CORPO E MOVIMENTO IN MATEMATICA: INCONTRI, INTRECCI E SVILUPPI

Francesca Ferrara, Dipartimento di Matematica "G. Peano", Università di Torino
Elizabeth de Freitas, Education and Social Research Institute, Manchester Metropolitan University
Maria Flavia Mammana, Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Catania
Michela Maschietto, Dipartimento di Educazione e Scienze Umane, Università di Modena e Reggio Emilia

Sono i mondi che l'uomo inventa nella realtà della vita quotidiana, trasformandola secondo i propri desideri.
Sono i mondi che l'immaginazione plasma nei romanzi e nell'invenzione narrativa.
Sono anche i mondi cui possiamo accedere con le moderne tecniche di imaging,
e sono i mondi immaginari detti virtuali.
Alain Berthoz

1. Background teorico

Il seminario intende focalizzarsi sul ruolo peculiare di corpo e movimento nell'attività matematica, in particolare in seno ai processi di apprendimento e insegnamento della disciplina nel contesto classe.
Le dimensioni del corpo e del movimento hanno assunto particolare importanza e interesse nel- e per la ricerca in didattica della matematica da ormai due decenni, da quando cioè il lavoro di Lakoff e Núñez sulla mente *embodied* e sulla sua relazione con la matematica astratta (proveniente dalla linguistica cognitiva) è divenuto noto ai ricercatori del nostro campo (Lakoff & Núñez, 2000). Brevemente, in tale lavoro si metteva in luce come la nostra comprensione di concetti matematici astratti sia fondata su esperienze senso-motorie e sull'interazione con il mondo che ci circonda. La teoria di Lakoff e Núñez restituiva attenzione al corpo e, parzialmente, al movimento (dopo le antiche radici ritrovabili in Piaget e Vygotskij). Tuttavia, il focus dell'*embodied cognition* sul pensiero metaforico con i suoi *'schema'* finiva per ricadere in modo sottile in quella divisione mente/corpo che la ricerca in didattica proprio in quegli anni mirava a superare, secondo prospettive post-Vygotskijane (anche affetta dagli studi psicologici sul carattere non puramente epifenomenico della gestualità nel pensiero e sulla presunta unità cognitiva tra gesti e linguaggio). Il filone dell'*embodiment* richiamava anche la visione enattivista, precedentemente proposta da Varela e dai suoi collaboratori a partire dalla prospettiva fenomenologica di Merleau-Ponty, che metteva al centro della costruzione di conoscenza il coinvolgimento del corpo con l'ambiente e ciò che l'individuo esperisce (Varela *et al.*, 1991).
Da allora, numerose sono state le evoluzioni e le contaminazioni del paradigma, così chiamato, dell'*embodied mind* che vedeva i confini tra mente e corpo "porosi" (ad esempio, Seitz, 2000; Wilson, 2002). Queste hanno portato all'eterogeneo proliferare di studi sul campo come al suo esterno, ad esempio nell'ambito della psicologia sperimentale e in quelli neurofisiologico e delle neuroscienze.
Per quanto riguarda in particolare la ricerca in didattica della matematica, in un lavoro presentato in occasione di un *Research Forum* alla conferenza PME 27 nel 2003, Nemirovsky congetturava un legame indissolubile tra percezione, azione motoria e pensiero, sottolineando che le attività percettivo-motorie sono costitutive della comprensione in matematica e che "ciò che pensiamo emerge da e in queste stesse attività". Tale lavoro, assieme agli altri coinvolti nel *forum*, ha portato alla creazione di un volume speciale di *Educational Studies in Mathematics*, dedicato al ruolo dell'attività corporea nella

comprensione matematica (vol. 57, n. 3, 2004). Con questo, per la prima volta, si allegava una serie di *videopapers*, in cui l'utilizzo del video come strumento metodologico di analisi delle attività di classe si univa alla decodifica del discorso degli studenti. Il video era diventato il mezzo per catturare il corpo, allora in primis la gestualità, nel fare matematica. Questa direzione della ricerca didattica si è approfondita in seguito, anche grazie ai risultati neuroscientifici legati all'esistenza di neuroni specchio e di altri neuroni bi- e multi-modali (Gallese & Lakoff, 2005; ma si veda anche Rizzolatti *et al.*, 1997), e ha portato alle considerazioni più recenti sul carattere sensorio (*sensuous*) o multimodale della conoscenza in matematica e all'emergere di nuove prospettive sulla, e a partire dalla, matematica *embodied* (Arzarello, 2006; Nemirovsky & Ferrara, 2009; Radford *et al*., 2009; Radford, 2013; Streeck, 2013; Edwards *et al.*, 2014; Ferrara, 2014; de Freitas & Sinclair, 2014; Roth, 2016).
Senza entrare troppo in tali questioni che ci farebbero perdere di vista il nostro scopo qui, vogliamo evidenziare che le attività percettivo-motorie sono state studiate sia da un punto di vista cognitivo sia da un punto di vista fondazionale, in particolare a proposito dei fondamenti cognitivi della matematica. Proprio negli stessi anni in cui incontravamo le idee della teoria dell'*embodied cognition*, usciva anche la traduzione italiana del libro *Le sens du mouvement* del francese A. Berthoz, fisiologo della percezione e dall'azione, che attribuiva al movimento il carattere peculiare di un "senso dei sensi". Berthoz lo chiama cinestesia. Propriocezione e cinestesia (brevemente, la percezione della configurazione del proprio corpo e la percezione del movimento del proprio corpo e dei suoi stati) sono elementi essenziali di ciò che noi indichiamo generalmente con percezione (si noti che già la visione fenomenologica di Husserl assegnava caratteristiche cinestetiche alla coscienza). In un recente lavoro, Sheets-Johnstone (2012) sottolinea che "non solo la nostra percezione del mondo è in ogni dove e sempre animata, ma il nostro movimento è in ogni dove e sempre aggiornato per via cinestetica". Il termine *animation* è, per Sheets-Johnstone, migliore del termine *embodiment* per riferirsi alle dinamiche cinestetiche e affettive attraverso cui si strutturano i significati.
È inoltre interessante come Berthoz richiami Poincaré e il modo in cui trattava i fondamenti della geometria, in particolare nel volume "La scienza e l'ipotesi", mettendo in luce come rivalutasse il ruolo del corpo e dell'azione nell'origine della geometria, nella costituzione del senso dello spazio, nella concezione di ciò che è punto e distanza. Si tratta di questioni delicate ma particolarmente indicative, che ritornano più volte anche nelle analisi fondazionali di G. Longo, matematico italiano che lavora a Parigi, il quale, nella sua critica al logicismo, sottolinea la tensione tra la formalizzazione della matematica amputata del suo rapporto allo spazio e quello che vede come uno degli "elementi costitutivi del senso", quel "muoversi nel pensiero come muoversi nello spazio" (Longo, 2002; cfr. anche Longo, 2005). Il pensiero di Poincaré è in qualche modo simile a quello espresso in anni recenti dal matematico e filosofo della matematica francese G. Châtelet (1993/2000)—che troviamo citato sia in Berthoz sia in Longo.
Rispetto al lavoro di Châtelet, ci interessa particolarmente la prospettiva sull'attività diagrammatica e sul suo inseparabile intreccio con la gestualità, poiché ci offre la possibilità di espandere la visione di come corpo e movimento possano essere coinvolti e teorizzati nell'attività matematica e di estendere il pensarli *solo* come corpo umano e movimento del corpo. Nello specifico, Châtelet propone la nozione sottile di *virtuale* per riferirsi a quella "indeterminatezza che sta alla base di tutte le azioni", possiamo dire a quella sfera 'intensiva' dell'attività matematica, o potenziale, immaginativa, che costituisce il carattere mobile, dinamico, della disciplina. L'immaginazione era già stata proposta come inseparabile dal percettivo-motorio in matematica (Nemirovsky & Ferrara, 2009), parte "viscerale" di una *sensuous cognition* (Radford, 2013), e il ruolo della sfera immaginativa era importante anche nel lavoro di Husserl sulla coscienza. Châtelet afferma che in matematica si dà molto spazio alla realizzazione del possibile (l'accordo delle nostre azioni con vincoli logici), ma si finisce

per dimenticare l'attualizzazione del virtuale e il ruolo *pivot* che i diagrammi giocano nell'ontogenesi matematica (le sue asserzioni sono basate sullo studio del pensiero diagrammatico attraverso cui nello sviluppo storico della matematica sono state generate nuove idee). I diagrammi sono per lui sostenitori di pensiero implicito, intuitivo e persino irrazionale catturato nella materia sensibile, ri-assemblano l'immaginario e il reale, il virtuale e l'attuale, sono il punto di incontro tra pensiero e segno. In sostanza, la natura mobile, la virtualità, di un diagramma consiste di tutti i gesti e le future alterazioni in esso contenuti in qualche modo. Riprendendo Châtelet, B. Rotman critica la visione della matematica che si è formata sin dagli inizi del XX secolo con la sistemazione bourbakista, basata essenzialmente sul linguaggio degli insiemi astratti e sulla netta scomparsa dei diagrammi. L'osservazione nella classe di matematica rivela invece che "l'impulso a gesticolare e a costruire diagrammi è sempre presente nell'apprendere e nel risolvere problemi" (Rotman, 2012). Rotman offre il linguaggio delle categorie come esempio di una logica dinamica che mediante schemi di frecce permette di comprendere e praticare la matematica in termini di pensiero diagrammatico. In contrasto alla fissità degli insiemi e della relazione di appartenenza, infatti, "le frecce e la composizione connotano movimento e trasformazione", restituendo una dimensione corporea ai concetti matematici.

2. Prospettive e luci

Alla luce del background appena delineato, il nostro interesse cade proprio sulla sfera potenziale (fatta di motilità) che possiamo restituire alla matematica e all'attività matematica. Focalizzeremo dunque l'attenzione non solo sul ruolo del corpo e della percezione, bensì sulla possibilità di catturare estesamente l'idea di movimento da diverse prospettive, in modo da tracciare aspetti della temporalità e della spazialità in termini di una tensione produttiva tra movimento e forma, e di una relazione dialogica tra movimento e struttura. Il nostro intento non è quello di trovare posto a una classificazione del corpo (ad esempio, della gestualità) e/o del movimento, ma di comprendere più in profondità il carattere intensivo e generativo dei processi di pensiero e di scoperta in matematica, in un contesto di insegnamento e apprendimento della disciplina. La ricerca che presentiamo, in quest'ottica non va nella direzione di applicare tecniche ma di (di)svelare intuizioni (e interpretazioni) sullo stretto intreccio di corpo e movimento nello sviluppo di conoscenza matematica.
A tale scopo, presentiamo di seguito alcune linee di pensiero che ci hanno fornito spunti da prospettive diverse (tutte già citate sopra e, comunque, di stampo fenomenologico, neuro-scientifico, epistemologico, filosofico), ma per noi complementari e, in parte, mutuamente sovrapponentesi, nell'aiutarci a inquadrare questo nostro lavoro. L'ordine con cui tali linee sono presentate non è perciò necessario per la lettura, ma è imposto dalla sequenzialità cui ci costringe la comunicazione scritta.

2.1 Sheets-Johnstone e il primato del movimento

Sheets-Johnstone pone alcune questioni profonde sull'utilizzo del termine *embodiment* e, nello specifico, sull'idea di movimento. I lavori cui ci riferiamo sono il volume *The primacy of movement* (Sheets-Johnstone, 2011, Expanded 2nd ed.) e i tre articoli più recenti intitolati: *Animation: an essential, fundamental, and properly descriptive concept* del 2009, *Body and movement: basic dynamic principles* del 2010 (un capitolo di libro) e infine *Movement and mirror neurons: a challenging and choice conversation* del 2012.
Embodiment e movimento sono per Sheets-Johnstone fortemente connessi: *l'embodiment* sta al corpo come ciò che si indica con "*enaction*" sta al movimento. Il termine *enaction* fa

capolino con la teoria enattivista di Varela e colleghi e va inteso come il modo in cui un soggetto nell'atto della percezione attiva delle azioni a soddisfare le richieste della situazione. Nel capitolo del 2010, Sheets-Johnstone sottolinea che entrambi i primi termini dell'analogia (*embodiment* ed *enaction*) sono poco congeniali alla realtà di fondo che mirano a catturare e a descrivere, e associa questa mancanza di congenialità alla mancanza, o alla misera presenza, di attenzione al corpo affettivo, tattile e cinestetico:

> *either no entry exists for the tactile-kinesthetic/affective body and kinesthesia or paltry entries exist. In effect, the foundational ontological and epistemological reality of life is missing: animation is nowhere on the map.* (Sheets-Johnstone, 2010, p. 217; il sottolineato è enfatizzato nell'originale).

Tale mancanza è amplificata inoltre dai termini in cui è discussa la propriocezione negli studi sul corpo e dal fatto che spesso non sia definita, in modo sostanziale, differenza alcuna tra *propriocezione* e *cinestesia*.

> *Given the inherent qualitative spatio-temporal-energic character of kinesthesia, it is hardly surprising that discussions of body and of movement that omit kinesthesia from their register omit the very stuff of life and the qualitative nature of that stuff. They omit animation.*
> *Understandings of body and movement that are grounded in the natural history of animate life begin with proprioception, with the beginning dynamics of life itself in surface recognition sensitivity, and thereby proceed naturally to understandings that encompass kinesthesia, affectivity, cognition, and the world, including a world of others.* (*ibid*., p. 218)

La nozione di "animazione", nel senso di vitalità o dinamismo in italiano, è la chiave di lettura che Sheets-Johnstone propone nel considerare il movimento:

> *Movement is in other words at the heart not only of being alive but of staying alive. In an existential as well as evolutionary sense, survival is a matter of effective movement, which means movement that is affectively and cognitively responsive to an ever-changing world that is not the same from 1 day to the next and that demands attentiveness in precisely the way an ant, a spider, a fly, or a human is attentive, not only to the expected and familiar, but to the unexpected or the unfamiliar* (*ibid*.).

Nel lavoro del 2012, Sheets-Johnstone critica la comprensione comune del movimento e il modo abituale di concepirlo che, secondo lei, falliscono nel riconoscere, e tanto meno catturano, le dinamiche del fenomeno e anzi insistono su misconcetti sul vero e proprio fondamento della vita animata. Lo stesso termine *embodiment* e i suoi derivati sono per lei capricciosi e deviano l'attenzione dalla vera natura animata della vita.
Nel lavoro del 2009, Sheets-Johnstone propone che non soltanto la nostra percezione del mondo è dovunque e sempre animata, ma il nostro movimento è dovunque e sempre informato per via cinestetica. Propriocezione e cinestesia sono centrali al movimento e pivot per la nostra comprensione della cognizione. La propriocezione è stata originariamente definita come un "senso di locomozione" ed è evoluta nell'idea di "senso muscolare" e delle configurazioni che possono essere assunte dal proprio corpo (un senso del movimento e della posizione). Propriamente parlando, è una questione di ogni sorta di organi corporei che percepiscono il movimento e le deformazioni, una forma primordiale di consapevolezza animata, ed è per definizione una proprietà relazionale. Parte meno estesa della propriocezione è la cinestesia, in cui la prima evolve mediante lo sforzo muscolare esercitato

dagli organi interni che percepiscono il movimento. La cinestesia è la modalità sensoria fondamentale che riguarda l'abilità del corpo umano di sentire il proprio movimento e i propri stati e quindi contribuisce, secondo Streeck (2013), al senso di essere fonte dell'azione e dunque all'essere "aware that it is *I* that is acting or feeling" (p. 69; enfasi nell'originale). Persino il sistema dei neuroni specchio sembra "contingent on our own kinesthetically experienced human capacities and possibilities of movement" (Sheets-Johnstone, 2012, p. 391). Per Sheets-Johnstone, è attraverso la cinestesia che noi sperimentiamo (sentiamo) in modo spontaneo dinamiche qualitative direttamente distintive del movimento. Vale a dire che tutto il movimento crea spazi, tempi e forze che lo contraddistinguono e, quando prestiamo attenzione alle nostre dinamiche coordinate, siamo in grado di riconoscere "kinesthetic melodies" (*ibid.*, p. 390; enfasi nell'originale). L'idea di "*thinking in movement*", sviluppata nello specifico nel capitolo 12 del volume del 2011, è legata a quanto detto:

> *To think is first of all to be caught up in a dynamic flow; thinking is itself, by its very nature, kinetic. It moves forward, backward, digressively, quickly, slowly, narrowly, suddenly, hesitantly, blindly, confusedly, penetratingly. What is distinctive about thinking in movement is not that the flow of thought is kinetic, but that the thought itself is. It is motional through and through; at once spatial, temporal, dynamic.* (Sheets-Johnstone, 2011, p. 421)

L'espressione "thinking in movement" si riferisce, da un lato, al pensare *per mezzo del* movimento e, dall'altro, ai pensieri che sono trascritti (riprodotti) *nel* movimento. In breve, il movimento è visto come l'armonizzazione essenziale dinamica e affettiva del corpo con il mondo. Attingendo alla prospettiva fenomenologica di Sheets-Johnstone (che recupera numerosi aspetti dalla fenomenologia husserliana e merleau-pontyiana, fondendoli con prospettive più recenti di stampo psicologico e cognitivo), possiamo in sostanza dare spiegazione della capacità di un corpo di essere toccato (nel senso di "affect") da, o di toccarne, un altro e della natura reattiva ("responsive") dei corpi, di come si respingano o propendano gli uni verso gli altri e, nel contempo, di come si uniscano ad altri corpi in movimenti coordinati (che tendono a coinvolgere la dimensione affettiva; un tentativo di studiare questa componente affettiva è dato in de Freitas *et al.*, 2017). Volendo riassumere, possiamo dire che ci possiamo muovere in concerto o in disarmonia con gli altri, possiamo unirci alle cose o separarci da esse, assemblarci o meno in più grandi e manifeste risposte coordinate tra corpi.
Alla luce di quanto esposto, la prospettiva di Sheets-Johnstone risulta intrigante per studiare il modo in cui l'idea di movimento e di movimento coordinato possa aiutare a caratterizzare i processi di pensiero e di apprendimento nel contesto di nostro interesse (quello fenomenologico della classe di matematica) e a svelare come nuovi significati matematici possano emergere da configurazioni relazionali, complesse e contingenti, di parti in movimento.

2.2 Berthoz e il senso del movimento

Del lavoro di Berthoz vogliamo discutere l'importanza che attribuisce all'azione e, ancor di più, al "senso del movimento". Ci limitiamo in questo caso a due riferimenti essenziali, sebbene, laddove lo ritenessimo utile, faremo cenno a sviluppi recenti. I due testi in questione sono *Physiologie de la percetion et de l'action* (2010), capitolo nell'annuario del Collège de France del 1997-1998, e il volume *Il senso del movimento* (1998), versione italiana del testo originale francese del 1997. È interessante osservare che lo stesso autore afferma che il volume è un'apologia del corpo, che studia in particolare il senso del movimento in una

prospettiva neuro-scientifica basata su risultati della fisiologia. Dal fatto che i sensi non sono dei recettori passivi, Berthoz mette in luce che oltre ai cinque sensi noti è possibile identificarne molti altri, nei muscoli, nelle articolazioni, nel sistema vestibolare dell'orecchio. Una caratteristica del funzionamento cerebrale, inoltre, sembra essere quella di non trattare le informazioni dei recettori sensoriali indipendentemente le une dalle altre. Questo quadro non fornisce una perfetta corrispondenza con una visione multimodale della conoscenza, oggi diffusa anche nel nostro campo di ricerca. L'idea della multimodalità si basa sull'esistenza di neuroni che assolvono più funzioni in una volta, tra cui i neuroni specchio. Tuttavia, ogni volta che un'azione viene intrapresa o un movimento programmato, i recettori sensoriali legati al movimento e allo spazio si affidano anche alla loro caratteristica anticipatoria di previsione di stati futuri, adattabile alle esigenze del movimento. Ai cinque sensi, "bisogna in effetti aggiungere il senso del movimento o "cinestesia". La sua particolarità sta nel fatto che esso si serve di vari tipi di recettori" (Berthoz, 1998, p. 17). Il nostro autore considera questo senso come il "più importante per la sopravvivenza", ma dice anche che "non è identificato dalla coscienza" e "i suoi recettori non sono evidenti" (*ibid*., p. 18).
Non entriamo nei dettagli più tecnici della trattazione (che passa dal senso del tatto a quello dello sforzo per poi sottolineare che i recettori vestibolari sono sensibili alle variazioni di movimento sino alla derivata terza), ma citiamo che Berthoz richiama Poincaré nel momento in cui sviluppa il suo discorso sul senso del movimento, poiché Poincaré reinseriva il ruolo del corpo e dell'azione nelle origini della geometria (cfr. Berthoz, 1997-1998, pp. 422-424, dove il discorso su Poincaré è più esteso). Per Poincaré, la nozione di spazio non è in alcun modo pre-esistente, anzi si lega proprio al movimento. Noi *non* ci *rappresentiamo* i corpi esteriori nello spazio geometrico, ma ragioniamo su questi corpi *come se* fossero localizzati nello spazio geometrico. Nel domandarsi che cosa intendiamo nel dire che localizziamo un dato oggetto in un dato punto nello spazio, Poincaré rispondeva:

> *"Localizzare un oggetto vuol dire semplicemente rappresentarsi i movimenti che bisognerebbe fare per raggiungerlo. Mi spiego: non si tratta di rappresentarsi i movimenti stessi nello spazio, ma soltanto di rappresentarsi le sensazioni muscolari che accompagnano questi movimenti e che non presuppongono la preesistenza della nozione di spazio".* (Poincaré citato in Berthoz, 1998, p. 29)

È qui che Berthoz si chiede come allora sia potuta nascere l'idea dello spazio geometrico e che egli collega alla risposta di Poincaré l'importanza dei recettori sensoriali. Infatti, per Poincaré, in seguito a un semplice cambiamento di posizione è possibile riposizionare il proprio corpo, mediante il movimento, in modo da ripristinare l'oggetto nella sua situazione originaria (è tipico ad esempio di quando percepiamo che una figura è stata ruotata di 90 gradi: tendiamo a ruotare la testa per vederla dalla prospettiva iniziale, in assenza di movimento). Poincaré aggiunge, afferma Berthoz:

> *"un essere immobile non avrebbe mai potuto acquisire la nozione di spazio perché, non potendo correggere con i suoi movimenti gli effetti dei cambiamenti di posizione degli oggetti esterni, non avrebbe avuto alcuna ragione di distinguerli dai cambiamenti di stato".* (*ibid*.)

Insomma, la conclusione di Berthoz è che il tatto e la vista, da soli, non potrebbero darci il senso dello spazio senza il "senso muscolare". Il punto diventa, secondo questa visione, "la suite des mouvements qu'il convient de faire pour l'atteindre à partir d'une position initiale du corps" (Berthoz, 1997-1998, p. 422), una condizione di possibilità *à la* Longo basata sulla cinestesia, la quale è 'primaria' anche per Sheets-Johnstone (cfr. § 2.1). La geometria è fondata

quindi su gesti orientati verso scopi, un pensiero che si avvicina a quello espresso da Châtelet (cfr. § 2.4), citato proprio in questo contesto.
Altri due aspetti per noi piuttosto interessanti dell'analisi di Berthoz concernono: il fatto che la percezione delle forme geometriche, invece di essere come si pensa sovente, "une propriété statique de traitement d'images, est profondément liée à la perception et au contrôle du mouvement", è "une *décision perceptive* et pas seulement un traitment passif" (*ibid*., p. 432; enfasi nell'originale); e il fatto che il movimento sia utilizzato anche per ricostruire la forma tridimensionale. Questi sono aspetti che ci possono invitare a pensare al movimento come fonte di possibilità di apprendimento, ad esempio in situazioni legate alla percezione di forme del piano e dello spazio.
Non ci dilungheremo ulteriormente qui sugli innumerevoli aspetti affrontati da Berthoz, ci limitiamo a fare alcune riflessioni che egli affronta nel capitolo 6 del volume, dedicato al "movimento naturale". In questo capitolo, il nostro autore sostiene che i problemi che il cervello deve risolvere sono essenzialmente problemi di meccanica e che gli scultori ci insegnano che il movimento si esprime innanzitutto attraverso la postura, un movimento fermato o abbozzato, inoltre

> *che la cinematica del movimento è portatrice di significati e che la traiettoria di un dito, lo spostamento della testa, l'equilibrio del corpo devono rispondere a delle leggi che sono al confine tra la meccanica e la neurologia. Ci dicono infine che un movimento naturale è fonte di piacere.* (Berthoz, 1998, p. 125)

E poiché il piacere è elemento essenziale della percezione e della conoscenza, per Berthoz, è rilevante che abbia origine anche nel movimento. Se avessimo la possibilità di ampliare qui il discorso, sarebbe interessante approfondire la dimensione delle emozioni che un movimento può suscitare o esprimere (visto anche il legame tra movimento ed emozioni proposto da Sheets-Johnstone, che noi, tuttavia, non abbiamo esplicitato).

2.3 Longo e l'idea di possibilità

Longo offre nei suoi studi una riflessione di stampo epistemologico e filosofico sulla matematica e sui suoi fondamenti, partendo dalla matematica greca fino agli sviluppi contemporanei. Prendiamo principalmente in considerazione la sua posizione in alcuni lavori recenti, pur in continuità con il pensiero già espresso in passato, che permetteranno di introdurre l'idea di possibilità che per lui sta alla base della costruzione matematica. Si tratta dei tre testi: *L'infinito matematico in "prospettiva" e l'ombra dei possibili* (Longo, 2014), rivisitazione italiana del testo originale in francese *Le formalisme en action: aspects mathématiques et philosophiques* del 2012; *Conceptual analyses from a Grothendieckian Perspective. Reflections on Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics* di Zalamea; Longo, 2015) e *Le conseguenze della filosofia* (Longo, 2016). Nella recente riflessione sul volume di Zalamea, Longo mette in luce come il dibattito sui fondamenti della matematica sia sovente rimasto intrappolato tra ontologie platoniste e formalismi senza senso (con alcune eccezioni da Euclide a Gödel) per cercare di liberare significato dall'esterno del mondo, vale a dire, dall'esterno della difficile analisi della costruzione concettuale, che è invece reale portatrice di significato. Il dibattito non ha, secondo Longo, posto una sufficiente attenzione *propriamente filosofica* a programmi e risultati della matematica contemporanea (persino nel campo della logica, dalla teoria dei Tipi all'incompletezza dell'aritmetica, e così via). In lavori precedenti, Longo già evidenziava l'importanza (epistemologica) di analizzare "come" accediamo alla conoscenza matematica o del "processo di conoscenza", oltre al formalismo, anticipando questo interesse filosofico:

> *the one century long identification of these deep notions with "formal" excluded meaning and epistemology from the foundational analysis. We have to broaden the foundational project to the "constitutive path" of mathematical abstract structures, beginning by their meaningful grounding in (and their organizing) phenomenal space and time.* (Longo, 2001, pp. 6-7; il sottolineato è enfatizzato nell'originale)

Senza addentrarci troppo nello spessore della trattazione in riferimento all'analisi di Zalamea, vogliamo dunque esplicitare che quello di Longo è un tentativo di suggerire, come egli stesso indica, una "epistemology of new interfaces" (Longo, 2015, p. 209). Longo afferma che la matematica è, *in primis*, l'analisi delle invarianti e delle trasformazioni che le conservano (il che include l'analisi delle non-conservazioni, delle deformazioni e delle rotture di simmetria). Con ciò, non vuole fornire un inquadramento esaustivo della costruzione matematica ma piuttosto la proposta di un diverso punto di vista, in opposizione per esempio a quello analitico della teoria degli insiemi. Un tale approccio assegna un ruolo centrale alla nozione di categoria (cruciale anche nel lavoro, ad esempio, di Grothendieck, in Zalamea considerato il punto più alto e rivoluzionario raggiunto dalla matematica dopo la seconda guerra mondiale):

> *This is not a Newtonian universe anymore, a unique and absolute framework, the Universe of Sets, with an absolute origin of time and space (the empty set). It is rather the realm of plurality of Categories and of an analysis of transformations, functors, and natural transformations that allow their correlation (preserving what is interesting to preserve). Among them, the Category of Sets is surely one of the most interesting, but just one of many. We are presented with an open universe of categories, then, to which new categories are constantly added; new invariants, and new transformations. Concepts are created by being correlating with existent ones, and by deforming one into the other, thus enriching them, paying attention to the meaning (the mathematical meaning, at least) of what is being done.* (*ibid*., pp. 213-214).

Ecco che ritroviamo il muoversi nel pensiero citato nel nostro background: "the synthetic movement of thought which lies at the heart of the construction of mathematical knowledge, rich in concrete and historical friction with the world" (*ibid*., p. 251). Proprio alla luce della natura 'dinamica', aperta, instabile, dell'edificio della matematica del XX secolo, Longo sostiene che sia necessario aggiungere all'analisi della dimostrazione, preoccupazione dominante dei progetti fondazionali nella matematica contemporanea, il nodo concettuale dell'analisi della costituzione dei concetti e delle strutture. Se la visione categorica prova a farci apprezzare il senso strutturale della costruzione matematica, tuttavia il richiamo al lavoro illuminante di Châtelet sull'intreccio tra mondo fisico e matematico (cfr. § 2.4) riporta l'attenzione indietro:

> *to the "gesture" constitutive of mathematical objectivity, which lies "on the border of the virtual and the actual", in a tight interrelation between the construction of objects and objectivity in physics and the analysis of the organizational structures of the world, starting with symmetries. Châtelet's book, it should be emphasized, is also an history; rather, it is a historico- rational reconstruction of the rich entanglement between physics and mathematics running through the 1800s up to, and stopping short of, the advent of Set Theory. Regarding some related aspects of contemporary mathematics, Patras 2001 (a book that Zalamea cursorily mentions), has retrieved the point of view of "structural mathematics" with a philosophical competence rare to find in a mathematician. Patras exhibits the weaving together of structures and transformations that governs*

> *mathematical construction from the inside, from the point of view of mathematical practice and invention.* (*ibid*., p. 216)

In generale, afferma Longo, l'origine del significato in matematica va trovata nei modi in cui essa permette di organizzare e strutturare il mondo. Solo allora si distacca dal mondo nell'autonomia dei gesti costitutivi, tra virtuale e attuale, dove, alla massima distanza dalla costituzione originale di significato, si ottengono risultati rilevanti dall'intersezione di costruzioni di origini diverse (dalla classica geometria algebrica alla geometria differenziale, per esempio) e la continuità strutturale diviene anche continuità concettuale, "a navigation between concepts as a "sophisticated technical transits over a continuous conceptual ground"" (*ibid*., p. 217). In breve,

> *the study of structures, of their continuous enchaînements and deformations, is an essential component of foundational analysis. (...) The origin of mathematics and its principle of construction are located in that which is meaningful, in thought operations that structure and organize the world, but which then go to intersect on planes far removed from the world and acquire by these conceptual interactions a proper mathematical sense.* (*ibid*., p. 217)

La matematica è tutta una costruzione al limite, una "scienza al limite", "non è esclusivamente l'invenzione della prova, ma *anche* una pratica di strutture lontane dal mondo sensibile, che producono senso e si radicano nel senso l'una con l'altra, co-costruendosi" (Longo, 2016, p. 19; nostra enfasi). È scritta in linguaggio naturale, è un linguaggio e uno sguardo sul mondo, *al* e *dal* limite del mondo. Noi vediamo solo prospettive, punti di vista su frammenti del mondo, organizziamo e rendiamo accessibili solo suoi piccoli angoli, sostiene Longo. È importante dunque abbandonare l'ambizione di pensare a una "matematica assoluta", una matematica "a riposo", nello stile di Russell e di procedere invece verso una "matematica relativa", una matematica *in movimento* (come nello stile di Grothendieck). Qui si coglie profondamente anche il carattere fisico-matematico di dimostrazioni e teorie contemporanee e l'unità e affermata tra matematica e fisica, guidate entrambe da un principio di intelligibilità del mondo fisico, per cui si può ipotizzare "a continuity between the phenomenal, the ontic and the epistemic... From an epistemological point of view, the distinct perspectives are nothing other than breaks in continuity" (Zalamea, pp. 304-305; citato in Longo, 2015, pp. 241-242). Tuttavia, nulla (dimostrazioni matematica e teorie fisiche, concetti e strutture) è "already there", nemmeno nel senso platonico più debole. Dal punto di vista epistemologico e di un'analisi critica della costruzione di conoscenza e di scienza, Longo non è interessato a un'ontologia della trascendenza degli oggetti matematici, ma alla loro "costituzione trascendente", vale a dire alla loro costituzione attraverso la pratica della vita e della conoscenza interna alla matematica, spesso localizzata nell'interfaccia con altre forme di conoscenza (ad esempio, con la fisica, e di recente con la biologia). La riduzione si applica raramente nello sviluppo della scienza, il quale è piuttosto stato segnato dall'unificazione di *nuove* teorie:

> *Science is not the progressive occupation of the real by known tools, in a sort of fear of the novelty, but the difficult construction of new theoretical frames, objects and structures for thought, conceptual bridges or even enlightening dualities, such the specificity of the biological vs. the genericity of the inert* (*ibid*., p. 261).

Discutendo l'incompletezza del formalismo, specifica attenzione all'impegno filosofico delle ipotesi che hanno permesso passaggi fondamentali della costruzione di conoscenza in matematica e fisica è data negli altri due lavori. In particolare, nel lavoro sulle 'conseguenze della filosofia' (Longo, 2016), il focus è posto sulla definizione delle strutture. Il primo esempio calzante è quello all'origine della geometria tutta, in Euclide, della definizione di linea come una lunghezza senza spessore, che per Longo è una "decisione filosofica" e ci riporta a quanto già accennato sulla matematica come scienza del limite: solo una linea con un qualche, seppur minimo, spessore si potrebbe derivare dai sensi, poiché anche "le linee più sottili tracciate dagli artigiani od i fili di una ragnatela hanno tutti uno spessore" (richiamando Sant'Agostino; *ibid*., p. 17). Tralasciando assolutizzazioni, ecco che Longo ricostruisce il gesto alla base dell'invenzione della linea:

> *un bordo che ritaglia le figure della geometria greca, che sono fatte di sole linee, limite allo spessore 0 del tratto con cui i nostri antenati, nelle grotte di Lascaux, 20.000 anni fa, hanno mostrato ad altri uomini, nel linguaggio, dei bisonti appena tracciati, resi solo con linee. Bisonti fatti di soli bordi, inesistenti, ed in cui solo un altro uomo sa vedere un animale; visione del movimento o del gesto che disegna un contorno, che è una traccia, una traiettoria, origine del continuo sensibile.* (*ibid*., pp. 17-18)

La linea così pensata (un movimento, un tracciato) e il punto (un segno, la cui definizione di "senza parti" arriva più tardi) sono oggetti limite, lontani dall'esperienza sensibile, ma che esistono solo nella loro relazione allo spazio rinviando all'esperienza, poiché "organizzano, ritagliano e misurano il mondo", "concettualizzano "visioni" che si stabilizzano nell'interazione umana":

> *Una siffatta nozione di linea può essere solo detta e scritta, nel linguaggio, ed è il risultato di una filosofia delle idee, ma il suo senso, la sua continuità, è in una* <u>*pratica*</u> *del gesto, del disegno: per capirla, bisogna riattivarne il senso, riandare alla linea tracciata sulla lavagna dal primo maestro, al suo gesto-traiettoria nello spazio.* (*ibid*., p. 18; enfasi nell'originale)

Longo fa notare che il punto per Euclide è "una lettera dell'alfabeto, agli estremi di un segmento" (per la definizione di segmento), "una posizione su una linea" o "all'intersezione di due linee" senza spessore (per il teorema sul triangolo equilatero, per cui dato un segmento e tracciati gli archi di cerchio con centro negli estremi del segmento si ottiene un nuovo punto, il quale dà il triangolo). La sua definizione di "senza parti" è, dunque, derivabile. Inoltre, "basta un segno per dare un punto ed un solo punto è completamente determinato da un segno" (*ibid*., p. 19). La dimostrazione del teorema sul triangolo equilatero a sua volta definisce la continuità di una linea, che è sempre

> *un tracciare, un flusso: una linea senza spessore è continua è continua quando, intersecandone un'altra, produce un punto (ed in buone condizioni, uno solo); ovvero quando si può identificare tale intersezione con un segno.* (*ibid*.)

Ci sembra intrigante l'insistenza di Longo qui nell'osservare che la linea non è perciò necessariamente fatta di punti, come sarà per Cantor, poiché questi sono agli estremi di segmenti o posizioni su una linea e dunque sono "posti dal geometra o prodotti da linee" (*ibid*.). Ancora, che la nozione di linea diventi così fondamentale è suggerito dal fatto che le figure della geometria greca sono costruite mediante intersezione di linee continue e date dai soli bordi (come il triangolo che deriva dal suddetto teorema): "solo allora ha senso calcolare superfici: quale è la superficie di una figura con un bordo di un qualche spessore?" (metafora assai calzante per farci intuire la profondità filosofica della trattazione; *ibid*.). Da qui nasce l'ulteriore sorpresa dell'irrazionalità della lunghezza della diagonale del quadrato dato dai soli bordi e, in modo analogo, del rapporto "che non si finisce mai di calcolare" fra la circonferenza senza spessore di un cerchio e il suo raggio. Del resto, Longo evidenzia ancora una volta come l'invenzione della matematica sia anche

> *una pratica di strutture lontane dal mondo sensibile, che producono senso e si radicano nel senso l'una con l'altra, co-costruendosi, come i punti prodotti dall'intersezione di linee, come i segni che percorrono ed individuano luoghi su rette o delimitano segmenti.* (*ibid*.)

L'introduzione della moneta è un secondo esempio avanzato da Longo (2016):

> *stabilisce nuove reti di significati, partecipa di una nuova filosofia del vivere insieme, dello scambio fra gli uomini. Distacca il valore dagli oggetti, lo pone fuori di essi, li raccoglie in classi di ugual valore, tutti scambiabili, tutti equivalenti e garantiti da una scrittura coniata, nuovi oggetti del pensiero, che modificano la vita e l'interazione umana.* (p. 20)

Altro orizzonte interessante si trova nella proposta fisica del principio di inerzia (essenziale per studiare la conservazione della quantità di moto), che Galileo avanza con la medesima audacia di Euclide nel caso della retta. Il movimento inerziale perfetto non esiste. Eppure Galileo, con un principio asintotico, introduce questo movimento uniforme di un punto materiale su una retta euclidea, "limite esterno di tutti i movimenti" seppur fisicamente privo di senso:

> *proprio mettendosi all'orizzonte di tutti i movimenti, Galileo li rende intellegibili tutti, di un colpo solo, proponendo quel che li accomuna tutti. E così può studiare quel che <u>modifica</u> tale stato limite: la gravitazione, le frizioni, nelle esperienze, pensate o fatte, con i gravi o sul piano inclinato.* (*ibid*.)

Quello di Galileo, nota Longo, è un principio di tipo matematico, anche se non ancora scritto in linguaggio matematico, sorretto dall'incontro tra infinito e finito. Ecco di nuovo l'unitarietà di cui si parlava più sopra. La matematica e la fisica agiscono nello stesso modo: "con principi limite, all'infinito, rendono intelligibili forme geometriche e movimento di corpi materiali, al finito (Longo, 2016, p. 21). In un continuo movimento tra finito e infinito, dalla linea senza spessore di Euclide si è più tardi passati, attraverso la discussione teologica sull'infinito attuale, alla prospettiva nella pittura (ben analizzata in Longo, 2014), che segnava nuovi punti di vista e una nuova organizzazione dello spazio, contribuendo alla successiva costruzione dello spazio della scienza (euclideo con Descartes, proiettivo con Desargues), fino ad arrivare ai principi fisico-matematici di Galileo e al calcolo infinitesimale con Newton e Leibniz, con i quali limiti infiniti torneranno a parlare di quantità finite. E così via, passando da Poincaré e Hilbert fino alla matematica contemporanea dei Topos di Grothendieck, (attra)verso spazi di possibilità (di eventi e traiettorie possibili per successive concettualizzazioni) o "uno spazio infinito *dei possibili*, uno spazio e un tempo di tutti i fenomeni e di tutte le dinamiche possibili" (Longo, 2014, p. 156; nostra enfasi). E sono le simmetrie (gli invarianti matematici) che "consentono di definire geometricamente e formalmente" gli "spazi matematici infiniti di tutti i possibili" (*ibid*., p. 159). È proprio in queste e analoghe condizioni di possibilità che ci sembra di capire che Longo voglia fondare il discorso su una costruzione della conoscenza scientifica che apprezzi non tanto l'oggetto matematico in sé ("already there", come dicevamo sopra) quanto piuttosto il processo di costruzione, anche nell'interazione con le altre scienze (come la biologia, interesse più recente di Longo):

> *le scienze matematiche e il pensiero non sono "già presenti" prima del nostro agire nel mondo; sono piuttosto, e per fortuna, dei co-costituiti delle nostre attività cangianti e sempre più ricche in questo stesso mondo. Sempre più ricche se non viene impedito il pensiero critico e, con esso, il correlarsi della scienza con la filosofia*. (*ibid*., p. 165)

Non possiamo dunque dire che la linea senza spessore esista (dove?), forse possiamo dire che è "possibile", o meglio potenziale, volendo adottare un linguaggio non deterministico. Gli oggetti al limite che Longo discute, come i punti, le rette, il movimento inerziale, ci sembrano implicare l'immaginazione di orizzonti *à la* Châtelet (cfr. § 2.4 e 2.5), specificando nel linguaggio virtualità attualizzate *nel e dal* movimento e nutrendosi della natura imprevedibile e creativa del gesto del tracciare, che è già diagramma e già flusso di pensiero, generatore di *nuovi* significati. Ci interessa qui il potenziale legame tra questa "novità" e quegli spazi di possibilità introdotti da Longo, pensando sempre al contesto di nostro interesse, che è la classe di matematica. Quegli spazi (nella ricostruzione storica, spazi di senso) sono anche legati a condizioni di possibilità cognitive e biologiche. Ad esempio, nel caso della linea senza spessore, viene messo in luce come analisi della corteccia cerebrale visiva, essenziale all'azione, rivelino l'attivazione di processi che sembrano costruire e fissare bordi, contorni, agli oggetti. Questi processi non danno certo le nozioni di linea o di bordo e non esauriscono la fenomenalità del continuo, ma vengono a costituirsi come ulteriori "condizioni di possibilità" nella nostra organizzazione del mondo e, dunque, nella costruzione di conoscenza, proprio come, crediamo, il senso del movimento studiato da Berthoz (cfr. § 2.2).

2.4 Châtelet e l'incanto del virtuale

Châtelet offre una prospettiva di ampio respiro sul pensiero matematico e sulla sua relazione con il mondo fisico. Facciamo qui riferimento essenzialmente al volume *Figuring Space: Philosophy, Mathematics and Physics*, traduzione inglese della sua opera più famosa *Les Enjeux du Mobile: Mathématique, Physique, Philosophie* (Châtelet, 1993/2000), e il vecchio scritto *L'enchantement du virtuel* (Châtelet, 1987), nel quale il contenuto del capitolo 2 del volume è in parte anticipato.
Nell'introdurre il volume, Knoespel afferma che il lavoro di Châtelet rappresenta un momento significativo nel riesame della pratica della matematica. Quella di Châtelet non è, infatti, una semplice descrizione storica del pensiero matematico, ma una rivisitazione (e riattivazione) di problemi esterni alla matematica e delle loro risposte come siti di sviluppo della disciplina, in particolare per quanto riguarda *i modi* in cui la matematica ha esplorato e organizzato lo spazio geometrico, contribuendo alla formazione concettuale e cognitiva dello spazio. Per Châtelet, la visione della matematica, intesa come pratica, appare distorta dal pensarla 'pinzata' alla natura e uguagliata alla logica e la nostra relazione con essa è stata spiegata solo a metà. Per avviare una comprensione dell'intuizione, dell'invenzione e della scoperta in matematica è invece necessario essere consci che lo spazio della matematica è stato mediato non solo attraverso teoremi ma anche, e forse in modo più prominente, mediante diagrammi. Scrive Knoespel:

> *For Châtelet our own interaction with the figures that we draw constitutes a place of invention and discovery that cannot be explained away by the theorems that appear to lock-down a particular mathematical procedure.* (Châtelet, 1993/2000, p. xi)

È la continuità dei problemi ("dynasties of problems") che interessa Châtelet, non sono i cambiamenti di paradigma, non è il punto di vista filosofico né la storia devota ai teoremi. Il progetto di Châtelet enfatizza piuttosto l'importanza di prendere in considerazione le

tecnologie manuali che sono state utilizzate per rappresentare e formulare lo spazio ("marking, drawing, sketching, scribbling"; *ibid*., p. xi). Dalla riga al compasso agli angoli retti a sistemi di coordinate e così via, queste tecnologie sono state date talmente per scontato da oscurare il modo in cui hanno controllato le nostre interazioni spaziali e, con esso, l'autonomia dei diagrammi come complici naturali degli esperimenti di pensiero.
Ci sono per Châtelet due diversi ritmi che sorreggono la storia delle idee: quello discontinuo e intermittente delle rotture, dei paradigmi e delle loro contestazioni, e quello più silenzioso delle problematiche rimaste latenti ma sempre passibili di riattivazione e, come lui stesso afferma, "full of treasures for those who can reawaken them" (*ibid*., pp. 69-70).
Ciò che Châtelet si figura è una genealogia dei diagrammi, la quale permetta di catturare il modo in cui la matematica ha funzionato attraverso la scrittura, una indagine dunque dei diagrammi come tópoi matematici e del modo in cui stimolano a pensare e non meramente a ricordare, funzionando come "prosthetic devices that become vehicles of intuition and thought" (p. xiii). In breve, Châtelet dimostra come la natura sperimentale della matematica possa essere recuperata dai diagrammi registrati nella storia della matematica e della fisica. Tuttavia, egli non ci invita tanto a pensare ai diagrammi di per sé, come registro di un processo meccanico, bensì al registro che essi forniscono per domandarci come scopriamo lo spazio geometrico e come tale spazio a sua volta diventi uno spazio per pensare, un mezzo per la scoperta e l'esplorazione matematiche (elaborando la visione di Deleuze sulla capacità della materia di diventare un agente attivo nella creazione della forma).

> *It is here that Châtelet's project involves not simply diagrams but diagrammatics as the study of diagrams within our evolving cognitive histories.* (*ibid*., p. xxi)

Tale progetto ha diverse radici: dall'epistemologia neo-Kantiana di Cassirer, agli sforzi della fenomenologia di descrivere operazioni matematiche, ad esempio con Husserl, Heidegger e Derrida, alla semiotica pragmatica di Pierce.
Rotman (2015) mette in luce che l'opera di Châtelet tiene traccia della creazione dello spazio matematico-geometrico mediante la triplice prospettiva della matematica, della fisica e della filosofia, nella forma, da un lato, del concetto di spazio elastico e flessibile di Leibniz e, dall'altro, dell'ontologia del virtuale di Deleuze. Attraverso i suoi esempi, Châtelet rende accessibile il significato operativo, l'origine *embodied* e il potenziale intellettuale (che chiama la *virtualità*) di concetti fondamentali quali "punto", "spazio", "dimensione", "curva" e "linea". È proprio la nozione di *virtuale* che Châtelet propone a interessarci maggiormente come chiave di lettura di un nuovo approccio al pensiero matematico. Questa nozione è il *leitmotiv* cui è dedicato il primo capitolo, nel quale Châtelet contrasta la concezione aristotelica della materia che contrappone "les *êtres mathématiques* qui sont dans l'éternité et qui n'ont pas d'existence par eux-mêmes" e "les *êtres physiques* qui, eux, ont une existence séparée, mais ne sont pas éternels" (Châtelet, 1987, p. 1; enfasi nell'originale). Nella metafisica di Aristotele, la natura matematica, immobile e necessaria, a quella fisica, dedicata alla mobilità e soggetta a cause ultime sono agli estremi opposti. Quello che Châtelet chiama "enchantement du virtuel" è una formula provocatoria con cui si propone di svelare come la virtualità consenta di intervenire nella costruzione di concetti "fisico-matematici". Gli esseri matematici, prodotti mediante astrazione, appaiono soprattutto come esseri fisici impoveriti, spogliati di materia e mobilità, poiché l'operazione di astrazione è anche sempre una "mutilazione", che non può essere ridotta a una sottrazione inoffensiva di determinazioni, neutralizzabile come e quando si vuole. L'idea di virtualità o potenzialità della natura era presente nella visione aristotelica come già legata al movimento: "The fulfilment of what is potentially, is motion" (Châtelet, 1993/2000, p. 19). Ma la concezione di Châtelet è molto più sottile: il movimento non è semplicemente il processo di attualizzazione di una forma potenziale che appartiene a una

transizione di stati verso una forma più alta. Per lui, tutto il movimento è prima di tutto un germe di movimento.

> *But neither is motion the passive waiting of a form. Motion is a way of knitting act and power together and, if potential is not reduced to the receiving of accidents, a thought of the matastable becomes possible: the melting of ice is not of ice that 'can' melt, but of ice that is 'really' in the process of melting; water is of course 'potential' in ice, but above all it actualizes itself there. Potential is what, in motion, allows the knotting together of an 'already' and a 'non yet'; it gives some reserve to the act, it is what ensures that act does not exhaust motion and, in giving some scope to the grasping of the motion, it respects and extols the latencies coiled in the bodies. That is why perfect motion must be understood as na indefinitely suspended actualization, dissipating no power and requiring no displacement (no 'local motion')* (*ibid*., p. 19).

Possiamo qui comprendere come il movimento non sia inteso come movimento nel senso fisico (cambiamento di posizione) e ritrovare la distinzione cara a Châtelet tra reale e possibile e attuale e virtuale, di cui abbiamo accennato nel background teorico. Il pensiero del potenziale non è dunque una sottrazione, un passaggio di mobilità da ciò che muove ("the motor") verso ciò che è mosso ("the moved"):

> *The motor and the moved are not two inert beings opposite one another, transmitting a quality; the moved is not the only one to change: the motor possesses the form, but can only at in the presence of the moved. The moved is awakened to mobility; there is a whole preparation of the moving body to the superior form* (*ibid*., p. 19; il sottolineato è enfatizzato nell'originale).

Era proprio la dinamica di una tale concezione di virtualità che, secondo Châtelet, ha mosso Leibniz a pensare alla materia in vita (animata, potremmo dire). Mentre i cartesiani, infatti, percepivano la geometria come un insieme di entità astratte e immobili, figure, cose fissate come i punti nello spazio, Leibniz ha introdotto una visione differente. Leibniz considerava lo spazio come un ambiente dinamico in cui i punti sono intersezioni di rette (intravedendo il dualismo proiettivo) e devono essere pensati, anche matematicamente, come creatori di "*possibilità*". Châtelet preferisce il termine virtuale. I punti cominceranno a pesare se possono essere catturati correttamente, non come "figure geometriche" ma come "*puissances d'explosion*" (Châtelet, 1987, p. 3). I punti non sono tali perché sono un modo di designare, un modo di indicare una cosa, sono invece virtualità che racchiudono la dinamicità del movimento e la possibilità di essere generati in modi diversi e come tali vanno intesi:

> *comme des puissances de movement, des puissances d'explosion. Les points sont des puissances d'explosion de droites, des intersections de droites, et d'un point de vue moderne dans la géométrie algébrique, ces points-là sont des intersections de courbes.* (*ibid*., p. 4; Figura 1).

Figura 1. Punti come "puissances du movement" in Leibniz

Châtelet chiama in causa anche il lavoro di Abel sulle relazioni tra integrali presi su una stessa curva per sottolineare come egli abbia utilizzato questo genere di idee sulla virtualità. Per Abel la curva non è fissa, ma è una potenza ("puissance") pronta a ricevere intersezioni, è una possibilità di passaggio di un fascio di curve.
Un altro esempio fornito è quello del triangolo infinitesimo di Leibniz, che non va pensato come una figura rigida dello spazio che può spostarsi di una quantità infinitamente piccola. Non è corretto descrivere il triangolo affermando semplicemente che vi è un piccolo incremento, senza tenere in considerazione il ruolo giocato dalla virtualità: di fatto un triangolo che si muove infinitamente poco non è possibile, non è certamente reale, eppure per Leibniz non è fisso ma "bougeant «un peu»" (un po' in movimento). Questo è l'errore classico che si fa anche nell'insegnamento, in cui prevalgono le categorie dell'attualizzazione, del reale e del possibile sul virtuale. Il triangolo di lati infinitesimi non è una figura immobile, al contrario esiste solo in termini di movimento, in virtù della famiglia di triangoli virtuali che si possono percepire attorno a esso.
In altre parole, il virtuale (o potenziale) concerne l'indeterminatezza che sta alla base di tutte le azioni, *élan vital* della materia in cui è insito, e in ciò differisce dal possibile, il quale riguarda invece la conformità delle nostre azioni con vincoli logici, regole inferenziali e consuetudini percettive. Per tale ragione, novità, genesi e creatività sono concetti fondamentali in una teoria dell'attualizzazione, oltre sforzi riduzionistici o determinazioni sottrattive tipici dell'astrazione (si veda anche Sinclair *et al.*, 2013; Ferrara & Ferrari, 2017).
A questa analisi (che non si esaurisce con i pochi esempi suddetti) va aggiunta l'importanza che Châtelet attribuisce all'idea di *orizzonte* e alla dimensione virtuale dei diagrammi nella loro interrelazione con la gestualità. Per lui, i gesti o i diagrammi che catturano la materia sono importanti non perché sono indice di comprensione ma perché diventano momenti per un'intuizione dei modi in cui possa essere alterato l'orizzonte, che non va pensato nel senso di una barriera o di un confine. La metafora utilizzata da Knoespel per precisare questa idea è calzante: ciò che interessa Châtelet non è la potenzialità della pietra che precede la scultura ma la potenzialità dello *spazio che circonda* la pietra e la scultura. L'orizzonte è quindi parte della virtualità dei diagrammi, che per la loro natura dinamica non sono mai completi e i cui tratti, pur con il loro potere evocativo, non sono rappresentativi di contenuti già noti, bensì orientati verso l'evoluzione della conoscenza e allusivi di nuove dimensioni spazio-temporali.
Qui compare anche la relazione intima tra gesti e diagrammi: la virtualità di un diagramma consiste di tutti i gesti e le future alterazioni che sono in qualche modo "contenuti" in esso.

> *They* [*diagrams*] *capture gestures mid-flight; for those capable of attention, they are the moments where being is glimpsed smiling. Diagrams are in a degree the accomplices of poetic metaphor. But they are a little less impertinent — it is always possible to seek solace in the mundane plotting of their thick lines — and more faithful: they can prolong themselves into an operation which keeps them from becoming worn out. Like the metaphor, they leap out in order to create spaces and reduce gaps: they blossom with dotted lines in order to engulf images that were previously figured in thick lines. But unlike the metaphor, the diagram is never exhausted: if it immobilizes a gesture in order to set down an operation, it does so by sketching a gesture that then cuts out another.* (Châtelet, 1993/2000, p. 10)

L'interesse di Châtelet nei gesti è molto diverso da quello ad esempio di McNeill (2005) o di un qualunque tentativo classificatorio e proposizionale di descrivere i gesti. Châtelet vuole focalizzarsi sulle implicazioni dei gesti sui diagrammi e considera la gestualità come un intermediario tra il corpo, nuovi movimenti del corpo, e i diagrammi, mantenendo una distanza rispettosa da forme di catalogazione. Ciò si lega all'insistenza sul carattere allusivo, evocativo e persino nascosto del gesto che e, d'altra parte, è il diagramma non il gesto a essere sopravvissuto. De Freitas e Sinclair (2012), nel ripensare la relazione tra gesti e diagrammi, notano:

> *Châtelet is concerned with gesture as a kind of interference or intervention that has driven mathematics and the sciences forward, not as a semiotic divorced from the event, but as a dynamic process of excavation that conjures the sensible in sensible matter.* (p. 138)

È questo processo dinamico di escavazione che si apre al problematico (ancor prima che all'assiomatico) degli eventi nella pratica matematica, come anche Rotman (2015) sottolinea:

> *Virtuality concerns what is actualizable in an event, its potential, all the futures it could/might give rise to. Unlike the possible, which refers to determinations that are fixed but lack the conditions to realize them, the virtual is inseparable from tensions, problems, and open questions. And, since for Châtelet mathematical creation is primarily the business of finding determinate solutions to problems, virtuality is the source for the novel abstractions solutions demand.* (p. 5)

Del resto, Châtelet stesso affermava:

> *Confrondre les mathématiques avec de simples chaînes déductives et ignorer le caractère crucial du sens de la "bonne conjecture" — de ce que nous avons appelé le <u>diagnostic du mathématicien</u> — nous semble une conception aussi mutilante que celle qui prétendrait réduire la Physique à un simple exercise de Calcul Différentiel.* (Châtelet, 1997, p. 14; il sottolineato è enfatizzato nell'originale)

2.5 Virtuale e immaginazione

La concezione di virtuale di Châtelet appare potente in gran parte perché egli l'ha sviluppata specificatamente a proposito della matematica, dove le questioni del concreto e dell'astratto sono tanto scivolose. Va anche detto, e questo è intrigante, che la nozione di virtuale è stata discussa inoltre in studi sui media. Per esempio, Burbules (2006) propone di ripensare al virtuale come a ciò che crea un *senso di immersione*, coinvolgendo una estensione o una elaborazione di ciò che è presente nell'esperienza. Il virtuale non è dunque, per Burbules, necessariamente legato a una tecnologia e neppure a qualcosa di sostitutivo della realtà, una visione questa che inibisce una conoscenza profonda della virtualità (tipica nel caso della prospettiva della realtà virtuale):

> *<u>Yet the key feature of the virtual is not the particular technology that produces the sense of immersion, but the sense of immersion itself (whatever might bring it about), which gives the virtual its phenomenological quality of an "as if" experience</u>.* (*ibid*., p. 37; il sottolineato è enfatizzato nell'originale)

L'esperienza del "come se" e il suo carattere immersivo fanno del virtuale à la Burbules un concetto che non assume una separazione troppo netta tra virtuale e reale, per la quale il primo significa altrimenti sintetico o illusorio mentre il secondo si riferisce a un dato di fatto non problematico. L'autore discute la questione con un richiamo alla fenomenologia heideggeriana (per cui ad esempio un fiume è una fonte potenziale di potenza elettrica, un albero è un tavolo potenziale, e così via, e in cui la visione del nostro rapporto con la tecnologia è troppo deterministica) e sostiene che, nel contesto della cultura digitale, la biforcazione tra sintetico e reale ha oscurato una vera comprensione di ciò che cambia nei modi in cui esploriamo i nostri mondi. Il virtuale è per Burbules un concetto *mediale*, né reale né immaginario, o meglio reale *e* immaginario:

> *The virtual should not be understood as a simulated reality exposed to us, which we passively observe, but a context where our own active response and involvement are part of what gives the experience its veracity and meaningfulness.* (*ibid*., p. 38; il sottolineato è enfatizzato nell'originale)

Sebbene il costrutto di virtuale di Burbules abbia lo svantaggio di imporre stati psicologici sull'individuo e quindi di perdere di vista la complessa interazione materiale coinvolta nell'esperienza, è interessante che tra i tratti distintivi del senso di immersione, dell'esperienza del "come se", vi sia l'immaginazione. Un'esperienza, per l'autore, coinvolge la nostra immaginazione se è possibile introdurre o estrapolare nuovi dettagli. Vi è un senso che il virtuale abbia a che fare con ciò che è potenzialmente, non realmente, presente:

> *Actively going beyond the given is part of what engages us deeply in it.* (*ibid*., p. 41)

L'immaginazione così definita può essere anche pensata come un tipo di interattività che ha a che vedere con la natura potenzialmente problematica di una qualsiasi esperienza (lo stesso carattere problematico già messo in evidenza dalla trattazione di Châtelet). Il discorso di Burbules si apre quindi al considerare le caratteristiche del virtuale come risorse educative essenziali per coinvolgere e motivare un apprendimento attivo degli studenti. Ecco che il virtuale diviene "a very concrete way of rethinking the nature of learning spaces—spaces where creativity, problem-solving, communication, collaboration, experimentation, and inquiry can happen" (*ibid*., p. 43).
Burbules è molto attento (ancora una volta dialogando con la prospettiva che è propria degli ambienti di realtà virtuale) a precisare che, basando la nozione di virtuale sul carattere immersivo dell'esperienza, i nostri corpi e un senso embodied del movimento non scompaiono ma sono parte di ciò che crea lo stesso senso di immersione. Chiedendosi se ci stiamo "davvero muovendo", Burbules afferma che la questione della virtualità ci induce a vedere questo interrogativo da un nuovo punto di vista, quindi risponde che l'esperienza implica una trasformazione dello spazio e del tempo e che ci stiamo "proprio muovendo nello spazio e nel tempo virtuali".

> *The experience of movement is one of the primary dimensions underlying the sense of immersion which, I have suggested, defines the "virtual".* (*ibid*., p. 45)

L'immersione è dunque, manifestamente, di per sé una metafora corporea. Questa intima connessione tra virtuale e corporeo è legata qui anche al crescente interesse nella interazione aptica ("haptics"), vale a dire nell'utilizzo del tatto e delle sensazioni tattili per comunicare o riconoscere oggetti. Questo collegamento potrebbe ulteriormente essere approfondito in virtù di studi che negli ultimi anni sono sorti nel campo della ricerca didattica e che esaminano le interazioni tattili come parte della natura multimodale dell'attività matematica. È infine importante spostare il focus dell'attenzione sulla distinzione operata da Burbules tra "space" and "place" per portare alla luce come spazi di apprendimento possano trasformarsi in luoghi ("learning places" piuttosto che "delivery systems") interessanti e familiari, 'abitati' dagli studenti, di cui il virtuale costituisce un tratto definitorio: "a place (as opposed to a space) always entails to some extent, the quality of the virtual" (*ibid*., p. 53). In alcuni studi di questi anni, la prospettiva di Burbules ha permesso di studiare incontri virtuali in matematica nei

quali i confini tra attuale (reale o possibile) e virtuale sono in continuo movimento (cfr., ad esempio, Sinclair *et al*., 2013; Ferrara & Ferrari, 2016).
L'analisi offerta da Châtelet e le implicazioni discusse da Burbules ci invitano insomma a pensare alla virtualità del fare matematica, apparendo molto utili al nostro discorso: da un lato, ci permettono di legare il carattere virtuale che possiamo attribuire alla matematica a un'idea di movimento di cui il movimento del corpo, in particolare il gestuale (ma anche il movimento degli occhi), e il parlato sono attualizzazioni (de Freitas & Ferrara, 2015) e, nel contempo, di introdurre nel discorso il ruolo profondo che può essere rivestito dall'immaginazione nei momenti di scoperta e di costruzione del nuovo (nuove idee, nuovi significati, nuova conoscenza), chiamando in causa in qualche modo il mondo infinito dei possibili di Longo aperto proprio alla novità.

3. Linee di discussione tra incontri e sviluppi

Sulla base del background teorico, delle linee di pensiero discusse fino a qui ed eventuali loro sviluppi, il seminario si propone di approfondire la discussione focalizzando particolare attenzione sugli aspetti dell'attività matematica nei quali crediamo possibile catturare l'intreccio tra le dimensioni del corpo e del movimento: i diagrammi, i processi immaginativi e l'utilizzo delle tecnologie. Dei diagrammi abbiamo parlato in riferimento soprattutto al lavoro di Châtelet (e accennato con Rotman), l'immaginario è coinvolto sia nel discorso onto-epistemologico sul virtuale, sia negli studi cognitivi già citati sulla natura della comprensione in matematica. Inoltre, il virtuale è in larga parte attualizzato attraverso azioni materiali dallo studente che costantemente re-iscrive se stesso nell'attività (e nella) matematica, diventando parte del processo immaginativo. Il ruolo delle tecnologie, digitali e non, che permettono di esplorare relazioni matematiche restituendo le dimensioni della temporalità e del corpo all'attività, assume importanza in questo discorso.
Gli aspetti appena delineati si possono ritrovare in nuce in alcuni nostri studi, come quelli discussi al gruppo di lavoro sul *Geometrical Thinking* di CERME 8, ad Antalya (Ferrara & Mammana, 2013; Ferrara & Maschietto, 2013a; de Freitas & Mccarthy, 2013) e in lavori successivi (Ferrara & Maschietto, 2013b; Ferrara & Mammana, 2014; de Freitas & Ferrara, 2015; de Freitas & Ferrara, 2016). Chiudiamo dunque la trattazione, per ora, richiamando proprio il contenuto di questi studi.
In Ferrara e Mammana (2013, 2014), ad esempio, proponevamo uno studio della visualizzazione nel passaggio piano-spazio e viceversa, investigando che cosa e come gli studenti vedevano o visualizzavano oltre al visibile, in, con e attraverso configurazioni geometriche di punti e segmenti che potevano essere 'guardate' come figure nel piano oppure nello spazio secondo cambiamenti di prospettiva. L'utilizzo di un software di geometria dinamica permetteva di agire in termini temporali e spaziali sulle configurazioni e di operare il passaggio piano-spazio mediante trasformazioni di oggetti geometrici (movimenti fisici). L'interesse era sui processi che tali trasformazioni potevano stimolare in termini di un cambio di prospettiva, movimento che presuppone uno slittamento di attenzione. In particolare, sulla possibilità di vedere in una configurazione, che poteva apparire la stessa di partenza, una nuova figura (oppure di vedere due figure distinte in una sola configurazione) e, quindi, di comprendere le proprietà che potevano rimanere invarianti nella trasformazione, vale a dire rispetto al cambio di prospettiva o nel passaggio dal piano allo spazio e dallo spazio al piano. Lo stesso studio era stato in questo caso applicato a una classe terza di scuola secondaria di secondo grado e a un gruppo di studenti universitari magistrali che frequentavano il corso di Didattica della Matematica (la ricerca fa capo a studi fondazionali nell'ambito delle geometrie finite che, prima di un'eventuale trasposizione didattica nella classe, prendevano in esame,

per dirla à la Châtelet, la virtualità di una configurazione di 4 punti e dei 6 segmenti che li uniscono a coppie, sia essa nel piano o nello spazio; cfr., ad esempio, Mammana *et al.*, 2012).
In Ferrara e Maschietto (2013a e b), il movimento indagato era soprattutto immaginativo, accanto a quello fisico veicolato dal coinvolgimento di possibili azioni con una macchina matematica per disegnare coniche specifiche. Agli studenti di un corso universitario di Didattica della Matematica era richiesto, dopo aver incontrato e sperimentato una macchina per disegnare un'ellisse e una parabola, di immaginare di dover costruire una macchina per disegnare un'iperbole e di spiegare come sarebbe stata fatta. Il nostro interesse cadeva dunque sul passaggio dall'esperienza fisica con la macchina materiale a quella solo immaginativa in cui è necessario comprendere non solo che cosa la macchina può fare, ma anche come fa e perché. L'utilizzo di perni su una base di legno e di un filo, opportunamente forniti a gruppi di studenti, stimolava la creazione di diagrammi, da un lato legati alle azioni con la macchina (movimenti fisici) e, dall'altro lato, soggetti a vincoli strutturali per il tipo di conica considerata (movimenti questi, che dovevano attualizzare le relazioni matematiche da soddisfare ma anche l'invarianza di tali relazioni nel movimento).
In de Freitas & Ferrara (2015, 2016), abbiamo proposto di teorizzare la gestualità e il movimento del corpo come attualizzazione di un più raffinato e invisibile *movimento del pensiero*, adottando una prospettiva filosofica che riflette sulla natura dell'apprendimento. In questo studio, la tecnologia non è presente e i soggetti, bambini del terzo anno della scuola primaria, lavorano nel gruppo classe con una sequenza di figure tridimensionali fatte di cubi di piccole dimensioni (chiamate edifici di cubetti), posta sul pavimento, liberi di muoversi attorno a essa mentre cercano di coglierne la struttura soggiacente (che cosa le diverse figure hanno in comune, che cosa cambia, come sarebbe fatta la figura successiva, ecc.). L'attività è parte di una ricerca più ampia che vuole studiare i processi di generalizzazione come base per il pensiero algebrico precoce e per lo sviluppo del pensiero funzionale (cfr., ad esempio, Ferrara & Ng, 2015; Ferrara & Sinclair, 2016).

Durante il seminario presenteremo esempi provenienti da classi di ordine diverso, nel tentativo di sviluppare il discorso sull'intreccio tra corpo e movimento nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica e su quanto in esso si racchiuda gran parte dell'essenza del carattere dinamico ma anche creativo che si può attribuire alla disciplina e, di conseguenza, ai processi di pensiero in matematica. A tale scopo, analizzeremo i vari episodi ciascuno prestando attenzione specifica ad almeno uno degli aspetti detti sopra.
Concluderemo con alcune riflessioni sulle implicazioni delle nostre argomentazioni per la pratica didattica ed eventualmente per la ricerca.

Riferimenti bibliografici

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Numero Especial*, 267–299.
Berthoz, A. (1997/1998). *Le sens du mouvement.* Paris: Odile Jacob. (Trad. It. di E. Dal Pra e A. Rodighiero: *Il senso del movimento*. Milano: McGraw-Hill).
Berthoz, A. (1997/1998). Le Cerveau et l'espace: II — Fondements cognitifs de la géométrie et expérience de l'espace. *Résumés annuels*, pp. 421–487.
Burbules, N.C. (2006). Rethinking the virtual. In J. Weiss *et al*. (Eds.), *The International handbook of virtual learning environments* (pp. 37–58). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
Châtelet, G. (1993/2000). *Les enjeux du mobile*. Paris: Seuil. (Engl. Transl. by R. Shore & M. Zagha: *Figuring Space: Philosophy, Mathematics, and Physics*. Dordrecht: Kluwer).
Châtelet, G. (1997). De la victoire de Platon et d'un certain techno- populisme hostile aux mathématiques. *Gazette des Mathématiciens, 74*, 13–17.

Châtelet, G. (1987). L'enchantement du virtuel. *Revue Chimères, 2*, 1- 20.
de Freitas, E. & Ferrara, F. (2015). Movement, memory and mathematics: Henri Bergson and the ontology of learning. *Studies in Philosophy and Education, 34*(6), 565–585. doi: 10.1007/s11217-014-9455-y
de Freitas, E. & Ferrara, F. (2016). Matter, movement and memory. In N. Snaza, D. Sonu, S.E. Truman & Z. Zaliwska (Eds.), *Pedagogical matters: New materialisms and curriculum studies*, 43–57. New York: Peter Lang.
de Freitas, E. & Mccarthy, M.J. (2013). (Dis)orientation and spatial sense: Topological thinking in the middle grades. In Ubuz, B., Haser, Ç. & Mariotti, M.A. (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 615–624. Ankara, Turkey: Middle East Technical University.
de Freitas, E. & Sinclair, N. (2012). Diagram, gesture, agency: theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 80*(1-2), 133–152. doi: 10.1007/s10649-011-9364-8
de Freitas, E. & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom*. Cambridge: Cambridge University Press.
de Freitas, E., Ferrara, F. & Ferrari, G. (2017). The coordinated movement of a learning assemblage: Secondary school students exploring Wiigraphing technology. In E. Faggiano, F. Ferrara & A. Montone (Eds.), *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education* (pp. 59–75). Basel, Switzerland: Springer International Publishing AG.
Edwards, L., Ferrara, F. & Moore-Russo, D. (Eds.) (2014). *Emerging Perspectives on Gesture and Embodiment in Mathematics*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
Ferrara, F. (2014). How multimodality works in mathematical activity: Young children graphing motion. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(4), 917–939. doi: 10.1007/s10763-013-9438-4
Ferrara, F. & Ferrari, G. (2016). Traversing mathematical places. In C. Csíkos, A. Rausch & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 251-258. Szedeg, Hungary: PME.
Ferrara, F. & Ferrari, G. (2017). Agency and assemblage in pattern generalisation: A materialist approach to learning. *Educational Studies in Mathematics, 94*(1), 21-36. doi: 10.1007/s10649-016-9708-5
Ferrara, F. & Mammana, M.F. (2013). Close your eyes and see… An approach to spatial geometry. In Ubuz, B., Haser, Ç. & Mariotti, M.A. (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 625–634. Ankara, Turkey: Middle East Technical University.
Ferrara, F. & Maschietto, M. (2013a). Are mathematics students thinking as Kepler? Conics and mathematical machines. In Ubuz, B., Haser, Ç. & Mariotti, M.A. (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 635–644. Ankara, Turkey: Middle East Technical University.
Ferrara, F. & Maschietto, M. (2013b). University students at work with mathematical machines to trace conics. In Lindmeier, A.M. & Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 305–312. Kiel, Germany: PME.
Ferrara, F. & Mammana, M.F. (2014). Seeing in space is difficult: An approach to 3D geometry through a DGE. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S. & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, 3*, 57–64. Vancouver, Canada: PME.

Ferrara, F. & Ng, O.-L. (2015). A materialist conception of early algebraic thinking. In X. Sun, B. Kaur & J. Novotná (Eds.), *Proceedings of the Twenty-third ICMI Study: Primary Mathematics Study on Whole Numbers*, 550–558.
Ferrara, F. & Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics, 92*(1), 1-19. doi: 10.1007/s10649-015-9674-3
Gallese, V. & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology, 22*(3/4), 455–479.
Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From. How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. New York: Basic Books.
Longo, G. (2001). Space and time in the foundation of mathematics, or some challenges in the interaction with other sciences. *Invited lecture at the First AMS/SMF meeting*, Lyon, July 2001, 1–27. (dal sito dell'autore)
Longo, G. (2002). Lo spazio, i fondamenti della matematica e la resistibile ascesa della metafora: il cervello è un calcolatore digitale. In M. Bresciani Califano (a cura di), *L'uomo e le macchine* (pp. 1-27). Firenze: Olschki. (dal sito dell'autore)
Longo, G. (2005). The cognitive foundations of mathematics: Human gestures in proofs and mathematical incompleteness of formalisms. In P. Grialou, G. Longo and M. Okada (Eds.), *Images and Reasoning* (pp. 105–134). Tokio: Keio University Press.
Longo, G. (2014). L'infinito matematico "in prospettiva" e l'ombra dei possibili. *Dianoia, 19*, 149–165. doi: 10.1473/dianoia0153
Longo, G. (2015). Conceptual analyses from a Grothendieckian Perspective. *Reflections on Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics* by F. Zalamea, Falmouth and New York: Urbanomic/Sequence Press, 2012. *Speculations* VI, 207–267.
Longo, G. (2016). Le conseguenze della filosofia. In R. Lanfredini e A. Peruzzi (a cura di), *A Plea for Balance in Philosophy* (vol. 2, pp. 17–44). Pisa: Edizioni ETS.
Mammana, M.F., Micale, B. & Pennisi, M. (2012). Analogy and dynamic geometry system used to introduce three-dimensional geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*, 818–830.
McNeill, D. (2005). *Gesture and thought*. Chicago: University of Chicago Press.
Nemirovsky, R. (2003). Three Conjectures concerning the Relationship between Body Activity and Understanding Mathematics. In: N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 103–135.
Nemirovsky, R. & Ferrara, F. (2009). Mathematical Imagination and Embodied Cognition. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 159–174. doi: 10.1007/s10649-008-9150-4
Poincaré, H. (1905). *Science and Hypothesis*. New York: The Science Press.
Radford, L. (2013). Sensuous cognition. In D. Martinovic, V. Freiman, & Z. Karadag (Eds.), *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 141–162). New York: Springer.
Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 91–95. doi: 10.1007/s10649-008-9172-y
Rizzolatti, G., Fadiga, L., Fogassi, L. & Gallese, V. (1997). The space around us. *Science, 277*, 190–191.
Roth, W.M. (2016). Growing-making mathematics: a dynamic perspective on people, materials, and movement in classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 87–103. doi: 10.1007/s10649-016-9695-6
Rotman, B. (2012). Topology, algebra, diagrams. *Theory, Culture & Society, 29*(4/5), 247–260. doi: 10.1177/0263276412444472

Rotman, B. (2015*).* Mathematical Movement: Gesture. In S. Popat and N. Salazar Sutil (Eds.), *Digital Movement: Essays in Motion Technology and Performance*. London, UK: Palgrave-Macmillan.
Seitz, J. A. (2000). The bodily basis of thought, new ideas in psychology. *An International Journal of Innovative Theory in Psychology, 18*(1), 23–40.
Sheets-Johnstone, M. (2009). Animation: the fundamental, essential, and properly descriptive concept. *Continental Philosophy Review, 42*(3), 375–400. doi: 10.1007/s11007-009-9109-x
Sheets-Johnstone, M. (2010). Body and movement: Basic Dynamic Principles. In D. Schmicking and S. Gallagher (Eds.), *Handbook of Phenomenology and Cognitive Science*, (pp. 217–234).
Sheets-Johnstone, M. (2011). *The Primacy of Movement*. (2nd Ed.). Amsterdam: Benjamins.
Sheets-Johnstone, M. (2012). Movement and mirror neurons: A challenging and choice conversation. *Phenomenology and the Cognitive Sciences, 11*(3), 385–401. doi: 10.1007/s11097-011-9243-x
Sinclair, N., de Freitas, E. & Ferrara, F. (2013). Virtual encounters: The murky and furtive world of mathematical inventiveness. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 239–252. doi: 10.1007/s11858-012-0465-3
Streeck, J. (2013). Interaction and the living body. *Journal of Pragmatics, 46*(1), 69–90. doi: 10.1016/j.pragma.2012.10.010
Varela, F.J., Thompson, E. & Rosch, E. (1991). *The Embodied Mind. Cognitive Science and Human Experience*. Cambridge, MA: The MIT Press.
Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review, 9*(4), 625–636.
Zalamea, F. (2012). Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics. Falmouth and New York: Urbanomic/Sequence Press.