definiti in modo che siano osservabili, ma che permettano anche di sviluppare diagnosi differenziate di difficoltà in matematica, in modo da poter essere uno strumento di lavoro (in particolare, suggerire approcci mirati di recupero e prevenzione delle difficoltà in matematica) e non una certificazione di impotenza. Il lavoro sulle definizioni di questi costrutti in ricerca deve essere dunque, a nostro avviso, fortemente ancorato alla pratica. In un certo senso la ricerca porta alla costruzione del modello, identificando cosa osservare, con l'obiettivo di guidare l'identificazione di profili, ovvero di differenziare in maniera significativa.

La discussione a livello meta giustifica dunque il leit motiv di questo seminario, ovvero l'importanza di ben definire profili, che siano di competenza, atteggiamento nei confronti della matematica o di apprendimento matematico. Oltre a questo, l'intento è quello di descrivere anche alcune difficoltà della ricerca: sia quelle proprie della ricerca nel campo, il cui superamento è avvenuto spesso a seguito di snodi significativi, cambi di paradigma o di metodo nell'ambito della math education; sia le difficoltà personali, le nostre difficoltà come ricercatori che affrontano problemi complessi. Quest'ultime difficoltà sono da un certo punto di vista le più interessanti in quanto fanno emergere i limiti, gli interessi e le scelte personali.

## 2.2 I riferimenti all'atteggiamento nel panorama italiano

Come abbiamo sottolineato, il termine 'atteggiamento' è comunemente utilizzato nella pratica didattica (vedi anche sezione 2.6). D'altra parte, in riferimento alla matematica, questo termine compare anche nelle Indicazioni di legge. Ad esempio, cercando la parola 'atteggiamento' nel testo delle Indicazioni Nazionali per il curriculum della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione, si trovano 4 occorrenze: una riferita all'insegnamento di Tecnologia, una riferita all'insegnamento di Arte e Immagine e due riferite proprio alla Matematica.

Il segno della rilevanza data a questo termine nelle Indicazioni Nazionali per la Matematica è anche il fatto che, rispetto alle altre due discipline, il riferimento all'atteggiamento è inserito nei traguardi per competenza. Troviamo infatti il seguente traguardo per competenza alla fine della scuola primaria:

*Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato ad utilizzare siano utili per operare nella realtà*", e in continuità con questo primo traguardo è fissato il seguente traguardo alla fine della scuola secondaria di secondo grado: *“Ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.*

Osserviamo due aspetti interessanti.

Il primo, legato a quello che descriveremo tra poco, è il fatto che si leghi l'atteggiamento positivo nei confronti della matematica ad una certa visione della matematica, in particolare al riconoscere rilevanza della conoscenza matematica per “operare nella realtà”. Il richiamo ad una certa visione della matematica, così come ad aspetti “non puramente cognitivi” è riscontrabile anche nella parte descrittiva sull'insegnamento della Matematica all'interno delle I.N. per il primo ciclo, si scrive infatti:

*Gradualmente, stimolato dalla guida dell'insegnante e dalla discussione con i pari, l'alunno imparerà ad affrontare **con fiducia e determinazione** situazioni problematiche”, e anche: “Di estrema importanza è lo sviluppo di **un'adeguata visione della matematica**, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo.*

Il secondo è proprio il fatto di riconoscere lo sviluppo di un atteggiamento positivo nei confronti della matematica come traguardo per lo sviluppo delle competenze. Abbiamo detto delle discussioni relative al concetto di competenza e all'inserire o meno gli aspetti affettivi nella definizione di competenza matematica. Nelle Indicazioni Nazionali si prende posizione: si considera lo sviluppo di un atteggiamento positivo verso la matematica come un fattore importante per lo sviluppo delle competenze in matematica.

Se lo sviluppo di un atteggiamento positivo è considerato un traguardo, è altresì vero che è l'unico traguardo per competenza che è considerato non rilevabile da una rilevazione standardizzata come

INVALSI. Nel documento: “il quadro di riferimento delle prove di matematica del sistema nazionale di valutazione” ([https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR\\_MATEMATICA.pdf](https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_MATEMATICA.pdf)) si dichiara esplicitamente questa difficoltà/impossibilità:

*Le prove standardizzate, come già detto, non possono misurare né tantomeno valutare il conseguimento di traguardi caratterizzati da aspetti metacognitivi o non cognitivi, come per esempio: Sviluppa un atteggiamento positivo rispetto alla matematica, attraverso esperienze significative, che gli hanno fatto intuire come gli strumenti matematici che ha imparato a utilizzare siano utili per operare nella realtà.*

### 2.3 Le prime ricerche sull'atteggiamento in educazione matematica

In un certo senso, la ricerca sull'atteggiamento è paradigmatica della ricerca in ME, ricerca che spesso prende in prestito costrutti sviluppati in altri domini – come ad esempio quello psicologico, delle scienze cognitive, dell'epistemologia, della semiotica, dell'antropologia – modificandoli opportunamente perché siano significativi per rispondere alle finalità della ricerca (Sierpiska et al. 1993) e anche per adeguarli al discorso interno alla comunità.

È appunto il caso del costrutto di atteggiamento che emerge nella prima metà del 1900 nel contesto della psicologia sociale, visto come un tratto dell'individuo che influenza il comportamento e, in particolare, alcune scelte dell'individuo come l'acquisto di beni o le scelte politiche (Di Martino & Zan, 2015). L'influenza diretta sul comportamento, in un'ottica comportamentista, è particolarmente rilevante e per questo esplicitata e sottolineata nella definizione del costrutto, Allport (1935, p. 810) scrive:

*An attitude is a mental and neural state of readiness, organized through experience, exerting a directive and dynamic influence upon the individual's response to all objects and situations with which it is related.*

Nel campo dell'educazione matematica i primi studi sull'atteggiamento emergono intorno alla metà del secolo scorso ed è evidente l'influenza del dominio da cui il costrutto proviene, quello della psicologia sociale, sia per quanto riguarda i metodi (prettamente quantitativi e basati su scale di Likert o di Thurstone), sia per quanto riguarda la giustificazione della significatività del costrutto, visto come un predittore delle scelte degli studenti, ad esempio quelle relative al seguire o meno corsi di matematica.

La preoccupazione maggiore di questi primi studi è quella di misurare il costrutto, al di là della sistemazione teorica del costrutto stesso, e trovare relazioni tra le misure di atteggiamento e altri fattori ritenuti significativi.

In particolare, sono due gli aspetti per i quali viene indagata la correlazione con l'atteggiamento. Il primo, come già detto, riguarda le scelte di seguire/non seguire corsi avanzati di matematica: aspetto

particolarmente sensibile in alcuni contesti nei quali tale scelta era possibile anche a livello di scuola secondaria. Il secondo fattore è il successo in matematica, per i quali l'indicatore è tipicamente il voto scolastico.

In questo contesto nasce anche tutto un filone di ricerca sulle gender differences, che studia le differenze nell'atteggiamento nei confronti della matematica tra uomini e donne per spiegare scelte diverse e differenze di rendimento. A questo proposito, Feierabend (1960) scrive:

*A series of recent investigations have attempted to explain differences in school performance among students of equal abilities on the basis of their attitudes.* (Feierabend, 1960, p. 11)

e nello specifico del problem solving:

*There are sex differences in problem-solving ability unrelated to general mental ability, special abilities, or specific knowledge (...) [he] attempted to show that the differential performance of the two sexes was due to a difference in attitude toward problem-solving.* (Feierabend, 1960, p. 17).

In quest'ottica si sviluppano i lavori di Fennema e Sherman, lavori che per molto tempo hanno costituito un punto di riferimento rispetto alla specifica tematica (1977):

*Since the study of mathematics appears not to be sex-neutral, attitudes toward mathematics may reflect cultural proscriptions and prescriptions (...) These data certainly indicate that many females have as much mathematical potential as do many males. The generalized belief that females cannot do well in mathematics is not supported.* (Fennema and Sherman 1977, p. 69).

Nel 1970 Aiken pubblica un articolo che, da una parte offre un'attenta panoramica della ricerca sull'atteggiamento nel campo della ME e sottolinea i principali interessi di tale ricerca:

*The major topics covered were: methods of measuring attitudes towards arithmetic and mathematics; the distribution and stability of mathematics attitudes; the effects of attitudes on achievement in mathematics; the relationship of mathematics attitudes to ability and personal factors.* (Aiken 1970, p. 592)

Nella sua analisi Aiken comincia a mettere in discussione, dati alla mano, la correlazione più rilevante studiata all'epoca: quella tra atteggiamento e rendimento in matematica.

Dalla panoramica offerta da Aiken emerge un quadro piuttosto netto: un approccio fortemente deterministico che mira a scoprire relazioni di causa-effetto tra l'atteggiamento nei confronti della matematica e altri fattori ritenuti significativi con metodi puramente quantitativi. D'altra parte l'approccio normativo-deterministico in qualche modo è usato come giustificazione per la grande attenzione posta sulla misura (non osservazione!) del costrutto di atteggiamento e sullo sviluppo di strumenti di misurazione, tipicamente scale di Likert o di Thurstone.

Nessuna attenzione è posta sulla chiarificazione teorica del costrutto tanto che Neale (1969, p. 631) scrive: *"Implicit in such recommendations is a belief that something called "attitude" plays a*

*crucial role in learning mathematics*”. Come sottolinea Hart (1984), raramente i lavori di ricerca in ME sull’atteggiamento esplicitano una definizione del costrutto e questo rende molto complicato anche il confronto tra risultati diversi:

*Sometimes no description or definition of what is meant by a particular variable is even included in the research report. This makes interpretation of results difficult and detracts from efforts to compare results across studies.* (Hart 1984, p. 573).

In un certo senso il costrutto è definito di volta in volta sulla base degli strumenti che sono usati per misurarlo: *“In many cases, authors either implicitly or explicitly define attitude to mathematics in terms of the instrument(s) used in their research”* (Leder, 1985, p.21), e tali strumenti appaiono spesso approssimativi:

*First, the construct of attitude has been vague, inconsistent, and ambiguous. Second, research has often been conducted without a theoretical model of the relationship of attitude with other variables. Third, the attitude instruments themselves are judged to be immature and inadequate.* (Germann 1988, p. 689).

Riassumendo, la ricerca relativa all’atteggiamento in ME fino alla fine degli anni ’80 del secolo scorso è condotta sulla base di un approccio puramente quantitativo e normativo (cioè in cerca di relazioni di causa-effetto), si focalizza sullo sviluppo e la validazione di strumenti di misura di un costrutto non ben definito. Manca infatti un’attenzione specifica alla sistemazione teorica del costrutto atteggiamento: né per quanto riguarda la sua definizione, né tantomeno per quanto concerne la relazione con altri costrutti (cognitivi o affettivi).

Questo primo filone storico della ricerca sull’atteggiamento, pur con i limiti evidenti teorici e di paradigmi di ricerca assunti, porta comunque ad alcuni risultati interessanti: si dimostra piuttosto efficace nella previsione di semplici scelte sulla base delle misurazioni di atteggiamento effettuate con i questionari più noti, così come evidenzia differenze significative tra maschi e femmine nelle risposte ad alcuni item dei questionari per la misura dell’atteggiamento. D’altra parte, lo stesso approccio mostra le sue crepe anche rispetto a obiettivi dichiarati, come quello dello studio della relazione tra misura di atteggiamento e successo in matematica: tipicamente, e anche in questo caso piuttosto discutibilmente, identificato con il voto scolastico. Già Aiken (1970) aveva evidenziato come in diversi studi questa relazione non emergesse così chiaramente, quasi 30 anni dopo un famoso lavoro di Ma e Kishor (1997), analizzando i risultati di 113 studi sulla correlazione atteggiamento – successo in matematica, concludono che una relazione chiara e statisticamente significativa non è sostenuta dai risultati degli studi presi in considerazione.

## 2.4 La svolta interpretativa

Al di là dei limiti della ricerca che emergono anche in corso d'opera, alla fine degli anni '80 del secolo scorso, due *novità* della ricerca nel campo della ME cambiano definitivamente l'approccio alla ricerca sull'atteggiamento nei confronti della matematica, portandolo verso quella che potremmo chiamare l'era moderna della ricerca sul costruito.

Una di queste novità è *generale*, relativa alla sistemazione come campo di ricerca autonomo della ME. Inizia un percorso importante per delineare con maggiore chiarezza i tratti caratteristici della ricerca in ME. Si avverte cioè la necessità di definire il campo e le sue peculiarità, di delineare confini, competenze, metodi, paradigmi e soprattutto obiettivi propri. In campo internazionale escono diverse riflessioni sull'epistemologia della ME (Bishop, 1992; Kilpatrick, 1992), e anche nel panorama italiano è organizzato un seminario nazionale nel novembre del 1991 su questo tema (Arzarello, 1992; Boero, 1992).

Questo movimento porta ad affrancarsi o comunque a marcare le differenze con le discipline di confine, come la psicologia cognitiva da cui il costruito di atteggiamento è nato, e, soprattutto, a far emergere con forza la necessità di una sistematizzazione teorica adeguata dei costrutti utilizzati, tra cui quello di atteggiamento.

La novità più specifica relativamente alla ricerca relativa all'atteggiamento nasce invece dai risultati di diversi studi condotti nei primi anni '80, relativamente al problem solving. Tali studi in educazione matematica evidenziano l'insoddisfazione per un'interpretazione puramente cognitiva di tutti i fenomeni di difficoltà in matematica, a questo proposito Schoenfeld (1985, p. 35) scrive:

*The point here is simply that 'purely cognitive' behavior - the kind of intellectual performance characterized by discussion of resources, heuristics, and control alone - is rare. The performance of most intellectual tasks takes place within the context established by one's perspective regarding the nature of those tasks.*

Si comincia così a considerare il ruolo degli aspetti metacognitivi, ruolo già considerato in altri campi di ricerca, in particolare relativamente agli studi sulla memoria; ma non solo, emerge l'importanza nei comportamenti degli allievi in matematica del cosiddetto "sense making", ovvero il senso che l'allievo dà alle richieste che riceve in matematica, soprattutto quando si trova di fronte alla risoluzione di problemi. Tale senso è costruito anche sulla base delle esperienze pregresse, delle convinzioni che l'allievo ha sviluppato (Cobb, 1985). Si comincia insomma a convincersi che le performance in ambito di problem solving, attività considerata cognitiva per eccellenza, non dipendano esclusivamente da fattori cognitivi.

Tale convinzione si rafforza negli anni successivi, evidenziando anche diversi altri fattori che possono influenzare il comportamento degli allievi in ambito di problem solving. Schoenfeld (1983;

1985), ad esempio, mostra con diversi esempi come ciò che chiama “students’ mathematical world view” (ovvero le loro convinzioni sulla matematica) abbia una rilevanza importante su come gli studenti affrontano un problema, influenzando l’approccio al problema, il riconoscimento degli aspetti importanti nel problema e, addirittura, la scelta delle tecniche da usare o da evitare.

In questa cornice, McLeod e Adams (1989) pubblicano un famosissimo libro, “Affect and mathematical problem solving”, interamente dedicato alle ricerche relative all’influenza dei cosiddetti fattori affettivi sul processo di problem solving. In particolare, i diversi contributi del libro discutono l’influenza di emozioni, convinzioni e, per quel che più ci interessa atteggiamenti, sulla concentrazione, persistenza e attivazione di processi di controllo durante sessioni di problem solving. Appare insomma evidente che il raggio d’azione del costrutto ‘atteggiamento’ è molto cambiato rispetto a ciò per cui era nato in ambito di psicologia cognitiva: non più un costrutto che può servire a prevedere semplici scelte, o che può avere una correlazione (piuttosto oscura) con il rendimento, ma un costrutto che può servire a interpretare comportamenti in attività matematiche complesse (come il problem solving). Proprio la consapevolezza della complessità di ciò che si vuole studiare porta ad evidenziare la necessità di una maggiore sistemazione teorica dei costrutti in gioco, ma anche la possibilità di costruire la definizione del costrutto in base al fenomeno da studiare. Kulm è un precursore di questa idea relativamente al costrutto di atteggiamento, egli, dopo aver fatto una panoramica dei diversi studi sull’atteggiamento e aver discusso gli ambiti e le problematiche in cui tale costrutto è stato tirato in ballo, scrive:

*Probabilmente non è possibile offrire una definizione di atteggiamento verso la matematica che sia adatto per tutte le situazioni e, anche se lo fosse, probabilmente tale definizione sarebbe troppo generale per essere utile. (Kulm 1980, p. 358)*

Quasi 20 anni dopo, Ruffel, Mason e Allen espliciteranno una posizione teoricamente molto significativa e che può essere estesa alla definizione di altri costrutti quali competenza matematica o discalculia:

*Riflettendo su tali studi [nota: studi sull’atteggiamento] ci porta a mettere in discussione la natura del costrutto di atteggiamento. Noi siamo portati a mettere in discussione anche il modello di causa-effetto che è alla base di molte ricerche relative all’atteggiamento. Noi vediamo l’atteggiamento come una nozione complessa e ipotizziamo che forse non sia una qualità dell’individuo ma piuttosto un costrutto nato dal desiderio dell’osservatore di avere uno strumento per interpretare l’osservazione. (Ruffel et al., 1998, p. 1)*

Ruffel, Mason e Allen descrivono il costrutto di atteggiamento come un modello del ricercatore per spiegare fenomeni, in questo senso la loro idea corrobora quanto affermato da Kulm, il modello dipenderà dalla complessità del fenomeno studiato: se ci limitiamo a semplici scelte, può andar benissimo la definizione di atteggiamento come semplice disposizione emozionale, se siamo

interessati a interpretare decisioni più complesse (come le scelte in ambito di problem solving) allora il modello, per poter dire qualcosa di significativo, deve essere più complesso. In questa visione, l'approccio ai costrutti in ME ha dei punti di somiglianza con quello dei matematici con gli *oggetti* matematici: il ricercatore deve essere consapevole da una parte della sua libertà di definizione, dall'altra che non sta studiando una caratteristica della persona, ma che si sta creando un modello per interpretare fenomeni e anche per raccontare le interpretazioni agli altri (Ruffel, Mason e Allen parlano di "*formulate a story*").

Proprio la possibilità di avere diverse accezioni del costrutto e la necessità di raccontare agli altri – alla comunità dei ricercatori, ma anche al di fuori della comunità, per esempio agli insegnanti – evidenziano un'altra necessità: quella di superare la vaghezza dei primi studi relativi all'atteggiamento, il ricercatore deve definire accuratamente il costrutto, in un certo senso giustificando la scelta della definizione scelta in base agli obiettivi perseguiti.

Il tema della definizione di costrutti sulla base di obiettivi di ricerca e educativi (che nel nostro campo sono spesso intrinsecamente connessi) è uno dei temi centrali di questo seminario, se vogliamo trasversale ai particolari costrutti che descriveremo e che sono oggetto delle nostre personali ricerche. Pajares (1992, p.315) scrive:

*A community of scholars engaged in the research of common areas with common themes, however, has a responsibility to communicate ideas and results as clearly as possible using common terms. For these reasons, it is important to use the terms consistently, accurately, and appropriately once their definitions have been agreed on.*

In questa cornice, nel famoso *Handbook of research on mathematics teaching and learning* del 1992, compare un capitolo chiave per la concettualizzazione dei fattori affettivi: emozioni, convinzioni e atteggiamento, scritto da McLeod (1992). Consigliamo la lettura del capitolo in questione a tutti coloro che vogliono approfondire la tematica relativa ai fattori affettivi in matematica: è infatti uno dei lavori fondanti del campo di ricerca che ora è noto come *Affect*.

Qui ci limitiamo a sottolineare due aspetti fondamentali del lavoro di McLeod.

Il primo è la presa d'atto definitiva della rilevanza dei fattori affettivi e della necessità di includere la variabile affettiva negli studi in ME perché questi abbiano il massimo impatto anche sulla pratica educativa:

*Affective issues play a central role in mathematics learning and instruction (...) If research on learning and instruction is to maximize its impact on students and teachers, affective issues need to occupy a more central position in the minds of researchers. (McLeod, 1992, p. 575)*

Il secondo, sulla base delle critiche alle ricerche sugli aspetti affettivi condotte fino ad allora ("*A major difficulty is that research on affect has not usually been grounded in a strong theoretical foundation*" McLeod, ibidem, p. 590), è la necessità che la ricerca su tali aspetti si sviluppi ponendo

particolare attenzione su: la discussione degli aspetti teorici; lo sviluppo di un più ampia varietà di metodi, aprendosi in particolare a metodi qualitativi; la relazione tra gli aspetti affettivi, ma anche e soprattutto uno dei punti d'interesse di questo seminario: la relazione tra fattori affettivi e cognitivi.

## 2.5 La necessità e la complessità di definire l'atteggiamento

Il lavoro di McLeod, come scritto, è sicuramente fondante. Nel capitolo è proposta anche una prima caratterizzazione dei tre costrutti affettivi: emozioni, convinzioni e atteggiamenti, ma, come osserva Hannula (2011, p. 38): “*Probabilmente il concetto più problematico nel quadro teorico di McLeod è proprio l'atteggiamento*”.

Le problematiche sono di diversa natura: tra queste il fatto che gli strumenti di ricerca relativi all'atteggiamento (tipicamente questionari self-report) spesso includano richieste relative a emozioni, convinzioni e anche comportamenti.

Questo, da una parte pone il costrutto di atteggiamento su un piano diverso rispetto a emozioni e convinzioni, dall'altro evidenzia (anche per l'atteggiamento) quello che Lester (2002) descrive come il problema della circolarità: il ricercatore sostiene che lo studente si è comportato in una certa maniera perché ha certe convinzioni, atteggiamenti, emozioni, contemporaneamente inferisce le convinzioni, emozioni e atteggiamenti degli studenti dal loro comportamento. Il problema evidenziato da Lester è molto ben posto e delicato: per ora ci limitiamo ad osservare che è un problema generale della ricerca didattica (e della definizione dei costrutti non direttamente “osservabili”), anche di quelli di natura più prettamente cognitiva. È evidente che l'osservatore che costruisce il modello per raccontare la storia (come direbbero Ruffel, Mason e Allen) deve essere consapevole del rischio di questa circolarità.

Il fatto che l'atteggiamento sia comunque considerato (anche per gli strumenti di osservazione usati) come *qualcosa* di multidimensionale – in linea con l'idea che un costrutto complesso possa essere usato per interpretare fenomeni più complessi della semplice scelta basata su preferenza – evidenzia un'altra problematica della ricerca: come può un costrutto complesso e multidimensionale essere descritto da un numero? I risultati dei questionari utilizzati nella ricerca sono infatti tipicamente la somma dei punteggi assegnati dai ricercatori a ciascuna risposta, e restituiscono un numero che sintetizza l'atteggiamento nei confronti della matematica della persona.

Questo approccio è critico per diversi motivi: è in contrasto con l'idea che il costrutto sia multidimensionale, ed è in contrasto con lo shift interpretativo della ricerca in educazione matematica e di quella sui fattori affettivi (Di Martino & Zan, 2001).

Ma soprattutto riduce molto la spendibilità nella pratica didattica degli studi teorici condotti: il modello osservativo infatti ha sì una valenza conoscitiva di per sé (il ricercatore è interessato a capire

fenomeni), ma allo stesso tempo – almeno per noi è così – è finalizzato anche ad una restituzione per la pratica didattica, un modo per fornire strumenti di osservazione e diagnosi. Questo ci sembra particolarmente importante soprattutto quando sono in gioco termini – come quelli di atteggiamento, competenza e difficoltà in gioco in questo seminario – che entrano fortemente nel lessico educativo quotidiano con accezioni spesso diverse e usate in modo quasi definitivo, cioè non per avanzare ipotesi di lavoro, ma per comunicare l’impotenza dell’insegnante, degli insegnanti, della scuola.

Per quanto riguarda l’atteggiamento, l’approccio teorico misurativo unidimensionale sembra critico anche (e soprattutto) per questo motivo: che uso possiamo fare di una diagnosi unidimensionale di atteggiamento negativo verso la matematica? Come possiamo considerare uguali dal punto di vista del modello interpretativo due studenti che ottengono lo stesso punteggio attraverso la somma di risposte completamente diverse allo stesso questionario?

Emerge dunque, per l’atteggiamento, uno degli aspetti principali che vogliono essere discussi in questo seminario: la necessità del ricercatore di considerare e gestire la complessità, sviluppando strumenti teorici che possano guidare l’osservazione e l’interpretazione di fenomeni, e che permettano di riconoscere similarità, ma anche differenziare. Si tratta quindi di fare delle scelte che determinino fino a che punto si ritiene significativo differenziare: in poche parole, si tratta di definire *profili* rispetto al costrutto teorico sviluppato.

## **2.6 La definizione di atteggiamento nei confronti della matematica: la nostra ricerca**

Questo percorso è partito con un Progetto FIRB coordinato da Rosetta Zan. Il Progetto ha inizialmente sviluppato un’indagine (Polo & Zan, 2005) per avere un quadro relativamente a quanto e come il termine “atteggiamento” fosse usato nella pratica educativa matematica.

Ebbene l’indagine condotta, che ha coinvolto un campione di 146 insegnanti (29 di scuola primaria, 50 di scuola secondaria di primo livello, 67 di scuola secondaria superiore) e ha utilizzato un questionario di cui di seguito è riportata la versione tradotta in inglese (*Figura 4*), ha confermato che:

- la diagnosi “ha un atteggiamento negativo verso la matematica” è spesso molto usata in ambito educativo, a tutti i livelli scolari: l’85,6% del campione complessivo dichiara di averla usata almeno una volta e più del 50%, il 56,1%, dichiara di usare spesso tale diagnosi relativamente a difficoltà in matematica;
- l’accezione di atteggiamento negativo degli insegnanti è molto varia, a fronte della stessa etichetta (“atteggiamento negativo”) gli insegnanti intendono tante cose diverse legate a: le convinzioni sulla matematica e sulla sua utilità, le convinzioni sulle proprie capacità in matematica; le emozioni associate in matematica, i comportamenti in matematica; le

caratteristiche personali dello studente che non permettono di ottenere buoni risultati (ad esempio: mancanza di intuizione).

D'altra parte, la stessa indagine ha confermato come la diffusa diagnosi "quell'allievo ha un atteggiamento negativo nei confronti della matematica" da parte dell'insegnante è la dichiarazione di resa di fronte alle difficoltà dell'allievo e non la base di partenza per un intervento di recupero: il riferimento all'atteggiamento vuole comunicare che le cause delle difficoltà dell'allievo sono incontrollabili dall'insegnante. L'atteggiamento dell'insegnante di fronte ad una diagnosi di atteggiamento negativo è quindi fatalista: non c'è più niente da fare!

Come sottolineato da Rosetta Zan (2007), la ricerca condotta si è sviluppata con un chiaro intento applicativo, ovvero che: "la diagnosi di atteggiamento negativo non sia più un punto d'arrivo, ma un punto di partenza per un intervento mirato, finalizzato cioè a modificare quella componente, o quelle componenti, individuate come negative".

School: \_\_\_\_\_  
M  F  Age: \_\_\_\_\_ Date: \_\_\_\_\_

1. Do you ever find yourself attributing a pupil's difficulties with mathematics to his/her *attitude* towards the subject?  
 Yes  No
2. If yes, is this a frequent diagnosis or have you only seen it a few times?  
 practically never  sometimes  rarely  often  nearly always
3. What do you mean by *negative attitude* towards mathematics?
4. What demonstrates to you that a student has a negative attitude towards
5. Do you think it is possible to modify the attitude of a pupil at the end of high school?  
 yes  only to a certain extent  maybe  no  don't know
6. If yes, *how*? If no, *why*?
7. Have you ever set yourself the specific objective of changing the attitude of one of your pupils?  
 Yes  No
8. If yes, how did you attempt to achieve this? What were the results?
9. Up to now we have only referred to a single student. Have you ever seen a negative attitude towards mathematics in a whole class?  
 Yes  No
- 10 How did you recognise this negative attitude?
11. If you answered yes to question 9, in this case did you explicitly set yourself the objective of changing the attitude of the class?  
 Yes  No
12. If yes, how did you try to reach this objective? What was the result?

Figura 4: Questionario (versione in inglese da Di Martino & Zan, 2007)

La ricerca ha dunque cercato di sviluppare un modello e una definizione di atteggiamento verso la matematica che rispondesse a questo bisogno e dunque, in particolare, che fosse da una parte abbastanza complessa per differenziare situazioni tra loro significativamente distinte e per le quali si pensa servano azioni di intervento differenziate; dall'altra abbastanza semplice da poter essere maneggiata nella pratica scolastica e da non differenziare ogni caso a sé.

La caratterizzazione di atteggiamento permette anche di affrontare molte altre questioni – ad esempio quelle relative all'evoluzione dell'atteggiamento nei confronti della matematica durante l'esperienza

scolastica e dei fattori che hanno un ruolo in tale evoluzione – questioni che abbiamo trattato a livello di ricerca, ma che rimarranno sullo sfondo di questo seminario.

All'interno di questo quadro, è stata sviluppata la ricerca per la definizione di atteggiamento nei confronti della matematica, che ha portato alla caratterizzazione del costrutto inserita nella Encyclopedia of Mathematics Education (Zan & Di Martino, 2014).

Di seguito descriveremo le scelte principali della raccolta e analisi dei dati, rimandando per eventuali approfondimenti al contributo *Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives* (Di Martino & Zan, 2010a), allegato al materiale del seminario.

La prima scelta è stata quella di sviluppare un'indagine “dal basso” per la caratterizzazione del costrutto di atteggiamento nei confronti della matematica, abbiamo cioè cercato di sviluppare quella che tecnicamente è chiamata una grounded theory. I metodi di ricerca propri di questa ricerca nascono da un'idea di Glaser e Strauss (1967) in esplicita alternativa al trend dell'epoca nell'ambito delle ricerche sociali, ovvero quello di sviluppare ricerche per confermare una teoria pre-esistente (la cosiddetta Grand Theory). Tale approccio di ricerca è ora molto diffuso con accezioni anche molto diversificate e più o meno radicali (per un'analisi più dettagliata, Signorini, 2017), ma rimane un aspetto in comune a tutte le accezioni, che è quello che caratterizza la nostra prima scelta: la volontà di utilizzare i dati per costruire la teoria, per dare una definizione di 'atteggiamento verso la matematica' funzionale ai problemi della ricerca, ma anche della pratica didattica.

In particolare è stato scelto di condurre l'indagine dal basso attraverso la richiesta agli studenti di scrivere un tema, ovvero attraverso la raccolta di materiale narrativo e autobiografico relativamente all'esperienza e al rapporto con la matematica. Coerentemente con quanto sostiene Bruner (1990), la convinzione era che l'analisi dei racconti degli studenti, l'evidenziazione di ciò che ritengono importante del loro passato e presente con la matematica, e dei nessi che usano per cucire i diversi eventi sia più rilevante per descrivere il loro rapporto con la matematica di un improbabile resoconto “oggettivo”. Bruner sostanzialmente risponde a possibili critiche metodologiche sulla veridicità dei racconti raccolti con ricerche narrative e autobiografiche, sostenendo che per la ricerca è più interessante come il soggetto interpreta la propria esperienza che un'improbabile versione oggettiva dei fatti che hanno caratterizzato tale esperienza:

*“Non importa se il racconto si conformerà a quanto possono sostenere gli eventuali testimoni dei fatti, né siamo alla ricerca di questioni oscure dal punto di vista ontologico, come se il resoconto è davvero «contraddittorio» o «verosimile». Siamo invece interessati a ciò che la persona pensa di aver fatto, ai motivi per cui pensa di averlo fatto, in quali tipi di situazioni pensava di trovarsi e così via”* (Bruner, 1990, r. it., p.116).

La seconda scelta fatta è stata quella relativa al titolo del tema: unico, ma significativo, intervento del ricercatore nelle produzioni raccolte. La scelta è stata quella di proporre la composizione di un tema

dal titolo: “Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica (dalle elementari ad oggi)”. Tale titolo vuole richiamare l’attenzione su due elementi – il narratore e la disciplina – e, attraverso la congiunzione ‘e’, esplicitare l’interesse per l’interazione tra i due elementi. È poi presente il riferimento esplicito al rapporto e una precisazione – “dalle elementari ad oggi”, che ovviamente non compariva nella consegna per gli studenti di scuola primaria – per sottolineare l’interesse per l’evoluzione del rapporto con la matematica, e non solo per la fotografia del presente.

Nella prima fase dello studio (quella che ha portato alla caratterizzazione di atteggiamento) sono stati raccolti 1496 temi, da un campione di convenienza di aree geografiche del Paese diverse e così suddiviso nei livelli scolari: 707 dalla scuola primaria a partire dalla classe seconda, 369 dalla scuola secondaria di primo grado, 420 dalla scuola secondaria di secondo grado. Il tema non doveva essere assegnato dall’insegnante di matematica, ed era anonimo.

La terza scelta è quella relativa all’analisi del materiale raccolto, scelta fatta appoggiandoci a spunti metodologici dalla ricerca narrativa e, in particolare, al lavoro di Lieblich, Tuval-Mashiach e Zilber (1998). I tre autori descrivono due dicotomie tipiche nella lettura e analisi del materiale narrativo autobiografico:

- olistico vs categoriale. Nel primo caso il testo è visto come un’unità, mentre nel secondo è spezzato in sotto-unità alla luce di categorie.
- contenuto vs forma. Nel primo caso l’attenzione è sui fatti raccontati, i protagonisti, i perché della storia, nel secondo caso si analizza l’organizzazione del testo, lo stile, le scelte grammaticali e linguistiche specifiche (ad esempio in termini di uso di metafore o parole).

Attraverso tali dicotomie si possono riconoscere e mettere in atto quattro approcci possibili: ognuno dei quali è particolarmente funzionale ad un determinato problema di ricerca, a differenti tipi di testi, a differenti numerosità del campione. Nella ricerca condotta durante gli anni sono stati portati avanti tutti e quattro gli approcci, in particolare: quello olistico-contenuto ha permesso di studiare l’evoluzione del rapporto con la matematica degli studenti, mentre quello più specifico per la caratterizzazione di atteggiamento è stato quello categoriale-contenuto.

Facciamo un breve cenno ai risultati relativi all’evoluzione del rapporto con la matematica per come emerge dall’analisi dei temi perché in qualche modo legano (e motivano) ancora di più gli studi teorici, di caratterizzazione del costrutto di atteggiamento, con le esigenze della pratica didattica.

Per studiare l’evoluzione abbiamo approcciato i dati a due livelli:

- confronto dei temi di livelli scolari diversi, che ha evidenziato, come ci aspettavamo, il fenomeno, almeno dal punto di vista quantitativo, del deterioramento del rapporto con la matematica nel passaggio da scuola primaria a scuola secondaria di secondo grado;

- analisi dell'evoluzione del rapporto con la matematica nella storia dei singoli, analisi che evidentemente nasce soprattutto dalla lettura dei temi di studenti di scuola secondaria di secondo grado. Ne emerge un quadro molto interessante, sia perché fornisce interessanti indicazioni qualitative sulle cause dell'evoluzione di un certo atteggiamento nei confronti della matematica, sia perché mostra che non è mai troppo tardi per intervenire sull'atteggiamento nei confronti della matematica (ci sono anche diverse storie di evoluzione positiva). L'aspetto didatticamente più interessante è il fatto che l'insegnante sia riconosciuto dagli studenti come il fattore mediatore più significativo (nel bene e nel male) per l'evoluzione del loro atteggiamento nei confronti della matematica. Essere consapevoli di questa rilevanza è importante: l'insegnante sa che può intervenire.

Questi risultati – ovvero che non sia mai troppo tardi per intervenire sull'atteggiamento e che l'insegnante è riconosciuto come un fattore determinante nelle storie di cambiamento di atteggiamento nei confronti della matematica – motivano ancora di più la ricerca di una caratterizzazione teorica del costrutto di atteggiamento.

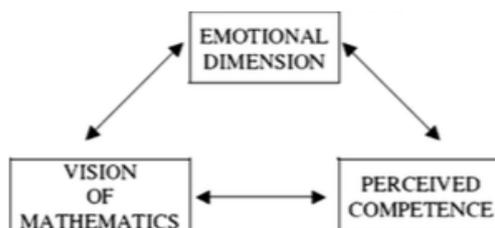
L'analisi condotta sui temi ha portato a riconoscere quali sono gli aspetti ricorrenti che gli allievi richiamano per descrivere il proprio rapporto con la matematica: nell'ottica dell'approccio grounded, tali aspetti e le loro mutue e cruciali interazioni saranno la base del modello proposto di 'atteggiamento nei confronti della matematica'.

L'aspetto più ricorrente nei temi di tutti i livelli scolari è quello legato alla dicotomia la matematica mi piace/non mi piace. È confermata la rilevanza della disposizione emozionale verso la matematica – da sempre oggetto di interesse nell'educazione matematica – nella costruzione del rapporto con la disciplina.

Tale dimensione emozionale è strettamente correlata alle altre due dimensioni maggiormente ricorrenti nei temi raccolti:

- la dimensione legata alla percezione di quanto la matematica riesca/non riesca, ma anche possa riuscire o meno. Dimensione che fa riferimento alle esperienze di successo/fallimento in matematica del narrante, ma soprattutto all'aspetto correlato della sua percezione di competenza in matematica, il suo senso di auto-efficacia;
- la dimensione della visione della matematica, che esprime come chi racconta vede la matematica, ovvero quelle che sono chiamate le convinzioni rispetto alla matematica. Tale dimensione è spesso riconoscibile all'interno dei temi dall'espressione "la matematica è".

Il risultato dell'analisi condotta porta dunque alla caratterizzazione di atteggiamento nei confronti della matematica come costrutto tridimensionale, in cui le tre dimensioni – disposizione emotionale, visione della matematica e senso di auto-efficacia – sono strettamente correlate (*Figura 5*).



*Figura 5: Il modello tridimensionale di atteggiamento nei confronti della matematica (Di Martino & Zan, 2010a)*

Infatti il piacere/non piacere è quasi sempre motivato facendo riferimento ad una delle altre due dimensioni (riuscire/non riuscire e visione della matematica).

## **2.7 Dalla definizione di atteggiamento alle diverse caratterizzazioni di atteggiamento negativo**

La multidimensionalità del modello si porta dietro anche la maggiore complessità a definire cosa significhi atteggiamento negativo: complessità voluta, nel senso che l'intenzione è proprio quello di dare maggiori informazioni per la diagnosi (quale componente o quali componenti sono negative?) e per un intervento mirato e non generico.

Il primo passo è cercare di dare un senso alla dicotomia positivo / negativo per ognuna delle tre dimensioni che caratterizzano l'atteggiamento nei confronti della matematica. Questa operazione è particolarmente delicata in quanto il riconoscimento di categorie nette positivo/negativo impone di per sé un ridimensionamento della complessità. Allo stesso tempo è anche particolarmente interessante perché è tipica dell'attività di modellizzazione del ricercatore: attività nella quali si è costretti a fare un bilancio tra la necessaria complessità del costrutto, affinché lo stesso sia uno strumento teorico interpretativo di fenomeni significativi, e la necessaria semplificazione, affinché sia garantita l'usabilità del costrutto stesso come strumento di interpretazione, diagnosi e intervento nella pratica didattica.

Nel caso delle tre dimensioni con le quali è stato caratterizzato l'atteggiamento verso la matematica abbiamo la seguente soluzione (in ordine crescente di difficoltà): per quanto riguarda la disposizione emotionale è facile definire cosa si intende per disposizione emotionale positiva (mi piace o altre

emozioni positive associate alla matematica) e disposizione emozionale negativa (non mi piace o altre emozioni negative associate alla matematica).

Per quanto riguarda il senso di auto-efficacia è piuttosto naturale associare ‘positivo’ ad un alto senso di auto-efficacia in matematica e, viceversa ‘negativo’ ad un basso senso di auto-efficacia.

La questione più delicata è quella che riguarda la dimensione visione della matematica. In questo caso è stata fatta una vera e propria scelta semplificatoria: è stata usata la vecchia dicotomia proposta da Skemp (1976) di visione della matematica strumentale vs visione della matematica relazione (o concettuale). Se è vero che tale dicotomia è considerata piuttosto sorpassata da un punto di vista teorico, è anche vero che per l’analisi dei temi raccolti si è dimostrata piuttosto efficace e, in ogni caso, è piuttosto evidente che alcuni temi usano la stessa etichetta (matematica) per descrivere esperienze con discipline evidentemente molto differenti tra loro, come nei due esempi che riportiamo nella *Tabella 1*.

*Tabella 1: due estratti dai temi raccolti*

<p><i>Imparare le cose a memoria (a parte qualche formula) non mi è mai piaciuto e questa materia, insieme alla Fisica, mi offrono motivo di ragionamento e di discussione. Essa mi piace perché è una materia dove bisogna ragionare, e se non lo fai diventa difficile e molto faticosa, per non dire impossibile. (...) Questa è una materia dove bisogna prima capire il problema, cosa chiede e dove vuole arrivare. Danilo (3SSG)</i></p>	<p><i>La matematica per me è sempre stata una materia piuttosto scura, non mi è mai piaciuta, prima di tutto perché per fare un operazione ti devi ricordare perlomeno una decina di regole. Andrea (1SSG)</i></p>
---	--

Questa operazione di semplificazione permette comunque di riconoscere otto differenti profili di atteggiamento nei confronti della matematica:

1. Disposizione emozionale positiva – Alto senso di auto-efficacia – Visione relazionale
2. Disposizione emozionale positiva – Basso senso di auto-efficacia – Visione relazionale
3. Disposizione emozionale positiva – Alto senso di auto-efficacia – Visione strumentale
4. Disposizione emozionale positiva – Basso senso di auto-efficacia – Visione strumentale
5. Disposizione emozionale negativa – Alto senso di auto-efficacia – Visione relazionale
6. Disposizione emozionale negativa – Basso senso di auto-efficacia – Visione relazionale
7. Disposizione emozionale negativa – Alto senso di auto-efficacia – Visione strumentale
8. Disposizione emozionale negativa – Basso senso di auto-efficacia – Visione strumentale

Se il profilo numero 1 è quello che possiamo chiamare atteggiamento positivo, riconosciamo negli altri sette profili almeno una componente negativa. Tra questi, ci soffermiamo su uno in particolare: il profilo 5, al quale è associata una visione relazionale della matematica, un alto senso di auto-efficacia e una disposizione emozionale negativa verso la matematica. Tale profilo è quello che chiamiamo ‘atteggiamento negativo genuino’ nei confronti della matematica, ovvero nel quale la disposizione emozionale negativa sembra essere legata a questioni di gusto, a fronte di una visione della matematica epistemologicamente corretta. In questo caso probabilmente non è necessario nessun intervento: si tratta solo di accettare che a qualcuno possa non piacere la matematica, ma che comunque non ne abbia paura. È interessante notare come tale profilo sia l’unico vuoto, senza nessun rappresentante, considerando gli 2000 temi che ormai abbiamo raccolto e analizzato.

Per i restanti sei profili, la differenziazione è esattamente quello che volevamo: in questo modo infatti la diagnosi di ‘atteggiamento negativo nei confronti della matematica’ può diventare uno strumento di lavoro e non la dichiarazione di resa dell’insegnante. Le tre dimensioni distinte, che spesso tra le altre cose sono poco considerate nell’insegnamento, vanno considerate per poi intervenire, in maniera mirata, su quella componente o quelle componenti che risultano essere negative.

Per quanto riguarda il possibile intervento citiamo quanto scritto in Di Martino e Zan (2010b): “L’avversione verso la matematica, o addirittura il suo rifiuto, sono forme estreme di un atteggiamento *negativo* verso la disciplina. Ma prima di diventare rifiuto un atteggiamento negativo può presentarsi in tanti modi, diversi per intensità e per qualità: è negativo l’atteggiamento di un allievo cui la matematica non piace, ma è negativo anche l’atteggiamento di un allievo che ha un basso senso di autoefficacia, o una visione epistemologicamente scorretta della disciplina (a prescindere dal fatto che questa visione sia accompagnata da emozioni positive, in particolare che la matematica piaccia). La promozione di un atteggiamento effettivamente positivo verso la matematica si favorisce quindi agganciando saldamente il piacere di far matematica ad un adeguato senso di autoefficacia e ad una visione corretta della disciplina, cioè passando agli allievi un’idea di successo legata ai processi e non ai prodotti. È l’idea di ‘atteggiamento corretto’ verso la matematica esplicitamente richiamata dalle Indicazioni per il curricolo di Matematica del 2007:

*Di estrema importanza è lo sviluppo di un atteggiamento corretto verso la matematica, inteso anche come una adeguata visione della disciplina, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire affascinanti relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell’uomo.*

Il punto di partenza per raggiungere questo obiettivo resta la necessità di far provare agli allievi esperienze di successo, in modo da sviluppare il loro senso di autoefficacia, cioè la convinzione di potercela fare. In assenza di un adeguato senso di autoefficacia l’allievo non crede nel valore

dell'impegno e del lavoro, e non ha motivi per investire risorse. Ma come abbiamo sottolineato l'insegnante per primo dovrebbe 'ripensare' l'idea di successo, superando l'identificazione con la produzione di risposte corrette (magari in tempi brevi) e quindi con l'assenza di errori. In altre parole il senso di autoefficacia dell'allievo deve essere associato ad una visione della matematica epistemologicamente corretta: relazionale e non strumentale, centrata sui processi e non sui prodotti. (...) Dalle nostre riflessioni sono emersi alcuni punti chiave per questo cambiamento: la rivalutazione dell'errore, la valorizzazione di processi tipici della matematica (congetturare, argomentare, porsi e risolvere problemi...), la riscoperta dei tempi lunghi, l'importanza di imparare a essere determinati, che richiede anche la capacità di gestire le proprie emozioni. Il problem solving appare un contesto ideale per lavorare su questi aspetti, e per promuovere una visione dinamica e creativa della matematica, su cui fondare un senso di autoefficacia che permetta un impegno mirato e non generico. Ma un'attività di effettivo problem solving richiede un ripensamento profondo dell'usuale attività di risoluzione di problemi.

I problemi dovrebbero essere sufficientemente complessi, in modo da impedire la soluzione immediata con la semplice applicazione di procedure o formule apprese di recente. Dovrebbero valorizzare i processi, e convincere gli allievi che non necessariamente c'è una sola soluzione: ce ne possono essere tante, ma anche nessuna. Dovrebbero permettere a tutti gli allievi di attivare processi di esplorazione, e consentire una diversità di approcci, adeguata alle diversità degli allievi.”.

Definito il costrutto di atteggiamento nei confronti della matematica, da una parte abbiamo sviluppato alcuni percorsi per lavorare su aspetti sensibili dello stesso (ad esempio il recente progetto sul problem solving alla primaria: Di Martino & Zan, 2019), dall'altra il modello teorico è stato applicato e adattato da altri a diversi contesti (dalla fisica all'economia) e per studiare fenomeni differenti. Tra questi ricordiamo:

- Lo studio sull'atteggiamento nei confronti della matematica e dell'insegnamento della matematica dei futuri insegnanti di scuola primaria (Coppola, Di Martino, Pacelli & Sabena, 2013);
- Lo studio *“Le convinzioni e le emozioni degli insegnanti sulle prove INVALSI di matematica: la ricerca qualitativa di profili attraverso un approccio grounded”* portato avanti da Giulia Signorini nella sua tesi di dottorato.
- Lo studio sulle difficoltà dei bravi in matematica nel passaggio scuola secondaria di secondo grado – università (Di Martino & Gregorio, 2018).

### 3 Il costrutto della “discalculia”

In questa sezione parleremo di “discalculia”, “mathematical learning disability” e dei costrutti definiti per parlare di fenomeni riguardanti gravi e persistenti difficoltà di apprendimento in matematica. I diversi costrutti usati trovano le loro radici in ambito clinico e nelle scienze cognitive, ma sono strettamente collegati agli ambiti educativi, per cui risentono di tensioni tra tali ambienti e tra i gruppi di ricercatori che li cercano di studiare. L'analisi del panorama internazionale e l'analisi di quello più specifico italiano consentiranno di individuare alcuni aspetti caratterizzanti del costrutto della discalculia e della sua diagnosi, che avviene tipicamente attraverso test prestazionali. Verranno messi in luce alcuni limiti di tali test e aspetti critici del costrutto di discalculia, evidenti prendendo un punto di vista educativo-didattico, e in particolare quello della ME.

Ci focalizzeremo, poi, su un nuovo modello sviluppato per descrivere profili di apprendimento matematico di studenti, partendo da una revisione critica della principale letteratura in ambito cognitivo, con lo scopo di sviluppare uno strumento utile agli educatori che vogliono progettare interventi inclusivi o individualizzati per sostenere al meglio l'apprendimento di tutti gli studenti.

Concluderemo con una presentazione di studi attualmente in corso, che fanno uso di tale modello per l'identificazione di profili di apprendimento matematico di studenti di scuola primaria e secondaria di primo grado per progettare attività matematiche inclusive.

#### 3.1 “Discalculia”, “mathematical learning disability”, o...: la difficoltà di arrivare ad una definizione condivisa

Ormai parole come “discalculia” o “disturbo specifico dell'apprendimento” fanno parte del lessico comune non solo della clinica ma anche in ambito educativo. Parallelamente, a livello internazionale si parla di “dyscalculia”, “specific learning disorder”, “mathematical learning difficulty”, “mathematical learning disability”, etc.. In questa sezione introdurremo alcune delle definizioni utilizzate in ambito internazionale e nazionale, e sottolineeremo tensioni tra le scienze cognitive e l'ambito educativo che portano a difficoltà nell'arrivare a definizioni condivise e *utili* a cavallo di tali ambiti.

Nella letteratura internazionale la maggior parte degli studi cognitivi sulle cause di prestazioni persistentemente basse in matematica provengono dal campo della psicologia cognitiva, e riguardano lo sviluppo del processamento del numero (naturale). Tali studi introducono termini particolari per descrivere situazioni atipiche, tra cui “developmental dyscalculia” (discalculia evolutiva), “mathematical learning disability/disorder/difficulty” (MLD) (per es.: Passolunghi & Siegel, 2004; Butterworth, 2010; Piazza et al., 2010). Negli studi iniziali si cercavano di inferire deficit cognitivi a partire da prestazioni basse in test di matematica. Per esempio, nell'Encyclopedia of Mathematics

Education Jeremy Kilpatrick (2014) ricorda come il termine *dyscalculia* (*Rechenschwache*) sia stato introdotto a Budapest nel 1916 da Paul Ranschburg durante uno studio sulle differenze in prestazioni sul calcolo aritmetico riscontrate tra i bambini "normali" e quelli con prestazioni basse in matematica. Vediamo come fin da subito l'aver "dyscalculia" è usato per etichettare un gruppo di studenti individuati attraverso un certo comportamento, in questo caso basse prestazioni su un test di calcolo aritmetico. Nell'etichetta stessa c'è un'attribuzione di causalità di un certo comportamento a una condizione clinica, attributo della persona.

Oggi le definizioni di *dyscalculia* (e simili), seppure siano molto discusse, tendono ancora ad attribuire basse prestazioni su certi test a condizioni cliniche (a volte neurologiche), caratteristiche dell'individuo, che ne determinano le modalità e possibilità di apprendimento. Tuttavia, si rilevano diverse incoerenze nei modi di usare la terminologia. Per esempio, Mazzocco e Räsänen (2013) notano che MLD è stato usato a volte come sinonimo di "dyscalculia evolutiva", ma altre volte no, in quanto a volte si riferisce ad una categoria più ampia di "difficoltà in matematica", non necessariamente causato da deficit neurologici (questo spesso accade in studi nell'ambito educativo). Persino l'acronimo MLD è usato in modi diversi: a volte la "D" indica "disabilità" e altre volte "difficoltà" (mentre "ML" sta sempre per "apprendimento (Learning) della matematica (Mathematics o Mathematical)").

Nel contesto clinico diagnostico "Mathematics Disorder" (MD) è stato introdotto come un tipo di "Learning Disorder" (disturbo dell'apprendimento). Nella quarta edizione del Manuale Diagnostico e Statistico dei Disturbi Mentali (DSM IV) della American Psychiatry Association (1994), l'MD viene identificata e diagnosticata con un cosiddetto, criterio di discrepanza:

[in the case of Mathematical Disorder] ability, as measured by individually administered standardized tests, is substantially below that expected given the person's chronological age, measured intelligence, and age-appropriate education. (ibid., Sect. 315.1)

La quinta edizione (DSM V) del 2013, adotta, invece, un approccio più olistico. Viene descritto un più generale "Disturbo Specifico dell'Apprendimento" ("Specific Learning Disorder" (SLD)) come disturbo dello sviluppo che inizia in età scolare, ma che potrebbe essere riconosciuto soltanto successivamente. Il disturbo coinvolge difficoltà nell'apprendere le abilità (skills) accademiche di base, quali lettura, scrittura, matematica, fondamentali per l'apprendimento di altre materie. Il manuale diagnostico sottolinea, inoltre, le conseguenze di un SLD non trattato in modo appropriato: può causare difficoltà durante l'intero corso di vita di un individuo, quali prestazioni accademiche più basse, minore autostima, maggiore probabilità di abbandono scolare, maggiore stress psicologico, minore benessere mentale, e maggiore probabilità di disoccupazione.

Negli ambiti della psicologia e delle neuroscienze non si è ancora giunti a un accordo su quali siano le caratteristiche che definiscono MLD (per es., Szűcs, 2016). In generale molte definizioni del disturbo si riferiscono a basi biologiche, mentre altre alla discrepanza tra prestazioni matematiche e intelligenza generale dell'individuo; alcune definizioni includono entrambi questi aspetti, come, per esempio, quella data dalla American Psychiatric Association (2013):

*Developmental Dyscalculia (DD) is a specific learning disorder that is characterised by impairments in learning basic arithmetic facts, processing numerical magnitude and performing accurate and fluent calculations. These difficulties must be quantifiably below what is expected for an individual's chronological age, and must not be caused by poor educational or daily activities or by intellectual impairments.*

Notiamo come questa definizione, come molte altre, mira a distinguere tra discalculia evolutiva (DD), o più in generale MLD, e altre *difficoltà*.

Riportiamo un altro esempio di definizione di discalculia, quella di Kaufmann e von Aster (2012):

*Dyscalculia is defined as a serious impairment of the learning of basic numerical-arithmetical skills in a child whose intellectual capacity and schooling are otherwise adequate. It is supposed to be demonstrable by standardized psychometric testing that reveals poor calculating ability despite normal intelligence* (Kaufmann & von Aster, 2012, p. 771).

Definizioni come questa sono basate sull'assunto che scarsi risultati su test psicometrici standardizzati, e in discrepanza con risultati su test di intelligenza, siano dovuti a “serious impairment” delle abilità di apprendimento dell'aritmetica di base. Secondo noi tale assunzione è molto forte e non sempre corretta: infatti, basse prestazioni su test psicometrici di aritmetica possono essere dovute oltre che a fattori cognitivi, anche a fattori socio-culturali o didattici. Riprenderemo in seguito questo aspetto, sottolineando già da ora l'importanza a livello educativo, ma anche la grande difficoltà, di escludere fattori socio-culturali e didattici da una diagnosi di discalculia.

Più recentemente si è parlato di “risposta all'intervento” o “resistenza al potenziamento” come aspetto essenziale da riscontrare prima di poter rilasciare una diagnosi di MLD (per es.: Mazzocco, 2005; Fuchs et al., 2007; Hale et al., 2010). In un certo senso la diagnosi è il combinato di prestazione di partenza preoccupante e non-risposta a certi tipi di intervento evidentemente considerati “universalmente efficaci” in situazioni nelle quali non sia presente un disturbo specifico.

In ogni caso ad oggi rimane estremamente difficile distinguere tra difficoltà originate da una condizione “innata” e difficoltà che sono il risultato di esperienze didattiche inadeguate (González & Espínel, 1999; Mazzocco & Myers, 2003).

Manca, inoltre, un accordo sulla vastità della popolazione con MLD, sulla percentuale della sua presenza in comorbidità con altri disturbi (cioè della compresenza di MLD e altri disturbi specifici dell'apprendimento in uno stesso individuo) e, in generale, sull'eterogeneità di tale popolazione (Bartelet et al. 2014; Szűcs and Goswami 2013; Watson and Gable 2013).

Per fornire ulteriori dati sulla complessità di identificare la popolazione con MLD, riportiamo in sintesi i risultati di un'analisi critica dei criteri metodologici usati negli studi internazionali degli ultimi 40 anni per identificare studenti con MLD. L'analisi è stata condotta da Lewis e Fischer (2016) e ha messo a fuoco, in particolare: la variabilità nei criteri usati; il controllo (o meno) di fattori non cognitivi nell'identificazione di studenti che manifestano basso rendimento persistente in matematica; i contenuti matematici (aritmetica, geometria, algebra, analisi...) presenti nei test usati.

L'analisi ha rilevato, rispetto alla variabilità nei criteri usati, che

- in genere sono usati test prestazionali, che sono diversi in nazioni diverse (o a volte nella stessa nazione), con criteri di cut off (linea di demarcazione sotto cui si ritiene la prestazione deficitaria) che variano dal 2° al 46° percentile;
- alcuni studi, invece, usano il criterio della discrepanza tra rendimento scolastico generale e quello specifico in matematica;
- metà degli studi usano misure non comuni nel campo, e in cui lo stesso studente può risultare una volta positivo e un'altra volta negativo (a seconda del test o della sua stessa prestazione diversa nel tempo).

Considerando anche il fatto che i partecipanti ai vari studi erano di tutti gli ordini scolari (dalla scuola primaria ad adulti laureati, anche se il 67% degli studi considerati riguardavano soltanto studenti di scuola primaria), possiamo concludere che le popolazioni in esame nei diversi studi sicuramente *non costituiscono un campione omogeneo*.

Inoltre la revisione critica ha trovato risultati interessanti rispetto al controllo di fattori non cognitivi nelle diagnosi, in particolare:

- i test usati per l'identificazione di MLD non riescono a discriminare tra basse prestazioni dovute a difficoltà cognitive e non cognitive, come abbiamo visto precedentemente.
- In particolare, generalmente, non si tiene conto dell'effetto di aspetti quali: l'appartenenza a un ceto socio-economico basso; le abilità linguistiche nella lingua del test; altri fattori come etnia e genere.

Infine, per quanto riguarda i contenuti matematici di cui si osserva l'apprendimento negli studi su MLD si considerano, nel 94% dei casi, i seguenti:

- processamento numerico (simbolico e non-simbolico),
- conteggio e cardinalità,
- operazioni e ragionamento pre-algebrico,
- numeri e operazioni in base 10,

- geometria (solo nomi di figure).

Notiamo anche che questi sono contenuti di curricula di matematica per studenti dai 5 agli 8 anni, e sono i contenuti principali dei test usati per identificare MLD anche in studenti in classi superiori alla terza primaria. Soltanto il 4% degli studi considera altri contenuti matematici quali le frazioni, ed espressioni ed equazioni (ambito algebrico) nell'apprendimento di studenti oltre gli 8 anni di età.

Come vedremo nel seguito, un'attenzione nella diagnosi quasi esclusivamente solo verso l'aritmetica, e, peraltro, soltanto a certi aspetti di tale ambito matematico, nasconde altre assunzioni forti rispetto al costrutto di MLD.

Un'assunzione implicita sembra essere che la MLD di un individuo, che in teoria potrebbe manifestarsi in qualunque ambito della matematica, sia sempre riconducibile a difficoltà nell'ambito aritmetico, e in particolare a processi legati alla memoria (recupero di fatti e passaggi procedurali e loro gestione) e al conteggio (conoscenza della sequenza di numeri naturali nei loro formati analogici e simbolici verbali e scritti). Tale assunzione è dal nostro punto di vista certamente discutibile: da una parte non siamo d'accordo che tutte le difficoltà cognitive nascano da difficoltà in ambito aritmetico, dall'altra uno studente con difficoltà linguistiche, se sottoposto a insegnamento basato su aspetti linguistici potrebbe avere prestazioni deficitarie ma non "per colpa" di una discalculia (ma ad esempio per difficoltà legate alla dislessia).

Inoltre tale assunzione ha grosse conseguenze da un punto di vista didattico e sociale, come vedremo. Concludiamo questa sezione sottolineando come, nonostante ci siano ancora molte difficoltà e disaccordo su che cosa sia la MLD e su come diagnosticarla, si sono aperte alcune direzioni di ricerca interessanti e promettenti, anche rispetto all'ambito educativo, che riprenderemo nelle prossime sezioni. In particolare, una direzione di ricerca, propone di cercare "profili di MLD" (o profili di discalculia), individuando gruppi di studenti con sintomi simili in diversi ambiti dell'apprendimento della matematica (per es.: Kaufmann et al., 2013; Price e Ansari, 2013; Karagianakis, Baccaglioni-Frank e Papadatos, 2014; Träff et al., 2017). Anche in Italia, durante la Consensus Conference (Roma, 6-7 dicembre, 2010), tale direzione ha portato all'individuazione di due principali profili di discalculia: uno riguarda una debolezza nella struttura cognitiva deputata all'elaborazione delle componenti numeriche; il secondo è legato a deficit negli aspetti procedurali e di calcolo, e sembra essere molto più comune. Nel paragrafo seguente approfondiamo il panorama italiano.

### **3.1.1 La discalculia nel panorama italiano**

La direttiva ministeriale del 27 dicembre 2012 «Strumenti di intervento per alunni con Bisogni Educativi Speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica» parla di «Bisogni Educativi Speciali» (BES), di cui i *Disturbi Specifici dell'Apprendimento* (DSA) sono una particolare

tipologia, che viene diagnosticata ai sensi della legge 170/2010. Sottolineiamo che la discalculia, uno dei DSA riconosciuti dalla legge, può essere diagnosticata solo dalla classe terza o a partire dagli 8 anni.

I DSA riguardano una varietà di profili neuropsicologici che insorgono in età evolutiva e che sono accomunati dalla presenza di una significativa caduta specifica nello sviluppo di processi relativi alla lettura, alla scrittura o al calcolo. La specificità si riferisce al fatto che si ritiene che i DSA siano dovuti a un deficit neuropsicologico a livello dei meccanismi deputati all'apprendimento. Si assume, quindi, che i DSA abbiano una base neurologica; tuttavia viene riconosciuto che i fattori biologici interagiscono con quelli ambientali concorrendo, potenzialmente, alla comparsa e alla gravità della sintomatologia. I disturbi riconosciuti dalla normativa italiana sono quattro: *dislessia* (il disturbo studiato, anche a livello internazionale, da più tempo), *discalculia*, *disortografia* e *disgrafia*. Meccanismi legati alla scarsa automatizzazione di abilità di base possono interessare il calcolo (discalculia) o la scrittura, manifestandosi come difficoltà di codifica ortografica (disortografia) o di scarsa e faticosa scioltezza nella calligrafia (disgrafia).

Come vedremo nell'esempio illustrato nella *Figura 8*, le diagnosi in Italia fanno riferimento alla Classificazione Statistica Internazionale delle Malattie e dei Problemi Sanitari Correlati (ICD), nella versione 10 o 11 (disponibili online ai link: <https://icd.who.int/browse10/2016/en> e <https://icd.who.int/browse11/l-m/en>). Nella *Figura 6* riportiamo la schermata visibile al link <http://bit.ly/38gmkOI> che fornisce la descrizione del «developmental learning disorder with impairment in mathematics» data dall'ICD-11. Per comodità, diamo anche una traduzione in italiano.

The screenshot shows the ICD-11 for Mortality and Morbidity Statistics website. The page title is "ICD-11 for Mortality and Morbidity Statistics (Version : 04 / 2019)". The search bar contains "6A03.2". The left sidebar shows a tree view of categories, with "6A03.2 Developmental learning disorder with impairment in mathematics" selected. The main content area displays the following information:

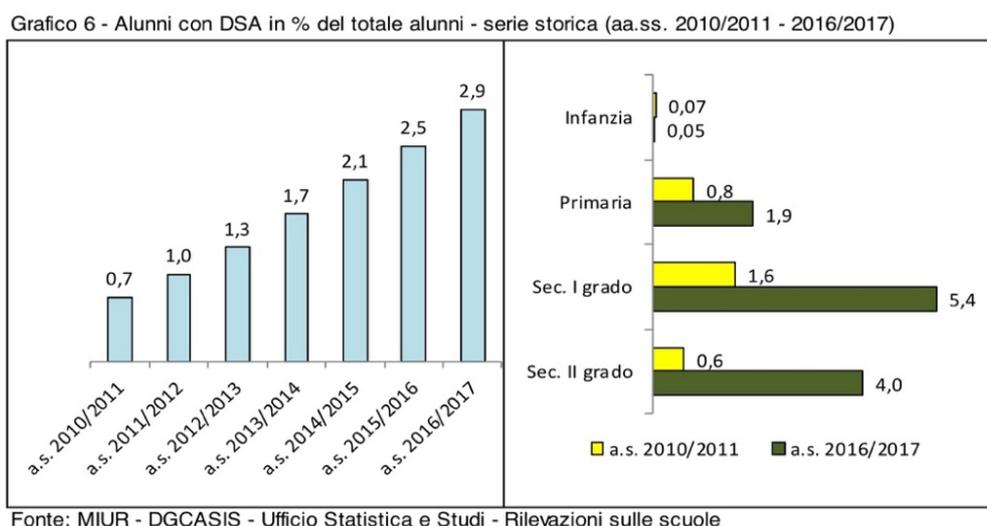
- 6A03.2 Developmental learning disorder with impairment in mathematics**
- Parent:** 6A03 Developmental learning disorder
- Description:** Developmental learning disorder with impairment in mathematics is characterized by significant and persistent difficulties in learning academic skills related to mathematics or arithmetic, such as number sense, memorization of number facts, accurate calculation, fluent calculation, and accurate mathematic reasoning. The individual's performance in mathematics or arithmetic is markedly below what would be expected for chronological or developmental age and level of intellectual functioning and results in significant impairment in the individual's academic or occupational functioning. Developmental learning disorder with impairment in mathematics is not due to a disorder of intellectual development, sensory impairment (vision or hearing), a neurological disorder, lack of availability of education, lack of proficiency in the language of academic instruction, or psychosocial adversity.
- Exclusions:**
  - Disorders of intellectual development (6A00)

*Figura 6: descrizione del "developmental learning disorder with impairment in mathematics" fornita nell'ICD-11.*

Il «disturbo di apprendimento in età dello sviluppo con disabilità in matematica» è caratterizzato da

difficoltà persistenti e significative nell'apprendimento di abilità accademiche relative alla matematica o all'aritmetica, come il senso del numero, la memorizzazione di fatti numerici, calcolo accurato e fluido, ragionamento matematico preciso. Le prestazioni in matematica o nell'aritmetica dell'individuo sono marcatamente al di sotto di ciò che ci si aspetterebbe in base alla sua età cronologica o dello sviluppo, e in base al suo livello di funzionamento intellettuale, e ciò porta a disabilità significative nel funzionamento accademico o occupazionale dell'individuo. Il disturbo di apprendimento in età dello sviluppo con disabilità in matematica si manifesta inizialmente quando le abilità accademiche vengono insegnate nei primi anni di scolarizzazione. Il disturbo di apprendimento in età dello sviluppo con disabilità in matematica non è attribuibile a disordini intellettuali, sensoriali (vista o udito), neurologici, a una mancanza di esperienze educative, a una mancanza di dimestichezza con la lingua in cui avviene l'istruzione scolastica, o ad avversità psicosociali.

Per quanto riguarda l'incidenza dei DSA sulla popolazione italiana, dati dell'Ufficio Statistica e Studi - Rilevazioni sulle Scuole del MIUR mostrano che nel 2016/2017 la percentuale di studenti diagnosticati con DSA è il 2,9% della popolazione scolastica italiana (si veda la *Figura 7*). Tali percentuali sembrano essere ancora in aumento (nel 2010/2011 la percentuale rilevata era dello 0,7%).



*Figura 7: percentuale di studenti diagnosticati con DSA dall'a.s. 2010/2011 all'a.s. 2016/2017 rilevati nella scuola italiana dall'Ufficio Statistica e Studi del MIUR.*

### 3.1.2 Diagnosticare discalculia in Italia: un esempio di diagnosi

In Italia, l'iter previsto per la diagnosi, fin dai primi anni della scuola primaria, si articola in tre fasi: individuazione degli alunni che presentano difficoltà significative di lettura, scrittura o calcolo; attivazione di percorsi didattici mirati al recupero di tali difficoltà; segnalazione dei soggetti "resistenti" all'intervento didattico. Tuttavia, i processi di diagnosi utilizzati sono ancora molto eterogenei.

Per capire meglio il contesto italiano e, in particolare, come si interfacciano gli ambiti clinici ed educativi nel momento di una diagnosi di DSA, riportiamo un esempio. La *Figura 8* mostra un esempio di diagnosi di DSA con ricadute in matematica.

<p><b>Valutazione cognitiva</b>            CPM (PM47) - Taratura Raven et Al (1986)            Totale risposte corrette: 31 su 36 Prestazione collocabile all'82° percentile.</p>
<p><b>Funzioni cognitive di base</b>            Memoria a breve Termine            MBT Visuo-spaziale (Corsi)            Span: 5.5            Media attesa = 4.4 Prestazione adeguata            MBT Verbale-Numerica            Digit Span: 3.5 Media attesa = 6 Prestazione deficitaria            MBT Verbale-Fonologica            Span: 3            Media attesa = 5 Prestazione deficitaria            Attenzione Visiva            Test delle campanelle modificato (Biancardi e coll.)            Attenzione selettiva            Punteggio grezzo: 57            50°/75° centile (punteggio adeguato)            Attenzione sostenuta            Punteggio grezzo: 128            75° centile (punteggio adeguato)</p>
<p><b>Abilità scolastiche</b>            Lettura, scrittura            [...]            Matematica            AC-MT Prova 3 elementare finale:            Operazioni scritte in classe = Prestazione Sufficiente            Conoscenza Numerica = Prestazione Ottimale            Accuratezza = Richiesta di Attenzione (presenti errori nel recupero veloce dei fatti aritmetici)            Tempo Totale = Prestazione Sufficiente</p>
<p>In sintesi, la valutazione neuropsicologica depone a favore di una diagnosi di Disturbo Specifico di Apprendimento (codice ICD 10 F81) di grado medio-lieve, che riguarda le aree della scrittura più lievemente nella sua componente esecutiva (padronanza delle routine grafo-motorie – Disgrafia F81.1) e maggiormente nella componente costruttiva della scrittura (padronanza dei processi linguistici-Disortografia F81.1), gli ambiti della lettura (Dislessia Evolutiva F81.0).            In ambito scolastico, si raccomanda un atteggiamento educativo accettante da parte della scuola, oltre all'adozione di alcune misure dispensative e compensative da utilizzare con gli alunni con Disturbi Specifici di Apprendimento, come riportato nella nota "Prot. n. 4099/A/4 del 05.10.2004" del MIUR, richiamata dalla nota Prot. n. 26/A 4° del 05.01.2005, e perfezionata nella legge 8 dell'ottobre 2010 n. 170.</p>

*Figura 8: Diagnosi di uno studente di classe terza primaria (referto clinico anonimizzato)*

Notiamo come, per effettuare la diagnosi, lo studente sia stato sottoposto a numerosi test per valutare, separatamente, le sue funzioni cognitive di base (primo riquadro), e le sue abilità scolastiche (secondo riquadro). Di queste ultime abbiamo riportato solo i risultati in ambito matematico, di cui si nota come nella prova AC-MT sono segnalati “errori nel recupero veloce dei fatti aritmetici”.

Nonostante i numerosi risultati su vari test, non è facile capire il tipo di prestazioni matematiche che possiamo aspettarci dallo studente in classe terza e nelle classi successive. I punteggi che consentono più degli altri di fare inferenze nell'ambito matematico sono quelli relativi al test AC-MT, riportati nell'ambito “abilità scolastiche – matematica”. Per tale test vengono riportati quattro indici: un giudizio sulle operazioni scritte in classe, uno sulla conoscenza numerica, uno sull'accuratezza, e uno sul tempo totale. Per meglio capire questi dati si può andare a vedere che cosa viene chiesto nel test AC-MT e come vengono prodotti i quattro indici, anche se quelle che riportiamo di seguito non sono informazioni che possono essere ritrovate nella diagnosi.

Il test AC-MT 6-11 (Cornoldi et al., 2002), che valuta le abilità di calcolo e di problem solving<sup>14</sup>, viene usato spesso in ambito clinico. In questa diagnosi viene usata la versione per la classe terza, che prevede una parte collettiva, in cui si valuta l'accuratezza nelle prestazioni su 4 operazioni scritte, la trasformazione di numeri descritti come un insieme di unità, decine e centinaia in cifre, il giudizio di numerosità in cui gli studenti devono cerchiare per ogni coppia di numeri quello più grande, e l'ordinamento di serie dal minore al maggiore e dal maggiore al minore; e una parte individuale, in cui si valutano accuratezza e tempo nel calcolo a mente di 3 addizioni e 3 sottrazioni, nel calcolo scritto di 2 operazioni, nell'enumerazione (contare all'indietro da 100 a 50), e nel dettato di numeri. Per calcolare l'indice relativo alle operazioni si sommano le risposte corrette nelle operazioni scritte dalla parte collettiva, nel dettato di numeri, nei fatti numerici, nelle operazioni della parte individuale, nelle consegne sulla trasformazione in cifre scritte, sulla trascrizione in cifre di numeri, sul recupero di fatti numerici, e sui problemi aritmetici. Per calcolare l'indice relativo alla conoscenza numerica si sommano le risposte corrette nel giudizio numerosità, nella trasformazione in cifre, e negli ordinamenti. Per calcolare l'indice relativo all'accuratezza si sommano gli errori nella parte individuale (con peso triplo nella parte scritta). Infine, per calcolare l'indice relativo al tempo totale si sommano tempi parziali parte individuale sul calcolo scritto, sul calcolo a mente, e sull'enumerazione. Si confrontano, poi, i punteggi ottenuti con quelli dei percentili relativi alla classe frequentata dallo

---

<sup>14</sup> Non entriamo qui nel merito del design degli item del test AC-MT volti ad indagare le abilità di “problem solving” degli studenti, che meriterebbe una trattazione a sé. Ci concentriamo, invece, sul design in generale del test e sui modelli teorici rispetto a cui è stato progettato.

studente. Tali tabelle consentono di tradurre il punteggio nelle seguenti quattro voci: O - ottimale, S - sufficiente, RA - richiesta di attenzione, RII - richiesta di intervento immediato. In questo modo il test AC-MT (e similmente gli altri test usati tipicamente nelle pratiche cliniche) consente di identificare “outliers”, ovvero studenti con prestazioni estreme rispetto ai processi indagati. Studenti con prestazioni significativamente sotto-norma, e quindi etichettati come aventi “richiesta di attenzione” o “richiesta di intervento immediato” in qualunque degli indicatori, sono gli “outliers”.

Anche se la diagnosi, da certi punti di vista, è molto dettagliata, non è chiaro quante informazioni in più possa avere un insegnante, che riceve la diagnosi e le valutazioni sintetiche secondo i quattro indici, rispetto a quel che già potrebbe aver osservato in classe nelle prestazioni dello studente in questione. L'informazione in più fornita dal test rispetto all'osservazione da parte dell'insegnante dello studente in classe, a nostro avviso, consiste principalmente in una “misura” della gravità di una situazione di eventuale difficoltà nell'ambito del calcolo aritmetico e nell'ambito della soluzione di problemi rispetto al campione di riferimento su cui è stato standardizzato il test. Eventualmente, dalla nota “presenti errori nel recupero veloce dei fatti aritmetici” vicina al punteggio sull'accuratezza, l'insegnante può vedere che una difficoltà particolare per lo studente è legata alla velocità di recupero di fatti dalla memoria a lungo termine. Ma, rispetto alla matematica che verrà proposta allo studente nelle classi successive, o nella stessa classe terza, all'insegnante vengono offerti pochissimi spunti per capire meglio il profilo dello studente e, di conseguenza, per adattare la propria proposta didattica.

### 3.1.3 Modelli teorici di riferimento nei test diagnostici italiani: il caso dei test AC-MT e ABCA

Riteniamo che per capire meglio gli aspetti cognitivi misurati dal test, per quanto riguarda le abilità di calcolo, sia necessario comprendere i modelli teorici e gli studi a cui fa riferimento, anche se tali informazioni non sono contenute nella diagnosi riportata. Il test AC-MT è costruito con esplicito riferimento ai modelli cognitivi di apprendimento della matematica, che includono il *modello modulare* di McCloskey, Caramazza e Basili (1985), e altre ricerche che correlano la capacità di stima di quantità, di comparazione e di seriazione, oltre che la memoria di lavoro e la memoria a lungo termine alle abilità di calcolo (per es., Cornoldi, Lucangeli, Bellina, 2002).

Il modello di McCloskey, Caramazza e Basili (1985) e McCloskey (1992) è il primo che descrive diversi moduli matematici specifici e funzionalmente autonomi e distinti, coordinati da un'architettura modulare (*Figura 9*). Nello specifico, il sistema dei numeri consente di comprendere e manipolare quantità numeriche non verbali, attraverso meccanismi lessicali e sintattici. Questi elementi sono presenti sia nel sistema deputato alla trasformazione della struttura "superficiale" dei numeri in una rappresentazione astratta di quantità (comprensione del numero), sia in nel sistema che

si occupa di fornire una risposta numerica (produzione del numero). Ogni sistema prevede, inoltre, codici-specifici, in quanto i numeri possono essere rappresentati ed elaborati in modi differenti: codice alfabetico orale (es.: “/sette/”), alfabetico scritto (es.: sequenza di lettere “sette”), arabico (es.: “7”). Inoltre vi è la possibilità di rappresentare la quantità attraverso un codice pittografico (es.: “○○○○○○”). È possibile passare da un codice ad un altro grazie a processi di transcodifica semantica. I meccanismi lessicali nella lingua italiana riguardano i numeri *primitivi*, cioè i numeri dall’uno al nove, le *decine*, i numeri dall’undici al sedici (dici), e i *miscellanei*, cioè “cento”, “mila”, “milione”, etc.. Questi permettono di tradurre la quantità rappresentata dall’etichetta numerica nei diversi codici. I meccanismi sintattici riguardano, invece, la grammatica interna del numero, cioè le regole di composizione che permettono di formare qualsiasi numero a partire dagli elementi lessicali di base. Le componenti sintattiche sono di tipo *additivo* e *moltiplicativo* (per es.:  $7 \times 100 + 7 \times 10 + 3 \leftrightarrow 773$ ).

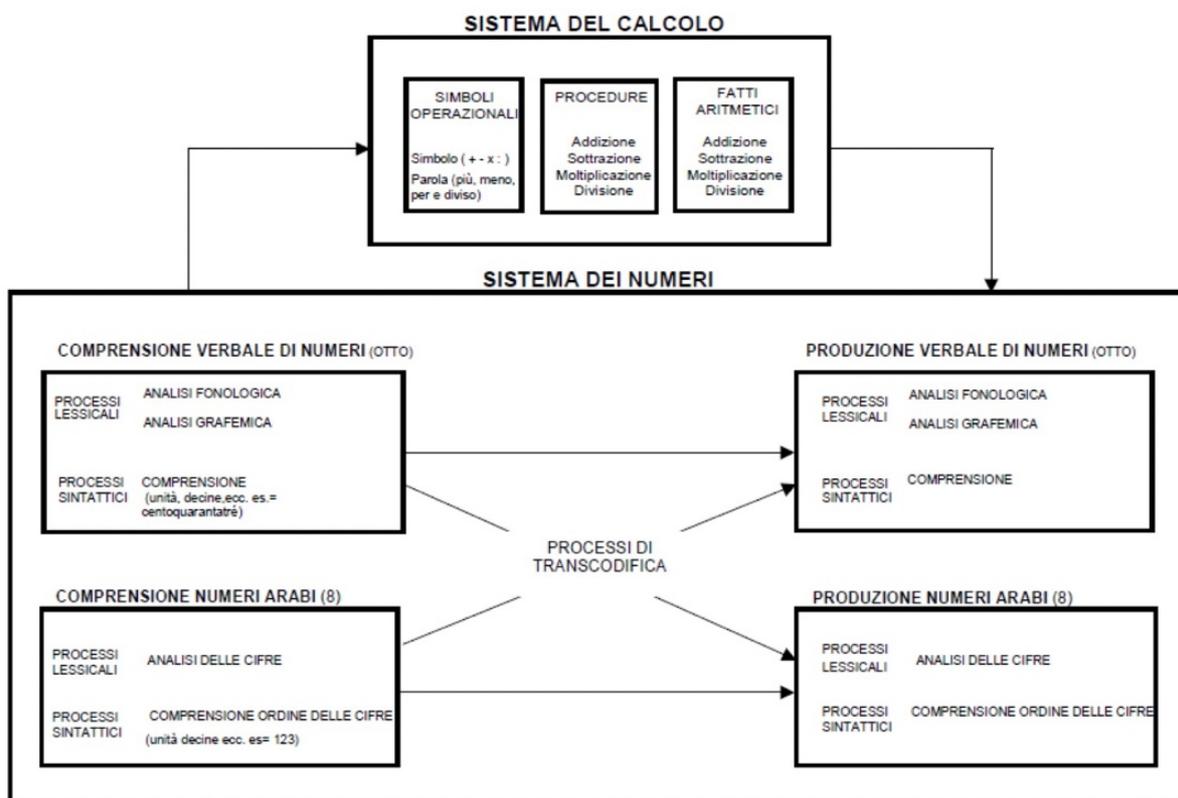


Figura 9: Struttura generale del sistema dei numeri e del calcolo per McCloskey, Caramazza e Basili (1985).

Fonte adattata: McCloskey, Caramazza e Basili, 1985.

Il sistema del calcolo permette l’esecuzione di calcoli aritmetici, cioè di quei processi che consentono di operare sui numeri tramite operazioni aritmetiche, manipolando la rappresentazione interna astratta. McCloskey e colleghi identificano tre sottocomponenti del sistema del calcolo, funzionalmente autonome e non gerarchiche, che si attivano a seconda del compito aritmetico richiesto:

- I simboli operazionali, che permettono di riconoscere i segni, sia nel codice scritto sia in quello verbale, di ogni operazione e di attivare le corrette procedure per lo svolgimento dell'algoritmo (es.: sommare quando c'è il "+");
- I fatti aritmetici, che permettono di accedere al risultato di semplici calcoli (moltiplicazioni con fattori a una cifra, addizioni semplici) attraverso il recupero immediato e automatico dello stesso dalla memoria a lungo termine (es.:  $2 \times 2 = 4$ ,  $1 + 1 = 2$ );
- Le procedure di calcolo, che permettono di eseguire i calcoli attraverso l'uso di algoritmi d'esecuzione (es.: ordine e direzione di esecuzione, incolonnamento, composizione e scomposizione di decine, ecc..).

Secondo McCloskey, Caramazza e Basili il sistema del numero e del calcolo sono legati da una comune forma astratta del numero, che consente la comprensione della quantità rappresentata dal numero. La via semantica risulta essere l'unico accesso alla produzione numerica: l'elaborazione di un numero comporta sempre una rappresentazione concettuale attraverso cui vengono identificate le informazioni relative alla quantità. Tale modello, detto *semantico*, presume che i processi di calcolo siano sempre mediati dalla rappresentazione astratta della quantità numerica (*Figura 9*). La modularità e il rigore analitico di tale modello lo hanno reso particolarmente utile per la classificazione dei disturbi acquisiti in ambito numerico.

Notiamo come il modello di riferimento descritto porti ad un'attenzione, nel "sistema del numero", a processi lessicali, sintattici e semantici, oltre che alla gestione di diversi codici in cui può essere espresso il numero. Tali processi oltre alla distinzione, nel "sistema del calcolo", tra simboli operazionali, procedure e fatti aritmetici hanno sicuramente influenzato il design del test AC-MT.

Un altro modello di riferimento per molti test diagnostici è il cosiddetto "Modello del Triplo Codice" di Dehaene (1992). Esso è, come il precedente, un modello modulare di cognizione numerica, basato su tre codici indipendenti: il codice visivo-arabico, il codice verbale, il codice analogico di quantità. A ciascun codice sono associati specifici processi cognitivi in *Figura 10*. L'innovazione più rilevante del modello di Dehaene consiste nel fatto che, introducendo tre codici distinti per la rappresentazione del numero, ognuno con il suo sistema di input e output, è possibile descrivere meglio la varietà di processi coinvolti nella gestione dei numeri (naturali). Inoltre, tale modello assume che in alcuni compiti non sia necessario l'accesso al codice analogico, e quindi all'aspetto semantico della quantità.

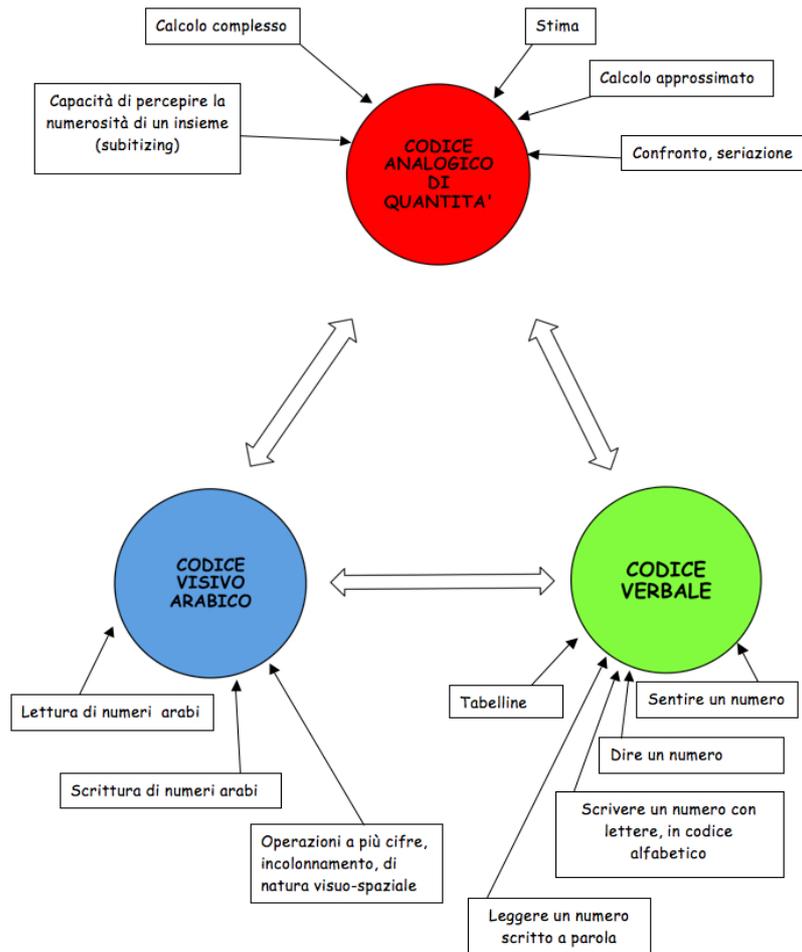


Figura 10: Modello del Triplo Codice con associati processi specifici relativi a ciascun codice.

Diversi test diagnostici internazionali tengono conto del modello di Dehaene, e alcuni hanno cercato di combinare il modello di McCloskey e di quello di Dehaene. Questo è stato fatto, ad esempio, nel test italiano ABCA (Lucangeli, Tressoldi e Fiore, 2003) e nella sua estensione e rielaborazione per studenti dai 14 ai 16 anni della scuola secondaria di secondo grado (Baccaglioni-Frank, Bettini, Caviola, Lucangeli, e Perona, 2013). Vedremo nel paragrafo 3.2 come l'uso di tali modelli come principale fondamento teorico di test diagnostici abbia diversi limiti rispetto all'ambito di interesse della ME.

### 3.1.4 La potenziale modificabilità dei profili di discalculia grazie alle esperienze didattiche

Risultati recenti che contribuiscono a rendere ancora più complesso il panorama italiano (e forse quello internazionale) riguardano il ruolo di “buone” esperienze didattiche nel prevenire difficoltà gravi in aritmetica, che potrebbero essere diagnosticate come discalculia. Infatti, abbiamo sottolineato come a livello internazionale il costrutto della MLD non consenta di distinguere tra difficoltà originate da una condizione “innata” e difficoltà che sono il risultato di esperienze didattiche inadeguate.

In questa sezione sottolineiamo proprio come siamo riusciti a quantificare il peso di (buone) esperienze didattiche rispetto alla prevenzione dell'instaurarsi di difficoltà persistenti nell'ambito dell'aritmetica. In particolare, presenteremo brevemente i risultati di un progetto di tre anni con l'obiettivo di progettare e sperimentare materiale didattico volto a prevenire l'insorgere di difficoltà persistenti in aritmetica a partire dalle prime classi di scuola primaria: il progetto PerContare.

L'ipotesi che la proposta di strategie didattiche adeguate sin dall'inizio della scuola primaria (o anche prima) possa limitare drasticamente la comparsa di falsi positivi nelle diagnosi di discalculia evolutiva ha dato origine al progetto triennale "PerContare" (2011-2014, per approfondimenti si visiti il sito [www.percontare.it](http://www.percontare.it)), fondato sulla collaborazione tra ricercatori in psicologia e in ME. Durante il progetto sono state elaborate e sperimentate pratiche didattiche atte a prevenire e affrontare difficoltà di apprendimento nell'ambito dell'aritmetica all'inizio della scuola primaria (Baccaglini-Frank e Scorza, 2013; Baccaglini-Frank e Bartolini Bussi, 2016). Come misura (indiretta) della bontà dell'approccio proposto, sono state confrontate le prestazioni in aritmetica di bambini di 5 classi sperimentali (che avevano seguito le pratiche elaborate nel progetto) con quelle di bambini di 5 classi di controllo. I risultati delle prove nelle classi sperimentali mostrano prestazioni paragonabili o superiori a quelle del gruppo di controllo in tutte le prove. Inoltre, nel gruppo sperimentale, 4 dei 100 bambini hanno mostrato prestazioni scarse in almeno quattro delle consegne, mentre tale condizione si è verificata per 8 dei 108 studenti del gruppo di controllo. Il paragone tra i punteggi medi ottenuti dai due gruppi sulle prove standardizzate di calcolo (AC-MT) mostrano una differenza significativa sulla velocità, sulle operazioni scritte e sulla conoscenza dei numeri. Il gruppo sperimentale ha riportato valori medi superiori su tutte le consegne delle prove standardizzate. Inoltre, nel gruppo sperimentale, la percentuale di studenti con prestazioni sotto il punteggio di cut-off sull'AC-MT è circa la metà di quella corrispondente degli studenti del gruppo di controllo (7% e 13%, rispettivamente). Nessuno studente del gruppo sperimentale è risultato positivo alla discalculia "pura" nelle diagnosi effettuate in classe terza (i casi riscontrati erano soltanto di comorbidità con altri DSA). A livello qualitativo, si è potuto notare come tutti i bambini del campione sperimentale abbiano risposto a tutti gli item proposti, a differenza di quanto accaduto tra i bambini del gruppo di controllo, nel quale sono stati rilevati molte omissioni. I bambini del gruppo sperimentale hanno mostrato una grande varietà di strategie diverse per il calcolo mentale, insieme a maggiore controllo meta-cognitivo sulle soluzioni, a differenza dei bambini del gruppo di controllo che hanno usato strategie altamente standardizzate e non sono stati in grado di controllare la correttezza delle proprie risposte. Nel complesso, tali risultati suggeriscono che sia possibile limitare il fenomeno dei falsi positivi nelle diagnosi di discalculia con una "buona" didattica (Baccaglini-Frank e Bartolini Bussi, 2016).

Il fatto che un uso attento di particolari materiali didattici può significativamente ridurre il numero di studenti positivi ai test per la discalculia in classe terza sembra essere in contraddizione con l'idea che tutti gli studenti che risultano positivi ai test diagnostici abbiano un deficit innato. In effetti le prestazioni del campione di studenti nelle classi sperimentali del progetto PerContare suggeriscono che risultare positivi ai test per la discalculia possa dipendere molto anche dalle esperienze didattiche in matematica vissute nei primi anni di scuola, cioè da fattori socio-culturali e non necessariamente solo cognitivi. In definitiva, questo studio ha mostrato come una "buona" didattica possa avere un ruolo preventivo rispetto all'instaurarsi di profili di difficoltà persistenti in aritmetica.

Altri studi a livello di scuola secondaria, anche se di durata inferiore e di natura principalmente qualitativa, hanno messo in luce quanto una didattica più appropriata a livello inclusivo, spesso mediata dall'uso di specifici software per l'apprendimento, possa portare a miglioramenti significativi nelle prestazioni matematiche della maggior parte degli studenti con risultati inizialmente molto bassi in matematica (per es.: Maffei e Mariotti, 2012; Baccaglini-Frank, Lucatello, Micheletto, Perona, e Tubertini, 2013; Baccaglini-Frank, Lucangeli, Lucatello, Micheletto, Perona, e Tubertini, 2013; Pedemonte e Robotti, 2013; Poli e Baccaglini-Frank, 2014; Baccaglini-Frank, Antonini, Robotti, & Santi, 2014; Santi & Baccaglini-Frank, 2015).

A livello internazionale, abbiamo trovato molto interessanti alcuni studi recenti che hanno confrontato gli effetti di due approcci didattici diversi sull'apprendimento: l'insegnamento mnemonico per imitazione di algoritmi e l'insegnamento creativo e per scoperta (Jonsson, Norqvist, Liljekvist, & Lithner, 2014; Norqvist, Jonsson, Lithner, Qwillbard, & Holm, 2019). Il primo approccio è basato sulla presentazione di procedure da imitare ripetutamente, mentre il secondo presuppone che l'apprendimento avvenga attraverso tappe di «productive struggle», sforzo produttivo, durante le quali vengono scoperte dagli studenti strategie per affrontare problemi matematici e inoltre gli errori commessi vengono valorizzati e analizzati. I risultati hanno mostrato, da un lato, che gli studenti sottoposti a insegnamento procedurale per imitazione di algoritmi avevano bisogno di usare maggiormente la memoria verbale per il recupero di fatti dalla memoria a lungo termine (questo può essere un problema, ad esempio, in casi di dislessia); inoltre, nel lungo termine, gli studenti con minori risorse cognitive fallivano più degli altri nelle prestazioni matematiche. Dall'altra parte, gli studenti sottoposti all'insegnamento creativo e per scoperta, avevano prestazioni superiori agli altri studenti nel lungo termine, e mostravano una riduzione del carico cognitivo in situazioni di problem solving.

Tutti questi risultati suggeriscono che l'esperienza ripetuta (fino a diventare persistente) di difficoltà di apprendimento in matematica possa essere prevenuta o modificata da particolari approcci didattici, e quindi che non sia necessariamente sintomo di una imm modificabile condizione neurologica.

### 3.1.5 Il lessico utilizzato socialmente

Infine, ci preme sottolineare come nel parlare comune si usino in generale espressioni del tipo "lo studente X ha un DSA/discalculia" o "lo studente Y è DSA/discalculico". Questi modi di parlare etichettano gli studenti con caratteristiche ritenute implicitamente immutabili, simili al colore degli occhi o ad altre caratteristiche genetiche dell'individuo. Inoltre, da un punto di vista educativo, il fallimento in matematica dello studente viene, in questo modo scaricato sulla caratteristica cognitiva identificata. Quindi l'insegnante si sente sollevato/a dalla responsabilità di aiutare lo studente a superare le proprie difficoltà, ed eventualmente acconsente all'uso delle cosiddette "misure dispensative" e "strumenti dispensativi" standard (citato anche nella diagnosi nella *Figura 8*) con lo studente in questione. In questo modo la profezia di fallimento in matematica, appiccicata socialmente allo studente e quindi attesa dagli insegnanti, dalla famiglia e dallo studente stesso, diventa auto-avverante (Sfard, 2017).

Riteniamo che attualmente la scuola come istituzione (anche se esistono eccezioni in alcune realtà locali grazie ad insegnanti particolarmente attenti ed informati) non abbia gli strumenti per predisporre misure dispensative adeguate ad ogni singolo studente e per aiutare ciascuno studente diagnosticato come avente DSA a trovare misure compensative adeguate alle modalità di apprendimento che predilige.

## 3.2 Alcune critiche al costrutto di MLD e di come viene diagnosticata, secondo un punto di vista didattico

Se da un punto di vista clinico e cognitivo il costrutto di MLD, o di "discalculia" nel panorama italiano, può sembrare chiaro e forse anche ben fondato, dal punto di vista della ME, diversi suoi aspetti ci appaiono ancora critici.

Innanzitutto, nell'ambito della ME distinguere tra *disabilità* e *difficoltà* è fondamentale, non solo a livello teorico (per esempio in una definizione) ma anche praticamente, poiché nei due casi gli interventi didattici dovranno essere distinti. In particolare, nel secondo caso sarà possibile addirittura la prevenzione. Abbiamo visto, infatti, come tale prevenzione sia possibile in molti casi, a partire da una didattica attenta fin dai primi anni di scuola primaria.

Vista la natura della disciplina, la ricerca in ME si deve occupare soprattutto della progettazione di sequenze didattiche volte, da un lato a prevenire l'instaurarsi di difficoltà persistenti, e, dall'altro, a

favorire processi di recupero e di superamento di difficoltà già radicate. Dunque, oltre a strumenti diagnostici che consentano di fare inferenze sulle cause cognitive (e di altra natura) di prestazioni sotto norma in matematica, sono necessari strumenti che consentano l'identificazione di profili di apprendimento, a partire dai quali sia chiaro il tipo di lavoro didattico da implementare per ottimizzare l'apprendimento dello studente.

In altre parole, la ME ha l'obiettivo di capire *come intervenire* davanti a profili di difficoltà o disabilità, e per fare questo ha bisogno di modelli di riferimento per eventuali test e di test diagnostici che abbiano alte potenzialità di aiutare a capire come passare da un profilo individuato ad un intervento didattico efficace. Con tale obiettivo in mente, abbiamo sviluppato alcune critiche ad aspetti del costrutto di MLD o di “discalculia” ricorrenti in letteratura. Anche in questo caso possiamo fare un meta-commento rispetto al percorso di questo seminario: l'analisi critica del modello ha origine e si sviluppa sulla base di un obiettivo ben chiaro; ciò che può avere molto senso rispetto all'obiettivo di diagnosi, può averne molto meno rispetto all'obiettivo dell'intervento (o meglio l'intervento ha bisogno di una diagnosi di un certo tipo).

L'analisi critica condotta ha portato ad identificare 5 punti particolarmente importanti:

1. la modificabilità dei profili di “discalculia”,
2. i contenuti matematici dei test diagnostici,
3. i criteri di cut-off unidimensionali,
4. i modelli teorici di riferimento per i test diagnostici,
5. il ruolo di fattori affettivi e socio-culturali.

Il primo aspetto riguarda la potenziale modificabilità di un profilo di “discalculia” diagnosticato tramite un test standardizzato. Nelle scienze cognitive si tende a ritenere che i DSA siano una specie di malattia innata, o comunque una condizione stabile, anche se potenzialmente “silente” per alcuni periodi, della persona che ne è portatrice. Tale modo di pensare è evidente da come si parla dei DSA: un soggetto “ha un DSA”, ne è “portatore”, o ne è “affetto”; il DSA si “manifesta” e ha “sintomi”. Dunque è difficile sentir parlare di “modificabilità” o “superamento” di un DSA, anche se si parla di “compensazione”. In questo modo, come abbiamo discusso nella sezione 3.1.5, agli studenti vengono “appiccate delle etichette” che spesso divengono profezie auto-avveranti (e.g.: “sono destinato a fallire in matematica perché ho un DSA”).

Da un punto di vista didattico, invece, ci interessa studiare la risposta a diversi approcci didattici, assumendo che tale risposta possa essere positiva e quindi portare ad un superamento della condizione di basse prestazioni persistenti. Per fare ciò è necessario assumere che il profilo di difficoltà o fallimento di uno studente possa essere modificato, e quindi la metafora della malattia

come condizione permanente e imm modificabile non è d'aiuto, anzi pone un ostacolo alla ricerca. Peraltro, abbiamo visto nella sezione 3.1.4 come le esperienze didattiche possano contribuire notevolmente a modificare le prestazioni in matematica di studenti che inizialmente manifestano diversi profili di difficoltà. Riteniamo che lo studio della potenziale modificabilità dei profili di apprendimento sia necessaria, oltre che interessante, anche perché al momento la maggior parte dei test diagnostici non consente di differenziare difficoltà da disabilità.

Il secondo punto riguarda la necessità, a nostro avviso, di ampliare i contenuti dei test diagnostici ad altri ambiti matematici. Se vogliamo che una diagnosi di discalculia sia utile anche in ambito educativo e in particolare nella ME, sarà necessario diagnosticare non solo abilità aritmetiche, ma anche abilità visuo-spaziali, geometriche, percezione di relazioni e strutture, e altre abilità che supportano un buon ragionamento matematico, e che consentano di affrontare processi di astrazione e di generalizzazione (es., Hord and Xin 2015; Mulligan 2011). Infatti, non riteniamo corretta l'assunzione che tutte le difficoltà (cognitive) in matematica di uno studente debbano dipendere da difficoltà in particolari aree dell'aritmetica dei numeri naturali. Sappiamo, infatti, che per alcuni studenti un primo scoglio che può rivelarsi insuperabile è costituito da frazioni e numeri decimali (Siegler et al., 2012; Lortie-Forgues, Tian, & Siegler, 2015). Mentre altri studenti mostrano difficoltà di altra natura nell'ambito dell'algebra, o, viceversa, possono manifestare difficoltà in aritmetica ma non in algebra (Hittmair-Delazer, Sailer, & Benke, 1995). In particolare, tali studi suggeriscono l'esistenza di livelli diversi di processamento della matematica: uno algebrico-formale e uno numerico-aritmetico, già ipotizzati da Dehaene (1997). Inoltre, recentemente, con l'ausilio di neuroimmagini, è stato trovato che durante la manipolazione di espressioni algebriche le aree del cervello maggiormente coinvolte sono quelle legate alla visualizzazione e non quelle legate al linguaggio (Landy & Goldstone, 2010). Questo risultato supporta l'ipotesi che le abilità visuo-spaziali siano fondamentali non solo nell'ambito della geometria, ma anche in altri ambiti matematici, come quello algebrico.

La terza critica riguarda la necessità di passare da un singolo punteggio rispetto a cui si determina il cut-off (unidimensionale) con cui si dichiara che uno studente ha "MLD" o meno, ad una valutazione multi-dimensionale che identifichi un *profilo di apprendimento matematico* rispetto a cui sviluppare opportuni interventi didattici. Se dal punto di vista clinico l'interesse principale è quello di sviluppare strumenti che certifichino la presenza di una disabilità – aspetto rilevante anche per le famiglie in quanto tale certificazione può determinare se lo studente in questione ha diritto ad usufruire di determinati supporti – dal punto di vista della ME l'obiettivo è quello di riconoscere e analizzare i bisogni educativi legati ad una particolare difficoltà. Dunque se da un punto di vista clinico si cerca

una misura e una linea di cut-off rispetto a cui si certifica la presenza della disabilità, in ambito educativo si cercano descrizioni di profili diversi e personalizzati. Tali profili dovrebbero portare a differenziare tra loro casi di studenti che appaiono identici, o comunque ragionevolmente simili, secondo le misure cliniche.

La quarta critica riguarda i modelli teorici di riferimento per i test diagnostici. Riprendiamo, per esempio, il modello di McCloskey, principale di riferimento teorico del test AC-MT. Da un lato, la possibilità di identificare i processi finì descritti dal modello e di studiarli in relazione agli altri fattori cognitivi considerati all'interno della diagnosi è sicuramente di grande interesse dal punto di vista clinico. Tuttavia, dall'altro lato, il contributo che il modello può dare all'interpretazione di "abilità scolastiche" ci sembra limitato per almeno tre motivi.

Innanzitutto, gli autori stessi del test aggregano i dati sulle molteplici prove secondo le quattro variabili presenti nella diagnosi (Operazioni scritte in classe; Conoscenza Numerica; Accuratezza; Tempo Totale), cioè restituiscono un risultato meno fine rispetto a quello che ci si potrebbe aspettare con un tale modello di riferimento. Notiamo, quindi, come l'interfacciarsi tra ambito clinico e ambito educativo possa (e forse debba!) portare a un cambiamento nel livello di finezza di analisi delle difficoltà. Ci chiediamo, però, se davanti a tale diminuzione di grado di finezza, sia ancora utile il modello di riferimento.

In secondo luogo, il modello riguarda soltanto alcuni processi implicati nell'apprendimento della matematica, anche se sicuramente molto importanti; e questo pone dei seri limiti all'efficacia del modello in ambito educativo. Il modello si focalizza in particolare sul numero - inteso solo come numero naturale ("sistema dei numeri" che corrisponde nella restituzione dei risultati del test a "Conoscenza Numerica") e sulla gestione di alcuni processi di calcolo con numeri naturali, che includono il saper eseguire particolari algoritmi di calcolo ("sistema del calcolo" che corrisponde nella restituzione dei risultati del test a "Operazioni scritte"). Visto che nella diagnosi si inferisce che dalla prestazione dello studente sul test AC-MT si vogliono stabilire le "abilità scolastiche" in ambito matematico dello studente, troviamo molto limitante l'uso di un test (e di un modello teorico) che riguardi soltanto particolari ambiti dell'aritmetica (critica avanzata anche al secondo punto).

Infine, un terzo aspetto critico, che dipende anch'esso, almeno in parte, dal modello di riferimento scelto, è che dai quattro valori riportati nella diagnosi per descrivere le "abilità scolastiche" in matematica dello studente, non si hanno molte informazioni utili per progettare interventi didattici di recupero e di supporto per lo studente. Addirittura, un insegnante attento potrebbe essersi accorto senza bisogno di sottoporre lo studente al test AC-MT delle difficoltà nel recupero veloce di fatti aritmetici segnalate nella diagnosi.

Analogamente, l'uso del modello del Triplo Codice di Dehaene, eventualmente congiunto con quello di McCloskey come è stato fatto per il test ABCA e per la sua estensione (ABCA 14-16) a studenti di scuola secondaria superiore (Baccaglini-Frank et al., 2013; Baccaglini-Frank, et al., 2014), risulta limitante da un punto di vista didattico per motivi simili. In particolare, per quanto riguarda le difficoltà in matematica di studenti della scuola secondaria di secondo grado, la distinzione tra processi lessicali, sintattici e semantici nell'ambito del "numero" e del "calcolo" e dei processi legati ai tre codici (visivo-arabico, verbale, e analogico di quantità) non consente di descrivere la complessità dei processi implicati nel ragionamento matematico. Se da un lato le distinzioni consentono un'analisi molto fine (anche troppo per gli scopi educativi) di alcuni processi, i molti altri di natura semantica, che aumentano con l'avanzare della matematica, sono "appiattiti" in un'unica dimensione. Inoltre, tali modelli non consentono di fare inferenze su altre abilità fondamentali nell'apprendimento della matematica, come le abilità visuo-spaziali o la generalizzazione. Questi aspetti rendono molto difficile la progettazione di interventi didattici adeguati a partire dai risultati sul test.

Prima chiudere questo paragrafo di critica ai modelli teorici di riferimento, aggiungiamo un commento che riguarda le abilità visuo-spaziali, perché riteniamo che possa chiarire ulteriormente come i modelli di riferimento nella psicologia cognitiva possano risultare inadeguati per studiare processi di apprendimento della matematica. Recentemente, in uno studio italiano (Miragliotta, Baccaglini-Frank e Tomasi, 2017), si è cercato di utilizzare le abilità visuo-spaziali così come sono descritte e classificate nella psicologia cognitiva (Cornoldi e Vecchi, 2004) per analizzare ragionamenti nell'ambito geometrico (della Geometria Euclidea). Il tentativo è risultato in parte insoddisfacente; in particolare, uno studio analitico qualitativo del processo di "previsione geometrica" ha messo in luce l'inadeguatezza del modello psicologico, in quanto non si riferisce in alcun modo alla conoscenza da parte del soggetto della teoria di riferimento, in questo caso della Teoria della Geometria Euclidea (Miragliotta, in corso di stampa).

Infine, la quinta critica riguarda la necessità di considerare aspetti affettivi e socio-culturali accanto a quelli cognitivi per avere un profilo completo e più utile per la progettazione di interventi didattici. Notiamo, innanzitutto, che le definizioni di discalculia mirano a separare cause cognitive da fattori affettivi e sociali che possano portare a basse prestazioni persistenti in matematica, e quindi al manifestarsi del disturbo in questione. Tuttavia, riteniamo che sia improprio attribuire necessariamente a fattori cognitivi basse prestazioni sui test psicometrici usati per la diagnosi. Infatti anche l'analisi di Lewis e Fischer (2016) ha rilevato che nella maggior parte dei test diagnostici non sono controllati i fattori non-cognitivi. Dunque, se ci interessano le basse prestazioni persistenti in

matematica e non possiamo distinguere facilmente tra difficoltà che portano ad una disabilità persistente in matematica e difficoltà che sono il risultato di esperienze didattiche inadeguate o di difficoltà affettive rispetto alla matematica, dovremo ampliare le dimensioni analizzate nei profili degli studenti. In particolare, non potranno essere esclusi da una diagnosi fattori affettivi e socio-culturali, che sappiamo contribuire molto alle difficoltà in matematica di molti studenti.

Il mondo della ricerca in ME ha preso atto della complessità di questo scenario, com'è dimostrato, per esempio, da discussioni intavolate a partire da un panel su “Special Needs in Research and Instruction in Whole Number Arithmetic” (Verschaffel et al., 2018) svoltosi all'ICMI Study 23 (Bartolini Bussi & Sun, 2018). Il panel ha esplorato e discusso, in particolare, diverse questioni aperte e ostacoli da superare rispetto agli obiettivi didattici e agli interventi didattici per studenti della scuola primaria con MLD.

### **3.3 Un nuovo modello interdisciplinare e multidimensionale**

Alla luce di quanto presentato fino a qui, vorremmo studiare come trasformare una diagnosi in strumento utile in ambito educativo, sia agli educatori che ai ricercatori in ME. Per fare questo diventa necessario cercare di superare le criticità descritte nel paragrafo precedente e, in particolare, sviluppare strumenti sia teorici che diagnostici che consentano di differenziare gli studenti etichettati come "aventi DSA con ricadute in matematica", in base al tipo di difficoltà che stanno davvero incontrando nell'apprendimento della matematica.

Un lavoro che va in questa direzione è quello intrapreso da alcuni anni da Karagiannakis e colleghi, che ha riorganizzato in un nuovo modello teorico le principali difficoltà cognitive riconosciute nella letteratura come cause cognitive di MLD (Karagiannakis, Baccaglini-Frank & Papadatos, 2014). Il modello ripartisce tale letteratura in quattro *domini* ed è stato usato per progettare il MathPro Test, (Karagiannakis & Baccaglini-Frank, 2014; Karaginnakis, Baccaglini-Frank & Roussos, 2017) che consente di individuare *profili di apprendimento matematico* e in particolare *profili di MLD*. Nelle sezioni seguenti introdurremo il modello dei quattro domini, il MathPro Test, illustreremo la sua standardizzazione in Italia, e daremo qualche esempio di profilo emergente dal test.

#### **3.3.1 Il modello dei quattro domini e il MathPro Test**

Il modello dei quattro domini nasce con l'obiettivo di mettere in relazione le ipotesi sulle cause di MLD conosciute in letteratura con conseguenze sullo sviluppo di particolari abilità matematiche (non solo aritmetiche). I quattro domini che individua sono i seguenti:

- dominio *numerico di base* (senso del numero, stima -continua e discreta-, posizionamento sulla linea dei numeri, gestione degli aspetti lessicali, sintattici, semantici del numero; comprensione del significato dei simboli delle operazioni);
- dominio della *memoria* (immagazzinamento e recupero di termini nuovi e definizioni, recupero fatti numerici, conoscenza del lessico, decodifica di proprietà o procedure in forma verbale, svolgimento accurato di calcoli a mente, richiamo di uso di formule e procedure);
- dominio del *ragionamento logico-matematico* (comprensione idee, concetti, principi logici, relazioni; comprensione passi di una sequenza di procedure/algoritmi complessi; gestione di processi di problem solving);
- dominio *visuo-spaziale* (esecuzione di calcoli scritti, gestione di aspetti visuo-spaziali dei numeri, interpretazione e uso di rappresentazioni geometriche, visualizzazione, uso della linea dei numeri, interpretazione e costruzione grafici, controllo di informazioni rilevanti in ambito visuo-spaziale).

La bontà del modello è stata sperimentata tramite un test somministrato a un campione di popolazione che consisteva di 165 studenti frequentanti la classe 5° e 6° (ultimi due anni) della scuola primaria greca (età media 11 e 3 mesi) non scelti tra soggetti clinici. In questa popolazione 9 studenti risultavano positivi (sotto al 16° percentile) al test standardizzato usato per la rilevazione di discalculia in Grecia (NUCALC) e 17 studenti risultavano avere prestazioni basse in matematica (prestazioni sul test standardizzato tra il 17° e il 30° percentile). Il test consisteva in una batteria di prove matematiche somministrate al computer, elaborate alla luce del modello dei quattro domini.

Il carattere innovativo di questa batteria non sta tanto nei singoli item usati, ma nella loro combinazione in blocchi che si è ipotizzato (e questo è stato confermato in modo soddisfacente dalle analisi) indicare il fatto che per rispondere correttamente ad item del blocco, lo studente sia “forte” nelle abilità di un certo dominio a cui afferisce quel blocco<sup>15</sup> del modello.

Le analisi (di tipo statistico) dei dati raccolti hanno supportato la bontà del design del test, confermando a posteriori l'assegnazione ipotizzata a priori di blocchi di item ai domini del modello teorico<sup>16</sup> (Karaginnakis, Baccaglioni-Frank & Roussos, 2017). Inoltre, è stato possibile individuare

---

<sup>15</sup> Non sempre è stato possibile assegnare un blocco di item ad un singolo dominio per la complessità intrinseca dei processi cognitivi implicati nel ragionamento matematico. Tuttavia il test è stato progettato cercando di mantenere il più possibile tali assegnazioni di blocchi di domande a uno dei quattro domini del modello.

<sup>16</sup> Questi risultati sono stati ottenuti mediante la principal component analysis e la confirmatory factor analysis. Per approfondimenti su tali analisi si veda l'articolo di Karaginnakis, Baccaglioni-Frank e Roussos (2017), in particolare si vedano le sezioni 6.2, 6.3 e la discussione.

"clusters" di studenti con caratteristiche prestazionali significativamente diverse<sup>17</sup>. Tali risultati suggeriscono che il test possa essere utilizzato con successo per descrivere forze e debolezze cognitive in matematica, rispetto ai quattro domini individuati dal modello teorico. In particolare, emerge che il *profilo di apprendimento matematico* di uno studente può essere caratterizzato attraverso le abilità dei quattro domini; e che forze e debolezze in domini diversi sono indipendenti. A titolo di esempio riportiamo il confronto tra i profili emergenti dalle prestazioni di due studenti greci sulla nuova batteria (Karagiannakis & Baccaglini-Frank, 2014; Karagiannakis, Baccaglini-Frank & Roussos, 2017). I due studenti avevano ottenuto gli stessi punteggi sul QI non verbale e sul NUCALC, risultando positivi rispetto alla discalculia (Figura 11).

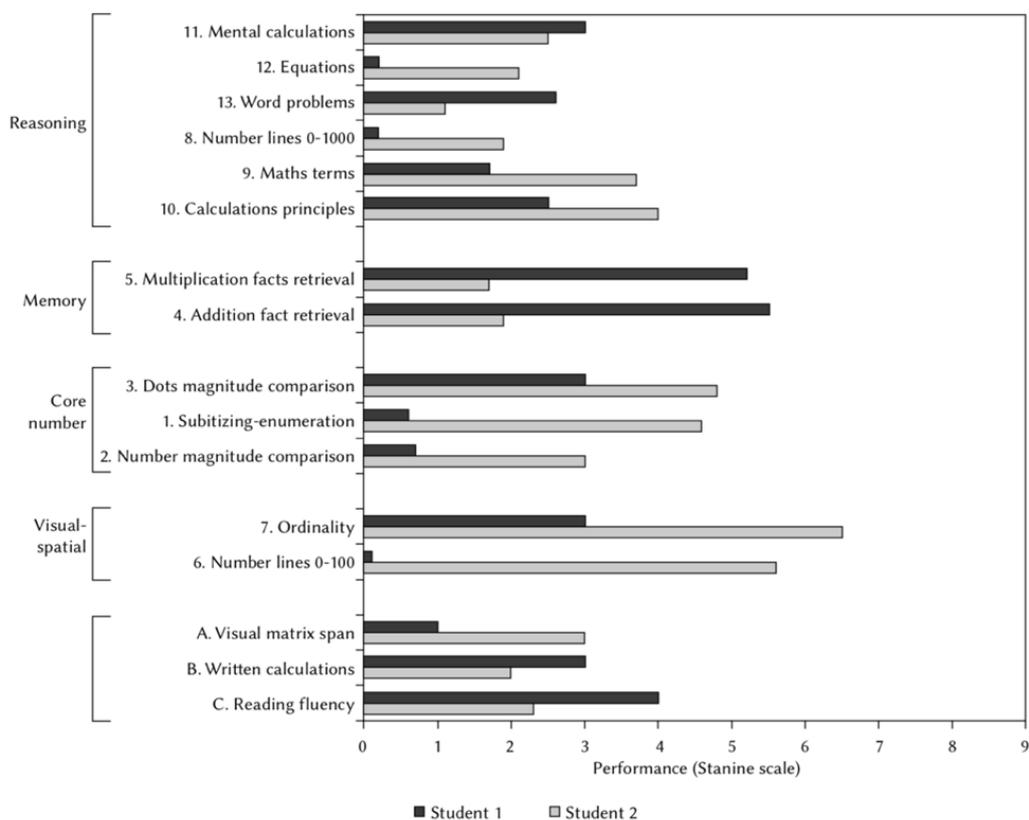


Figura 11: prestazioni a confronto sulla batteria sperimentale di due studenti con identico punteggio sul NUCALC (test diagnostico per la discalculia usato in Grecia)

Il confronto mostra come le prestazioni dei due studenti, indistinguibili secondo il NUCALC, siano invece molto diverse secondo il MathPro Test, e quindi rispetto al modello dei quattro domini. L'unica somiglianza pare essere nella bassa prestazione di entrambi gli studenti nell'ambito del ragionamento matematico. Per approfondire ipotesi avanzate su questo si veda Karagiannakis e

<sup>17</sup> Questi risultati sono stati ottenuti mediante la k-means cluster analysis. Per approfondimenti su tale analisi si veda l'articolo di Karaginnakis, Baccaglini-Frank e Roussos (2017), in particolare si vedano le sezioni 6.4 e la discussione.

Baccaglioni-Frank (2014). Notiamo come i risultati sul MathPro Test siano coerenti anche rispetto alle prestazioni dei due studenti su altre consegne usate tipicamente in clinica (domande dei set A, B, C) per misurare abilità di lettura, calcolo scritto, e ragionamento non verbale: le prestazioni degli studenti sono entrambe sotto norma, ma differiscono in tutti e tre gli ambiti.

Questo esempio dovrebbe chiarire il fenomeno dell'esistenza di profili addirittura "complementari" di studenti che rispetto ai parametri di studi precedenti sarebbero semplicemente stati definiti "aventi MLD" e probabilmente sarebbero trattati nello stesso modo da un punto di vista educativo.

Tali risultati sono in accordo con quelli di studi che hanno portato a parlare di un "continuum" lungo cui possono essere collocate le prestazioni matematiche degli studenti, anziché di una distinzione netta tra prestazioni "basse" o "deficitarie" e "alte" o "eccezionali" (per es., Reigosa-Crespo et al., 2011). Inoltre, questi risultati confermano la grande eterogeneità nei profili di MLD, già individuata nella revisione critica di Lewis e Fischer.

Notiamo, infine, che questo approccio "olistico" è assolutamente in linea con ciò che viene proposto nel DSM-5, di cui abbiamo parlato precedentemente e in cui la categoria dei disturbi dell'apprendimento è stata unificata sotto la dicitura "specific learning disorder (SLD)" (disturbo specifico dell'apprendimento), che ora viene identificato attraverso una singola diagnosi che prende in considerazione tutti i deficit che hanno impatto negativo sulle prestazioni accademiche.

### **3.3.2 La standardizzazione italiana del MathPro Test e la lettura dei "profili"**

In seguito allo studio del 2017 (Karagiannakis et al., 2017) è stata messa a punto una revisione del MathPro Test (di cui sono descritte tutte le tipologie di consegne qui: <https://public.mathpro.education/TestEn>). Tale nuova versione è stata somministrata ad un campione di oltre 1700 studenti italiani tra i 6 e i 12 anni, oltre che a campioni di varie centinaia di studenti in diversi paesi europei. In Italia tale somministrazione era mirata alla standardizzazione del test rispetto alla popolazione italiana; si è conclusa nel maggio 2019 e i risultati, che si sono rivelati essere molto buoni, dovrebbero essere pubblicati a breve. Anticipiamo qui di seguito soltanto due dei vari risultati di questo nuovo studio.

Il primo riguarda un risultato statistico nell'analisi a posteriori. Come per la versione precedente del test (di cui le analisi statistiche si possono trovare in Karagiannakis et al., 2017), una delle analisi effettuate è la *principal component analysis*, usata per vedere a posteriori se la progettazione e suddivisione a priori dei blocchi di domande rispetto ai quattro domini era "buona". Tale analisi ha rivelato, coerentemente all'analisi a priori, che la suddivisione dei 18 blocchi di item erano coerenti con il modello, con la particolarità che i blocchi ritenuti a priori come afferenti al dominio visuo-

spaziale (3, 4, 15, 16, 18 nella *Figura 12*) si sono "ripartiti" su due degli altri domini: il numerico di base, e quello del ragionamento.

In altre parole, alcuni blocchi di item ritenuti a priori afferenti al dominio visuo-spaziale si sono rivelati a posteriori essere "più coerenti" con i blocchi del dominio numerico di base e altri con blocchi del dominio del ragionamento rispetto a che tra loro. Questo risultato è coerente con diversi studi sia nell'ambito cognitivo che nella ME che sottolineano, rispettivamente, componenti "spaziali" del dominio numerico di base (Meyer et al., 2010; Piazza, 2010; Mulligan & Mitchelmore, 2013; Coles & Sinclair, 2018) e una necessaria sinergia tra ragionamento logico verbale e visuo-spaziale per una buona gestione della matematica.

1. Single-digit numbers comparison	Numerical	<b>CORE NUMBER</b>
2. Multi-digit numbers comparison		
3. Dots Comparison	Spatial	
4. Subitizing		
5. Enumeration	Counting	<b>MEMORY</b>
6. Numbers dictation		
7. Next number		
8. Previous number	Retrieval	
9. Addition facts retrieval		
10. Multiplication facts retrieval	Numerical	<b>REASONING</b>
11. Mental calculations		
12. Word problems		
13. Calculation principles		
14. Numerical patterns		
15. Number lines 0-100	Spatial	
16. Number lines 0-1000		
17. Squares		
18. Building blocks		

*Figura 12: raggruppamento delle consegne a posteriori dato dalla principal component analysis*

Il secondo risultato che vogliamo introdurre riguarda il fatto che il MathPro Test consenta di identificare profili di apprendimento matematico. Ora, a standardizzazione compiuta, dopo lo svolgimento del test, il sistema restituisce per ogni tipologia di consegna il percentile in cui si colloca la prestazione (rispetto agli studenti del campione italiano dello stesso grado scolastico), con la ripartizione ed evidenziazione mostrata nella *Figura 13*. Un esempio di resoconto (in versione ancora preliminare non pubblica) generato dal sistema si trova qui (<http://bit.ly/2LSIY6P>).



*Figura 13: ripartizione dei percentili delle prestazioni relative alla standardizzazione italiana del MathPro Test*

Di seguito riportiamo due esempi di lettura di profili (istantanei di prestazione sul MathPro Test) di studenti italiani, diagnosticati precedentemente in clinica come aventi DSA.

### Esempio A

Notiamo come le prestazioni sugli item dell'ambito della memoria siano in norma o sopra norma, e come siano gli unici - insieme al subitizing che discuteremo dopo - a non essere carenti (sotto il 30-simo percentile). In particolare notiamo come le prestazioni sul confronto tra numeri in formato simbolico, su tutti i blocchi riguardanti il ragionamento numerico e sui due blocchi finali (quadrati e mattoncini) che riguardano il ragionamento spaziale in 2D e 3D siano estremamente basse.

Il profilo di basse prestazioni persistenti in matematica emergente dall'esempio A descrive difficoltà nello sviluppo del ragionamento matematico, sia numerico che spaziale. Invece lo studente pare aver sviluppato alcune abilità matematiche legate all'ambito della memoria, grazie, probabilmente, ad adeguate abilità linguistiche. Dunque, questo studente per apprendere probabilmente si appoggia soprattutto ad aspetti verbali, che riesce anche a mantenere nella memoria a lungo termine.

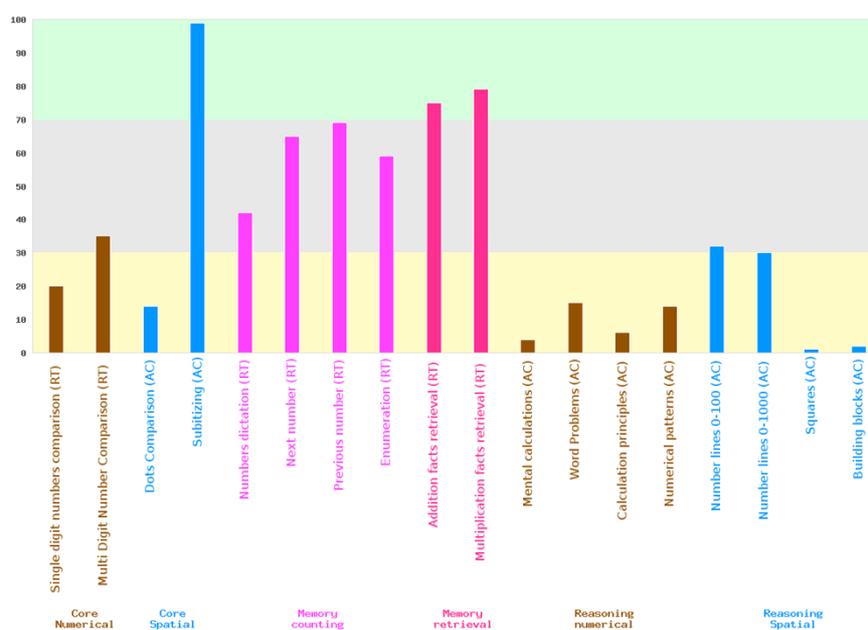
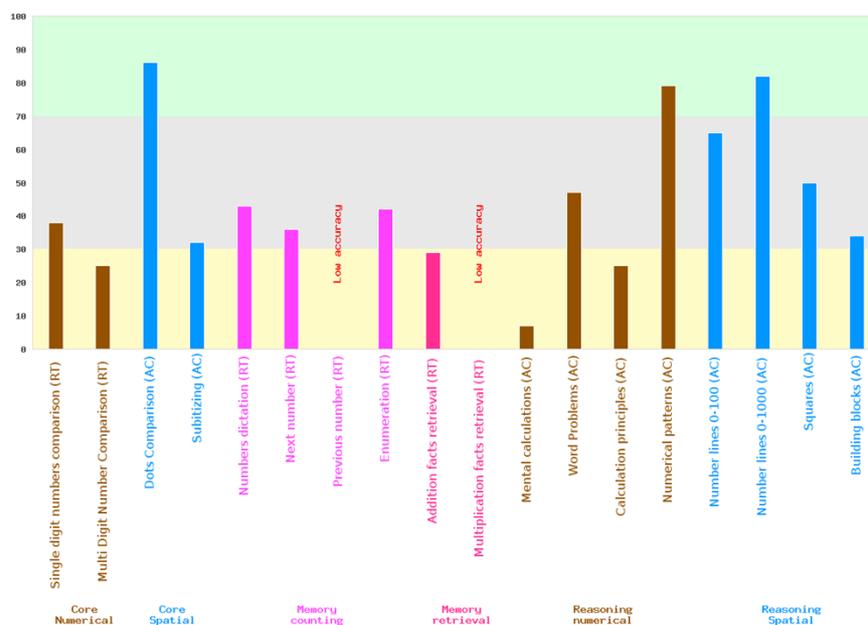


Figura 14: Percentili delle prestazioni sui blocchi di item del MathPro Test di uno studente di classe prima secondaria di primo grado.

### Esempio B

La prestazione sintetizzata nell'esempio B (Figura 15) è, per certi aspetti, complementare rispetto a quella analizzata precedentemente. In particolare, le prestazioni più basse sono nell'ambito della memoria: addirittura le prestazioni su due dei blocchi (numero precedente, e recupero di fatti moltiplicativi) hanno accuratezza troppo bassa perché il sistema tenga conto del tempo di reazione (la variabile misurata per questo livello scolastico). Nell'ambito numerico di base notiamo anche difficoltà con la gestione di numeri con più cifre. Le difficoltà legate alla memorizzazione (in questo caso mancata) di fatti numerici potrebbe essere dovuta anche ad un insegnamento basato molto su aspetti

verbali (questo è comune nell'insegnamento classico, soprattutto per le cosiddette tabelline). Notiamo, invece, come le prestazioni relative al dominio del ragionamento visuo-spaziale siano buone; come pure due delle quattro prestazioni relative al dominio del ragionamento numerico. Dunque il profilo identifica diverse "abilità forti" su cui un intervento di recupero (o anche la regolare didattica in classe) potrebbe essere basato.



*Figura 15: Percentili delle prestazioni sui blocchi di item del MathPro Test di uno studente di classe prima secondaria di primo grado, con diagnosi di dislessia.*

Cogliamo l'occasione per sottolineare come, in generale le consegne che riguardano il confronto di punti e il subitizing, dell'ambito numerico di base, siano risultati essere i meno predittivi rispetto alle prestazioni degli studenti sul MathPro Test. Questo è un risultato interessante anche alla luce del fatto che le ipotesi iniziali sulla discalculia riguardano proprio questi "meccanismi di base".

### 3.3.3 Nuove ipotesi didattiche - work in progress

Riteniamo che un elemento di novità e unicità di questa direzione di ricerca è che il modello confermato dai risultati sperimentali consente di correlare le difficoltà matematiche di ogni studente con insiemi di abilità matematiche (che non riteniamo siano innate e immodificabili) più forti e più deboli sviluppate dallo studente stesso. La nostra ipotesi è che in questo modo si potranno sviluppare attività didattiche e interventi di potenziamento più mirati e adatti alla particolare classe al singolo studente con cui ci si trova a lavorare. In particolare, ipotizziamo che sia auspicabile, da un lato, utilizzare le abilità forti per migliorare le prestazioni matematiche dello studente favorendo

l'apprendimento di strategie che le sfruttino maggiormente, e, dall'altro, potenziare, se possibile, le abilità più deboli progettando attività matematiche mirate.

Per sperimentare tali ipotesi nell'ambito di una didattica inclusiva per classi intere, avremo bisogno di rendere "meno fine" la caratterizzazione di ciascun profilo emergente, in modo da poter raggruppare studenti con profili "abbastanza simili" (identificati nella *Tabella 2*). Si potranno così studiare le modalità di apprendimento e le potenzialità di determinati materiali didattici appositamente progettati per tali macro-tipologie.

*Tabella 2: quattro macro-tipologie di profili di riferimento per la sperimentazione di materiale didattico inclusivo.*

	Memoria (recupero fatti) ↑	Memoria (recupero fatti) ↓
Ragionamento ↑	1 (nessun particolare intervento didattico necessario)	3 (interventi basati sul ragionamento numerico o spaziale a supporto processi di memorizzazione)
Ragionamento ↓	2 (interventi in cui la memoria supporta processi di ragionamento numerico e spaziale)	4 (è necessario approfondire la natura delle debolezze analizzando i processi di conteggio e numerici di base)

Notiamo che il profilo nel nostro esempio A tende a collocarsi nella tipologia 2, mentre il profilo nell'esempio B nella tipologia 3. Stiamo attualmente studiando come associare in modo più automatico i profili emergenti dal MathPro Test alle tipologie 1, 2, 3, 4, e se questo abbia senso da un punto di vista didattico.

In generale riteniamo che lo studio di profili di apprendimento matematico di questo tipo sia un passo necessario per cominciare a sciogliere la complessità del fenomeno studiato, e per raggiungere maggiore inclusività nell'apprendimento matematico sia a livello di classe che in interventi di recupero individualizzati. È questo uno dei principali interessi di due progetti di ricerca finanziati recentemente: il progetto PerContare ([www.percontare.it](http://www.percontare.it)) per classi terze e quarte di scuola primaria, e il progetto "Didattica della matematica inclusiva", finanziato dal progetto IPRASE "Rimuovere le difficoltà d'apprendimento, favorire una scuola inclusiva e preparare i cittadini responsabili e attivi del futuro" per classi prime e seconde di scuola secondaria di primo grado.

## Conclusioni

Come scritto nell'introduzione, il lavoro di preparazione al seminario, sintetizzato in queste pagine e nei lavori allegati, è stata l'occasione per confrontare le nostre ricerche, analizzarne somiglianze e differenze, e cominciare riflettere su integrazioni possibili.

Occasione di confronto a partire da un sentire comune: l'importanza che gli studi teorici sui tre costrutti possano essere strumenti per passare dall'etichettatura alla progettazione di interventi educativi mirati; siano essi di sviluppo di un curriculum coerente con gli obiettivi cognitivi e affettivi, di prevenzione o di recupero di difficoltà.

Vogliamo a questo punto tirare le fila di questo percorso di riflessione discutendo a partire dagli aspetti che abbiamo richiamato nell'introduzione, nella convinzione che il seminario sarà una importante occasione di confronto e ulteriore riflessione, e che dunque le seguenti rappresentano delle *conclusioni provvisorie*.

Il primo aspetto è quello della definizione dei costrutti in gioco.

Come sottolineato più volte, i costrutti considerati hanno due caratteristiche in comune: hanno avuto tutti origine in campi diversi dalla ME, sono termini tecnici entrati (con significati diversi) nella terminologia tipica della pratica didattica. Queste due caratteristiche rendono i costrutti in gioco molto ricorrenti nei discorsi sviluppati in ambiti diversi tra loro.

In generale, è motivo di interesse il fatto che uno stesso termine venga utilizzato in diversi contesti scientifici o sociali seppur con significati diversi. Questo infatti, può promuovere forme di condivisione, discussione e in definitiva contaminazione tra le diverse comunità portando ad un reciproco arricchimento, a condizione che, nei diversi contesti, il significato dei termini in gioco sia ben delineato e allo stesso tempo abbastanza flessibile. Tuttavia, questa non sembra affatto corrispondere alla situazione attuale per i costrutti esaminati.

Il fatto che lo stesso termine ('competenza', 'discalculia' o 'atteggiamento') venga usato in diversi contesti con significati diversi pone un evidente problema di comunicazione. Problema particolarmente subdolo perché i diversi significati possono rimanere impliciti: in questo modo due interlocutori possono essere convinti di parlare della stessa cosa, quando, in realtà, si stanno riferendo a due costrutti profondamente distinti.

Questo può succedere (e succede) sia in contesto di ricerca (per esempio, in psicologia e in ME), ma anche fuori dal contesto scientifico. I termini quindi si caricano anche di significati che si sviluppano nell'uso *quotidiano* degli stessi, e anche questo contribuisce a rendere più difficile l'obiettivo di caratterizzarli con chiarezza.

La consapevolezza di questa pluralità di significati (e dunque di costrutti) richiamati da una stessa parola porta ad una prima questione: esiste una definizione *giusta* dei costrutti considerati? E se sì, in base a quali criteri identificarla?

Appare evidente come l'aggettivo *giusto* sia di per sé sfuggente: per chi (ovvero per quale comunità di riferimento) e rispetto a quali obiettivi? Riferendosi alle diverse comunità di ricerca e identificando come obiettivo comune la caratterizzazione chiara e condivisa dei tre costrutti, finalizzata ad avere un quadro comune e confrontabile tra i vari domini di ricerca e tra ricercatori, il percorso che abbiamo descritto ha fatto emergere la convinzione che non esista *la* definizione giusta. Anche perché la pluralità e la diversità di obiettivi è, sempre a nostro avviso, un valore anche all'interno della stessa comunità di ricerca. A questo proposito tornano in mente le parole di Kulm, già citate, relativamente alla definizione di atteggiamento "*Probabilmente non è possibile offrire una definizione di atteggiamento verso la matematica che sia adatto per tutte le situazioni e, anche se lo fosse, probabilmente tale definizione sarebbe troppo generale per essere utile.*" (Kulm 1980, p. 358).

D'altra parte, l'imprescindibile analisi critica delle diverse accezioni dei costrutti in letteratura ha sottolineato da una parte questa esigenza di avere diverse definizioni, dall'altra la difficoltà di caratterizzare i costrutti anche una volta fissati gli obiettivi.

Le difficoltà relative alla caratterizzazione di diversi costrutti tipici della ricerca in ME (e, in particolare, dei tre costrutti trattati in questo seminario) nascono anche dal fatto che tali costrutti hanno avuto origine in campi di ricerca diversi dalla ME (pedagogia, psicologia, antropologia, sociologia, linguistica, ...), sviluppandosi intorno a interessi di ricerca e paradigmi diversi (Bishop, 1992; Zan, 1999). Dunque, anche laddove ci fosse accordo sulla definizione del costrutto nel campo di ricerca dove il costrutto è stato originariamente sviluppato, è evidente che il suo uso nel campo della ME (in particolare la possibilità di rispondere alle domande tipiche della ricerca in ME) passa da una ri-definizione del termine nell'ambito degli interessi e degli obiettivi della ME. D'altra parte, come abbiamo visto, anche all'interno della stessa ME, gli interessi e gli obiettivi possono essere molteplici: non è detto che una caratterizzazione sia buona per tutti gli obiettivi. Così come non è detto che anche rispetto ad uno stesso obiettivo ci sia sempre una, e una sola, *buona* scelta.

In definitiva l'analisi della letteratura sviluppata ha portato a due convinzioni.

La prima è che non sia possibile individuare *la* giusta definizione di questi costrutti, ma che possano esistere tante *buone* definizioni. Conseguentemente a ciò, la base per la comunicazione non è tanto la difficile identificazione di un significato univoco, quanto l'esplicitazione e la condivisione degli obiettivi e delle scelte che hanno portato ad una determinata caratterizzazione del costrutto. Proprio

questa esplicitazione è la base per poter sviluppare un confronto, come sottolineato anche da Schoenfeld (1994) in un famoso articolo sui metodi in ME:

*“I wish to make the point that the choice of perspectives, and of method, represents a choice of values. Those choices say what the researcher considers important, what needs to be explained, and what does not”.*

La seconda è la relazione strettissima che esiste tra caratterizzazione di un costrutto e strumenti di osservazione. È evidente che il tratto distintivo di questa relazione deve essere la coerenza: gli strumenti di osservazione devono essere coerenti con la caratterizzazione del costrutto assunto. Questa indicazione, che pare ovvia, non sempre è rispettata: si trovano così costrutti caratterizzati da molteplici dimensioni che vengono indagati attraverso strumenti focalizzati su un'unica dimensione o comunque descritti con un punteggio unico che non restituisce la multidimensionalità, o viceversa costrutti unidimensionali con strumenti di osservazione/misura che spaziano su dimensioni diverse.

Per tutti e tre i costrutti molto spesso la coerenza è stata ottenuta *a priori*, non definendo il costrutto se non in termini degli output degli strumenti di osservazione sviluppati. È evidente che tale approccio non è in linea con la nostra idea di *buona* definizione, che passa dalla definizione degli obiettivi, dalla caratterizzazione del costrutto adatta per quelli obiettivi e conseguentemente dallo sviluppo di strumenti di osservazione coerenti.

Lo sviluppo di strumenti di osservazione coerenti diventa così un processo per prova ed errori (come abbiamo visto per tutti e tre i costrutti in gioco): lo strumento di osservazione, dapprima sviluppato a livello teorico, va sperimentato sul campo e tale sperimentazione può restituire difficoltà a osservare certe dimensioni (e quindi spunti per modificare lo strumento stesso), così come differenziazioni significative all'interno di una dimensione (e quindi spunti per raffinare il costrutto teorico).

Entrando più nello specifico dei costrutti in gioco in questo seminario, abbiamo condiviso un altro assunto forte: tali costrutti non sono caratteristiche dell'individuo, ma modelli dell'osservatore. In questo quadro, il ricercatore ha un'ampia libertà nella costruzione del modello, così come nella identificazione dell'oggetto di interesse. Ad esempio, confrontando quanto discusso sui tre costrutti emerge una differenza nella decisione su quale sia l'oggetto della competenza / atteggiamento / difficoltà di apprendimento. Nel caso delle competenze siamo interessati a definire la competenza nell'ambito matematico, laddove alcuni studiosi rigettano l'idea di una competenza disciplinare, e dunque abbiamo scelto di fare uno *zoom*; nel caso dell'atteggiamento e delle difficoltà di apprendimento abbiamo invece scelto di *allargare*: in un caso rispetto ad un'idea di atteggiamento su singoli aspetti della matematica, ad esempio atteggiamento nei confronti dell'aritmetica; nell'altro, delle difficoltà di apprendimento, rispetto ad un focus ristretto ai soli fatti aritmetici elementari.

La libertà del ricercatore ha come conseguenza che la condivisione esplicita e chiara delle scelte fondamentali del ricercatore nella comunicazione scientifica diventa una necessità assoluta.

Da una parte dunque, la molteplicità dei significati è accettata come conseguenza naturale della molteplicità degli obiettivi, così come dei possibili modi diversi di approcciarsi all'analisi dello stesso fenomeno; dall'altra tale libertà implica delle necessità, tra le quali anche il bilancio e la valutazione, anche a posteriori, dell'utilità del modello adottato nell'interpretare il fenomeno studiato e nel suggerire interventi mirati.

Il richiamo agli interventi è tutt'altro che casuale in questo seminario: il punto di raccordo maggiore tra noi tre, le nostre ricerche e le nostre esperienze è proprio la volontà di ribaltare l'idea che, nei casi di difficoltà, i costrutti che abbiamo presentato (competenza, discalculia, atteggiamento) servano come etichette per diagnosi di impossibilità di intervento. Ciò che ha guidato le nostre riflessioni e, di conseguenza, le caratterizzazioni dei costrutti sviluppate è stato proprio cercare di avere degli strumenti interpretativi per l'intervento, nell'ottica, suggerita da Zan (2007), che gli strumenti teorici per l'interpretazione delle difficoltà conducano a ipotesi di lavoro per l'intervento.

Coerentemente con questo obiettivo, una *buona* definizione deve servire non per certificare una condizione dell'osservato, ma per suggerire dei possibili interventi. Insomma le *buone definizioni* devono dare strumenti per intervenire piuttosto che per certificare.

Come scritto nell'introduzione, infatti, un nostro comune interesse è stato quello di interessarsi alle difficoltà in matematica, con l'ottica di sviluppare strumenti teorici per suggerire interventi mirati. Questo comune interesse ha portato, sia nel caso della discalculia che dell'atteggiamento, a voler caratterizzare a livello teorico, e dunque differenziare, *profili di difficoltà*.

Anche in questo caso, il lavoro presentato ha tentato di dare una doppia chiave di discussione: specifica dei costrutti, legata alle scelte che ci hanno portato a caratterizzare i profili di difficoltà di apprendimento e di atteggiamento negativo; generale, legata alla costruzione di profili. In un caso, per le difficoltà di apprendimento, si è partiti da una riflessione didattico-epistemologica a priori sulle dimensioni matematiche rilevanti da includere in una diagnosi di difficoltà, con la convinzione della necessità di dover allargare lo spettro rispetto all'approccio più diffuso che si focalizza solo sulle abilità aritmetiche. Nel caso dell'atteggiamento, si sono ottenuti i profili con un approccio "grounded", dal basso. Da questo emerge come si possa arrivare ai profili seguendo strade differenti. D'altra parte, nello stile che ha caratterizzato questo seminario, di continui rimandi tra differenziazioni e similitudini, ci sembra importante sottolineare un aspetto in comune nella ricerca della caratterizzazione dei profili: la necessità di trovare un giusto equilibrio tra la considerazione della complessità (*"Mathematics education is a complex process and research results are interesting*

*(both in themselves and in their consequences for the school system) when complexity is taken into account*”, Boero, 2000) e l’individuazione di categorie non troppo parcellizzate per poter essere significative: seppur sia evidente che ogni caso di difficoltà è diverso, non è possibile, o meglio utile, differenziare ogni singolo caso.

Si tratta dunque di fare scelte, e noi le abbiamo fatte consapevoli che qualsiasi scelta da una parte, lascia fuori qualcosa, dall’altra sia *discutibile*, nel senso che possa essere discussa.

L’auspicio è che il nostro lavoro abbia fornito spunti interessanti per approfondire questa discussione.

## Bibliografia

- Aiken, L. (1970). Attitudes toward mathematics. *Review of Educational Research*, 40, 551–596.
- Allport, W. (1935). *Attitudes*. In C. A. Murchison (Ed.), *A handbook of social psychology* (pp. pp 798–844). Worcester: Clark University Press.
- American Psychiatry Association. (1994). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders (5th ed.)*. DSM-4. Author.
- American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders (5th ed.)*. DSM-5. Author. Edizione italiana: Massimo Biondi (a cura di) (2014), DSM-5. Manuale diagnostico e statistico dei disturbi mentali, Milano, Raffaello Cortina Editore.
- Arzarello, F. (1992). La ricerca in didattica della matematica. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 15(4).
- Baccaglioni-Frank, A. & Scorza, M. (2013). Gestire gli studenti con DSA in classe uso delle mani e della linea dei numeri nel progetto PerContare. In C. Cateni, C. Fattori, R. Imperiale, B. Piochi, e P. Vighi, *Quaderni GRIMeD n. 1*, 183–190.
- Baccaglioni-Frank, A., Lucatello, B., Micheletto, L., Perona, M. & Tubertini, M. (2013). Il Potenziamento in Matematica di Studenti del Biennio Superiore: il successo di particolari strategie cognitive. *Difficoltà in Matematica*, 9(2), 157–174.
- Baccaglioni-Frank, A, Lucangeli, D., Lucatello, B., Micheletto, L., Perona, M. & Tubertini, M. (2013). Un Percorso di Potenziamento in Matematica per Studenti del Biennio Superiore, *Nuova Secondaria*, Editrice La Scuola, 9, 49-56.
- Baccaglioni-Frank, A., Bettini, P., Caviola, S., Lucangeli, D. & Perona, M. (2013). *ABCA 14-16. Prove di Abilità di Calcolo Avanzato per la Scuola Secondaria di Secondo Grado*. Edizioni Erickson. ISBN 978-88-590-0405-9.
- Baccaglioni-Frank, A., Bettini, P., Brazzolotto, M., Caviola, S., Perona, M. & Poli, F. (2014). Le Prove ABCA 14-16. *Difficoltà in Matematica*, 10(2), 151–166.
- Baccaglioni-Frank, A., Antonini, S., Robotti, E. & Santi, G. (2014). Juggling reference frames in the microworld Mak-Trace: the case of a student with MLD. Research Report in Nicol, C., Liljedahl, P., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 2*, (pp. 81–88). Vancouver, Canada: PME.
- Baccaglioni-Frank, A. & Bartolini Bussi, M. (2016). Buone pratiche didattiche per prevenire falsi positivi nelle diagnosi di discalculia: il progetto PerContare. *Form@re*, 15(3), 170–184.
- Baccaglioni-Frank, A. & Robotti, E. (2018). Disturbi specifici dell'apprendimento: verso una didattica per diversi profili di apprendimento in matematica. In L. Giacardi, M. Oggero, e C. Sabena (Eds.), *Conferenze e seminari 2017-2018 Associazione Subalpina Mathesis* (pp. 157–174). L'Artistica Editrice.
- Baccaglioni-Frank, A. & Di Martino, P. (2019). Mathematical Learning Difficulties and Dyscalculia. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education Living Edition*. Cham: Springer.
- Baccaglioni-Frank, A. & Di Martino, P. (in press). Cultural differences and sensitivities in the mathematics classroom. In D. Lucangeli (Ed.), *Understanding Atypical Development: Dyscalculia*. Routledge.
- Bara, B. G. (1999). *Pragmatica cognitiva*. Torino: Bollati-Boringhieri.
- Bartelet, D., Ansari, D., Vaessen, A. & Blomert, L. (2014). Research in developmental disabilities cognitive subtypes of mathematics learning difficulties in primary education. *Research in Developmental Disabilities*, 35, 657–670.
- Bartolini Bussi, M.G. & Sun, X.H. (2018). *Building the foundation: Whole numbers in the primary grades. The 23rd ICMI study – new ICMI study series*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing

- Bishop, A. (1992). International Perspectives on Research in Mathematics Education, in D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing Company, New York, 710–723.
- Boero, P. (2000). Can research in mathematics education be useful for the teaching and learning of mathematics in school? And how? In T. Nakahara and M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the XXIV Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol.1, 76–79. Hiroshima, Japan: PME.
- Boero, P., Dapuelto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L. & Scali, E. (1995). Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in mathematics teaching-learning in compulsory school. In A. Olivier and K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the XIX Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, 151-166. Recife, Brasil: PME.
- Bruner, J. (1990). *Acts of meaning*. Cambridge: Harvard University Press. [Tr. It. La ricerca del significato. Per una psicologia culturale, Bollati Boringhieri, 1992.]
- Butterworth, B. (2010). Foundational numerical capacities and the origins of dyscalculia. *Trends in Cognitive Sciences*, 14, 534–541.
- Chomsky, N. (1968). *Language and mind*. New York: Harcourt, Brace and World.
- Cobb, P. (1985). Two children's anticipations, beliefs, and motivations. *Educational Studies in Mathematics*, 16(2), 111-126.
- Cobb, P., McClain, K., de Silva Lamberg, T. & Dean, C. (2003). Situating teachers' instructional practices in the institutional setting of the school and district. *Educational Researcher*, 32(6), 13–24.
- Coles, A. & Sinclair, N. (2018). *Re-Thinking 'Normal' Development in the Early Learning of Number*. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 136–158.
- Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T. & Sabena, C. (2013). Primary teachers' affect: a crucial variable in the teaching of mathematics, *Nordisk Matematikdidaktikk*, 17(3- 4), 101–118.
- Cornoldi, C., Lucangeli, D. & Bellina, M. (2002). *AC-MT Test: Test per la valutazione delle difficoltà di calcolo*. Trento: Erickson.
- Cornoldi, C. & T. Vecchi (2004). *Visuo-spatial working memory and individual differences*. Psychology Press.
- Cuoco, A., Goldenberg, E. P. & Mark, J. (1996). Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 375–40.
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44(1–2), 1–42.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York: Oxford University Press.
- Di Martino, P. & Gregorio F. (2018): The mathematical crisis in secondary-tertiary transition. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 825–843.
- Di Martino, P. & Zan, R. (2001). Attitude toward mathematics: Some theoretical issues. In M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proc. of the 25th IGPME Conference*, vol. 3, pp. 351–358. Utrecht, The Netherlands.
- Di Martino, P. & Zan, R. (2010a). 'Me and maths': Towards a definition of attitude grounded on students' narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(1), 27–48.
- Di Martino, P. & Zan, R. (2010b). Sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica: dalle buone intenzioni alle buone pratiche. In Raffaella Biagioli e Tamara Zappaterra (Eds.), *La scuola primaria. Soggetti, contesti, metodologie e didattiche* (pp. 115-130). ETS: Pisa.

- Di Martino, P. & Zan R. (2015). *The Construct of Attitude in Mathematics Education*. In: Pepin B., Roesken-Winter B. (Eds) From beliefs to dynamic affect systems in mathematics education. *Advances in Mathematics Education* (pp. 51-72). Springer: Cham.
- Di Martino, P. & Zan, R. (2019). *Problemi al centro. Matematica senza paura*. Giunti Scuola: Firenze.
- Duncker, K. (1935). *Zur Psychologie des produktiven Denkens*. Berlin: Springer.
- Fennema, E., & Sherman, J. (1977). Sex-related differences in mathematics achievement, spatial visualization and affective factors. *American Educational Research Journal*, 14(1), 51–71.
- Feierabend, R. (1960). Review of research on psychological problems in mathematics education. *Research Problems in Mathematics Education*, 3, 3–46.
- Fuchs, L. S., Fuchs, D., Compton, D. L., Bryant, J. D., Hamlett, C. L. & Seethaler, P. M. (2007). Mathematics screening and progress monitoring at first grade: Implications for responsiveness to intervention. *Exceptional Children*, 73, 311–330.
- Germann, P. (1988). Development of the attitude toward science in school assessment and its use to investigate the relationship between science achievement and attitude toward science in school. *Journal of Research in Science Teaching*, 25(8), 689–703.
- Gilbert, P. & Parlier, M. (1992). La compétence: Du «mot-valise» au concept opératoire. *Actualité de la Formation Permanente*, 116, 14–18.
- Glaesser J. (2019) Competence in educational theory and practice: a critical discussion, *Oxford Review of Education*, 45(1), 70–85.
- Glaser, B. & Strauss, A. (1967). *The discovery of grounded theory. Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.
- González, J. & Espínel, G. (1999). Is IQ achievement discrepancy relevant in the definition of arithmetic learning disabilities? *Learning Disabilities Quarterly*, 22, 292–299.
- Hannula, M. (2011). The structure and dynamics of affect in mathematical thinking and learning. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th conference of ERME* (pp. 34–60). Rzeszów, Poland. Internet version (novembre 2019): <http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/ERME/CERME7-Proceedings-2011.pdf>
- Hart, L. (1984). Affective variables and mathematics education. *The Elementary School Journal*, 84(5), 558–581.
- Hale, J., Alfonso, V., Berninger, V., Bracken, B., Christo, C., Clark, E., Cohen, M. et al. (2010). Critical Issues in Response-To-Intervention, Comprehensive Evaluation, and Specific Learning Disabilities Identification and Intervention: An Expert White Paper Consensus. *Learning Disability Quarterly*, 33, 223-236.
- Heyd-Metzuyanim, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics–teacher–student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educ Stud Math*, 83(3), 341–368.
- Heyd-Metzuyanim, E & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: on learning mathematics as an interplay of mathematizing and identifying. *Int J Educ Res*, 51–52, 128–145.
- Hittmair-Delazer, M., Sailer, U. & Benke, T. (1995). Impaired arithmetic facts but intact conceptual knowledge—A single case study of dyscalculia. *Cortex*, 31, 139–147.
- Hord, C.H. & Xin, Y.P. (2015). Teaching area and volume to students with mild intellectual disability. *The Journal of Special Education*, 49(2), 118–128.
- Jonsson, B., Norqvist, M., Liljekvist, Y. & Lithner, J. (2014). Learning mathematics through algorithmic and creative reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior*, 36, 20–32.
- Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A. & Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8, 57. DOI: 10.3389/fnhum.2014.00057

- Karagiannakis, G. & Baccaglini-Frank, A. (2014). The DeDiMa Battery: A Tool for Identifying Students' Mathematical Learning Profiles. *Health Psychology Review*, 2(4), DOI: 10.5114/hpr.2014.46329
- Karagiannakis G., Baccaglini-Frank A. & Roussos P. (2017). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian Journal of Learning Difficulties*, 21(2), 115–141.
- Kaufmann, L. & von Aster, M. (2012). The diagnosis and management of dyscalculia. *Dtsch Arztebl Int*, 109(45), 767–78.
- Kilpatrick, J. (1992). A history of research in Mathematics Education. In D. A. Grows (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3–38). New York, NY: Macmillan.
- Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: the contribution of research. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 101–116.
- Kilpatrick, J. (2009). The mathematics teacher and curriculum change. *PNA: Rev Investig Didact Mat* 3, 107–121.
- Kilpatrick, J. (2014). Competency Frameworks in Mathematics Education. In S. Lerman (ed), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 85–87). Springer Dordrecht, Heidelberg, New York, London.
- Kilpatrick J. (2014) History of Research in Mathematics Education. In: Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Dordrecht
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Kulm, G. (1980). Research on mathematics attitude. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston: NCTM.
- Landy, D. & Goldstone, R. L. (2010). Proximity and precedence in arithmetic. *Quarterly Journal of Experimental Psychology (Colchester)*, 63, 1953–1968.
- Leder, G. (1985). Measurement of attitude to mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 5 (3), 18–22.
- Lewis, K. E. & Fisher, M. B. (2016). Taking stock of 40 years of research on mathematical learning disability: Methodological issues and future directions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 47, 338–371.
- Lieblich, A., Tuval-Mashiach, R. & Zilber, T. (1998). *Narrative research. Reading, analysis, and interpretation*. London: SAGE Publications.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J. & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38(C), 201–221.
- Lucangeli, D., Tressoldi, P. E. & Fiore, C. (2003). *Test ABCA - Abilità di calcolo aritmetico*. Erickson.
- Ma, X., & Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: a meta-analysis, *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 65–88.
- Magenes, A. & Maracci, M. (2015) Le competenze nella soluzione di problemi di matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 38 A-B,6, 637–656.
- Maracci, M. & Martignone, F. (2016). Mathematical competences: struggling for a definition. In C. Csíkos, A. Rausch and J. Szitaányi (Eds.), *Proceedings of the XL Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. vol.3, 259-266. Szeged, Hungary: PME.
- Maracci, M. & Martignone, F. (2017). Promuovere lo sviluppo di conoscenze e competenze in matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 40 A-B,2, 113–133.
- Maffei, L. & Mariotti, M.A. (2012). Difficoltà in algebra: un intervento di recupero a livello metacognitivo. *Difficoltà in Matematica*, 8(2), 29–47.

- Mazzocco, M. M. (2005). Challenges in identifying target skills for math disability screening and intervention. *Journal of Learning Disabilities*, 38, 318–323.
- Mazzocco, M. M. & Myers, G. F. (2003). Complexities in identifying and defining mathematics learning disability in the primary school-age years. *Annals of Dyslexia*, 53, 218–253.
- Mazzocco, M. M. & Räsänen, P. (2013). Contributions of longitudinal studies to evolving definitions and knowledge of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 65–73.
- McClelland, D.C. (1973). Testing for Competence rather than for 'Intelligence'. *American Psychologist*, 28(1), 423–447.
- McCloskey, M., Caramazza, A. & Basili, A. (1985). Cognitive mechanisms in number processing and calculation: evidence from dyscalculia. *Brain and Cognition*, 4, 171–196.
- McCloskey, M. (1992). Cognitive mechanisms in numerical processing: evidence from acquired dyscalculia. *Cognition*, 44(1-2), 107–157.
- McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching* (pp. 575–596). New York: MacMillan.
- McLeod, D. & Adams, V. (Eds.). (1989). *Affect and mathematical problem solving: a new perspective*. New York: Springer.
- Meyer, M.L., Salimpoor, V.N., Wu, S.S., Geary, D.C. & Menon, V. (2010). Differential contribution of specific working memory components to mathematics achievement in 2nd and 3rd graders. *Learning and Individual Differences*, 20, 101–109.
- MIUR. (2018). *Gli alunni con Disturbi Specifici dell'Apprendimento (DSA) nell'a.s. 2016/2017*. Disponibile online:  
[https://www.miur.gov.it/documents/20182/991467/FOCUS\\_Alunni+con+DSA\\_a.s.+2016\\_2017\\_def.pdf/9af5872b-4404-4d56-8ac1-8ffdb61ef4?version=1.0](https://www.miur.gov.it/documents/20182/991467/FOCUS_Alunni+con+DSA_a.s.+2016_2017_def.pdf/9af5872b-4404-4d56-8ac1-8ffdb61ef4?version=1.0)
- Miragliotta, E., Baccaglioni-Frank, A. & Tomasi, L. (2017). Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica (prima parte). *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 40B(3), 339-360.
- Miragliotta, E. (in corso di stampa) *Geometric prediction: a model to analyze a cognitive process in geometrical problem-solving*. Tesi di dottorato. Università di Modena e Reggio Emilia.
- Müller, M. (2002). *Competentieontwikkeling in organisaties. Perspectieven en praktijk [Competence development in organizations: perspectives and practice]* ('s-Gravenhage, Elsevier Bedrijfs Informatie).
- Mulder, M. (2007). Competence – the essence and use of the concept in ICVT. *European journal of vocational training*, 40(1), 5–21.
- Mulder, M., Weigel, T. & Collins, K. (2007). The concept of competence in the development of vocational education and training in selected EU member states: a critical analysis. *Journal of Vocational Education and Training*, 59(1), 67–88.
- Mulder, M. (2017). Competence Theory and Research: a synthesis. In: Mulder, M. (Ed.), *Competence-Based Vocational and Professional Education. Bridging the Worlds of Work and Education*, (pp. 1071–1106). Cham, Switzerland: Springer.
- Mulligan, J. (2011). Towards understanding the origins of children's difficulties in mathematics learning. *Australian Journal of Learning Difficulties*, 16(1), 19–39.
- Mulligan, J. T. & Mitchelmore, M.C. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. In English, L. & Mulligan, J. (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 29–46). Dordrecht: Springer Science-Business Media.
- Neale, D. (1969). The role of attitudes in learning mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 16, 631–641.

- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (a cura di) *3° Mediterranean Conference on Mathematical Education, 3-5 January 2003* (pp. 115–124). Atene: Hellenic Mathematical Society.
- Niss, M. (2015). Mathematical Competencies and PISA. In: K. Stacey and R. Turner (eds), *Assessing Mathematical Literacy* (pp. 5–33). Springer.
- Niss, M. & Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning* (English edition). IMFUFA tekst, Roskilde University.
- Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102, 9-28
- Norqvist, M., Jonsson, Lithner, J., Qwillbard, T. & Holm, L. (2019). Investigating algorithmic and creative reasoning strategies by eye tracking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55, 100701.
- OCSE (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*  
[https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA%202012%20framework%20e-book\\_final.pdf](https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA%202012%20framework%20e-book_final.pdf)
- Pajares, F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: Cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307–332.
- Palm, T. (2002). *The realism of mathematical school tasks - Features and consequences*. Doctoral Thesis No 24. Umeå University: Umeå, Sweden.
- Palm, T. (2007). Features and impact of the authenticity of applied mathematical school tasks. In Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., Niss, M. (Eds), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. The 14th ICMI Study. New York: Springer.
- Passolunghi, M. C. & Siegel, L. S. (2004). Working memory and access to numerical information in children with disability in mathematics. *Journal of Experimental Child Psychology*, 88, 348–367.
- Pellerey, M. (2004). *Le competenze individuali e il Portfolio*. Firenze: La Nuova Italia.
- Pellerey, M. (2013). Le competenze strategiche: loro natura, sviluppo e valutazione (Seconda Parte). *Orientamenti pedagogici*, 60(2), 479–497.
- Perrenoud, P. (1996). *Enseigner, agir dans l'urgence décider dans l'incertitude*. Paris: ESF Editeur.
- Piazza, M. (2010). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. *Trends in Cognitive Sciences*, 14(12), 542–551.
- Piazza, M., Facoetti, A., Trussardi, A. N., Berteletti, I., Conte, S., Lucangeli, D., ... Zorzi, M. (2010). Developmental trajectory of number acuity reveals a severe impairment in developmental dyscalculia. *Cognition*, 116, 33–41.
- Poli, F. & Baccaglioni-Frank, A. (2014). Il progetto di potenziamento “Imparare la matematica nel biennio delle superiori”. *Difficoltà in Matematica*, 11(1), 31–51.
- Polo, M. & Zan, R. (2005). Teachers's use of the construct 'attitude'. Preliminary research findings. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the 4th conference of ERME* (pp. 265–274). Sant Feliu de Guíxols, Spain. Internet version (novembre 2019): [https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4\\_WG2.pdf](https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME4/CERME4_WG2.pdf)
- Price, G. R. & Ansari, D. (2013). Dyscalculia: Characteristics, Causes, and Treatments. *Numeracy*, 6(1). Article 2. DOI: <http://dx.doi.org/10.5038/1936-4660.6.1.2>
- Reigosa-Crespo, V., Valdés-Sosa, M., Butterworth, B., Estévez, N., Rodríguez, M., Santos, E., ... Lage, A. (2011). Basic numerical capacities and prevalence of developmental dyscalculia: The Havana Survey. *Developmental Psychology*, 48, 123–135.
- Ruffel, M., Mason, J. & Allen, B. (1998). Studying attitude to mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 1–18.

- Santi, G. & Baccaglini-Frank, A. (2015). Forms of generalization in students experiencing mathematical learning difficulties. (Guest Editor Luis Radford). *PNA*, 9(3), 217-243.
- Schoenfeld, A. (1983). Beyond the purely cognitive: belief systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. *Cognitive Science*, 7, 329-363.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press.
- Schoenfeld A. (1994) A discourse on methods, *Journal for research in mathematics education*, 25 (6), 697-710.
- Schoenfeld, A. (2007). What is mathematical proficiency and how can it be assessed? In A.H. Schoenfeld (Ed.), *Assessing mathematical proficiency* (pp. 9-73). Mathematical Sciences Research Institute Publications, Vol. 53. New York, NY: Cambridge University Press.
- Sfard, A. (2017). Metafore nel pensiero matematico e nella ricerca sul pensiero matematico: un ausilio o una trappola? *Archimede*, 2017(3), 135-143. Traduzione a cura di Anna Baccaglini-Frank.
- Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., et al. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691-697.
- Sierpinska, A., Kilpatrick, J., Balacheff, N., Howson, G., Sfard, A. & Steinbring, H. (1993). What is research in mathematics education, and what are its results? *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(2), 274-278.
- Signorini, G. (2017). Le convinzioni e le emozioni degli insegnanti sulle prove INVALSI di matematica: la ricerca qualitativa di profili attraverso un approccio grounded. Tesi di dottorato in Matematica, Università di Pisa.
- Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Stacey, K. & Turner, R. (Eds.) (2015). *Assessing Mathematical Literacy*. Springer.
- Stacey, K. & Turner, R. (2015). The Evolution and Key Concepts of the PISA Mathematics Frameworks. In: K. Stacey and R. Turner (eds) *Assessing Mathematical Literacy* (pp. 5-33). Springer.
- Star, S. & Griesemer, J. (1989). Ecology, 'Translations' and Boundary Objects: Amateurs and Professionals in Berkeley's Museum of Vertebrate Zoology, 1907-39. *Social Studies of Science*. 19 (3): 387-420.
- Szűcs, D. (2016). Subtypes and co-morbidity in mathematical learning disabilities: Multi-dimensional study of verbal and visual memory processes is key to understanding. *Progress in Brain Research*, 227, 277-304.
- Szűcs, D. & Goswami, U. (2013). Developmental dyscalculia: Fresh perspectives. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 33-37.
- Terraneo, F. & Avanzino, N. (2006). Le concept de compétence en regard de l'évolution du travail: définitions et perspectives. *Recherche en soins infirmiers*, 87, 16-24.
- Träff, U., Olsson, L., Östergren, R. & Skagerlund, K. (2017). Heterogeneity of Developmental Dyscalculia: Cases with Different Deficit Profiles. *Frontiers in Psychology* 7:2000. doi: 10.3389/fpsyg.2016.02000
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 133-169 (traduzione italiana: Vergnaud, G. (1992). Teoria dei campi concettuali. *La matematica e la sua didattica*, VI/1, 4-19).
- Verschaffel, L., Baccaglini-Frank, A., Mulligan, J., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Xin, Y.P. & Butterworth, B. (2018). Panel on special needs in research and instruction in whole number arithmetic. In Bartolini Bussi & Sun (Eds.), *Building the foundation: whole numbers in primary grades* (pp. 375-397). ICMI Study 23, Macau. Springer.

- Watson, S. M. R. & Gable, R. A. (2013). Unraveling the complex nature of mathematics learning disability: Implications for research and practice. *Learning Disability Quarterly*, 36, 178–187.
- Weinert, F.E. (2001) Concept of competence: a conceptual clarification. In: Rychen DS, Salganik LH (eds) *Defining and selecting key competencies*, (pp. 45–65.) Hogrefe & Huber, Seattle.
- Wittorski, R. (1998). De la fabrication des compétences. *Education permanente*, 135, 57-76.
- Zan, R. (1999). La qualità della ricerca, *I Escola de Verao de Educaçao Matemática*, Santarem, Portugal. ([http://spiem.pt/DOCS/ATAS\\_ENCONTROS/atas\\_EIEM\\_1999.pdf](http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_1999.pdf))
- Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer-Verlag Italia.
- Zan, R. & Di Martino, P. (2007). Attitude toward mathematics: overcoming the positive/negative dichotomy. *The Montana Mathematics Enthusiast*, Monograph, 3, 157–168.
- Zan, R. & Di Martino, P. (2014). Students' Attitude in Mathematics Education. In: Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.
- Zarifian, P. (1999). *Objectif compétence*. Paris: Editions Liaisons.