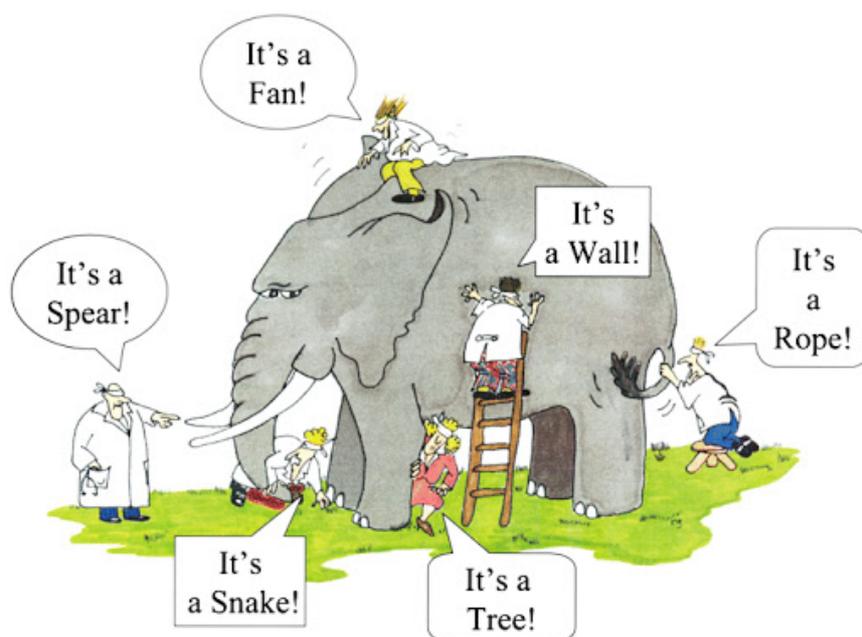


**XXXIV SEMINARIO NAZIONALE
DI DIDATTICA DELLA MATEMATICA “GIOVANNI PRODI”**

Rimini, 23-25 febbraio 2017

**TECNOLOGIE PER LA DIDATTICA ED EDUCAZIONE
MATEMATICA CON LE TECNOLOGIE:
DIALOGO TRA PROSPETTIVE DI RICERCA
NELL’ERA DIGITALE**



Eleonora Faggiano, Università degli Studi di Bari Aldo Moro

Antonella Montone, Università degli Studi di Bari Aldo Moro

Pier Giuseppe Rossi, Università di Macerata

Indice

1. Introduzione	4
2. I framework di riferimento	6
2.1 La mediazione didattica	6
2.1.1 L'approccio interazionista	9
2.1.2 La regolazione	11
2.2 Il ruolo dei mediatori nella mediazione didattica	11
2.2.1 Il ritmo della mediazione	13
2.3 Una prima sintesi: la mediazione e la sua analisi	14
2.4 Una seconda sintesi: il sistema dei mediatori	15
2.5 Artefatti e strumenti nella Didattica della Matematica	16
2.5.1 Artefatti e segni nella prospettiva vygotskijana	16
2.5.2 L' <i>approccio strumentale</i> di Rabardel	17
2.5.3 La nozione di <i>duo di artefatti</i>	18
2.6 La Teoria della Mediazione Semiotica	18
2.6.1 Il potenziale semiotico	19
2.6.2 Il ciclo didattico e il ruolo dell'insegnante	19
2.6.3 Una nota sugli aspetti multimodali	20
3. Una ricerca sull'uso sinergico di artefatti: il percorso sulle simmetrie assiali nella Scuola Primaria	22
3.1 Perché la simmetria assiale nella Scuola Primaria	22
3.2 Le fasi della ricerca	23
3.3 Gli artefatti utilizzati	24
3.4 Prima elaborazione della sequenza didattica	25
3.4.1 Primo ciclo didattico: descrizione delle consegne e potenziale semiotico dell'artefatto manipolativo	26
3.4.2 Secondo ciclo didattico: descrizione delle consegne e potenziale semiotico dell'artefatto digitale	28
3.4.3 La possibile sinergia tra i due artefatti al termine dei primi due cicli	30
3.4.4 Terzo ciclo didattico: descrizione delle consegne e potenziale semiotico dell'artefatto manipolativo – una criticità nella sequenza	31
3.4.5 La possibile sinergia tra i due artefatti al termine dei primi tre cicli	32
3.4.6 Quarto ciclo didattico: descrizione delle consegne e potenziale semiotico dell'artefatto digitale	33
3.4.7 La possibile sinergia tra i due artefatti al termine del quarto ciclo	34
3.4.8 Quinto e sesto ciclo didattico: si inverte l'ordine degli artefatti	34
3.4.9 La possibile sinergia al termine degli ultimi due cicli	35
3.5 Primo studio pilota	35

3.5.1	Un primo esempio di evoluzione dei segni: dal forare con lo spillo alla corrispondenza punto-punto	36
3.5.2	Una prima evidenza della sinergia tra artefatti	38
3.5.3	Una criticità evidenziata: la necessità della doppia piegatura	43
3.6	Riformulazione della sequenza didattica: il nuovo terzo ciclo	43
3.6.1	Il nuovo terzo ciclo didattico: descrizione delle consegne e potenziale semiotico dell'artefatto manipolativo – la doppia piegatura per superare la criticità	43
3.7	Secondo studio pilota	45
3.7.1	Ancora sull'evoluzione dei segni: da “combaciano” alla corrispondenza punto-punto	45
3.7.2	L'emergere del riconoscimento della dipendenza dall'asse	46
3.7.3	La duplice dipendenza dal punto e dall'asse con elementi di sinergia	49
3.7.4	L'emergere delle proprietà caratteristiche grazie alla doppia piegatura	55
3.7.5	Dalla doppia piegatura alla costruzione del simmetrico utilizzando le proprietà	59
3.7.6	Ma dove è la retta?	63
4.	La sperimentazione con una intera classe	65
4.1	Analisi di un episodio in classe: la sinergia nel caso dell'asse	66
4.2	Analisi di un episodio in classe: la sinergia nel caso della dipendenza dal punto e dall'asse	70
5.	Gli artefatti manipolativi, gli artefatti digitali e la mediazione didattica	75
6.	Un passo indietro: gli studi sugli ambienti cooperativi web based	78
	Riferimenti Bibliografici	81

Tecnologie per la didattica ed educazione matematica con le tecnologie: dialogo tra prospettive di ricerca nell'era digitale

Eleonora Faggiano^{}, Antonella Montone^{*}, Pier Giuseppe Rossi^{**}*

^{*}Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Bari Aldo Moro

^{**}Dipartimento di Scienze della Formazione, dei Beni Culturali e del Turismo - Università di Macerata

1. Introduzione

L'ambito più generale in cui il Seminario si inquadra è quello dello studio di percorsi didattici che prevedono l'utilizzo di tecnologie, digitali e non, nella Didattica della Matematica.

L'attenzione sarà rivolta soprattutto all'uso di strumenti/artefatti come mediatori all'interno del singolo processo di insegnamento-apprendimento. Si proporrà una possibile lettura di tale processo, utilizzando alcuni riferimenti teorici sviluppati negli ultimi anni sia nell'ambito della Didattica della Matematica sia in quello della Didattica Generale. In particolare, faremo riferimento da un lato alla Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) e all'utilizzo di un *duo* di artefatti (Maschietto e Soury-Lavergne, 2013), ipotizzando una possibile sinergia tra artefatti di natura diversa (Faggiano, Montone e Mariotti, 2016), dall'altro alla teoria della mediazione didattica (Damiano, 2013) e al ritmo della mediazione nella multimodalità anche in un'ottica sistemica (Rossi et al., 2013, p. 273-76; 2016).

Si descriverà la ricerca intrapresa da Eleonora Faggiano e Antonella Montone sull'uso sinergico di artefatti, in dialogo con Pier Giuseppe Rossi. L'analisi dei risultati e delle potenzialità didattiche, sarà discussa nel tentativo di comprendere se e come possano dialogare due prospettive di ricerca tra loro intrecciate, quella della didattica generale e delle tecnologie dell'educazione e quella dell'insegnamento-apprendimento della matematica con l'uso delle tecnologie.

La caratteristica propria di questa ricerca è rappresentata dalla costruzione di un fecondo dialogo, che parte dal confronto tra ricercatori in settori diversi, per cogliere analogie e diversità dei framework utilizzati e dei linguaggi, ed è finalizzato soprattutto a realizzare possibili sinergie nella progettazione e nell'analisi delle sperimentazioni. Il percorso necessita pertanto di adeguata comunicazione e comprensione reciproca e ciò, come abbiamo sperimentato, è possibile solo se il confronto teorico è accompagnato dall'analisi congiunta dell'azione didattica.

Il lavoro svolto ha richiesto anzitutto una lunga e complessa operazione di condivisione di linguaggi e significati. Il problema emerge in particolare quando stessi significati assumono, in contesti disciplinari diversi, significati differenti. E non è spesso sufficiente esplicitare i propri significati, in quanto il processo di comprensione non è né lineare, né a-contestualizzato, e non può prescindere dalle differenti esperienze sia pratiche, sia cognitive che ogni disciplina propone.

Durante il confronto è emerso ben presto che per analizzare con una duplice lente l'impatto delle tecnologie, digitali e non, sul processo di insegnamento-apprendimento della Matematica, risulta fondamentale mettere a fuoco il termine polisemico di "mediazione" e,

connesso ad esso, quello di artefatto. Nel presentare questo dialogo, dunque, si partirà dall'esplicitare i reciproci punti di vista e mettere in relazione le varie interpretazioni dei termini in gioco.

Il dialogo tra le due prospettive, si concretizzerà nell'analisi di una ricerca sperimentale sull'uso di artefatti, finalizzata alla costruzione del significato di simmetria assiale a livello di Scuola Primaria. Il lavoro sperimentale è stato impostato e condotto inizialmente da Eleonora e Antonella (in collaborazione con Maria Alessandra Mariotti). L'inserimento di Pier Giuseppe, in primo luogo diretto alla lettura dei risultati, ha determinato un ripensamento del percorso e una nuova fase della ricerca, che si è tradotta in una successiva sperimentazione supportata dall'intero gruppo.

I risultati che presentiamo non sono da intendersi, dunque, come un lavoro di sintesi ma rappresentano un primo esempio di ricerca condotta in dialogo tra prospettive distinte seppur contigue che, a nostro avviso, apre a nuovi possibili percorsi dai quali ciascuna delle prospettive di ricerca possa trarre vantaggio.

La relazione si chiuderà con alcune considerazioni su questioni che restano aperte, legate ai problemi di effettiva integrazione delle tecnologie nella pratica didattica e dunque relati alla professionalità del docente ed alla sua formazione.

2. I framework di riferimento

In questa sezione si presentano i framework utilizzati nella ricerca. In una prima parte si illustrano gli aspetti principali della teoria della Mediazione Didattica nell'ambito della quale si approfondisce l'aspetto del ritmo della mediazione. Si passa poi all'ambito della Didattica della Matematica in cui, come è noto, diversi studi hanno focalizzato l'attenzione sull'utilizzo di strumenti di mediazione per promuovere la costruzione di significati matematici in classe (i.e.; Laborde, 2001; Paola, 2001; Arzarello & Robutti, 2004; Maschietto & Bartolini Bussi, 2009). Dopo aver introdotto la nozione di artefatto, e alcuni studi sull'uso di artefatti che risultano importanti per la nostra ricerca, l'attenzione si focalizza, in particolare, sulla Teoria della Mediazione Semiotica (TMS) (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; 2009).

2.1 La mediazione didattica

In Didattica Generale il riferimento per la Mediazione è Elio Damiano. Nel 2013 ha prodotto il testo "La mediazione didattica" per Franco Angeli in cui sistematizza la sua traiettoria di ricerca inquadrando la problematica in una cornice teorica complessiva.

Per Damiano la mediazione si iscrive tra le caratteristiche funzionali dell'uomo e si colloca nella congiunzione tra organismo, psiche e cultura (Damiano, 2013, 21) in quanto dipende dalla immaturità alla nascita, che chiama pedemorfia, e dalla necessità di apprendere lungo un'infanzia più lunga, rispetto a quella degli altri esseri presenti sulla Terra, con il supporto degli adulti.

Di qui la necessità della mediazione primaria, propria della famiglia, della mediazione secondaria, specifica della "scuola burocratica", della mediazione terziaria attivata dalle nuove tecnologie con la "realtà virtuale". Oggi emerge la necessità del Long Life Learning (LLL) in cui il processo di apprendimento accompagna l'uomo durante tutto l'arco della vita, come se il processo di "maturazione" non avesse fine. Il LLL prevede un distanziamento durante il quale il soggetto osserva, anche attraverso l'accompagnamento e lo sguardo critico dell'esperto, se stesso in azione, immerso nei contesti.

La mediazione in ambito scolastico nasce dall'esigenza di superare i modelli *Process-Product* e *Process-Learning*. Tra i primi possiamo collocare i modelli comportamentisti e istruzionisti che hanno evidenziato l'inefficacia di una relazione meccanica tra insegnamento e apprendimento e l'impossibilità di trasmettere conoscenza.

Tra i secondi possiamo inserire l'attivismo e il costruttivismo. Questi ultimi hanno dato un grande contributo alla didattica, evidenziando il ruolo dello studente nel processo di apprendimento, e hanno sottolineato la necessità dell'ambiente come spazio strutturato di mediazione. Per l'apprendimento si predispose un ambiente (Jonassen, 1999) in cui lo studente possa agire, operare; all'origine della conoscenza dello studente stesso è vista la sua azione, non quanto trasmesso dal docente. Contemporaneamente il costruttivismo ha spesso sottovalutato il ruolo del docente, o meglio prevede "un precettore nascosto" (Damiano, 2013, 302). In realtà, il costruttivismo nasce come corrente psicologica e quindi non focalizza l'attenzione sul processo di insegnamento.

Ma vi è un altro riferimento, a monte della mediazione, ed è quello che deriva dalle ricerche sulla Trasposizione Didattica, sviluppate nell'ambito della Didattica della

Matematica soprattutto in Francia nella seconda metà del '900. Sono le ricerche di Chevallard (1991), Verret (1976), Martinand (1989) e Develay (1993) per i quali ciò che si insegna a scuola è un sapere che pur derivando dal sapere sapiente, pur essendo coerente con esso, è un sapere altro: il sapere insegnato, sul quale incidono, oltre al sapere sapiente, sia il mondo dello studente e le sue potenzialità, sia le pratiche sociali di riferimento. Duit (2012), più recentemente, rivede il modello della trasposizione didattica e parla di "ricostruzione didattica", mettendo in evidenza come i ricercatori prima, e i docenti poi, sicuramente partono dal sapere sapiente e da esso, con un processo di elementarizzazione, individuano i punti fondanti storicamente e socialmente determinati, e poi, dopo questo processo di decostruzione, ricostruiscono il sapere da insegnare. Tale costruzione deriva dalla necessità di un'altra mediazione, ovvero quella tra un sapere quotidiano, di cui lo studente già dispone, e un sapere strutturato e scientifico, come lo definirebbe Vygotskij. Quindi non solo la trasposizione tra sapere sapiente e sapere insegnato.

Per arrivare alla mediazione, Damiano fa riferimento a un secondo contributo teorico, il triangolo di Houssaye (2000), ma lo rivede alla luce dell'opera di Rezeau (2000). Il triangolo di Houssaye ha ai suoi vertici l'insegnante, il sapere e lo studente e i lati del triangolo prevedono la postura¹ di insegnare (docente-sapere), apprendere (sapere-studente), formare (studente-docente). Damiano critica la visione di Houssaye per il quale i tre processi operano uno alla volta, separatamente. Houssaye dice che "a turno un vertice del triangolo fa il morto".

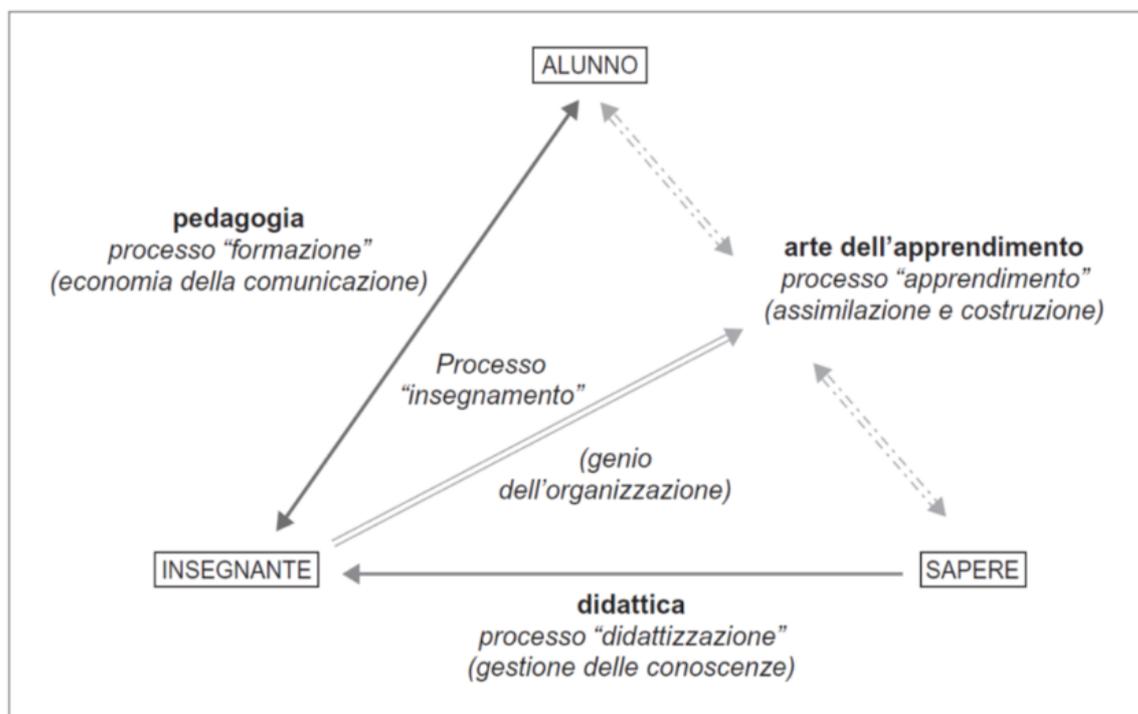


Figura 1 - Il triangolo di Houssayé

Rezeau (Fig.1) legge l'operato del docente come una continua equilibratura/mediazione tra i processi didattici, orientati alla disciplina, e quelli educativi, orientati alla formazione

¹ Il termine postura, come usato da Houssayé, indica il modo di essere e di fare del docente: le sue intenzioni, finalità, rapporto con la disciplina, modo di relazionarsi, postura fisica.

della persona e del cittadino. Ritiene che i processi educativi non siano paralleli e autonomi, ma intrinsecamente intrecciati con quelli disciplinari² e che la competenza del docente consista proprio nella capacità di mettere in atto tale equilibrio che varia, in funzione del contesto, tra scaffolding e fading, tra autonomia e supporto. Ogni strategia didattica ha sempre un impatto sul piano epistemologico, sul piano etico e su quello educativo-relazionale. L'approccio pedagogico vede al centro il processo reale che si sviluppa in classe, dove i vari piani si intrecciano continuamente.

Per Damiano occorre superare la distinzione tra chi si occupa dei bambini, i pedagogisti, e chi si occupa del sapere, i disciplinaristi, senza con questo negare l'esigenza di saperi e approfondimenti specifici. "Più che una differenza di territori, si tratta di una differenziazione di osservatori puntati sul medesimo campo" (ivi, 153), una differenziazione di prospettive con cui però si analizza la stessa e **unitaria** azione didattica. I due sguardi non possono operare distintamente e diacronicamente, né osservare due aspetti differenti. Al centro dei due sguardi vi è la stessa e olistica azione didattica.

La separazione ad esempio tra didattica e pedagogia, per certi versi e per come la conosciamo noi, ha caratteristiche culturali (in Italia è diversa dalla Francia e dai paesi anglosassoni) e su di essa un ruolo non secondario gioca l'organizzazione in Settori Scientifici Disciplinari della ricerca. "Il fatto è che la prospettiva adottata consente di cogliere determinati aspetti – per gli uni quelli relativi alla struttura del rapporto fra insegnante ed alunno, quelli della trasformazione del sapere per gli altri – lasciando ai margini quel che i loro dirimpettai mettono a fuoco. Quello che occorre, in questi confronti, è un decentramento: ovvero riconoscere il particolarismo del proprio punto di vista e collocarsi in una postazione più comprensiva" (idem).

La competenza dell'insegnante sta nel gestire il processo, operando contemporaneamente sui due fronti e adottando le due prospettive in ogni singola scelta, non con modalità parallele o sommative, in quanto la centratura sulla polarità epistemologica non può essere semplicemente giustapposta a quella educativa, ma deve essere integrata nella struttura dell'azione didattica. Il contributo dei disciplinaristi deriva dalla necessità della messa a fuoco del sapere come elemento imprescindibile dell'insegnamento: "l'insegnamento c'è se c'è "qualcosa" da insegnare; non solo, ma è questo "qualcosa" che legittima la fatica di insegnare e di apprendere attraverso una relazione asimmetrica, dove è in gioco un potere da esercitare in vista di un'autonomia da liberare e conquistare" (ivi, 155).

Damiano conclude affermando che la mediazione consente di collocare al centro – come asse che sintetizza la didattizzazione (con il sapere) e la formazione (la relazione "pedagogica" tra insegnante e alunno) – il **processo di insegnamento**. Tale processo si muove, bilanciata, tra il polo del sapere e il polo dell'alunno, accompagnando e supportando – ovvero **mediando** – il processo di apprendimento che si conferma come attività non delegabile dell'alunno. "L'intenzione di Rézeau è palese: unificare il punto di vista dei didatti e dei pedagogisti – la formazione, un rapporto che rischia di essere mera animazione, senza contenuti di conoscenza, e la didattizzazione, un'azione che può riuscire educativamente arida – all'interno dell'insegnamento: concepito, secondo la formulazione

² Va sottolineato come spesso gli stessi obiettivi disciplinari siano essi stessi connessi con la formazione della persona e del cittadino.

di Edgar Morin, come “genio” – ovvero “intelligenza” – dell’organizzazione di tutte le contingenze che possono consentire la promozione dello *studenting* dell’alunno” (ivi, 156).

Pezzimenti e Rossi (2013), da una review effettuata sulle teorie pedagogico-didattiche degli ultimi 40 anni, colgono la presenza di quattro logiche che guidano l’operato del docente, comuni alla maggioranza delle teorie: la logica epistemologica, quella dell’ingegneria didattica, quella dell’apprendimento e quella etica. La prima si focalizza sulla organizzazione del sapere, sulla struttura dei concetti, sulle metodologie e sui linguaggi propri di ogni disciplina; la seconda sulla ricerca dei mediatori e delle strategie, sull’organizzazione delle sessioni di lavoro, sulla scelta delle variabili operative e sul contenimento dei vincoli di progetto (spazio e tempo in primis). La logica dell’apprendimento tiene conto del mondo dello studente, delle sue conoscenze pregresse, delle sue concettualizzazioni, delle sue modalità cognitive, di ciò che lui porta nell’apprendimento (Laurillard, 2013). Infine la quarta, la logica etica, prende in esame le finalità educative che il docente sceglie e con cui seleziona i contenuti, la loro trattazione e le modalità di gestione della classe. Gli aspetti valoriali sono centrali nella azione didattica, emergono anche dal comportamento dell’insegnante e dalle modalità con cui si relaziona. Le quattro logiche non operano separatamente. In ogni azione didattica il docente è guidato dalle quattro logiche che si intrecciano e operano in sinergia su ogni aspetto. Ad esempio la logica valoriale è connessa ai contenuti scelti e al percorso epistemologico, così come alle strategie messe in atto.

2.1.1 L’approccio interazionista

Solo per futuri approfondimenti, e in modo molto sintetico, in questa sede si ricorda che la mediazione didattica ha molti punti di contatto con l’approccio interazionista di Altet (2012) e Laurillard (2014), ovvero con due modelli, uno francofono e l’altro anglofono, che hanno una vasta risonanza nella comunità scientifica internazionale di ambito *education* e che mettono al centro l’azione didattica e l’interazione studenti-docente, superando gli approcci duali della seconda metà del secolo scorso in cui prevaleva o l’insegnamento o l’apprendimento.

Altet vede come cuore dell’insegnamento l’interazione tra docente e studenti, che descrive come una regolazione continua del processo in classe. Data una progettazione iniziale, il processo d’insegnamento avviene come un continuo aggiustamento tra la costruzione degli studenti, con le loro idee e le loro esperienze, e l’elaborazione concettuale. L’insegnante opera su più piani: epistemico, relazionale, pragmatico (Altet, 2012, 325).

Laurillard sintetizza la sua visione nel *conversational framework*. Descrive l’insegnamento come una serie di percorsi ciclici e ricorsivi che coinvolgono docente e studenti. Lo studente nel suo processo di conoscenza, prima “produce” una prima bozza della sua idea che poi “regola”, ovvero riattraversa, la perfeziona, nel senso esplicitato in seguito, con un percorso a spirale in base a interazioni, feedback, input che ha col docente e altri pari. In questo processo l’interazione con il docente svolge un ruolo fondamentale e si reifica con i feedback continui e attraverso i cicli di comunicazione e di pratica (Fig. 2). Il termine perfeziona va chiarito, e su questo si ritornerà anche in sede di descrizione dell’attività didattica. La messa a punto del concetto durante la regolazione ha diverse direzioni e deriva da vari input. I feedback del docente vanno nella direzione di costruire un processo

che connetta la concettualizzazione dello studente e quella sua propria (la conoscenza del docente che non indichiamo come sapere sapiente). Contemporaneamente, la direzione che segue lo studente è quella di creare un processo che connetta la sua concettualizzazione iniziale (sempre presente) e l'esperienza in atto. I due processi (quello del docente e quello dello studente) sono sempre intrecciati e il *boundary object* (dispositivo/artefatto di cui si parlerà in seguito) deve poter far interagire le due direzioni che operano su piani e su soggetti diversi.

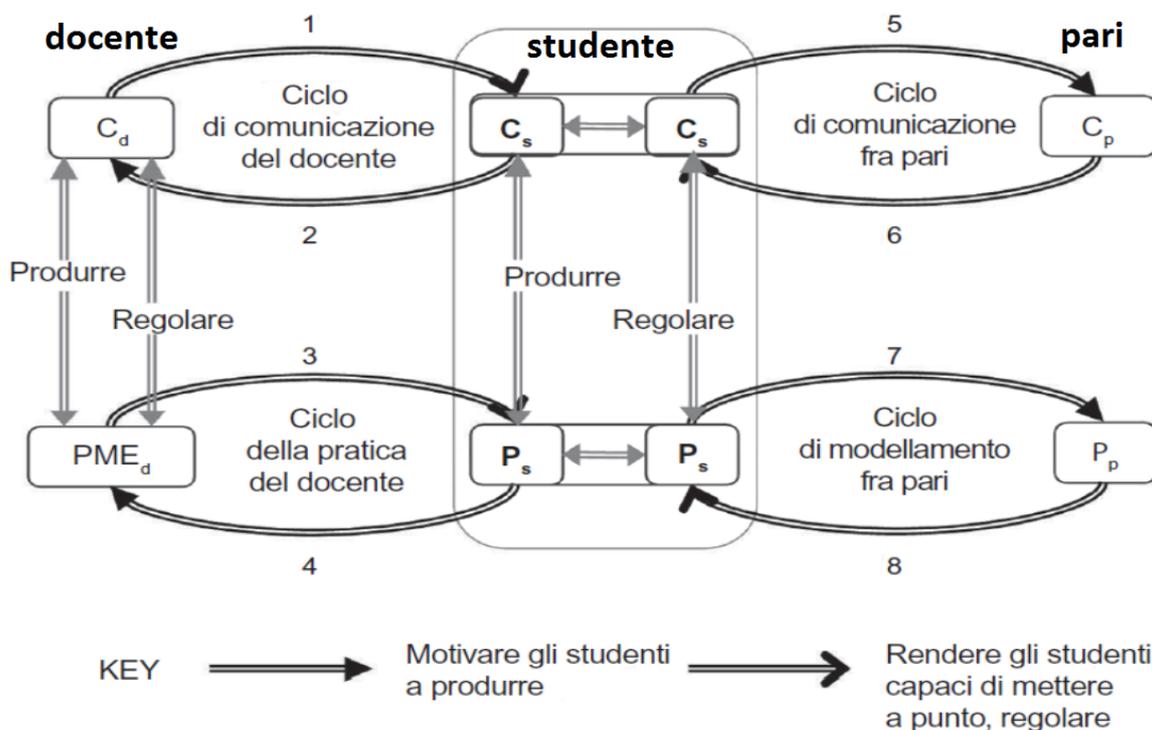


Figura 2 Conversational framework di Laurillard

La mediazione è questo processo ricorsivo e interattivo tra docente-studente che si alimenta dei loro reciproci feedback che emergono sia nella comunicazione diretta, sia nell'attività di pratica³. Alcuni autori parlano di allineamento tra gli obiettivi del docente e quelli degli studenti, tra il sapere degli uni e quello degli altri. Anche alla fine del processo non esiste comunque una identità totale tra i due saperi, ma un allineamento più o meno "spinto", che dipende dalle scelte e dai vincoli del contesto: il tempo a disposizione, i livelli iniziali, le finalità didattiche, l'importanza assegnata alle singole conoscenze. A volte ci si accontenta anche solo di saperi strumentali, altre si ricercano consapevolezza maggiori⁴.

Il processo di insegnamento-apprendimento che ne emerge è un processo a spirale di allineamento tra docente e studente (Rossi, 2016b). Per approfondire il termine

³ Per attività di pratica, Laurillard intende le attività durante le quali lo studente non comunica direttamente con il docente, ma interagisce con lui attraverso artefatti cognitivi da lui predisposti (esecuzione di consegne, svolgimento di problemi, attività laboratoriali).

⁴ La questione potrebbe ingenerare incomprensioni. Qui non si parla di correttezza delle conoscenze e del fatto che comunque il docente richieda allo studente una conoscenza coerente con il "sapere sapiente", o almeno con quello che lui crede essere il sapere sapiente. Ogni conoscenza ha livelli diversi di profondità e di consapevolezza e può essere inserita in un framework teorico differente.

allineamento si vedano, oltre ai riferimenti sulla mediazione: il contributo di Vinatier & Numa-Bocage (2007), le quali studiando le interazioni verbali (i segni) tra un docente/sostegno e uno studente, descrivono come evolve il processo di co-attività ovvero il processo di allineamento tra obiettivi, significati e attività; i lavori di Varela sull'accoppiamento strutturale (Varela, Thompson & Rosch, 1991) che partono dalla differenza tra organizzazione e struttura, ovvero tra chiusura e possibilità di interazione.

Prima di chiudere, si precisa anche che si parla di processo interattivo in quanto il processo permette un cambiamento non solo nello studente, ma anche nel docente. La presenza di un sapere insegnato ricostruito in contesto è un modo diverso per dire che anche il docente apprende nell'azione didattica, così come aumentano la sua consapevolezza del tema affrontato e la conoscenza delle difficoltà, connesse al percorso, che incontra lo studente.

2.1.2 La regolazione

Il processo interattivo e di mediazione didattica si reifica in due momenti:

- il primo consiste nella strutturazione di un campo pedagogico, ovvero l'insieme degli interventi didattici che l'insegnante mette in atto per "offrire occasioni di tirocinio delle strutture cognitive attraverso la mediazione delle strutture disciplinari rappresentandole secondo i codici – prassici, iconici, simbolici – congrui alle fasi evolutive del soggetto in apprendimento" (Damiano, 2004, 40);

- il secondo consiste nella **regolazione in azione** (Altlet, 2012), durante la quale il docente attua un continuo aggiustamento in base ai feedback dello studente, e durante il quale si reifica un processo di allineamento, un processo enattivo che coinvolge e trasforma sia lo studente che il docente secondo traiettorie diverse.

Nell'approccio enattivo (Rossi, 2011), invero, i due processi non sono separati, ma si sovrappongono. Durante la progettazione l'insegnante, per la messa a punto, simula mentalmente il processo, nell'azione rimette continuamente in gioco la progettazione, riorganizza il processo e produce documentazione (Li, Clark & Winchester, 2010).

2.2 Il ruolo dei mediatori nella mediazione didattica

Il processo di equilibratura e la trasposizione didattica si reificano grazie al terzo-pedagogico, uno spazio di mezzo che media il rapporto tra studenti e docenti, garantendo la relazione tra non uguali (docenti e studenti), l'autonomia degli studenti e l'azione del docente e favorisce l'allineamento. Tale spazio-tempo è quello del dispositivo (Magnoler, 2009). Per mediazione didattica si intende il processo di triangolazione tra docente, dispositivo, studente. Data l'impossibilità di una relazione diretta e trasmissiva tra docente e studente, vi è bisogno di un dispositivo mediatore, uno spazio-tempo in cui studente e docente agiscono (dispositivo come spazio dell'azione), in cui sono presenti sia artefatti, sia compiti, sia consegne. Il ruolo del dispositivo è quello di mettere in contatto il mondo del docente e quello dello studente e ha la funzione di un *boundary object*, un Giano bifronte che fa riferimento sia alle pratiche e alle esperienze dello studente, sia alle esperienze e al sapere del docente. Il dispositivo deve poter attivare lo studente (recuperando i suoi saperi e le sue esperienze) e il docente. Il docente non può trasmettere allo studente il sapere, ma può costruire un dispositivo in cui agisce e in cui agiscono gli studenti.

Il dispositivo è predisposto dal docente, ma poi ha una sua vita autonoma (una caratteristica in comune con gli artefatti) e si trasforma durante l'interazione, grazie alle azioni del docente e degli studenti. Non rimane statico, nel senso che evolve nell'interazione per effetto di tutte le attività dei vari attori. Ogni *step* del lavoro che descriveremo sulle simmetrie assiali può essere visto come un dispositivo.

Per leggere l'azione didattica sono disponibili solo le reificazioni, i segni prodotti dai vari attori. Il loro sviluppo nel tempo permette di analizzare il processo di insegnamento-apprendimento. Sarebbe da analizzare la relazione tra azione e linguaggio. Se il linguaggio da solo non crea conoscenza, l'azione senza l'elaborazione linguistica non produce conoscenza. Il linguaggio stesso è visto come una forma di azione (Caruana & Borghi, 2016)⁵.

Il dispositivo si caratterizza per l'artefatto prevalente e, pertanto, parliamo di **mediatori didattici: attivi, iconici, analogici, simbolici**. Damiano parte da Bruner, che parla di rappresentazioni attive, iconiche e simboliche, ma poi ridefinisce il concetto e inserisce anche la categoria dei mediatori analogici. Per comprendere il ruolo e le caratteristiche dei mediatori, occorre iniziare dal concetto di dispositivo di Foucault, come già accennato. I mediatori non sono solo artefatti, ma dispositivi ovvero degli spazio-tempo con i loro artefatti, con propri schemi d'azione, con ruoli specifici giocati dai vari attori, con processi che si sviluppano nel tempo, ridefinendo istante per istante i significati stessi degli artefatti, dei processi e il ruolo degli attori.

Le quattro tipologie dei mediatori si differenziano per il grado di concretezza/astrattezza e vanno colte non isolatamente, ma nella loro processualità che permette al docente di costruire un ponte tra l'esperienza dello studente, le sue idee iniziali, le esperienze, non ultime le concettualizzazioni finali.

In effetti le varie tipologie di mediatori sono tra loro connesse e permettono di costruire una traiettoria sistemica che va percorsa ricorsivamente nelle due direzioni. I mediatori attivi e analogici sono attività vissute, effettuate o simulate, mentre i mediatori iconici e simbolici sono attività di riflessione in cui si rappresentano azioni. Damiano usa il termine *caldo* per le prime due e *freddo* per le seconde due. Potremmo anche associare i termini *immersione* alle prime due e *distanziamento* alle seconde per descrivere un percorso dall'esperienza alla rappresentazione simbolica che, ripetiamo, può essere percorso nelle due direzioni.

Il ruolo di ogni mediatore in Damiano non è mai autonomo e separato dal processo di mediazione, operato dal docente e dall'interazione tra studente e docente.

In questo potremmo vedere una coerenza con la posizione antropocentrica di Rabardel che vede come antropocentrica una visione strumentale dell'artefatto, mentre coglie come tecnicistico ogni approccio per cui l'artefatto ha un ruolo centrale e l'azione dell'uomo risulta come "residuale".

⁵ La visione multimodale – ovvero che utilizza molti linguaggi e processi - di concetto (come una rete di azioni, esperienze, simulazioni, linguaggio) (vedi alcuni contributi delle neuroscienze e in particolare il testo di Caruana e Borghi "Cervello in azione", 2016) viene in questa sede solo accennata e non approfondita visti i tempi e i materiali a disposizione.

2.2.1 Il ritmo della mediazione

Il ritmo della mediazione (Damiano, 2013, 208), ovvero la successione con cui sono utilizzati i vari mediatori in una specifica azione didattica, svolge un ruolo importante. La successione dei mediatori non è prescrittiva, ma permette di dare concretezza al processo di apprendimento. Lo studente passa dall'attività vissuta, poi descritta una prima volta iconicamente, all'attività rivissuta nella simulazione e infine, attraverso il mediatore simbolico, descritta e generalizzata. L'efficacia non è nel singolo mediatore, ma nel sistema della mediazione e nel ritmo della stessa che reificano il processo di apprendimento e costruiscono un ponte tra l'esperienza e la concettualizzazione. Chiaramente, il percorso non va visto rigidamente e non deve obbligatoriamente e gerarchicamente svilupparsi in 4 stadi e viceversa. La competenza del docente è proprio nel costruire il ritmo in contesto e rispetto allo specifico sapere⁶. Non è possibile parlare di gerarchia in quanto si crea una rete tra i vari mediatori ed è la sinergia tra gli stessi che produce "significato". Ogni mediatore funziona nel sistema e il mediatore successivo non sussume ma è in rete con i precedenti. Vygotskij afferma che l'assimilazione di un sistema di concetti scientifici è possibile solo per un rapporto ugualmente **mediato** con il mondo degli oggetti, per altri concetti elaborati precedentemente (ivi, 222). Nella rete concettuale il concetto "evoluto" è una rete che contiene sia le espressioni linguistiche, sia le esperienze effettuate o simulate.

Il mediatore recupera l'azione dello studente e costruisce un ponte che connette l'esperienza alla sua generalizzazione, alla sua rappresentazione in forma di linguaggio. Attiva lo studente stesso in un percorso, l'apprendimento, che avviene solo se è una sua scelta e se ne è consapevole, se condivide gli obiettivi del docente, li fa suoi (devoluzione). Il compito del docente è costruire i dispositivi che abbiano una doppia coerenza: con l'esperienza dello studente e con il sapere "sapiente" favorendo tale devoluzione.

L'attivazione del processo, pertanto, avviene solo se si parte dagli elementi (linguaggi ed esperienze), che fanno parte del campo esperienziale (attivo e/o cognitivo) dei due soggetti e permettano dei riferimenti ai loro vissuti, fisici o cognitivi, e se si hanno obiettivi condivisi e allineati (Biggs, 1993; 2003).

Alcune analogie possono essere colte con passaggi proposti da Vygotskij (2001). In "Pensiero e linguaggio", parlando dello sviluppo del pensiero scientifico, Vygotskij mette in evidenza la centralità dell'azione e il passaggio dalla stessa alla sua riproduzione, attraverso il linguaggio con cui lo studente sistematizza e "generalizza" l'esperienza stessa. Vygotskij critica insegnamenti che trasferiscono i concetti in "forma pronta" o "in forma finita" tramite il linguaggio e non tramite un processo e uno sviluppo, che prevedono "la collaborazione tra il bambino e l'adulto". Inoltre afferma che "il tragitto dall'oggetto al bambino e dal bambino all'oggetto passa attraverso un'altra persona". Lo psicologo russo parte dall'inconsistenza di percorsi, che oggi chiameremmo istruzionisti, in cui "i concetti scientifici non hanno una propria loro storia interna, non presentano un processo di sviluppo, ma sono semplicemente assimilati, percepiti in forma finita mediante processi di comprensione, assimilazione e interpretazione e sono presi in prestito dal bambino dalla

⁶ Sarebbe interessante approfondire se e come la presenza di artefatti digitali modifica il ritmo della mediazione. Alcune ipotesi in: Rossi P.G. (2016).

sfera del pensiero degli adulti” (ivi, 204). Occorre dare “all’allievo delle occasioni per acquisire dei concetti e delle parole a partire” dal suo vissuto, dalle sue esperienze. In altri termini, e usando un linguaggio caro a Vygotskij, i concetti spontanei e quelli scientifici non sono separati “ma si trovano in un processo d’interazione costante che deve avere inevitabilmente la conseguenza che le generalizzazioni di struttura superiore, proprie dei concetti scientifici, devono provocare delle modificazioni nella struttura dei concetti spontanei”. Più avanti sostiene che “i concetti scientifici di tipo superiore non possono nascere nella mente del bambino dall’inizio, se non da tipi di generalizzazioni più elementari e non possono essere trasportati nella coscienza del bambino dall’esterno” (ivi, 217). E afferma che l’assimilazione di un sistema di concetti scientifici è possibile solo per un rapporto ugualmente **mediato** con il mondo degli oggetti per altri concetti elaborati precedentemente (ivi, 222). Più avanti sottolinea che solo in un **sistema** “il concetto può divenire oggetto della presa di coscienza e può acquisire volontarietà” (ivi, 240). L’aspetto sistemico acquista nella visione vygotskijana un ruolo centrale e diviene l’elemento distintivo che differenzia i concetti spontanei dai concetti scientifici.

2.3 Una prima sintesi: la mediazione e la sua analisi

Il processo di mediazione operato dal docente è il ponte tra insegnamento e apprendimento, tra studente e docente, tramite i dispositivi mediatori. Tale processo di mediazione tiene conto di vari passaggi: il lavoro del docente tra sapere sapiente e sapere insegnato, e tra sapere insegnato e mondo dello studente, il lavoro dello studente tra il suo mondo (con le esperienze e conoscenze possedute) e sapere insegnato. Il mondo del docente e quello dello studente non sono identici e non solo per le diverse conoscenze. Inoltre ogni azione didattica ha differenti finalità. Il percorso che descriveremo sulle simmetrie assiali ha vari obiettivi: 1) comprendere le relazioni tra il punto, la retta e il punto simmetrico, 2) sviluppare la competenza a costruire delle relazioni e il ruolo delle relazioni, 3) passare da un’esperienza alla sua generalizzazione, 4) collaborare e discutere, 5) costruire in modo collaborativo e tramite la discussione una conoscenza, 6) validare un’idea partendo da un’esperienza. E la lista potrebbe continuare. La mediazione è dunque anche tra disciplinare ed educativo, tra epistemologico e valoriale. L’attività del docente è volta a portare avanti in parallelo diversi fili che vanno a costituire la trama dell’azione didattica.

Chiaramente lo studio del processo di mediazione avviene attraverso i segni che emergono dall’azione (linguaggio, linguaggio del corpo) e la cui evoluzione reifica il processo stesso di insegnamento-apprendimento.

Per concludere questa parte si vuole evidenziare che l’uso del termine mediazione sottolinea la non riducibilità dei due poli della contraddizione (studente e docente), l’impossibilità della sintesi hegeliana tra di essi, e quindi presenta un approccio più simile al concetto di ambiguità merleau-pontyana dove, come direbbe Varela, la relazione non determina una sintesi, il raggiungimento di uno stato identico di una sintesi, pur garantendo una relazione, un accoppiamento strutturale. Il sapere finale dello studente e quello del docente saranno tra loro coerenti, ma presenteranno anche degli elementi di diversità: ogni termine per il docente avrà anche significati altri oltre quelli condivisi, connessioni altre, così come per lo studente sarà riferito al suo mondo, alle sue azioni, alle sue esperienze.

2.4 Una seconda sintesi: il sistema dei mediatori

Damiano parla di ritmo della mediazione per descrivere la modalità con cui possono essere utilizzati in successione i mediatori. Il processo non può essere ridotto all'uso di un singolo mediatore, ma è un processo che utilizza differenti dispositivi con una logica che ricorda il passaggio dal sapere quotidiano, al sapere scientifico di Vygotskij. Questo ultimo parla di un sistema e mette al centro⁷ il ruolo dell'azione⁸ come fonte primaria della conoscenza⁹. L'azione non è il mondo esterno, ma il rapporto costruttivo dell'uomo con il mondo, il processo di interazione continua tra uomo e ambiente che si colloca alla base della conoscenza, o meglio come conoscenza. Il linguaggio non è che una successiva sistematizzazione che deriva sia dall'azione diretta, sia dall'azione simulata. Oppure, come sottolinea Vygotskij, come struttura intervenuta successivamente rispetto all'azione nel percorso filogenetico. La conoscenza scientifica potrebbe essere vista come azione simulata. In questo processo può essere d'aiuto la ricerca più recente in campo neuroscientifico. Caruana e Borghi (2016) evidenziano il ruolo dell'azione nella conoscenza. Sostengono che il cervello conosce tramite l'azione, quasi riecheggiando Varela che affermava: l'azione è conoscenza. Parlano di rappresentazione incarnata per descrivere come le nostre rappresentazioni del mondo sono connesse alle azioni che noi facciamo con e sul mondo.

Nella stessa prospettiva *embodied* si colloca Gallese (2009) che aveva parlato di *simulazione incarnata/embodied simulation*, evidenziando come anche la comprensione dell'altro passa non tanto attraverso la percezione, ma attraverso l'identificazione delle azioni, grazie a una riproduzione simulata.

Nella parte finale del testo Caruana e Borghi propongono la concettualizzazione come struttura multimodale, ovvero come colla tra differenti azioni (fisiche, percettive, emotive e simulate). Il concetto non esiste come ente superiore, come riferimento presente nell'iperuranio, ma è la rete stessa tra le differenti azioni. In altro testo Borghi e Binkofski (2014) evidenziano come la stessa definizione vale anche per i concetti astratti che possono essere visti come associazione di esperienze ed emozioni dirette e indirette (simulate). La "libertà" può essere una rete di esperienze dirette e indirette della vita personale e sociale, poi astrattizzate grazie al linguaggio. E l'astrattizzazione, ritornando a Vygotskij, parte dall'azione e può essere vista come un processo di generalizzazione.

Anticipiamo qui un elemento che sarà centrale per la ricerca descritta.

⁷ Come per altro anche Damiano (sebbene questo sia più vicino a Piaget, in particolare al Piaget (1981) dell'equilibrato).

⁸ Occorrerebbe a questo proposito affrontare la differenza tra azione e attività. Ma anche in questo caso andiamo oltre i tempi e gli spazi a disposizione.

⁹ L'insegnamento come azione è sviluppato da recenti approcci in cui la ricerca didattica ha trovato input interessanti nelle ricerche delle neuroscienze. In tali ricerche emerge l'importanza nei processi di conoscenza dell'apparato senso-motorio che interviene sia direttamente sia tramite simulazione: la centralità dell'azione del soggetto (azione è conoscenza, dice Varela), il ruolo della rappresentazione in formato corporeo (Borghi & Caruana, 2016), la simulazione incorporata/embodied simulation (Gallese, 2009), i processi senso-motori nei processi cognitivi, il corpo che apprende. Di qui la connessione alle neuroscienze, alla fenomenologia e all'embodied cognition (Varela et al., 1991; Lakoff & Johnson, 1999; Lakoff e Nunez, 2005), presenti anche nelle ricerche sulla didattica enattiva (Rossi, 2011; Proulx & Simmt, 2013).

Si è parlato di processo di insegnamento e apprendimento come sistema, di ritmo della mediazione: il centro della nostra sperimentazione sulla **simmetria assiale** è proprio **la sinergia** tra differenti mediatori/artefatti e **il ritmo** che si crea nell'alternare artefatti differenti, in un processo che dall'esperienza diretta e connessa a un caso singolo, specifico e situato, porta a cogliere un "concetto" generale (la simmetria assiale) e comprensivo di una classe di esperienze. È un percorso che da concetti/esperienze quotidiani porta a concetti scientifici, è un percorso che si avvale di artefatti multimodali, il cui ritmo, orchestrato dal docente, permette allo studente la costruzione di una propria conoscenza.

La lettura che faremo permetterà di cogliere la mediazione, sia come processo specifico e connesso al processo psicologico dell'apprendimento, sia come processo situato nella classe, che si svilupperà grazie all'insegnamento, visto come processo di mediazione.

2.5 Artefatti e strumenti nella Didattica della Matematica

In questo lavoro il termine *artefatto* fa riferimento al significato assunto da Rabardel (1995), secondo cui un artefatto è un oggetto, materiale o simbolico, progettato per un particolare scopo, che diventa *strumento* quando ad esso si associano gli schemi d'uso sviluppati dal suo utilizzatore nel corso dell'azione, determinata da un compito particolare.

Tuttavia, l'approccio di Rabardel, pur avendo gettato luce su alcuni aspetti cruciali nell'ambito della Didattica della Matematica (i.e. Artigue, 2002), è stato sviluppato nel campo dell'ergonomia cognitiva e pertanto non si pone come obiettivo quello di studiare l'uso degli artefatti nel campo dell'educazione. Rispetto a questo ci vengono invece incontro gli studi basilari di Vygotskij, la distinzione tra artefatti di Wartofsky (1989) e la nozione di artefatto cognitivo di Norman (1993). Su tali studi si basa la Teoria della Mediazione Semiotica sviluppata da Bartolini Bussi e Mariotti (2008) che costituisce il riferimento teorico fondamentale dello studio sperimentale, finalizzato alla costruzione del concetto di simmetria assiale nella Scuola Primaria, che sarà descritto e analizzato in questa relazione.

Nei paragrafi successivi si richiameranno alcuni aspetti degli studi su citati che risultano particolarmente importanti per la nostra ricerca.

2.5.1 Artefatti e segni nella prospettiva vygotskijana

Gli studi di Vygotskij, includendo una dimensione evolutiva, risultano particolarmente utili per l'analisi cognitiva della funzione di uno strumento. Gli strumenti infatti, come ha mostrato Vygotskij, hanno un ruolo determinante nella strutturazione delle "funzioni cognitive" individuali.

Importante dal nostro punto di vista è la distinzione che Vygotskij fa tra strumenti e segni: i primi sono utilizzati dagli esseri umani nella sfera pratica per raggiungere scopi, altrimenti irraggiungibili, e sono pertanto orientati esternamente; i secondi, definiti anche strumenti psicologici o di mediazione semiotica, sono orientati internamente e supportano le attività mentali.

Le differenze sono sostanziali e da riferire al processo di internalizzazione che trasforma l'uso di uno strumento, come parte di un'attività inter-personale e dunque

sociale, nell'uso di un segno (o strumento psicologico) come parte di un'attività intrapersonale e dunque individuale (Mariotti, 2005, 176).

Secondo la prospettiva vygotskijana, dunque, le potenzialità semiotiche di un artefatto risiedono nel processo di internalizzazione che modella lo sviluppo cognitivo ed ha la propria base nell'uso di segni, che vengono prodotti per realizzare un compito e per comunicare con chi collabora a tale compito.

In tale prospettiva si inquadrano sia la distinzione di Wartofsky (1989) tra artefatti primari, secondari e terziari sia la nozione di artefatto cognitivo dovuta a Norman (1993), come caratterizzato non solo da un aspetto pragmatico-esperienziale, ma anche da un aspetto riflessivo.

2.5.2 L'approccio strumentale di Rabardel

Prima di giungere alla definizione di strumento come entità mista, Rabardel mette a fuoco gli elementi chiave che costituiscono la nozione di strumento nelle ricerche svolte fino a quel momento (1995):

First of all, an instrument is unanimously considered as an intermediary entity, a medium term, or even an intermediary world between two entities: the subject, actor, user of the instrument and the object of the action (Rabardel, 1995, 63, engl. trans. H.Wood).

Rabardel identifica due tipi diversi di mediazione che lo strumento può compiere:

- *a mediation from object to subject that we describe as an epistemic mediation in which the instrument is a means allowing knowledge of the object;*
- *a pragmatic mediation from subject to object in which the instrument is a means of a transforming action (in a broad sense including control and regulation) directed toward the object (idem).*

Se la dimensione epistemica e quella pragmatica della mediazione sono in costante interazione durante una attività mediata da uno strumento, allora lo strumento altro non è che un mezzo di azione, e a seconda della natura dell'azione assume diverse funzioni: si va dallo strumento materiale ("transformation of a material object with a hand-held tool"), a quello cognitivo ("cognitive decision making"), a quello psicologico ("management of one's own activity") per finire a quello semiotico ("semiotic interaction with a semiotic object or with others"). Queste diverse funzioni dello strumento contribuiscono ad individuare una sorta di sinergia di funzioni strumentali.

C'è poi un altro aspetto molto più generale che caratterizza uno strumento inteso come entità mista, costituita sia dall'artefatto che dal suo modo d'uso, essendo queste due dimensioni fondamentalmente indissociabili. Rabardel sottolinea, inoltre, che gli schemi d'uso non hanno solo una dimensione privata specifica di ciascun individuo, ma sviluppandosi nel corso di processi in cui l'utilizzatore, in generale, non è isolato, hanno ovviamente anche una dimensione sociale.

2.5.3 La nozione di *duo di artefatti*

Differenti studi di ricerca si sono interessati all'uso di risorse per l'insegnamento-apprendimento della Matematica. In particolare si possono distinguere due tipi di risorse/artefatti: manipolativi (concreti, fisici) e digitali (virtuali, tecnologici). Molte ricerche sono state orientate ad analizzare l'utilità di ciascuno dei due tipi di artefatto, e in particolare nell'ambito delle Scienze Cognitive, dell'Educazione Matematica e degli sviluppi psicologici, sono stati effettuati ampi studi relativi all'uso di artefatti manipolativi in relazione ai gesti, alle esperienze senso-motorie e all'*embodied cognition* (Lakoff and Nunez 2000; Kalenine et al. 2011, Edwards et al. 2009). Analogamente è accaduto per artefatti di tipo digitale. Pochissimi invece sono gli studi relativi all'uso combinato dei due tipi di risorse. In particolare, esistono studi relativi ad artefatti digitali che sono una simulazione di artefatti concreti esistenti, come per esempio l'Abaco virtuale in Poisard et al. (2011). Tuttavia, al momento vi sono poche ricerche che studiano le potenzialità dell'utilizzo di un *duo di artefatti* (Maschietto e Soury-Lavergne, 2013), inteso come una coppia di artefatti che vengono utilizzati contemporaneamente nella stessa attività, un artefatto manipolativo/concreto e il suo corrispondente digitale. Maschietto e Soury-Lavergne hanno studiato come sia possibile, sotto certe condizioni, progettare un artefatto digitale corrispondente ad uno esistente concreto/fisico, e quanto il loro uso combinato possa allargare e migliorare l'esperienza di apprendimento dello studente. Le autrici hanno progettato un artefatto digitale corrispondente ad uno concreto esistente, basandosi sull'analisi di possibili e rilevanti elementi di similarità, così come su necessari e utilizzabili elementi di rottura tra i due artefatti. Inoltre, hanno analizzato alcune caratteristiche del risultante duo di artefatti in termini di continuità e di discontinuità e del modo in cui il duo possa essere implementato da un punto di vista pedagogico.

In questa ricerca si presenterà un percorso basato sull'utilizzo di un duo di artefatti. Nello specifico, l'artefatto digitale considerato, a differenza di quello dello studio su citato di Maschietto e Soury-Lavergne, non è una versione digitale di quello manipolativo ma un artefatto con caratteristiche diverse. La descrizione dettagliata degli artefatti utilizzati nella nostra ricerca sarà presentata nel seguito.

2.6 La Teoria della Mediazione Semiotica

Sviluppata da Bartolini Bussi e Mariotti in una prospettiva vygotskijana, la TMS prende in considerazione il sistema complesso di relazioni semiotiche tra gli elementi fondamentali che riguardano l'uso di artefatti nella costruzione di significati matematici: l'artefatto, il compito, il sapere matematico oggetto dell'attività, e i processi di insegnamento-apprendimento in classe.

In accordo con la TMS, idea fondamentale è che uno strumento, incorporando un sapere, possa offrire, a chi lo usa, una via di accesso proprio al sapere che in esso è incorporato (Vygotskij, 1980). Per cui un artefatto può essere visto in riferimento a un significato matematico e quindi come tale può diventare uno strumento di mediazione semiotica: l'allievo lo usa per svolgere un compito e l'insegnante lo usa con l'intenzione didattica di sviluppare significati matematici.

2.6.1 Il potenziale semiotico

L'aspetto principale della TMS cui facciamo riferimento riguarda il *potenziale semiotico*, ovvero il duplice legame dell'artefatto con il compito e con il sapere:

[...] on the one hand, personal meanings are related to the use of the artifact, in particular in relation to the aim of accomplishing the task; on the other hand, mathematical meanings may be related to the artifact and its use. This double semiotic relationship will be named the semiotic potential of an artifact (Bartolini Bussi and Mariotti, 2008, 754).

Attraverso l'analisi del potenziale semiotico di un artefatto, è possibile descrivere ciò che ci si aspetta emerga in classe, in termini di azioni e di segni prodotti dagli studenti nell'affrontare il compito con l'artefatto. Tale analisi fornisce anche informazioni sulla relazione tra l'artefatto e i significati matematici in gioco, in relazione al compito. Per questa ragione, l'analisi del potenziale semiotico costituisce un elemento fondamentale nella fase di progettazione di una sequenza didattica. In particolare, i significati legati all'uso dell'artefatto possono essere messi in relazione con gli schemi d'uso messi in atto dagli studenti in relazione ad uno specifico compito. Di conseguenza, la progettazione del compito deve essere sviluppata sulla base dell'analisi a priori dei processi di soluzione e sull'identificazione degli schemi d'uso attesi.

D'altro canto, l'analisi del potenziale semiotico dell'artefatto costituisce una importante guida nell'analisi dei risultati dell'intervento didattico in quanto fornisce, oltre che la base per la progettazione delle attività, anche il riferimento per l'analisi dei comportamenti degli allievi e dell'evoluzione dei segni nelle discussioni collettive.

In accordo con la TMS, i significati personali che emergono dalle attività con l'uso di un artefatto possono evolvere nei significati matematici che costituiscono l'obiettivo dell'intervento didattico. Il complesso e lungo processo di tessitura dell'attività semiotica basata sull'artefatto si concretizza nell'interazione tra pari durante lo svolgimento del compito e nella condivisione di significati, durante le discussioni collettive orchestrate dell'insegnante. In tale processo è possibile identificare delle catene semiotiche descritte dalla produzione e dalla concatenazione di diversi tipi di segni: i "segni artefatto", i "segni matematici" e i "segni pivot". I primi, di carattere spesso fortemente soggettivo e legati all'esperienza specifica con l'artefatto, si riferiscono al contesto d'uso dell'artefatto e contengono il riferimento ad azioni che vengono fisicamente compiute nel corso del suo utilizzo. L'obiettivo dell'insegnamento è invece promuovere l'evoluzione dei segni da "segni artefatto" a "segni matematici", legati ai significati, riconosciuti come tali dalla cultura matematica, di cui l'insegnante si fa mediatore. Un ruolo cruciale è giocato dai "segni pivot", cioè quei segni che mostrano l'evoluzione da "segni artefatto" a "segni matematici", attraverso il legame di significato, e favoriscono il passaggio dal contesto dell'artefatto al contesto matematico.

2.6.2 Il ciclo didattico e il ruolo dell'insegnante

Quando si utilizza uno strumento, sia esso manipolativo o digitale, si costruiscono significati legati ad esso e al suo uso. In particolare la produzione di segni (testi scritti, conversazioni, gesti) che ne consegue, rivela l'emergere di tali significati che costituiscono

il contesto sociale in cui i significati si evolvono. Nella prospettiva vygotskijana, è possibile distinguere i ruoli assunti dall'allievo e dall'insegnante, il quale diviene guida nel processo di passaggio dal piano interpersonale a quello intrapersonale. La realizzazione del passaggio dall'uso dell'artefatto alla costruzione di un significato, dipende in maniera significativa dall'interazione realizzata in classe, per mezzo di particolari consegne e all'interno di pratiche sociali, e resta dunque legata all'intervento didattico dell'insegnante (Mariotti, 2009), che guida l'evoluzione secondo i propri fini didattici.

Tale evoluzione, nell'ambito della TMS, avviene secondo una ben definita organizzazione didattica, denominata Ciclo Didattico (Fig. 3), che vede il susseguirsi di attività con l'artefatto, attività di produzione individuale di segni e infine produzione ed elaborazione collettiva di segni attraverso attività di Discussione Matematica (Bartolini Bussi, 1998).

È importante sottolineare che l'insegnante, consapevole del potenziale semiotico dell'artefatto, assume il ruolo fondamentale di docente/mediatore esperto: rende trasparenti i significati potenzialmente incorporati nell'artefatto, introducendo e gestendo le consegne che ne prevedono l'uso, ed organizza le attività collettive e tutte le fasi del lavoro; orchestra le discussioni matematiche, che hanno come fine ultimo quello dell'evoluzione dei significati, da personali e legati all'uso dell'artefatto, a condivisi in relazione alla cultura matematica. Questa responsabilità genera, quindi, una attenzione particolare alla professionalità del docente a cui è richiesta un'attenta analisi di tipo epistemologico, cognitivo e didattico su cui si tornerà in seguito.

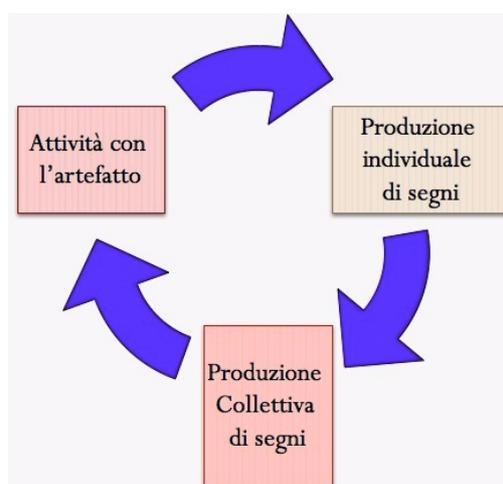


Figura 3. Il ciclo didattico.

2.6.3 Una nota sugli aspetti multimodali

Come messo in evidenza nel Seminario Nazionale del 2016, nell'ambito della mediazione semiotica è possibile tener conto anche dei contributi derivanti dagli studi svolti, soprattutto dal gruppo di ricerca di Torino (Arzarello e Robutti, 2008), *sull'embodied cognition* e sulla multimodalità. Pensiamo che anche la nostra analisi possa essere arricchita con considerazioni derivanti dall'approfondimento degli aspetti di analisi semiotica multimodale.

La lente semiotica metodologica offerta dal *Semiotic Bundle* (Arzarello e Sabena, 2014), infatti, potrebbe tornare utile nel considerare i gesti e le altre risorse embodied come risorse attraverso cui la comunicazione e la concettualizzazione si realizzano. La TMS e l'analisi semiotica multimodale, d'altro canto, come è noto, condividono la visione vygotskijana dell'apprendimento e del ruolo degli artefatti.

Nel corso del nostro lavoro più volte è emersa la necessità di riferirsi al ruolo dei gesti nelle attività oggetto di studio. In questa relazione, dunque, si faranno riferimenti, seppur ancora in forma non approfondita, sia ad una prima analisi dei gesti (in quanto segni) sia ad aspetti più generali dell'embodied cognition.

3. Una ricerca sull'uso sinergico di artefatti: il percorso sulle simmetrie assiali nella Scuola Primaria

In questa sezione descriveremo lo sviluppo della ricerca sull'uso di artefatti, manipolativi e digitali, per la costruzione del significato di simmetria assiale nella Scuola Primaria, sulla quale si andrà ad innestare il dialogo con Pier Giuseppe.

L'obiettivo iniziale della ricerca condotta da Eleonora e Antonella è stato quello di verificare come si sviluppa il processo di insegnamento-apprendimento quando si utilizzano artefatti di natura differente, in particolare manipolativi e digitali.

Il quadro teorico scelto per l'elaborazione e lo sviluppo di tale ricerca è quello della Teoria della Mediazione Semiotica, che costituisce un importante riferimento per studiare il rapporto tra gli artefatti, le azioni che essi consentono di compiere e la costruzione dei significati matematici da parte degli allievi che li utilizzano. Su tale quadro teorico si è basata la progettazione, l'implementazione e l'analisi dei risultati di un percorso di sperimentazione didattica.

L'ipotesi fondamentale dello studio che andiamo a descrivere è che l'uso combinato di due artefatti di natura diversa possa sviluppare una **sinergia**, a livello cognitivo, tale da potenziare le funzioni di mediazione semiotica di ciascuno di essi, se usato singolarmente.

In particolare si ipotizza che nell'uso di un artefatto vengano richiamati anche gli schemi d'uso sviluppati e i segni emersi durante la risoluzione del compito mediante l'altro artefatto, ovvero che l'evoluzione dei segni artefatto (situati) verso segni matematici (condivisi) possa beneficiare delle analogie tra gli schemi che emergono dall'uso alternato e sinergico dei due artefatti durante la sequenza didattica, nonché dei significati gradualmente costruiti.

Durante la preparazione del presente contributo, il confronto tra prospettive differenti ha dato vita a una ulteriore domanda di ricerca: come si modifica l'analisi della sequenza qualora si tenga conto dei due approcci differenti? Inoltre ci si chiede se le due logiche possano interagire e l'analisi possa modificarsi per effetto della presenza delle due prospettive.

3.1 Perché la simmetria assiale nella Scuola Primaria

Le Indicazioni Nazionali per la Scuola Primaria sottolineano il potere della Geometria nel coinvolgere gli studenti in attività come l'analisi delle caratteristiche delle figure, la produzione di argomentazioni matematiche relative alle relazioni geometriche, così come l'uso della visualizzazione, del ragionamento spaziale e della modellizzazione per risolvere problemi. In generale però, nonostante alla Geometria sia riconosciuta una notevole importanza (Arcavi, 2003), essa oggi ha perso il suo posto privilegiato nell'educazione matematica (Jones, 2002; Clements and Sarama 2011). Questo è vero non solo per l'approccio tradizionale euclideo, che in Italia come in altri Paesi è essenzialmente basato sul calcolo di lunghezze, angoli, ecc. e sull'applicazione di formule come quelle per i perimetri e le aree, ma anche per quello più moderno della geometria delle trasformazioni. Le trasformazioni geometriche sono presenti nei curricula per i vari livelli scolastici anche in Italia da alcuni anni, e sono state oggetto di ricerca in didattica a partire dagli anni Settanta, in cui sono stati effettuati alcuni studi essenzialmente rivolti alla progettazione di

sequenze didattiche per la Scuola Secondaria di Secondo Grado (i.e. Usiskin, 1972). Successivamente, altre ricerche hanno focalizzato l'attenzione sulle difficoltà incontrate dagli studenti alle prese con alcune specifiche trasformazioni (Grenier, 1990). In particolare, in Italia, negli stessi anni, Barberini e Bartolini Bussi (1993), studiando gli ostacoli didattici ed epistemologici connessi all'introduzione delle trasformazioni geometriche nella Scuola Primaria, hanno distinto tra quattro livelli di problemi (metamorfosi e movimenti, relazioni tra figure, trasformazioni puntuali, elementi di un gruppo) e approfondito le relazioni tra quelli ritenuti adeguati per tale livello scolare, ovvero il primo e il secondo.

Più recentemente, la tematica è tornata alla ribalta, seppur ancora essenzialmente a livello di Scuola Secondaria, grazie alla diffusione degli Ambienti di Geometria Dinamica (AGD) e al fiorire delle ricerche in tali micromondi (Hollebrands, 2007). Ng e Sinclair (2015), invece, hanno proposto un lavoro di ricerca relativo all'uso delle trasformazioni geometriche nella Scuola Primaria sottolineando l'importanza di esperienze precoci con differenti forme di simmetria assiale che non siano solo quelle della simmetria rispetto ad un asse verticale e del riconoscimento degli assi di simmetria nelle figure regolari. Lo sviluppo di una concettualizzazione dinamica della simmetria può, secondo tale punto di vista, promuovere l'emergere di abilità spaziali flessibili, andando oltre la rigidità del solo aspetto percettivo, legato a tale concetto. In accordo con Ng e Sinclair, riteniamo dunque che sia cruciale per gli studenti, già a livello di Scuola Primaria, passare dalla generica percezione di regolarità nelle figure simmetriche, alla corrispondenza tra figure simmetriche e conseguentemente alla trasformazione puntuale del piano in sé.

La scelta di concentrare la nostra attenzione sulla geometria delle trasformazioni è dovuta, inoltre, alla convinzione che essa possa offrire una lente interessante attraverso cui concettualizzare e definire gli oggetti geometrici. Lo studio delle trasformazioni geometriche, infatti, può diventare uno strumento potente ed efficace nella risoluzione di problemi geometrici, ma assume anche un ruolo particolarmente importante all'interno della Matematica, sia come concetto matematico in sé sia come strumento per caratterizzare figure geometriche.

Tuttavia, affinché le trasformazioni geometriche possano essere utilizzate in modo efficace nella costruzione di concetti, è necessario un accurato processo di matematizzazione che, pur partendo dai significati intuitivi emergenti dalle azioni e dalle osservazioni, si compia nella formalizzazione di appropriate e ben definite proprietà matematiche.

3.2 Le fasi della ricerca

Gli studi condotti inizialmente da Eleonora sulle possibili modalità di integrazione delle tecnologie per l'insegnamento-apprendimento della matematica nelle pratiche didattiche, a vari livelli di scuola (Faggiano et al, 2015), e la scoperta dell'esistenza del sistema autore New Cabri, che (con licenza personale rilasciataci da CabriLog) ci è stato consentito di utilizzare, hanno permesso, in collaborazione con Antonella, di dirigere la ricerca verso la Scuola Primaria (Montone et al., 2015). È apparso presto evidente come per progettare risorse digitali con l'obiettivo di promuovere la costruzione di significati, come quello della simmetria assiale per allievi di Scuola Primaria, fosse necessario prendersi carico esplicitamente del passaggio dai significati personali, che l'allievo può costruire operando

con l'artefatto, ai significati matematici. L'interesse per questa nuova ricerca sull'utilizzo di artefatti digitali, basata sul quadro di riferimento della mediazione semiotica, è stato così condiviso e preso in considerazione per avviare la ricerca che qui presentiamo.

La metodologia utilizzata è quella del *teaching experiment* (Steffe & Thompson, 2000), rispetto alla quale la progettazione della sequenza didattica ha un ruolo chiave in quanto tale sequenza, progettata coerentemente al quadro teorico scelto, e alle ipotesi didattiche formulate, costituisce l'ambiente di insegnamento – apprendimento nel quale si andranno a compiere le osservazioni e, più in generale, la raccolta dei dati, dai quali elaborare i risultati della sperimentazione.

La ricerca si è sviluppata in più momenti. La prima fase è stata dedicata alla riflessione teorica finalizzata al design della sequenza didattica, durante la quale si è deciso di utilizzare come artefatto digitale un quaderno interattivo in ambiente di geometria dinamica, e di affiancare a questo un artefatto manipolativo, costituito da un foglio di carta e uno spillo. Il quaderno interattivo utilizzato è stato progettato e realizzato da Eleonora ed Antonella (in collaborazione con Michele Giuliano Fiorentino) con il sistema autore New Cabri, a partire da un quaderno interattivo esistente, commercializzato da CabriLog nella collezione 1,2,3... Cabri. La scelta degli artefatti considerati si è sviluppata coerentemente con l'analisi fine dei potenziali semiotici dei due artefatti connessi, con le task che si andavano predisponendo da un lato, e con gli studi presenti in letteratura relativi al cosiddetto *duo di artefatti* (Maschietto e Soury-Lavergne, 2013) dall'altro. Il nostro duo, tuttavia, come accennato in precedenza, non considera come artefatto digitale una riproduzione dell'artefatto manipolativo ma, come si vedrà nel seguito, è costituito da due artefatti con caratteristiche diverse. Si sottolinea, inoltre, che l'analisi del potenziale semiotico dell'artefatto digitale, a differenza di quella dell'artefatto manipolativo, è stata caratterizzata da un complesso processo di revisione strettamente connesso, non solo alla definizione delle task, ma anche all'implementazione del quaderno interattivo. In seguito, in accordo con quanto previsto nella TMS, si è passati all'elaborazione della successione dei cicli didattici. Elemento chiave dalla sequenza predisposta è stata la scelta, di alternare l'uso dei due artefatti a partire da quello manipolativo.

La sequenza didattica è stata oggetto della successiva fase di sperimentazione, caratterizzata da tre momenti. Innanzitutto, è stato condotto uno studio pilota finalizzato a validare la sequenza, verificare l'effettivo dispiegarsi del potenziale semiotico, l'emergere e l'evolversi dei segni, nonché confermare l'efficacia dell'alternanza tra gli artefatti. L'analisi dei risultati dello studio pilota, pur avendo dato alcune prime conferme delle ipotesi fatte, ha messo in evidenza la necessità di rivedere, nella parte centrale, la sequenza predisposta. Il successivo ripensamento del percorso ha richiesto un ulteriore studio pilota a cui ha fatto seguito una sperimentazione svolta con una intera classe.

3.3 Gli artefatti utilizzati

In questo studio, un ruolo cruciale è giocato da un *duo* di artefatti, costituito da un artefatto concreto/manipolativo e un artefatto digitale, entrambi facenti riferimento a uno stesso contenuto matematico. I due artefatti sono stati scelti per i loro potenziali semiotici, in termini di significati che possono emergere ed evolvere quando si eseguono compiti che coinvolgono il loro uso.

L'artefatto manipolativo consiste in un foglio di carta, su cui è disegnata una retta lungo la quale piegare il foglio, e uno spillo, che sarà utilizzato per forare in corrispondenza dei punti dei quali costruire i simmetrici. Questo artefatto permette in modo diretto di realizzare una simmetria assiale, perché il foglio modella naturalmente il piano e la piega consente allo spillo di produrre due punti simmetrici corrispondenti.

L'artefatto digitale, elaborato per usufruire del valore aggiunto dato dalla tecnologia all'uso dell'artefatto manipolativo scelto, è costituito da componenti specifiche di un Ambiente di Geometria Dinamica (AGD). Si tratta di un quaderno interattivo realizzato all'interno dell'ambiente dinamico New Cabri che permette di creare e progettare attività di apprendimento che includono oggetti e strumenti tipici di un AGD. Il quaderno interattivo appare come una sequenza di pagine che includono le consegne formulate, insieme a specifici strumenti/pulsanti, che corrispondono agli elementi dell'artefatto manipolativo. In particolare, tra gli strumenti/pulsanti disponibili nell'ambiente di creazione, che nella nostra ricerca costituiscono gli artefatti, e in accordo con i principi generali degli AGD, gli strumenti/pulsanti scelti sono quelli che consentono di costruire alcuni oggetti geometrici (punto, retta, segmento, punto medio, retta perpendicolare, punto di intersezione) insieme agli strumenti "Simmetria assiale", "Compasso" e "Traccia". Inoltre, un ruolo fondamentale è assunto dalla funzione di trascinamento, potenziata dallo strumento "Traccia", che consente di osservare l'invarianza delle proprietà caratterizzanti le figure.

3.4 Prima elaborazione della sequenza didattica

Si descrive qui di seguito il processo di progettazione di una prima versione della sequenza didattica, definita dal succedersi di "cicli didattici", in accordo con il quadro teorico scelto, e si sottolineano i momenti chiave dell'azione didattica.

Prima di passare alla descrizione dei potenziali semiotici degli artefatti¹⁰, in relazione agli obiettivi dei vari cicli didattici, è opportuno richiamare l'attenzione su alcuni aspetti del concetto matematico di simmetria assiale che risultano importanti rispetto alla costruzione della sequenza didattica.

La nozione geometrica cui si fa riferimento è quella di simmetria assiale, intesa come trasformazione isometrica del piano in sé con una retta di punti fissi (detta asse).

In particolare, si intende sottolineare che la simmetria assiale è una corrispondenza biunivoca tra punti del piano (che è quindi dominio della funzione), la quale conserva le ampiezze degli angoli, le distanze, e trasforma rette in rette e segmenti in segmenti congruenti/sovrapponibili.

Centrali nel percorso saranno, inoltre, le proprietà della simmetria mediante le quali è possibile costruire il punto simmetrico di un punto dato rispetto ad una retta, ovvero la perpendicolarità della congiungente i punti corrispondenti con l'asse e l'equidistanza dei due punti dall'asse.

¹⁰ Ovvero, del ruolo di *boundary object* dell'artefatto che connette le esperienze e le concettualizzazioni dello studente con i significati del docente.

Di seguito si descrive dettagliatamente la progettazione relativa ai cicli didattici. La messa a punto della sequenza dei cicli didattici è accompagnata da un'analisi a priori che esplicita il potenziale semiotico che ci si aspetta possa emergere durante le attività.

3.4.1 Primo ciclo didattico: descrizione delle consegne e potenziale semiotico dell'artefatto manipolativo

Il primo ciclo didattico prevede le tre consegne (C.1, C.2 e C.3), da svolgere in coppia, di seguito descritte.

Data una figura disegnata (in nero) sul foglio su cui, al momento della consegna si disegna una retta rossa, nella C.1 si chiede di disegnare in rosso la figura simmetrica di quella nera, rispetto alla retta rossa, piegando il foglio lungo la retta e usando lo spillo per individuare i punti simmetrici necessari mediante foratura del foglio. Completata tale consegna, sullo stesso foglio viene disegnata una ulteriore retta blu e nella C.2 si chiede di disegnare in blu la figura simmetrica di quella nera, rispetto alla retta blu.

In Figura 4 è riportato il foglio così come si presenta prima di questa seconda consegna.

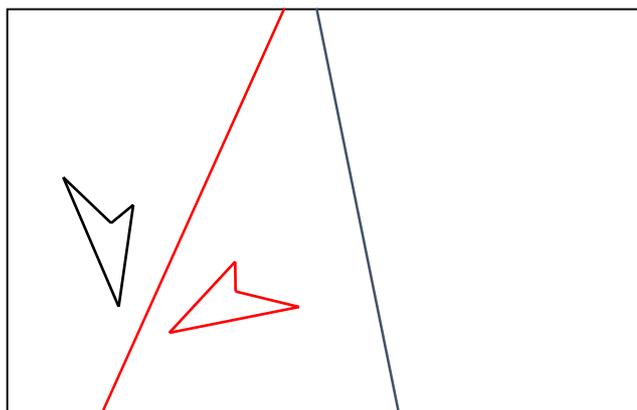


Figura 4: Al termine della C.1 sul foglio dovrebbero comparire la figura nera, la retta rossa e la figura rossa, simmetrica di quella nera rispetto alla retta rossa. Prima di assegnare la C.2 si disegna sul foglio una ulteriore retta blu

Nella C.3, il cui obiettivo è la produzione personale di segni, si chiede agli studenti di scrivere come abbiano disegnato le due figure simmetriche e cosa hanno di uguale e di diverso, escluso il colore, le due figure ottenute.

L'artefatto manipolativo relativo alle prime tre consegne evoca quattro importanti significati matematici:

- 1a) l'idea di asse di simmetria, espressa dalla piegatura del foglio lungo una retta;
- 1b) l'idea della simmetria come corrispondenza puntuale, espressa dai fori/punti creati con lo spillo;
- 1c) l'idea di simmetria come corrispondenza biunivoca che trasforma segmenti in segmenti congruenti: l'unire i punti ottenuti con lo spillo è un processo che restituisce come prodotto la figura simmetrica, a patto che si rispetti la corrispondenza tra i segmenti;

1d) l'idea di dipendenza dall'asse della figura simmetrica, espressa dal confrontare cosa cambia e cosa non cambia nella realizzazione di due figure simmetriche di una stessa figura rispetto a due assi distinti

Si sottolinea che nella formulazione delle consegne scritte, per favorire la produzione di segni artefatto, si è scelto di utilizzare alcune parole o espressioni come di seguito specificato:

- *Piegare lungo una retta*, usato per riferirsi all'azione diretta dell'utilizzo dell'asse;
- *Puntare*, usato per riferirsi all'azione diretta dell'individuazione dei punti simmetrici;
- *Unire*, usato per riferirsi all'azione diretta del congiungere a due a due i punti/fori corrispondenti per disegnare la figura simmetrica;
- *Figura simmetrica*, usato per riferirsi al risultato diretto delle tre azioni (piegare lungo la retta, puntare/forare sulla figura, unire i punti/fori).

Nello svolgere queste prime tre consegne, si può prevedere che, dopo aver piegato il foglio, gli allievi usino lo spillo per forarlo, puntandolo più volte lungo il contorno. In questo modo ci si aspetta che emerga il significato di corrispondenza puntuale, seppur la dipendenza funzionale possa restare implicita. Inoltre, dalla piegatura del foglio, che porta una figura a coincidere con un'altra, dovrebbe emergere il significato intuitivo di retta/asse di simmetria come elemento caratterizzante la trasformazione. Alcuni bambini potrebbero intuire che sia sufficiente fare i fori in corrispondenza dei soli vertici della figura (poligonale). Tuttavia, potrebbero presentarsi diverse situazioni. Per esempio, se nella C.1 il bambino ha forato solo in corrispondenza dei vertici ma ha avuto difficoltà nel tracciare la figura simmetrica, nella C.2 potrebbe decidere di adoperare strategie di controllo (per es. congiungere i vertici forando a due a due, oppure numerare ordinatamente i vertici della figura di origine e i corrispondenti fori, o ancora fare ulteriori fori lungo i segmenti).

Le eventuali ambiguità nel completamento della figura simmetrica potrebbero essere risolte attraverso un continuo confronto visivo tra i punti e i segmenti della figura di origine e quelli della figura ottenuta. In ogni caso, l'emergere di tali ambiguità può rappresentare un interessante elemento di discussione che apre al problema della corrispondenza tra segmenti, ovvero al riconoscimento delle proprietà delle simmetrie.

Infine, le domande della C.3, a cui si chiede di rispondere per iscritto, sono pensate per indurre gli allievi a ripercorrere le operazioni compiute nella C.1 e nella C.2. Ci si aspetta così l'emergere di segni artefatto (nei testi scritti e nelle espressioni verbali) che rimandino all'uso dell'artefatto stesso. Inoltre, le domande della C.3 richiedono indirettamente all'allievo di riflettere su aspetti invarianti e sul ruolo chiave dell'asse nella realizzazione della simmetria attraverso la piegatura del foglio.

Il materiale prodotto da ciascuno degli allievi costituisce la base per la successiva Discussione Matematica, modello privilegiato di discussione collettiva, da condurre, come previsto dal ciclo didattico nella TMS, prima di passare al ciclo successivo.

3.4.2 Secondo ciclo didattico: descrizione delle consegne e potenziale semiotico dell'artefatto digitale

Le due consegne del secondo ciclo (C.4 e C.5), di seguito descritte, prevedono l'utilizzo dell'artefatto digitale. Anche queste sono pensate per essere svolte dagli allievi in coppia.

La C.4 è stata costruita come segue. Nella pagina del quaderno interattivo (Fig. 5) compaiono una retta rossa e un punto A, gli strumenti/pulsanti "Simmetria" e "Nome" e il testo:

1. *Utilizzando lo strumento "Simmetria" costruisci il punto simmetrico del punto A rispetto alla retta rossa e chiamalo C.*

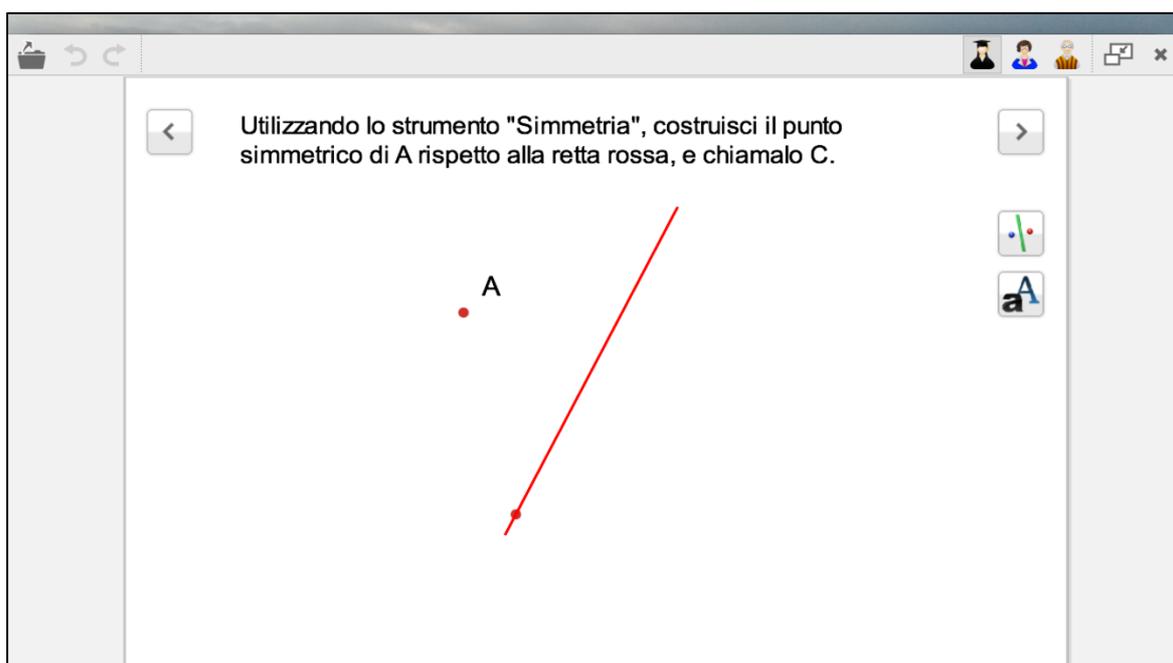
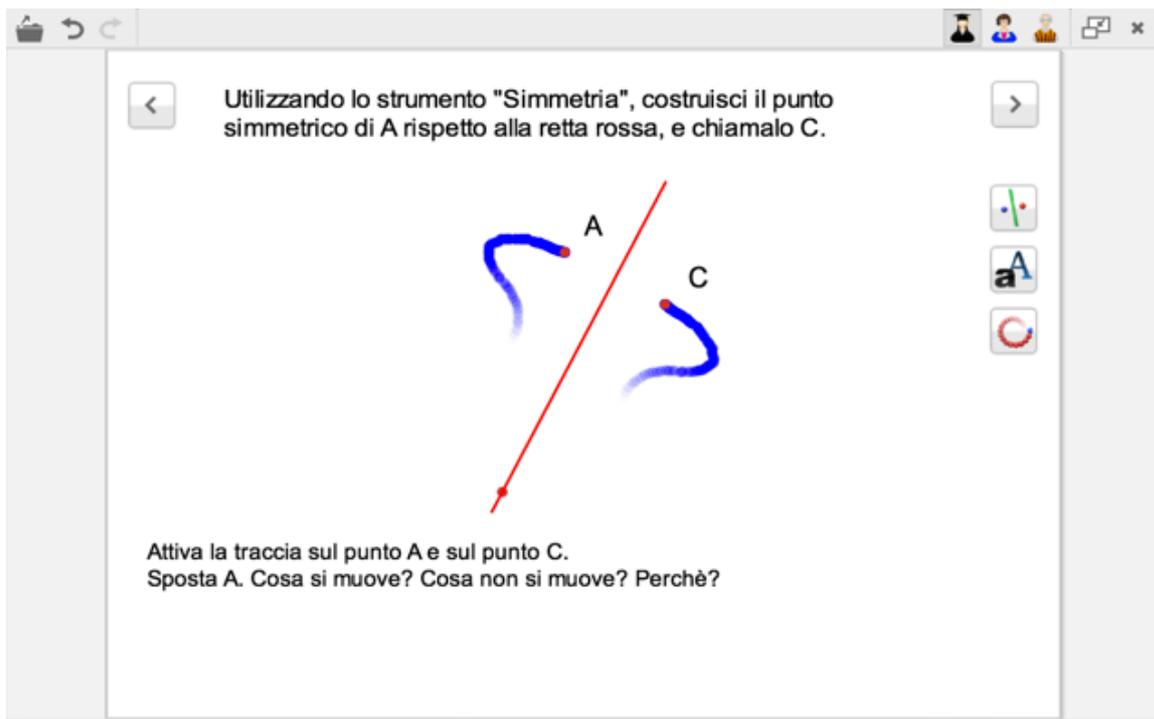


Figura 5: la prima pagina delle attività con il quaderno interattivo

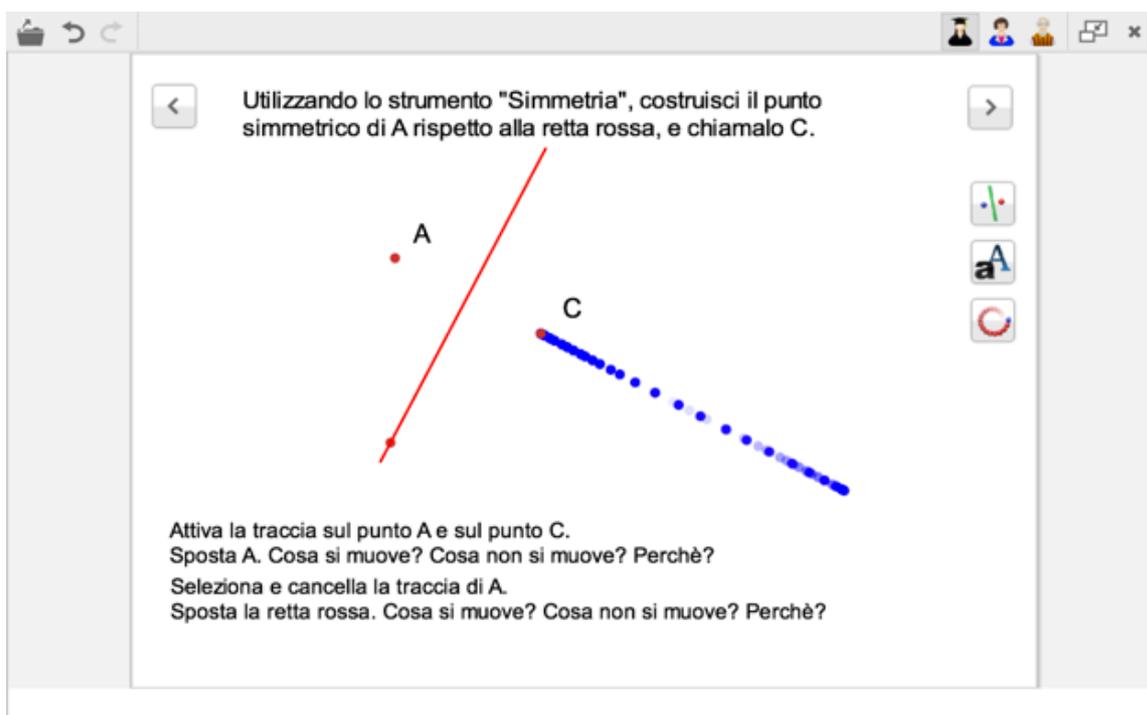
I passi successivi della consegna compaiono in successione uno per volta cliccando sulla freccia per andare avanti, presente nella pagina.

2. (compare lo strumento/pulsante "Traccia") *Attiva la traccia sul punto A e sul punto C. Sposta A. Cosa si muove? Cosa non si muove? Perché?*
3. *Seleziona e cancella la traccia di A. Sposta la retta rossa. Cosa si muove? Cosa non si muove? Perché?*
4. *Attiva nuovamente la traccia di A. Sposta il punto C. Cosa si muove? Cosa non si muove? Perché?*

A titolo di esempio, in Figura 6, si presentano le immagini degli effetti del trascinamento nel secondo (a.) e nel terzo (b.) passo.



(a.)



(b.)

Figura 6: effetti del trascinamento del punto A (a.) e dell'asse (b.)

In accordo con il modello del ciclo didattico, la C.5 ha come obiettivo la produzione personale di segni relativi alla C.4, eseguita con l'artefatto. Nella C.5, pertanto, si chiede di scrivere in una tabella riassuntiva le risposte alle domande poste dal quaderno nella C.4.

L'artefatto digitale relativamente alle consegne C.4 e C.5 evoca i seguenti significati matematici:

2a) l'idea della simmetria come corrispondenza puntuale, espressa dal cliccare sullo strumento/pulsante "Simmetria"¹¹ e poi selezionare il punto di cui si vuole il simmetrico e la retta rispetto alla quale effettuare la simmetria (o viceversa);

2b) l'idea di dipendenza del punto simmetrico dal punto d'origine, espressa dal trascinare il punto d'origine e osservare il movimento conseguente del punto simmetrico; l'effetto può essere reso maggiormente evidente attivando lo strumento/pulsante "Traccia" per entrambi i punti e osservando la relazione tra le due traiettorie (Fig 6a);

2c) l'idea di dipendenza del punto simmetrico dall'asse di simmetria, espressa dal trascinare l'asse e osservare il movimento conseguente del solo punto simmetrico; l'effetto può essere reso maggiormente evidente attivando lo strumento/pulsante "Traccia" per il punto simmetrico (Fig 6b);

2d) l'idea di duplice dipendenza del punto simmetrico sia dal punto d'origine che dall'asse, espressa dal trascinare il punto simmetrico e osservare il conseguente movimento rigido dell'intera configurazione.

Si sottolinea che, in merito al significato 2d), nell'ambiente di geometria dinamica utilizzato, contrariamente a quanto accade in altri AGD, come per esempio in Cabri Géomètre, è possibile trascinare il punto ottenuto per simmetria e ciò comporta di fatto una traslazione dell'intero foglio.

L'utilizzazione del trascinamento a seguito della costruzione effettuata al primo passo, introduce il significato di co-variazione, attraverso il movimento coordinato dei punti, e in particolare nel terzo passo potrebbe emergere la distinzione, legata alla natura diversa dei movimenti reciproci dei punti, tra variazione indipendente (punti che si muovono in seguito all'azione diretta) e dipendente (punti che si muovono perché legati ai precedenti dalla costruzione) (Mariotti, 2010; 2015).

Inoltre, nel quarto passo, ancora l'uso del trascinamento permette di evidenziare il comportamento particolare del punto simmetrico in relazione a tutti gli elementi della configurazione. Trascinando il punto simmetrico, infatti, si osserva il movimento rigido dell'intera configurazione. La diversità dei movimenti tra il punto simmetrico e il punto d'origine, può essere messa in relazione con la distinzione tra variabile dipendente e variabile indipendente.

3.4.3 La possibile sinergia tra i due artefatti al termine dei primi due cicli

Come detto in precedenza, l'ipotesi della ricerca è che l'utilizzo intenzionale e controllato di artefatti manipolativi e artefatti digitali permetta lo sviluppo di una sinergia tra essi in grado di potenziarne gli effetti.

In particolare, si ipotizza che, al termine dei primi due cicli, l'osservazione richiesta dalla C.4 possa far riemergere le esperienze con l'artefatto manipolativo fatte dagli allievi, ovvero che le immagini dello schermo possano essere interpretate in relazione alle azioni di piegatura, di foratura, ecc. In questo modo si prevede che i significati già emersi in precedenza, grazie all'uso dell'artefatto manipolativo, siano estesi e completati dai

¹¹ Pungere con uno spillo e premere il bottone, dal punto di vista della mediazione didattica, apparentemente hanno affinità ma solo se non si tiene conto che il primo è un artefatto analogico e il secondo digitale.

significati specifici emergenti dall'uso dell'artefatto digitale. Si potrebbe riconoscere in questo fenomeno atteso un processo di potenziamento reciproco ovvero di sinergia tra i processi di mediazione relativi agli artefatti.

Per esempio, dopo aver costruito il punto simmetrico mediante lo strumento/pulsante "Simmetria", la relazione tra i due punti è interpretabile attraverso la piegatura, dunque i due punti possono essere pensati come i due fori. Tuttavia il significato di tale relazione si può arricchire della distinzione, osservabile con il diverso comportamento al trascinamento, tra punto originale e punto corrispondente, contribuendo così allo sviluppo del significato matematico di relazione funzionale tra un punto e la sua immagine (il punto simmetrico ottenuto mediante lo strumento/pulsante "Simmetria"), per arrivare eventualmente al significato di variabile indipendente e variabile dipendente.

3.4.4 Terzo ciclo didattico: descrizione delle consegne e potenziale semiotico dell'artefatto manipolativo – una criticità nella sequenza

In accordo con le nostre ipotesi, il terzo ciclo didattico prevede due consegne (C.6 e C.7), utilizzando nuovamente l'artefatto manipolativo, anche queste da svolgere in coppia. Nella C.6 si guidano gli studenti a osservare la perpendicolarità del segmento congiungente due punti simmetrici con l'asse e l'equidistanza dei punti simmetrici dall'asse. Nella consegna si legge:

Usando lo spillo, trova il simmetrico del punto A rispetto alla retta rossa e chiamalo C.

Piega il foglio lungo una retta passante per A e C e poi riapri il foglio. Osserva il segmento AC.

Cosa puoi dire del segmento AC?

Come sono gli angoli che il segmento AC forma con l'asse?

Nella C.7, dopo aver aggiunto sul foglio un nuovo punto B, si chiede di effettuare la costruzione del simmetrico di B e chiamarlo D; infine, si chiede di spiegare cosa hanno in comune i due segmenti congiungenti le due coppie di punti simmetrici. Nella consegna si legge:

Usando lo spillo, trova il simmetrico del punto B rispetto alla retta rossa e chiamalo D.

Piega il foglio lungo una retta passante per B e D e poi riapri il foglio. Osserva il segmento BD.

Cosa puoi dire del segmento BD?

Come sono gli angoli che il segmento BD forma con l'asse?

Cosa hanno in comune i segmenti AC e BD?

L'artefatto manipolativo, in relazione alle consegne C.6 e C.7 evoca i seguenti significati matematici:

3a) l'idea di equidistanza dei due punti dall'asse, evocata dall'osservare che, piegando il foglio lungo l'asse di simmetria, il punto simmetrico costruito con lo spillo si sovrappone al punto d'origine;

3b) l'idea di perpendicolarità tra asse e retta congiungente i punti corrispondenti, evocata dall'effettuare la piega lungo la congiungente i punti corrispondenti e, riaperto il foglio, osservare gli angoli tra le due rette/pieghe;

3c) l'idea delle proprietà di perpendicolarità ed equidistanza come proprietà caratteristiche, evocata dal confronto tra i due segmenti, congiungenti le due coppie di punti simmetrici, osservandone gli elementi comuni.

Dalle due domande della C.6, ci aspettavamo che l'esecuzione delle due pieghe - quella lungo l'asse per individuare il punto simmetrico e quella richiesta per individuare il segmento congiungente i punti corrispondenti - portasse l'allievo a riconoscere la perpendicolarità tra asse e congiungente. In particolare, l'angolo che viene a formarsi come prodotto finale delle due piegature dovrebbe essere riconosciuto come angolo retto.

Il confronto dei segmenti AC e BD nella C.7 era pensato per far emergere l'esplicitazione della relazione di tali segmenti con l'asse richiesto: dalle proprietà comuni può emergere la perpendicolarità, come proprietà caratteristica; mentre dalle differenze può emergere l'equidistanza anch'essa come proprietà caratteristica.

Questo terzo ciclo ha rappresentato, in questa prima versione, il passaggio critico della sequenza. Infatti, l'analisi dei risultati del primo studio pilota ha messo in evidenza che l'effettuare le due piegature riaprendo il foglio, come richiesto dalla consegna, si è rivelato insufficiente a focalizzare l'attenzione sul riconoscimento delle due proprietà in quanto proprietà caratteristiche. Inoltre, ci siamo resi conto che mancava nella C.7 un momento in cui l'allievo utilizzasse le proprietà riconosciute nella C.6 per costruire il punto simmetrico indipendentemente dall'uso dello spillo. Per questi motivi, come sarà mostrato nel dettaglio in seguito, le consegne del terzo ciclo sono state ripensate e riformulate.

3.4.5 La possibile sinergia tra i due artefatti al termine dei primi tre cicli

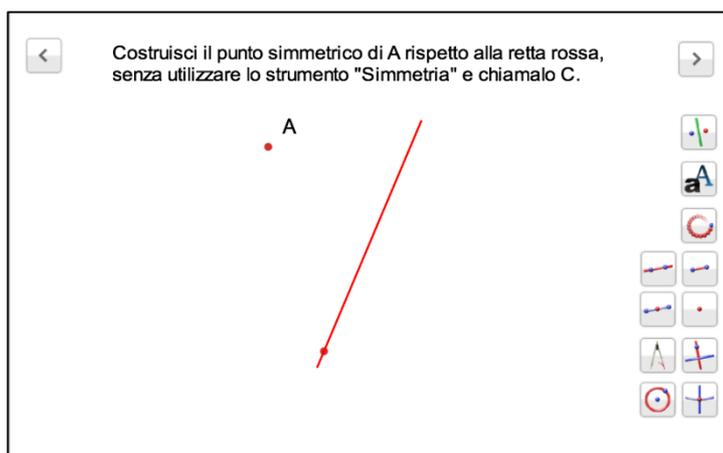
Si ipotizza che l'interpretazione delle azioni e delle configurazioni ottenute con l'artefatto manipolativo possa riferirsi anche alle esperienze avute con l'artefatto digitale. In particolare possiamo aspettarci che due punti distinti di cui fare i simmetrici possano essere interpretati come posizioni diverse assunte da un punto trascinato.

L'artefatto digitale può aver già contribuito, per esempio, a far emergere l'idea che i punti corrispondenti abbiano la stessa distanza dall'asse; le consegne del terzo ciclo sono pensate per guidare gli allievi ad esplicitare tale proprietà e ad individuarne il suo carattere di proprietà caratteristica.

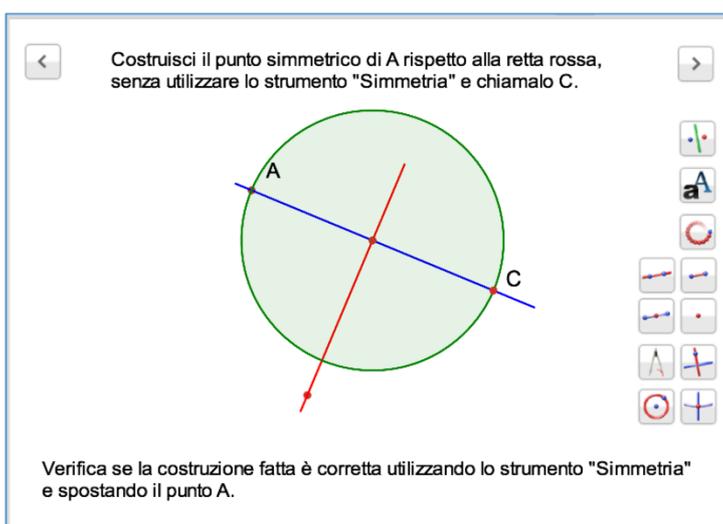
Si ipotizza, dunque, che l'interpretazione dei due punti distinti come posizioni diverse assunte da uno stesso punto trascinato contribuisca alla generalizzazione delle due proprietà (perpendicolarità ed equidistanza) e alla evoluzione dello status di tali proprietà da contingenti a caratteristiche.

3.4.6 Quarto ciclo didattico e potenziale semiotico dell'artefatto digitale

Il quarto ciclo prevede due consegne (C.8 e C.9) da svolgere con l'utilizzo dell'artefatto digitale strumento/pulsante "Retta Perpendicolare", "Punto Medio" e "Compasso", con la funzione di Trascinamento. Nella C.8 si chiede di costruire il simmetrico di un punto A rispetto ad una retta data, senza utilizzare lo strumento/pulsante "Simmetria", e di chiamarlo C (Fig. 7a). Successivamente si chiede di verificare se la costruzione fatta è corretta utilizzando lo strumento/pulsante "Simmetria" e spostando il punto A (Fig. 7b).



(a.)



(b.)

Figura 7: La pagina del quaderno interattivo relativa alla consegna C.8

Nella C.9 si chiede di raccontare per iscritto come è stato trovato C e spiegare perché ciò che è stato fatto funziona. Anche in questo caso si chiede agli studenti di lavorare in coppia.

Il cliccare sullo strumento/pulsante "Retta perpendicolare" e poi sul punto A e sull'asse, evoca l'idea della perpendicolarità tra il segmento per A su cui si trova il simmetrico e l'asse; il cliccare sullo strumento/pulsante "Compasso" e poi sul punto di intersezione tra l'asse e la perpendicolare all'asse per A, e sul punto A, evoca l'idea che il punto simmetrico si possa ottenere dall'intersezione tra la circonferenza così creata e la perpendicolare, e quindi sia alla stessa distanza di A dall'asse; il costruire la

perpendicolare all'asse per A e la circonferenza con centro nel punto di intersezione tra l'asse e la perpendicolare e raggio la distanza di A dall'asse, evoca l'idea che utilizzando le proprietà caratterizzanti la simmetria, già osservate precedentemente, sia possibile individuare univocamente il punto simmetrico.

3.4.7 La possibile sinergia tra i due artefatti al termine del quarto ciclo

Come richiesto nella C.8, ci aspettiamo che per costruire C senza utilizzare lo strumento/pulsante "Simmetria" gli allievi ricorrano alle proprietà di perpendicolarità ed equidistanza che dovrebbero essere emerse dalle attività di piegatura. Questo però richiede di riconoscere e riutilizzare tali proprietà per la costruzione del simmetrico utilizzando gli strumenti/pulsanti disponibili. Tutto questo presenta una notevole complessità: il processo risolutivo potrebbe non essere immediato e procedere per prove ed errori.

In accordo con l'ipotesi di sinergia, il riconoscimento della perpendicolarità e quindi la possibilità dell'uso del comando "Retta perpendicolare" può contare, sui segni costruiti e sulle azioni effettuate fino a questo momento, in termini sia di immagini sia di parole.

Una ben diversa complessità si potrebbe invece presentare nel trasformare la proprietà di equidistanza nell'uso del comando "Compasso": la concettualizzazione della configurazione potrebbe consistere nella relazione tra il segmento congiungente i due punti e l'asse di simmetria che lo divide a metà e non essere stata ancora concettualizzata in termini di distanze e di uguaglianza tra distanze. Tale concezione può indurre ad esempio l'uso dello strumento/pulsante "Punto medio", uso che risulta inefficace.

3.4.8 Quinto e sesto ciclo didattico: si inverte l'ordine degli artefatti

Nel quinto e nel sesto ciclo si inverte l'ordine di utilizzo degli artefatti e si ricomincia da quello digitale. Entrambi prevedono le stesse due consegne (C.10 e C.11; C.12 e C.13), quello che cambia è l'artefatto da utilizzare.

In C.10 (rispettivamente C.12) è data una coppia di punti A e C che dovranno essere interpretati come punti simmetrici rispetto ad una simmetria di cui l'asse è nascosto e si chiede di individuarlo e di tracciarlo. Infine si chiede di verificare, con lo strumento/pulsante "Simmetria" (rispettivamente con lo spillo), se il simmetrico di A rispetto alla retta tracciata è proprio C.

In C.11 (rispettivamente C.13) si chiede di scrivere come è stato individuato l'asse e di spiegare se e perché quello che è stato fatto funziona.

Nelle consegne di questi ultimi due cicli, il tracciare il segmento per A e C, e poi il cliccare sullo strumento/pulsante "Punto Medio", così come, con il foglio, il piegare lungo la retta per i punti A e C, e poi senza riaprire il foglio, il piegare in modo da sovrapporre i punti A e C, evoca l'idea che il punto medio sia un punto equidistante da A e da C e pertanto dovrà appartenere all'asse.

In riferimento alla C.10, l'osservare che piegando per sovrapporre A e C si ottiene la sovrapposizione di quattro angoli uguali, evoca l'idea che la retta/piega per il punto medio, che fa sovrapporre i punti A e C, sia perpendicolare al segmento AC. Questo potenziale è caratteristico dell'artefatto manipolativo e non ha analogo nell'artefatto digitale.

Il cliccare sullo strumento/pulsante “Retta Perpendicolare” e poi sul punto medio tra A e C e sul segmento AC, così come, con il foglio, il piegare prima lungo la retta per A e C e poi, senza riaprire, sovrapponendo A e C, l’osservare che si formano quattro angoli retti, evoca l’idea che l’asse si ottenga come perpendicolare al segmento congiungente A e C passante per il suo punto medio oltre che, come già visto con l’artefatto manipolativo, il segmento per A e C sia perpendicolare all’asse.

Osserviamo che le consegne degli ultimi due cicli sono state predisposte in modo tale che, le stesse proprietà della simmetria che sono state utilizzate per costruire il simmetrico di un punto rispetto ad una retta (senza lo strumento/pulsante “Simmetria”) possano essere utilizzate per individuare l’asse di simmetria che genera una coppia di punti simmetrici. Per elaborare la costruzione richiesta, però, è necessario invertire la relazione di perpendicolarità tra asse e retta AC. Inoltre la proprietà che “il punto medio del segmento AC sta sull’asse” dovrà essere rielaborata in “l’asse passa per il punto medio”. Anche in questo caso si tratta di una forma di inversione della relazione di appartenenza che coincide con due espressioni verbali che hanno lo stesso significato geometrico ma focalizzano l’attenzione (invertendo i soggetti della frase) su l’uno o l’altro elemento della relazione.

3.4.9 La possibile sinergia al termine degli ultimi due cicli

L’utilizzo della stessa consegna (C.10 e C.12) con i due tipi di artefatto, non è casuale ma finalizzato a far emergere gli elementi comuni ai differenti schemi d’uso dei due artefatti. Secondo l’ipotesi di sinergia ciò dovrebbe rafforzare l’idea che le due costruzioni siano entrambe basate sull’uso delle proprietà caratteristiche, e possibili solo grazie ad esse.

In particolare, quanto emerso nelle attività precedenti riguardo alla doppia piegatura e alle proprietà della simmetria assiale dovrà essere rielaborato nella discussione collettiva mirando a far evolvere il significato operativo di perpendicolarità nel significato geometrico di mutua relazione tra rette. Questo corrisponde a stabilizzare il significato geometrico della parola perpendicolare e il significato geometrico della configurazione di due rette che si tagliano formando angoli retti. In conclusione, ci aspettiamo che possano essere condivisi due segni, uno verbale e l’altro iconico, con un significato di “perpendicolarità come proprietà di due rette che incontrandosi formano quattro angoli sovrapponibili”. Si noti, inoltre, che tutto questo si può ricondurre alla pratica corrente di costruzione dell’angolo retto “campione” attraverso una doppia piegatura.

In accordo con l’ipotesi di sinergia, infine, nelle task C.11 e C.13, ci aspettiamo che gli allievi descrivano la costruzione elencando, i pulsanti usati (nel primo caso) e le azioni di piegatura effettuate (nel secondo caso) e i loro effetti. Nella spiegazione dovrebbero emergere sia le relazioni tra pulsante e proprietà, indotta dalla costruzione mediante tale pulsante, sia quelle tra piegatura e sue conseguenze.

3.5 Primo studio pilota

Una sperimentazione di questa prima versione della sequenza didattica è stata effettuata in uno studio pilota con un gruppo di quattro bambini di classe quarta. I bambini hanno svolto le consegne lavorando in coppia. Le discussioni al termine di ciascun ciclo sono state

tenute da Antonella e Eleonora. La sperimentazione ha richiesto cinque incontri pomeridiani di circa due ore ciascuno.

L'analisi di questo studio ha mostrato che, almeno nei primi due cicli, il percorso ha contribuito all'emergere ed evolvere dei segni, così come previsto dall'analisi a priori. Inoltre, è stato possibile rilevare alcuni primi elementi di sinergia tra i due artefatti.

Di seguito si presenta l'analisi di alcuni estratti delle discussioni matematiche avvenute al termine del primo e del secondo ciclo.

Questa parte della ricerca è stata sviluppata prima dell'incontro con Pier Giuseppe, tuttavia, una rilettura da una prospettiva differente di quanto accaduto in questo studio ha fornito interessanti elementi di confronto nell'ottica del dialogo. Nella seguente analisi, pertanto, si potranno leggere alcuni commenti inseriti a posteriori da Pier Giuseppe (tali commenti sono riconoscibili perché anticipati dall'acronimo "PG").

3.5.1 Un primo esempio di evoluzione dei segni: dal forare con lo spillo alla corrispondenza punto-punto

I bambini (F., M., D. ed A.) hanno effettuato le prime tre task (C.1, C.2 e C.3). Durante la successiva discussione collettiva, l'insegnante/ricercatore (T.) chiede ai bambini di raccontare quello che hanno fatto perché possa farlo anche lei. Una prima parte della discussione è incentrata sulla scelta dei punti su cui usare lo spillo. Non tutti i bambini hanno riconosciuto subito che era sufficiente forare in corrispondenza dei vertici ma al termine della prima parte della discussione nessuno di loro sembra avere più dubbi in proposito. Poi F. prende la parola e, quasi ad indicare una cosa importante ma ovvia, muove la mano aperta da destra verso sinistra a simulare la piega mentre dice "dobbiamo piegare il foglio lungo questa linea rossa" e la indica con il dito. A questo punto la discussione si sofferma sull'uso dello spillo (Tab 1.).

Trascrizioni e gesti	Commenti
<p>F. allora con questo spillo, dopo aver piegato... dobbiamo su questo... vedi <u>questo punto</u>?... lo dobbiamo, come dire?, <u>puntare</u> con lo spillo...</p> <p><i>prende lo spillo, lo mostra, lo porge all'insegnante, si avvicina al foglio poggiato sul banco e con il dito indica il punto su cui puntare lo spillo premendo sul foglio.</i></p>	<p>Quando F. indica con il dito il punto, preme su di esso quasi a voler simulare l'operazione di foratura dello spillo.</p> <p>Il gesto di puntare e appoggiare il dito sul foglio è un segno artefatto che rappresenta iconicamente l'azione con lo spillo.</p>
<p>T. così? <u>Punto</u>?</p> <p><i>poggia la punta dello spillo in corrispondenza del vertice indicato da F.</i></p>	<p>Qui l'insegnante ha davanti a sé il foglio piegato lungo la linea rossa con la figura nera rivolta verso l'alto e chiede conferma prima di procedere riprendendo la parola usata da F.</p>

	L'insegnante rispecchia e accompagna l'azione di puntare lo spillo con la parola "punto" che rappresenta un segno Pivot, infatti la parola rimanda a un tempo al foro dello spillo, al gesto del dito appoggiato, ma anche al segno matematico "punto".
F. Si, però <u>forte</u> , così <u>passa anche dall'altro lato</u>	Qui si vede come il puntare e forare con lo spillo riesca a evocare l'idea di corrispondenza tra il punto d'origine ed il punto simmetrico. [PG - I termini "forte" e "passa dall'altro lato" evidenziano la caratteristica <i>analogica</i> dell'artefatto manuale su cui si tornerà in seguito.]
T. Perché deve <u>passare dall'altro lato</u> ?	
F. Si, bisogna far passare il punto dall'altro lato ...per fare la figura, <u>per unire i vari punti per poi alla fine fare la figura</u> <i>A questo punto interviene anche D.</i>	La corrispondenza punto-punto che si ottiene forando con lo spillo in corrispondenza dei vertici è dunque, secondo F., quella grazie alla quale è possibile ottenere la figura simmetrica. Emerge il significato di corrispondenza tra figure.
D. che se noi non facciamo i punti... cioè se non <u>trasferiamo</u> i punti dall'altro lato è quasi impossibile farla	La parola "trasferiamo" usata da D. rafforza l'idea espressa da F. che lo spillo debba passare dall'altro lato. Il segno emerso in relazione all'uso dell'artefatto manipolativo si va evolvendo, in maniera condivisa. Infatti, "trasferiamo" è un segno pivot, in quanto esprime da un lato l'azione di forare, ma anche il significato matematico di trasformazione che vogliamo costruire verso il significato di simmetria come corrispondenza puntuale.
T. va bene allora posso <u>puntare</u> su tutti e quattro i vertici... e ora che ho i quattro	L'insegnante con il consenso di tutti i bambini realizza tutti i fori e riapre il

buchi?	foglio
<p>F. dobbiamo prima di tutto individuare i punti... questo qui <u>corrisponde</u> a questo...</p> <p><i>punta l'indice della mano destra su uno dei vertici della figura nera e l'indice della mano sinistra sul foro corrispondente</i></p>	<p>Il segno artefatto “puntare” si è evoluto nel significato di corrispondenza punto-punto: F. usa la parola “corrisponde”.</p> <p>[PG - Si può qui esplicitare il senso di rete multimodale: in questo caso l'azione di costruire il simmetrico/forare il foglio emerge sia come gesto simulato, sia come formulazione linguistica (corrisponde). L'uso di “corrisponde” per F. non è detto che abbia lo stesso significato che il termine ha per i ricercatori, ma sicuramente sottende l'azione compiuta ed è questa a riempire di significato quella. Ha senso e dimostra l'efficacia del discorso perché è connessa all'azione.]</p>

Tabella 1.

Questo episodio mostra il potenziale semiotico così come era atteso, e anche una prima evoluzione verso i significati matematici, obiettivo dell'intervento didattico. L'intervento dell'insegnante/ricercatore è determinante per indurre gli allievi ad esplicitare i significati personali, e le riformulazioni diverse mostrano l'evolversi dei significati, da descrizione dell'azione, all'idea di corrispondenza puntuale.

3.5.2 Una prima evidenza della sinergia tra gli artefatti

L'episodio seguente si riferisce alla discussione svolta al termine del secondo ciclo, durante la quale sono emersi elementi riconducibili all'ipotesi di sinergia tra l'artefatto manipolativo e l'artefatto digitale.

Nelle consegne C.4 e C.5 i bambini hanno ottenuto il punto simmetrico di un punto rispetto ad una retta, utilizzando lo strumento “Simmetria” dell'ambiente digitale e hanno osservato cosa si muove e cosa non si muove, spostando uno per volta il punto dato A, l'asse di simmetria e il punto simmetrico C. L'analisi dei video della discussione mette in evidenza due fasi: nella prima fase è possibile riconoscere l'emergere del potenziale semiotico dell'artefatto digitale. Inoltre, emerge che i bambini riconoscono che il punto A è libero di muoversi, e anche grazie al comando “traccia”, diventa evidente per loro che il punto simmetrico C dipende dal punto iniziale A e dall'asse. Per esempio F. dice: “Io sto spostando solo A, però visto che c'è simmetria in questi due punti, si sposta anche C”.

Nella seconda fase della discussione, l'analisi mostra evidenti elementi della possibile sinergia che si sviluppa utilizzando i due artefatti. Inoltre, il riferimento incrociato all'uso di entrambi, favorisce la costruzione del significato matematico della dipendenza funzionale tra i punti in una simmetria. In questa seconda fase della discussione, A. sta

trascinando il punto C ottenuto dalla simmetria e di conseguenza può osservare che sia il punto A sia l'asse di simmetria si stanno muovendo.

Come detto precedentemente, l'effetto visivo del trascinamento di C è una traslazione dell'intero insieme di oggetti presenti sul foglio. Alle domande dell'insegnante "Cosa si muove? E cosa non si muove?" F. risponde perplessa "Si muove tutto... e ciò che non si muove è... niente!". Di seguito si riporta il prosieguo della discussione (Tab. 2).

Trascrizioni e gesti	Commenti
<p>F. quando abbiamo spostato A il punto C si muoveva ma la retta non si muoveva! ... <u>io non me lo so spiegare</u>... no, perché dovrebbe essere normale... ma forse perché C è stato creato da noi quindi... quindi noi <u>come abbiamo fatto nel foglio</u>...</p> <p><i>con il pollice della mano destra verso l'alto fa segno dietro di sé</i></p> <p>... il punto A è la nostra figura nera, grazie alla retta... visto che si è mossa la retta... prima rossa e poi blu... si è mosso C. Ora... se si muove C... si muove tutto quanto... perché?</p>	<p>F. è in difficoltà rispetto al diverso comportamento al trascinamento dei due punti.</p> <p>Recupera mentalmente l'esperienza fatta con l'artefatto manipolativo e la esplicita nel momento in cui dice "come abbiamo fatto nel foglio" e all'espressione associa il gesto con il pollice che rimanda a qualcosa accaduta prima. Associa al trascinamento della retta nell'artefatto digitale, le due rette (rossa e blu) con cui ha lavorato sul foglio, collegando i significati evocati nelle due esperienze.</p> <p>Poi però ha ancora bisogno di riflettere.</p> <p>[PG - Interessante la frase: "non me lo so spiegare", che evidenzia il carattere digitale dell'artefatto. Riesce a darsi una spiegazione non per quello che fa l'artefatto digitale ma per l'esperienza avuta con l'artefatto manuale. Inoltre, si evidenzia qui che la descrizione di F. si focalizza sulle azioni che essa effettua. Usa "sposta" il punto come se effettivamente stesse spostando un oggetto reale. La forza dell'artefatto digitale è proprio nel fatto che richiede un'azione con il mouse. Sarebbe diverso se lo studente vedesse un video.]</p>

<p>T. allora facciamo così: ti do un foglio con una retta, un punto A, e uno spillo...</p>	<p>L'insegnante coglie il suggerimento relativo all'uso del foglio e rilancia il confronto tra le due esperienze.</p>
<p><i>F. prende il foglio lo piega e con lo spillo punta su A, fora, toglie lo spillo e riapre il foglio</i></p> <p>F. adesso dall'altra parte ci ritroviamo il punto... questi sono simmetrici... ora facciamo finta che A <u>si sposta</u> qua</p> <p><i>Piega nuovamente il foglio, punta lo spillo in un altro punto del foglio, fora e gira con lo spillo ancora infilato. Nota che lo spillo non fuoriesce in corrispondenza del foro precedente (simmetrico di A) ma in un altro punto e dice</i></p> <p>F. quindi C <u>si muove</u>. Adesso... se sposto la retta...</p> <p><i>Fa un'altra piega, fora su A e gira il foglio</i></p> <p>F. A non si muove, si è spostato solo C...</p> <p><i>A questo punto interviene M.</i></p>	<p>Con l'artefatto manipolativo F. ricostruisce la nuova situazione, proposta con l'artefatto digitale.</p> <p>Simula senza difficoltà il trascinamento di A, puntando lo spillo su un altro punto del foglio e verifica l'effetto di tale azione nella posizione del nuovo foro, diversa da quella precedente.</p> <p>Tale effetto viene tradotto nel segno "si muove".</p> <p>[PG - Ovvero recupera il concetto di animazione tipico dell'artefatto digitale. "Si muove" e si è spostato come se vedesse la traiettoria percorsa tra i due punti]</p> <p>Poi simula analogamente il trascinamento della retta facendo una nuova piega e puntando nuovamente su A. Verifica l'effetto di tale azione nella posizione del nuovo foro, diversa anche questa dalla prima.</p> <p>L'effetto viene tradotto nel segno "si è spostato".</p>
<p>M. ricapitolando, se spostiamo A si muove C, se spostiamo la retta si muove C...l'unico che <u>dipende</u> è C... da A e dalla retta.</p>	<p>La parola "dipende" usata da M., rafforza l'idea espressa da F. che il trascinamento sugli oggetti liberi produca trascinamento sugli oggetti dipendenti. I segni emersi in relazione all'uso sinergico tra i due artefatti si stanno evolvendo in maniera condivisa. Infatti "dipende" è un segno</p>

	pivot in quanto esprime da un lato l'effetto dell'azione del trascinamento, dall'altro il significato matematico di dipendenza funzionale.
T. Ora, puoi spostare C?	A questo punto l'insegnante riconduce l'attenzione sullo spostamento del punto simmetrico.
<p><i>F. infila lo spillo nel punto C, senza aver piegato il foglio, indica la retta che ha scelto con il dito, successivamente piega il foglio e fa fuoriuscire lo spillo da A</i></p> <p>F. ...no perché... se io prendo questo C di sicuro dall'altra parte c'è già A... quindi se io sposto C... C deve per forza spostare la retta se no esce il punto uguale dall'altra parte... ah, no! ...Quindi se bisogna spostare C bisogna spostare tutto perché <u>non si può spostare solo il simmetrico!</u></p>	<p>Quello che fa F. a questo punto è sostanzialmente considerare la trasformazione inversa. Parte dal punto simmetrico e ad esso associa il punto A. Osserva poi che due immagini distinte non possono ottenersi come simmetriche dello stesso punto di partenza quindi la retta deve necessariamente spostarsi.</p> <p>È un ragionamento indiretto, molto raffinato, che si basa sul significato funzionale della simmetria, sulla sua univocità, e che ogni retta definisce una sola simmetria.</p>

Tabella 2.

Questo secondo episodio mostra come dall'uso dell'artefatto digitale emergano in modo più preciso i significati di corrispondenza puntuale e di asse di simmetria, già osservati dopo l'esperienza con l'artefatto manipolativo, ma arricchiti dal significato di variazione introdotta dal movimento attraverso il trascinamento. Inoltre, l'estratto in Tabella 2, in particolare il ragionamento finale di F., mostra come il riferimento incrociato all'uno o all'altro dei due artefatti e alle azioni compiute con essi abbia permesso il consolidamento del significato matematico di dipendenza funzionale come relazione univoca tra punti, relazione definita dalla retta scelta come asse di simmetria. Un ruolo fondamentale è stato giocato dal funzionamento del trascinamento: in particolare dal comportamento diverso che è possibile osservare a seconda che si trascini il punto di origine o il punto simmetrico. Tale diverso comportamento inizialmente destabilizza, ma poi induce la necessità di tornare all'uso dell'artefatto manipolativo per comprendere meglio cosa sta accadendo. Il richiamo spontaneo dell'esperienza fatta in precedenza viene colto dall'insegnante, che ne intuisce le potenzialità e consegna a F. il foglio da lei mentalmente evocato. La bambina cerca di tradurre l'azione del "trascinamento" e la funzione "traccia", in azioni con carta e spillo, mettendo così in sinergia i due artefatti. La dipendenza diviene dunque legata non solo al movimento connesso con il trascinamento, tipico dell'ambiente digitale, ma anche ad un modo ben particolare di trasferire sul foglio tale movimento. Il significato affiora quindi non tanto dall'emergere dei segni, durante la risoluzione dei compiti con l'uso dei

due singoli artefatti in relazione al loro potenziale semiotico, quanto soprattutto da una sinergia tra gli artefatti che, attivata dal confronto tra le esperienze con essi, promuove l'evolvere dei segni artefatto in segni matematici.

[PG - I due processi sono diversi e attivano azioni e significati differenti: sono uno in supporto all'altro e non avrebbero l'effetto voluto se non agissero in sinergia. Interpretando il tutto in termini di azione, quando lo studente si rapporta con l'artefatto manipolativo, l'azione dello studente è quella di forare un foglio piegato/costruire il punto simmetrico. L'artefatto manipolativo è analogico, ovvero se si infila lo spillo in un punto del foglio piegato si producono due buchi e vi è una relazione analogica tra l'atto e il suo effetto. Fa due fori che poi scoprirà essere due punti simmetrici. La metafora è quella della costruzione e usa un mediatore attivo.

Nell'uso dell'artefatto digitale il punto C è stato "costruito" dal sistema su input dello studente che ha schiacciato lo strumento/pulsante "Simmetria". Il processo è digitale ovvero non vi è nessuna relazione "analogica" tra lo schiacciare un pulsante e produrre il punto. La connessione è convenzionale tanto che lo studente per comprendere la sua azione fa riferimento alla precedente esperienza. Successivamente l'azione dello studente è quella di muovere e animare il punto A, poi la retta e poi il punto C. La metafora è in questo caso "animo, spostato" un punto in un sistema connesso e usa un mediatore analogico o iconico-analogico. Con la sua azione sperimenta cosa succede al punto simmetrico se muove A o la retta e, quindi, coglie (se supportato nel ragionamento dal docente) le relazioni tra due punti che già ha definito come simmetrici per la precedente attività.

Per lo studente il punto simmetrico è legato all'azione di forare (costruzione del punto simmetrico) grazie al processo di metafora (Lakoff, Johnson, e Nunez) e di simulazione (Gallese, "embodied simulation") che va a comporre la rete multimodale di simmetria, che assume strutture differenti (meno complesse/ricche in uno studente rispetto a quelle che un matematico assegna allo stesso termine). In altri termini il concetto/termine/parola simmetria è multimodale perché racchiude differenti contenuti (azioni nella forma di disegni, di animazioni, di relazioni, di definizioni linguistiche) la cui complessità è differente per differenti soggetti. Il significato non è nel singolo segno ma nella rete multimodale. E comunque se lo studente non connettesse il forare (o azione simile che potrebbe essere anche quella di disegnare e costruire) con il termine simmetria, il termine non avrebbe significato.

La sinergia dipende dalle due diverse azioni che svolge con l'artefatto manipolativo e l'artefatto digitale, rispettivamente costruire e animare, le quali attivano due processi diversi: nel primo caso l'azione che ha come fine il costruire un punto simmetrico di A rispetto a una retta; nel secondo caso l'azione che ha come fine quello di vedere cosa succede a C se muovo A (che so avere C come simmetrico).

La catena semiotica è molto interessante. Inizialmente sono due buchi creati da uno spillo in un foglio piegato lungo una retta data, che diventa puntura, punto, e che acquista una serie di proprietà-relazioni, anche grazie all'artefatto digitale, e una generalizzazione che inizialmente non ha. Non è solo andare verso il linguaggio matematico, ma è un processo di generalizzazione e di complessità (multimodalità) che si sviluppa. Il costruito di rete multimodale ha affinità con quello di variabili complesse (Berthoz, 2011). Tale processo si

reifica anche attraverso il linguaggio. Alla fine la parola “punto simmetrico” incorpora dentro di sé le esperienze effettuate (come se ogni punto simmetrico fosse il prodotto dell’azione di conficcare lo spillo e insieme possedesse tutte le caratteristiche e le relazioni emerse nelle azioni successive e grazie ad esse generalizzate).]

3.5.3 Una criticità evidenziata: la necessità della doppia piegatura

L’analisi dei segni personali prodotti durante le attività del terzo ciclo ha mostrato apparentemente un uso appropriato di segni, interpretabili come riconoscimento delle due proprietà caratterizzanti la simmetria assiale. Per esempio rispondendo all’ultima domanda della C.7, i bambini scrivono: “[i segmenti AC e BD] sono tutti e due perpendicolari all’asse e l’asse divide entrambi a metà”. Tuttavia durante la discussione è emersa una mancanza di consapevolezza dei segni utilizzati e quindi la necessità di rivedere la formulazione delle consegne del terzo ciclo. Una rivisitazione delle consegne del terzo ciclo consentirebbe, infatti, di connetterle maggiormente a quelle del quarto, nel quale si chiede di applicare le proprietà caratteristiche per costruire il punto simmetrico senza l’uso dello strumento/pulsante “Simmetria”. In particolare, ci è sembrato che il punto cruciale fosse legato alla differenza tra una procedura in cui le due pieghe vengono effettuate una indipendentemente dall’altra e quella in cui la seconda piega si effettua senza riaprire il foglio dopo aver fatto la prima. Questo sarà meglio chiarito nella descrizione della successiva ridefinizione delle consegne.

3.6 Riformulazione della sequenza didattica: il nuovo terzo ciclo

La riformulazione della sequenza didattica ha riguardato esclusivamente le consegne del terzo ciclo. Di seguito, pertanto, tali consegne sono presentate congiuntamente all’analisi del potenziale semiotico.

3.6.1 Il nuovo terzo ciclo didattico: descrizione delle consegne e potenziale semiotico dell’artefatto manipolativo – la doppia piegatura per superare la criticità

In accordo con le nostre ipotesi, il nuovo terzo ciclo didattico prevede ora tre consegne (C.6, C.7-1 e C.7-2) anche queste da svolgere in coppia, utilizzando nuovamente l’artefatto manipolativo. Nella C.6, come nella prima formulazione, si guidano gli studenti a osservare mediante opportune piegature la perpendicolarità del segmento congiungente due punti simmetrici con l’asse e l’equidistanza dei punti simmetrici dall’asse:

Usando lo spillo, trova il simmetrico del punto A rispetto alla retta rossa e chiamalo C.

Piega il foglio lungo una retta passante per A e C e poi riapri il foglio. Disegna e osserva il segmento AC.

Come sono gli angoli che il segmento AC forma con l’asse?

Cosa altro puoi dire del segmento AC?

Segna con il pennarello blu il punto in cui il segmento AC incontra l’asse e chiamalo M.

Come sono i segmenti AM e MC?

Spiega perché.

Nella C.7-1 si richiede la costruzione del simmetrico senza l'uso dello spillo. In tal modo si auspica che si costruisca il simmetrico utilizzando solo opportune piegature:

Costruisci il simmetrico di B rispetto alla retta rossa - senza usare lo spillo - e chiamalo D.

Racconta come hai fatto a trovare D.

Segna con il pennarello blu il punto in cui il segmento BD incontra l'asse e chiamalo N.

Come sono gli angoli che la retta passante per B e D forma con la retta rossa?

Come sono i segmenti BN e ND?

A che distanza da N si trova D?

Nella C.7-2, infine, si chiede di spiegare cosa hanno in comune e cosa hanno di diverso due segmenti congiungenti due coppie distinte di punti simmetrici:

Osserva i segmenti AC e BD.

Cosa hanno in comune?

Spiega perché.

Cosa hanno di diverso?

Spiega perché.

Nella C.6, il potenziale semiotico dell'artefatto che può evocare la proprietà di perpendicolarità tra l'asse e la congiungente due punti simmetrici è insito nello schema d'uso costituito dall'effettuare una doppia piegatura ed osservarne gli effetti: piegare il foglio lungo la retta passante per i due punti corrispondenti e poi, senza riaprire, lungo l'asse di simmetria e infine osservare la sovrapposizione di quattro angoli retti. Lo stesso schema d'uso consente però di osservare anche che il segmento congiungente i due punti corrispondenti è tagliato a metà dall'asse. All'artefatto è dunque possibile associare un ulteriore potenziale semiotico connesso all'attività proposta: la proprietà di equidistanza di ciascuno dei due punti corrispondenti dall'asse, basata sull'osservare che i due punti si sovrappongono quando si piega lungo la retta congiungente e poi, senza riaprire, lungo l'asse di simmetria.

Nella C.7-1 si vuole fare sviluppare uno schema d'uso, che può far leva su quello sviluppato nella C.6: l'effettuare la stessa doppia piegatura, a partire però da quella lungo l'asse di simmetria, consente, questa volta, di sfruttare la già osservata perpendicolarità tra le due rette ed individuare la retta sulla quale si troverà il punto simmetrico come la perpendicolare all'asse passante per il punto di origine; anche la proprietà di equidistanza dei punti dall'asse, prima osservata, deve ora essere applicata per individuare il punto.

Il complesso processo di piegature necessario nelle consegne di questo ciclo può essere dunque messo in relazione con la simmetria della relazione di perpendicolarità: le proprietà di perpendicolarità ed equidistanza, osservate nella C.6, permettono, nella C.7-1, la costruzione del simmetrico di un punto rispetto ad una retta, senza usare lo spillo ma con opportune piegature. L'ulteriore confronto dei segmenti richiesto nella C.7-2 ha l'obiettivo

di far emergere l'esplicitazione delle proprietà di perpendicolarità e di equidistanza come proprietà caratteristiche.

Dal punto di vista matematico, infine, il passaggio che porta all'eliminazione dello spillo è fondamentale per l'evoluzione del significato di simmetria dal semplice livello operativo di piegatura al significato matematico di trasformazione geometrica identificata da una retta e dalle proprietà geometriche che la caratterizzano.

3.7 Secondo studio pilota

Dopo aver rilevato che l'effetto del terzo ciclo sui cicli successivi ha prodotto ulteriori criticità ad esso attribuibili, per verificare la validità delle ipotesi fatte, prima di passare alla sperimentazione della sequenza didattica con una classe, si è reso necessario un ulteriore studio pilota. Tale studio ha coinvolto altri quattro bambini (G., P., R., ed S.) di un'altra classe quarta di una scuola differente.

Il nuovo studio pilota sull'intera sequenza ha fornito, sui primi due cicli, risultati analoghi a quelli del primo, sia in merito alla evoluzione dei segni, sia all'ipotesi relativa alla sinergia tra gli artefatti. Di seguito si riporta l'analisi di alcune trascrizioni significative.

Il prosieguo delle attività ha permesso, inoltre, di validare ulteriormente l'ipotesi di sinergia nell'intera sequenza, nonché di verificare l'avvenuta costruzione dei significati matematici. Presenteremo, dunque, l'analisi di alcuni estratti relativi ai cicli successivi.

Anche in questo caso, i bambini hanno svolto le consegne lavorando in coppia e le discussioni al termine di ciascun ciclo sono state tenute da Antonella e Eleonora. La sperimentazione è stata svolta in orario curricolare ed è stata sviluppata in quattro incontri di circa due ore ciascuno.

Anche questa parte della ricerca è stata sviluppata prima dell'incontro con Pier Giuseppe, tuttavia, una rilettura da una prospettiva differente di quanto accaduto anche in questo secondo studio ha fornito ulteriori interessanti elementi di confronto nell'ottica del dialogo.

3.7.1 Ancora sull'evoluzione dei segni: da “combaciano” alla corrispondenza punto-punto

Anche in questo secondo studio, dall'analisi dei video della discussione al termine del primo ciclo è emersa l'evoluzione di alcuni segni come, ad esempio, quello che ha portato alla corrispondenza punto - punto attraverso il segno artefatto “combaciano”. G. utilizza tale segno in relazione all'uso dello spillo per forare, dopo aver piegato il foglio lungo l'asse, dicendo: “quando il foglio è chiuso i punti combaciano”. Il segno “combaciano” è anche legato alla condizione del foglio di essere piegato e, di conseguenza al fatto che i punti si toccano. R. riprende il discorso dicendo “quando il foglio è aperto... corrispondono”. Riteniamo che il nuovo segno introdotto da R. sia legato alla nuova condizione del foglio aperto e pertanto va oltre il contatto dei punti e sposta l'attenzione sulla simmetria come trasformazione del piano in sé: il segno “combaciano” si sta evolvendo nel significato di corrispondenza punto – punto, insito nel segno matematico “corrispondono”. Il segno “combaciano”, viene utilizzato anche da P., il quale, osservando le figure presenti su uno dei fogli (prodotti dal gruppo in C.1 e C.2), su cui la figura simmetrica rossa non è stata costruita correttamente, e piegando lungo l'asse, guarda il

foglio da ambedue i lati e dice “le due figure non combaciano”. L’insegnante riapre il foglio che P. aveva piegato, indica le due figure e chiede: “cosa non ha funzionato qua?”. Mentre risponde, P. traccia con il dito un segmento che non c’è, ma avrebbe dovuto esserci, e dice: “perché hanno messo i puntini in modo diverso... hanno unito i puntini in modo diverso”. Il segno “unito” è un segno pivot in quanto da un lato rimanda all’azione di congiungere coppie di punti corrispondenti, dall’altro evoca la proprietà della simmetria assiale di trasformare segmenti in segmenti congruenti. Tale segno, connesso a quello immediatamente successivo, anch’esso pivot, “in modo diverso” fa pensare che P. abbia potuto associare la mancata simmetria alla mancata congruenza tra segmenti.

Fin qui, in riferimento ai punti, emergono il segno “combaciano” e la sua evoluzione nel segno “corrispondono”, che rimanda all’idea di corrispondenza punto-punto.

3.7.2 L’emergere del riconoscimento della dipendenza dall’asse

La discussione prosegue fino a che l’insegnante, con l’intento di focalizzare l’attenzione sulla dipendenza del punto simmetrico dall’asse, chiede ai bambini di osservare il foglio su cui ci sono la figura nera e le due figure simmetriche ad essa, quella rossa e quella blu, rispetto alle due rette, rossa e blu rispettivamente, e chiede loro cosa si può dire (Tab. 3).

Trascrizioni e gesti	Commenti
<p><i>G. con le mani poggiate sul foglio, inizialmente percorre con l’indice della mano destra un lato della figura rossa e sposta l’indice sulla figura nera percorrendo il segmento corrispondente. Poi, mette in gioco anche la mano sinistra poggiando le due mani sul foglio in modo simmetrico rispetto alla retta rossa, la sinistra sulla figura nera e la destra sulla figura rossa. Con l’indice della mano destra indica un vertice della figura rossa e con l’altra mano cerca il corrispondente vertice della figura nera, e continua a individuare non solo gli altri vertici corrispondenti ma anche i segmenti. Inoltre con la mano sinistra poggiata sul foglio e rivota verso l’alto percorre ripetutamente la distanza tra la figura nera e la figura rossa. Poi prende il foglio, lo piega lungo la retta rossa e guardandolo da un lato e dall’altro dice:</i></p> <p>G. sono <u>uguali</u></p>	<p>Mentre gli altri avanzano ipotesi di risposta, G. pensa in silenzio con il foglio di fronte. Confronta le due figure con rapidi movimenti delle mani e individua elementi corrispondenti come i vertici e i segmenti congiungenti i vertici. Il percorrere il segmento corrispondente con l’indice è un segno pivot perché ad un tempo rimanda alla corrispondenza puntuale e al fatto che la simmetria assiale trasforma segmenti in segmenti congruenti.</p> <p>Al termine delle sue riflessioni G. utilizza il segno artefatto “uguali” che evoca l’idea di figure congruenti in quanto isometriche</p>
<p>T. Cosa vuol dire uguale?</p>	<p>L’insegnante rispecchia e rilancia il segno uguale con l’obiettivo di focalizzare e far evolvere questo segno in uno che</p>

	caratterizzi maggiormente la simmetria assiale
G. che <u>corrisponde esattamente</u> a quella nera	Qui il segno “corrisponde” viene ripreso da G. e riferito non solo ai punti, come aveva fatto prima R., ma esteso all’intera figura e arricchito dal segno “esattamente” che evoca l’idea di corrispondenza isometrica tra figure sovrapponibili.
T. cioè G. dimmi un po’ meglio... che vuoi dire?	L’insegnante chiede ulteriori spiegazioni.
G. cioè che <u>quella nera viene rappresentata esattamente qua</u> <i>mentre parla apre il foglio e indica con l’indice la figura rossa racchiudendola in un cerchio, descritto dal movimento della mano</i>	“Quella” è un segno pivot che si riferisce sia alla parola “figura” sia alla sua posizione. Inoltre G. utilizza nuovamente il segno artefatto “rappresentata” riferendosi alla figura nera che viene riprodotta per simmetria dall’altra parte dell’asse rispetto alla figura nera, così come sottolineato con il gesto della mano e con il segno “esattamente qua”, entrambi segni pivot.
T. e tu dove ti aspettavi che venisse <u>rappresentata</u> ?	L’insegnante riprende il segno “rappresentata” utilizzato da G.
G. sempre <u>qui</u>	“Qui” è un segno pivot che indica il posizionamento della figura sul foglio, indica anche il semipiano su cui G. si aspetta che ci sia la figura simmetrica.
T. quando invece hai piegato su quella blu?	Qui l’insegnante fa un primo tentativo di avvio verso la generalizzazione attraverso il confronto di quello che accade cambiando asse di simmetria.
G. è venuta <u>più in qua</u> <i>mentre parla G. prende il foglio piegato lungo la retta blu dal lato della figura blu e indica con l’indice la figura blu racchiudendola nuovamente in un cerchio, descritto dal movimento della mano</i>	I due segni in questa risposta di G. sono entrambi segni pivot. Il primo si riferisce alla costruzione della figura simmetrica ottenuta in seguito alla foratura della carta e al congiungere i vertici della figura con dei segmenti. Le azioni hanno come effetto la costruzione della figura simmetrica che al termine si ottiene in maniera apparentemente indiretta (verbo in forma passiva). Il secondo invece rimanda ad un tempo al

	confronto delle due distanze tra la figura nera e ciascuno dei due assi di simmetria (rosso e blu) e al posizionamento della figura simmetrica nella parte destra del foglio rispetto ai due assi di simmetria.
T. e perché?	L'insegnante cerca di focalizzare sulla dipendenza della figura simmetrica dall'asse.
G. Perché <u>qua ci sono due linee</u> , due assi di simmetria, <i>Ha il foglio tra le mani piegato lungo la retta blu, lo poggia sul banco lasciando visibile la parte in cui si vedono le figure nera e rossa, con l'indice percorre prima la retta blu e poi quella rossa, poi gira il foglio e aggiunge</i> e quindi <u>lo spazio è di più</u>	“Qua” è ancora un segno pivot che si riferisce sia alla presenza delle due rette che fungono da asse, sia al confronto delle distanze a cui si associa il segno successivo “lo spazio è di più”.
...	
T. come stanno le cose?	L'insegnante fa una richiesta di sintesi.
P. mi aspetto che la figura rossa rispetto a <u>quella nera sia più vicina</u> <i>mentre parla, muove una penna che ha in mano e con la quale punta sulla figura nera, in modo da “ripassare” ripetutamente la distanza tra la figura nera e la retta rossa. E aggiunge</i> perché <u>lo spazio</u> tra la figura nera e l'asse di simmetria rossa <u>è di meno di</u> quello della figura blu <i>Mentre dice ciò punta in modo deciso la penna sulla retta rossa, si sposta sulla figura nera (tornando indietro), evidenziandone la distanza, poi punta sulla retta blu e la congiunge con la figura blu tracciando nell'aria un segmento perpendicolare all'asse.</i>	I segni “quella” e “più vicina” sono ancora segni pivot. In questi movimenti P. sembra voler mettere in evidenza la differenza tra le due distanze che probabilmente percepisce senza che se ne sia ancora parlato esplicitamente. P. utilizza il segno artefatto “lo spazio” in riferimento alla distanza tra la figura d'origine e l'asse. Inoltre, il segno pivot “è di meno di”, accompagnato dai gesti che P. compie mentre parla, si riferisce al confronto tra le due distanze.

Tabella 3

L'analisi appena svolta evidenzia come la richiesta di confrontare le figure ottenute rispetto a due assi differenti ha portato all'emergere dell'idea di dipendenza della figura simmetrica dall'asse espressa da diversi segni artefatto e pivot (come per esempio “è

venuta più in qua”, “lo spazio è di meno di”...) e legata a una prima intuizione relativa alle distanze di punti corrispondenti dall’asse.

3.7.3 La duplice dipendenza dal punto e dall’asse con elementi di sinergia

Questo episodio si riferisce invece al secondo ciclo in cui i bambini hanno lavorato in coppia davanti ad un computer. L’analisi dei video della discussione avviata al termine del ciclo evidenzia l’emergere del potenziale semiotico dell’artefatto digitale, e anche in questo caso come nello studio pilota, i primi elementi di sinergia tra gli artefatti. La consegna chiedeva di giustificare i comportamenti degli oggetti sullo schermo in seguito al trascinarsi prima del punto d’origine A, poi della retta e infine del punto simmetrico C. Alla domanda dell’insegnante “mi dite cosa è successo?”, P. prende la parola (Tab. 4).

Trascrizione e gesti	Commenti
<p>P. è successo che noi, spingendo questo bottone e attivando la traccia del punto A per poi spostarlo, si vedeva che, spostando A, ci chiedeva sposta il punto A, e allora, spostando il punto A ci accorgevamo che si muoveva anche il punto <u>C</u>, <u>facendo le stesse identiche cose di A</u>, solo che si muoveva <u>all’incontrario</u></p>	<p>Quando P. interagisce con la configurazione sullo schermo, spostando A vede che la traccia del punto C è simmetrica alla traccia del punto A.</p> <p>La frase <u>C facendo le stesse identiche cose di A</u> è un segno pivot che rappresenta il comportamento del punto C, necessariamente uguale a quello del punto A, e quindi evoca l’idea di dipendenza del punto simmetrico C dal punto A. Inoltre P. utilizza il segno artefatto <u>all’incontrario</u> che agli occhi dell’esperto rimanda all’idea che la simmetria assiale sia una isometria indiretta.</p> <p>[PG – in riferimento a “all’incontrario” si veda commento alla fine]</p>
<p>T. <u>all’incontrario?</u></p>	<p>L’insegnante rilancia il segno utilizzato da P.</p>
<p>P. se muovendo questa <i>con il mouse sposta il punto A avvicinandolo alla retta</i> si muoverebbe anche questa solo che andando <u>all’incontrario</u>... <i>simula il movimento del punto simmetrico C indicando con l’indice sullo schermo il</i></p>	<p>Qui si vede come l’effetto su C dello spostamento di A riesca ad evocare l’idea di dipendenza di C da A.</p> <p>Infatti, P. in questa suo monologo ad alta voce, argomenta con una serie di segni pivot, il suo punto di vista sulle relazioni che legano i due punti A e C.</p> <p>La dipendenza di C da A è, secondo il suo</p>

<p><i>punto simmetrico che si avvicina alla retta</i></p> <p>se questa [il punto A con la sua traccia] visto che si sta avvicinando alla retta, se il punto C facesse <u>le stesse identiche cose</u>, si allontanerebbe dalla retta, quindi per fare, <u>per avere la stessa posizione ed essere uguale</u> e fare,... uguale nel senso di <u>fare le cose uguali al</u> punto A, per stare sempre <u>vicino alla retta allo stesso modo, con angolazioni uguali</u>, quando A si avvicina, C si avvicina...deve fare gli <u>stessi movimenti</u> del punto A, soltanto <u>al contrario</u></p>	<p>ragionamento, conseguenza del fatto che essendo C punto simmetrico di A la distanza di C dall'asse deve essere sempre uguale alla distanza di A dalla retta.</p> <p>Nella sua argomentazione incide fortemente l'artefatto digitale con le potenzialità del trascinarsi dei punti infatti la conservazione della distanza è vista come analogia nel comportamento.</p>
<p>T. ... perché accade questo?</p>	<p>Richiesta di chiarimento.</p>
<p>G. perché sono <u>simmetrici</u>... cioè che il punto A è,... cioè il punto C è sulla <u>stessa linea</u> del punto A e quindi diciamo che è nella <u>stessa posizione</u></p> <p><i>apre la mano sinistra davanti allo schermo, quasi a voler prendere in considerazione l'intera immagine retta-punti simmetrici, con la mano aperta e piegando l'indice, indica con il dito il punto A e lo fa oscillare ripetutamente verso C, disegnando la congiungente nell'aria, vicinissima allo schermo, dove ci sono solo i due punti e l'asse di simmetria</i></p> <p>e cioè sono nella <u>stessa posizione</u></p>	<p>Qui l'intervento di G. è di sintesi e il primo segno utilizzato è un segno che P. non aveva usato. "Sono simmetrici" potrebbe essere già una evoluzione verso il significato matematico. Ad esso sono associati i due segni artefatto "stessa linea" e "stessa posizione", che rappresentano una prima intuizione da parte di G. delle due caratteristiche: i due punti giacciono su una retta (la perpendicolare all'asse) e sono equidistanti dall'asse.</p>
<p>T. cioè mi spieghi meglio "è sulla stessa linea"?</p>	<p>Rispecchiamento per focalizzare.</p>
<p>G. sta nello <u>stesso punto</u> dove si trova il punto A solo che dall'altra parte</p> <p><i>G. indica prima il punto A con l'indice e poi C con lo stesso dito dall'altra parte della retta</i></p>	<p>Questo intervento di G. fa ipotizzare che stia pensando ai due fori sovrapposti ottenuti con lo spillo dopo aver piegato il foglio.</p>
<p>T. invece che cosa non si muove? Se spostiamo A</p>	<p>L'insegnante qui torna al compito.</p>
<p>G. non si muove la retta</p>	
<p>T. e perché?</p>	<p>Quando l'insegnante chiede a G. di</p>

	spiegare quello che ha detto interviene P.
P. perché la retta è la linea, la retta di simmetria, è la linea che permette al punto A, in questo caso, di <u>far fare le stesse cose</u> , solo <u>all'incontrario</u> al punto C	E P. torna sull'idea che C si comporti come A, seppur "all'incontrario", ma non riesce a riconoscere che A non dipende dalla retta.
T. e quindi non si muove?	L'insegnante torna nuovamente al compito.
P. e non si muove se muoviamo il punto A, perché se si muovesse la retta magari non si riuscirebbe a fare... non riuscirebbe il punto C a stare alla <u>stessa distanza</u> dalla retta quanto il punto A e viceversa, quindi non sarebbero simmetrici.	Il segno artefatto "stessa posizione" si va evolvendo nel significato di equidistanza dei due punti dall'asse: P. ora usa il segno matematico "stessa distanza". Inoltre, P. argomenta la sua deduzione affermando che se la retta si muovesse non si conserverebbe la distanza e quindi i punti non sarebbero più simmetrici. È evidente che questo ragionamento è fortemente legato all'uso dell'artefatto digitale.
T. ora dice sposta la retta rossa	A questo punto si ritorna nuovamente al compito riprendendo la consegna successiva, ovvero cercando di capire cosa succede se si sposta la retta.
S. si muove solo il punto C perché <u>è stato creato</u> dalla retta rossa	Il segno "è stato creato da" utilizzato da S. è un segno artefatto che evoca l'idea di dipendenza del punto simmetrico C dall'asse di simmetria. [PG – in riferimento a "è stato creato" si veda il commento alla fine]
P. ma poi qui dice sposta la retta rossa. Se noi in questo caso spostiamo la retta rossa si muove <u>solo</u> il punto C,... perché il punto C...	P. non è d'accordo con S.
S. <u>è stato creato</u> dalla retta rossa	S. interrompe il discorso di P. ripetendo quanto detto prima
P. <u>è stato creato</u> dal punto A, quindi fa... deve fare... deve essere comunque, è come se adesso noi spostiamo il punto A, ma invece di spostare il punto A lui si allontana, il punto A si allontana e si	P. riprende il segno utilizzato da S. "è stato creato" riferendosi però al legame tra il punto d'origine e il punto simmetrico. La sua attenzione è rivolta esclusivamente sui due punti. Infatti il

<p>avvicina perché noi spostiamo la retta, ma comunque il punto C fa le stesse cose del punto A, cioè sta alla stessa lontananza del punto A dalla retta.</p> <p><i>P. prima indica il punto A sullo schermo, poi si poggia alla spalliera della sedia e dispone le mani simmetricamente davanti a se in basso, prima aperte con i palmi uno di fronte all'altro, poi su entrambe le mani unisce pollice e indice e indica i due punti simmetrici, infine con la mano sinistra continua ad indicare il punto A e muove la mano verso destra simulando l'andare incontro alla retta</i></p>	<p>movimento della retta è percepito come movimento indiretto del punto A.</p> <p>[PG – in riferimento a “poi su entrambe le mani unisce pollice” e indice si veda commento alla fine]</p>
<p>T. Posso chiedervi una cosa? perché prima avete detto contemporaneamente che il punto C <u>dipende</u> dalla retta (S.), e il punto C <u>dipende</u> dal punto A (P.), avete detto due cose contemporaneamente voglio sapere se sono vere, se sono vere entrambe, perché?</p>	<p>L'insegnante decide di introdurre il segno “dipende” per tentare di focalizzare sulla duplice dipendenza del punto C dal punto A e dalla retta.</p> <p>[PG - Credo che l'insegnante chieda di argomentare due affermazioni che a un occhio esterno potrebbero sembrare contraddittorie. Non si focalizza tanto sul dipende quanto sul confronto delle due affermazioni. Guarda con occhio più generale alla apparente contraddizione logica tra due affermazioni.]</p>
<p>S. perché se noi togliamo il punto C,... posso toglierlo?</p>	<p>S. tenta, mediante un procedimento inverso (vuole cancellare il punto C) di convincere P. della dipendenza di C dalla retta.</p>
<p>P. Aspetta S., a stò punto dovresti togliere il punto A per vedere se è vera la cosa che ho detto io.</p>	<p>P., che invece vuole convincere S. della dipendenza di C da A, suggerisce di cancellare A</p>
<p>S. Aspetta, dopo facciamo la tua analisi.</p> <p><i>P. cancella il punto C</i></p> <p>Allora noi prendiamo di nuovo il bottone simmetria e lo clicchiamo su questo... sulla retta</p>	<p>S. procede e dopo che P. ha cancellato C effettua nuovamente la procedura per ottenere C</p>
<p>T. quindi hai prima cliccato sullo strumento simmetria, poi hai cliccato sulla retta e</p>	<p>L'insegnante chiede conferma dell'ordine delle azioni compiute da S.</p>

poi..	
S. l'ho appena finito di cliccare, e ora dobbiamo spingere sulla A, ma <u>la A non è proprio fondamentale</u>	S. ripercorre quanto fatto con l'artefatto digitale, e cioè dopo aver cliccato sul pulsante/strumento Simmetria ha cliccato prima sulla retta, e poi sul punto A. La comparsa del punto C sullo schermo viene attribuita all'azione del cliccare innanzitutto sulla retta e poi sul punto A. Di conseguenza la dipendenza dal punto A viene messa in secondo piano. Questo potrebbe spiegare perché all'inizio S. diceva che C "è stato creato dalla retta rossa".
G. ma secondo me ha ragione S. perché noi prima di ottenere il punto C clicchiamo sulla retta e poi su A	Qui G. condividendo l'idea di S., segue mentalmente l'ordine delle azioni svolte con l'artefatto digitale, espresse dai segni "prima" "e poi". Tale ordine determina un ordine di dipendenza prima dalla retta e poi dal punto.
P. infatti però se non ci fosse il punto A non avremmo proprio il punto C, <u>se noi adesso cancelliamo il punto A anche C si cancella...</u> poi certo ha ragione anche S. perché <u>se tolgo anche la retta il punto C non viene. Quindi sono tutti e due fondamentali</u> come abbiamo detto ieri	P. accoglie l'argomentazione sostenuta da S., condivisa anche da G.. Richiama la sua idea di dipendenza del punto simmetrico C dal punto A, ripercorrendo al contrario le azioni dell'artefatto digitale, e cioè ipotizzando di cancellare gli oggetti sullo schermo. L'effetto all'azione del cancellare A è che C scompare, così come cancellando la retta. Quindi deduce la duplice dipendenza del punto simmetrico dal punto d'origine e dall'asse di simmetria e mette questa considerazione conclusiva in relazione con la medesima considerazione fatta con l'artefatto manipolativo.
T. cosa è fondamentale?	Rispecchiamento e richiesta di sintesi finalizzata all'evoluzione del segno artefatto "fondamentale" nel segno matematico "dipende".
P. <u>la retta è il punto di riferimento</u> per il punto simmetrico... perché se tolgo il punto A se n'è andato anche il punto C perché <u>A è il suo punto di riferimento</u> . E se tolgo la retta, non ci sarebbe, il punto	P. sintetizza ancora una volta immaginando di cancellare prima A e poi la retta per dedurre la duplice dipendenza dagli effetti della cancellazione. Il segno "fondamentale" si è evoluto nel segno "è

C scomparirebbe, perché non ha la linea	di riferimento” riferito prima alla retta e poi al punto A. In questa evoluzione si può vedere un ulteriore elemento della catena semiotica il cui anello precedente era il segno “fondamentale”.
<p>G. è la stessa cosa che facevamo ieri con il foglio perché questa è l’asse di simmetria</p> <p><i>indica la retta con il dito</i></p> <p>e ieri facevamo una piega che ci dava l’asse di simmetria</p> <p><i>simula di piegare lo schermo in corrispondenza della retta rossa</i></p>	G. a conferma della tesi di P. richiama l’analogia con la piega effettuata con il foglio nell’attività con l’artefatto manipolativo quasi a voler ribadire che senza la retta (ovvero senza la piega) non è possibile ottenere il simmetrico.

Tabella 4

L’analisi di questo episodio evidenzia due fasi particolari. Nella prima fase i bambini discutono di quello che accade quando si sposta il punto A. Attraverso la produzione e la condivisione di diversi segni artefatto i bambini danno prova di aver intuito che il punto simmetrico C dipende dal punto A. La dipendenza è resa evidente dalla possibilità di spostare i punti sullo schermo e dal fatto che tale spostamento ha come effetto il movimento degli altri oggetti sullo schermo. Inoltre G. intuisce che il punto A e il suo simmetrico C giacciono su una “stessa linea” e alla stessa distanza dall’asse, anticipando il focus sulle proprietà che saranno oggetto dei due cicli successivi. Nella seconda fase i bambini inizialmente non riescono in modo condiviso a stabilire la duplice dipendenza del punto simmetrico C, dal punto A e dall’asse, ma ciò avviene solo in un secondo momento, ed è confermata dal richiamo all’esperienza con l’artefatto manipolativo.

[PG - Credo che l’analisi suggerisca altre osservazioni se si guarda l’interazione con occhi non matematici. In primis vorrei soffermarmi sull’affermazione di P. che dice che il punto si muove “all’incontrario”. Per comprendere l’affermazione può essere utile riprendere Marton e Tsui che sostengono che “l’insegnante deve scoprire le “condizioni specifiche” per ogni argomento del curriculum” che favoriscono l’apprendimento, e questo include “la conoscenza di ciò che gli studenti portano nello studio, cioè le loro competenze e la conoscenza precedente” (Laurillard, 2014, 101). L’insegnante deve pensare alle relazioni logiche tra la struttura del concetto e la sequenza di cambiamenti controllati che lo studente deve attraversare quando è chiamato a distinguere il concetto in questione da altri più o meno affini. “È ciò a cui si riferisce Marton con l’espressione “architettura delle varianti” (Marton e Tsui, 2004). Se gli studenti devono distinguere la struttura di un concetto o di un sistema e la sua relazione con un obiettivo, cosa che devono fare per forza se vogliono apprendere, allora secondo Marton hanno bisogno di farne esperienza in modo specifico. La chiave di tutto è che l’insegnante deve essere attento all’ “architettura delle differenze” di un concetto, poiché gli studenti possono distinguere solo ciò che sono in grado di distinguere e “non possono farlo senza fare esperienza delle alternative” (ibid, 105).

Lo studente dicendo “all’incontrario” pensa ad altre possibili relazioni tra due punti, ad esempio alla traslazione che forse è la relazione più comune, in cui (se riferita a un corpo rigido) se traslo un corpo lungo una retta lo spostamento del punto A in una direzione produce lo spostamento del punto B appartenente allo stesso corpo nella stessa direzione. In altri termini per capire cosa sia la simmetria sta utilizzando probabilmente altre possibili relazioni tra due punti di cui ha fatto esperienza. Come propone Marton (*Variation Theory*) e come suggerisce Laurillard *l’architettura delle varianti* è uno strumento efficace nei processi di apprendimento.

Interessante anche l’affermazione “è creato” che ben evidenzia la modalità digitale del software. “è creato” fa pensare a un processo “magico” e riporta alla differenza tra artefatto analogico e artefatto digitale. Credo che difficilmente lo studente affermerebbe che il punto C sul foglio sia stato creato dalla retta e non che lo abbia costruito lui.

Ancora più interessante è il processo successivo attivato dall’insegnante quando evidenzia una contraddizione tra i due studenti. Tale contraddizione è nel linguaggio non in quanto matematico, ma indipendentemente dalla disciplina. Richiede di argomentare le proprie affermazioni con costrutti supportati da prove. Un tale modo di operare, che richiede rispetto e ascolto dell’altro, attenzione alle proprie formulazioni e alle prove, va nella direzione delle finalità civili. Ed essere attenti ad argomentare supportati da prove in un periodo di post verità

Un’ultima nota è relativa alla descrizione di come P. muove le mani durante il suo intervento: “*dispone le mani simmetricamente davanti a sé in basso, prima aperte con i palmi uno di fronte all’altro, poi su entrambe le mani unisce pollice e indice e indica i due punti simmetrici, infine con la mano sinistra continua ad indicare il punto A e muove la mano verso destra simulando l’andare incontro alla retta*”.

Sembra che nel processo didattico dobbiamo fare riferimento oltre ai due artefatti al corpo proprio. Le mani esplicitano la simmetria e attraverso le mani P. rilegge quanto realizzato con gli artefatti. Il corpo diventa un mediatore tra le esperienze differenti effettuate da P e attraverso esso ricostruisce il concetto di simmetria (utilizzando la simmetria del corpo) e simula quanto fatto con i due artefatti. Il ruolo del corpo è spesso evidente in molti passaggi dei video.]

3.7.4 L’emergere delle proprietà caratteristiche grazie alla doppia piegatura

Nel terzo ciclo i bambini divisi in coppie tornano ad utilizzare l’artefatto manipolativo utilizzato nel primo ciclo (foglio e spillo). La consegna intende far emergere le due proprietà che si utilizzano per costruire il punto simmetrico di un punto dato rispetto ad una retta: l’equidistanza dei due punti dall’asse e la perpendicolarità tra la congiungente i due punti e l’asse di simmetria. Prima di presentare e analizzare la discussione al termine del terzo ciclo riteniamo utile richiamare alcuni aspetti emersi dall’analisi del lavoro svolto da una delle due coppie (P. e R.). Durante l’attività con l’artefatto i due bambini, attraverso opportune piegature del foglio, riescono a dedurre la perpendicolarità tra le due rette e successivamente l’equidistanza.

Dopo aver eseguito la costruzione del punto simmetrico con piega e spillo e aver, come richiesto, piegato lungo la congiungente i due punti, P. guarda il foglio e risponde alla domanda “Come sono gli angoli che il segmento AC forma con l’asse?” dicendo:

(2:42) P. - dovrebbero essere di 90 gradi ...io ci provo

Per verificarlo, P. prende un pezzo di carta, fa una doppia piega creandosi un angolo campione di 90 gradi e prova a misurare un angolo tra le rette.

(2:58) P. - si è di 90!

In merito al segmento AC dicono poi “che è dritto” (R.) e che “forma un incrocio con l’asse di simmetria”. Poi P. misura con un righello le distanze dei punti corrispondenti dall’asse, lungo il segmento che li congiunge e, rivolto verso R. con le mani sospese l’una verso l’altra come a rappresentare i punti corrispondenti, dice che i due segmenti sono “Uguali!, perfettamente uguali!... perché sono stati creati... perché il segmento C... dalla stessa... sono stati... uguali!” e mentre parla, P. indica il punto C con la penna e la sposta da A verso C. Il dialogo tra P. ed R. continua e, dopo una riflessione sul perché ciò accade, P. dice:

P.- perché il segmento è stato diviso... a metà dalla retta rossa di simmetria

R.- quindi perfettamente uguale, perché formano un incrocio.

Si vede qui come svolgere in coppia le consegne previste con l’utilizzo dell’artefatto genera una ricca produzione di segni sulla base dei quali l’insegnante condurrà la discussione per giungere alla produzione collettiva di segni ed alla loro evoluzione verso segni matematici.

Successivamente, come richiesto dalla consegna, discutono su cosa hanno in comune i segmenti AC e BD.

(20:48) P. - che cos’hanno in comune AC e BD?...

P. indica con la penna le due metà del segmento AC e le due metà del segmento BD.

P. - che si incrociano tutti con la retta rossa

R. - bravo!

(21:41) P. - ecco... perché, perché si incrociano?

(...) R. - perché si incrociano tutti e due sulla retta, che è il loro punto di riferimento.

(23:22) R.- cosa hanno di diverso poi?... la lunghezza hanno di diverso...la lunghezza

(24:14) P. – perché?

(23:15) R. - perché il punto A è più lontano, quindi il punto simmetrico sarà più lontano... A è più lontano dalla retta rossa e quindi il punto C cioè la sua figura diciamo specchiata, il simmetrico, per essere alla stessa lunghezza deve essere un

po', più lontano dalla retta quanto è A

R. muove un righello che ha in mano da una parte all'altra di un altro righello posto sul tavolo, quasi ad indicare il punto A e il corrispondente punto C, battendo il righello sul banco

(25:25) P. - quindi le distanze saranno diverse

[PG - L'esame della scena permette di cogliere anche il contratto didattico. P si "atteggia" a docente, si sente sicuro della sua conoscenza e "interroga" R che sta al gioco, quasi divertita. Emerge anche il piacere della scoperta da parte dei due protagonisti.]

Si osserva, infine, che il riferimento alla corrispondenza tra la distanza del punto A dalla retta rossa e la distanza del suo simmetrico dalla retta rossa, rimanda, tenendo presente il movimento che R. fa con il righello che ha in mano rispetto al righello posto sul banco, all'osservazione del rapporto reciproco tra le tracce dell'attività con l'artefatto digitale.

Durante l'attività collettiva al termine del ciclo è emerso come la nuova formulazione delle consegne abbia contribuito a superare la criticità evidenziata durante il primo studio pilota.

Dall'analisi dei video emerge, infatti, come il lavoro dell'insegnante, finalizzato a far riflettere i bambini sulle azioni compiute, conduce a riconoscere nelle pieghe fatte per ottenere un angolo campione di 90 gradi, le stesse pieghe, che sul foglio dato, consentono di ottenere la perpendicolare all'asse per A e quindi il punto C senza usare lo spillo.

Si riportano di seguito alcuni estratti significativi di tale discussione, a partire dalla domanda dell'insegnante:

T. come avete fatto a trovare la retta per A e per C?

G. esegue una piega che passa per i due punti A e C

T. Avete scritto che il segmento AC e la retta rossa formano un incrocio. Vorrei capire cosa vuol dire incrocio

G. che quando questo segmento incrocia nel centro questa retta...

Mentre parla G. percorre, con una penna che ha tra le mani, il segmento ottenuto sul foglio con la piega e poi con la penna evidenzia il punto di intersezione.

T. Ora guardiamo al segmento blu e alla retta rossa, ok? ... quindi si incrociano, si incrociano vuol dire ... Voi avete detto che si incrociano... e questo vuol dire, che c'è un punto?

P. sì, un punto in comune, che è quello dove le linee si incrociano

T. un punto di incontro, comune. Di questi due, del segmento blu e della retta rossa, possiamo dire solo che si incrociano o possiamo dire anche qualcos'altro?

P. sì che forma... che sono perpendicolari.

T. Cioè, che vuol dire?

G. formano un angolo di 90 gradi

Mentre parla G. percorre un angolo retto con la penna

P. io e R abbiamo utilizzato un pezzo di carta per fare un angolo campione di 90 gradi e abbiamo verificato che gli angoli tra il segmento e la retta erano di 90 gradi.

T. Allora bambini spiegatemi, se non avessi quel pezzettino di carta per fare l'angolo campione, potrei direttamente sul foglio vedere se quei quattro angoli sono retti?

P. prende il foglio lo piega prima lungo l'asse, poi senza riaprirlo piega lungo il segmento ed esclama:

P. è vero!... è lo stesso procedimento per fare un angolo di 90 gradi

T. e cioè?

P. cioè piegare il foglio in un modo qualsiasi e poi ripiegare quella piegatura su se stessa, e forma un angolo di 90 gradi.

T. Quindi la congiungente un punto e il suo simmetrico è perpendicolare all'asse. Ora il punto simmetrico di A rispetto alla retta rossa, su quale retta si trova?

I bambini, insieme, indicando la retta perpendicolare passante per A dicono: "questa"

T. Quante rette ci sono perpendicolari alla retta rossa passanti per A?

G. io lo so fare

Prende il foglio, lo piega lungo l'asse, poi lo riapre e fa un'altra piega passante per il punto A portando l'asse su sé stesso.

P. adesso io lo so

Chiede il foglio a Giulia e piega l'asse su sé stesso con una piega che passa per A. Ma poi G. riprende il foglio dalle mani di P e piega prima lungo il segmento e poi sulla retta, e quando ha finito, con aria soddisfatta, dice, mostrando a tutti il foglio piegato:

G. ecco.

T. Quindi quante sono le perpendicolari?

P.e G. rispondono contemporaneamente: "una"

T. l'informazione che le due rette sono perpendicolari, basta per trovare il punto C?

P. no

T. Cosa altro ci serve?

G. ci serve il punto M

T. Cioè?

G. il punto... questo... il centro dell'incrocio... la metà

S. che il punto C è alla stessa misura del punto A

P. che il punto C è alla stessa distanza del punto A

T. da chi?

P. dalla retta.

Questa trascrizione mostra come l'idea di perpendicolarità tra asse e segmento insita nel segno artefatto "incrocio" dei bambini si sia evoluta nel segno "perpendicolari" grazie alla esecuzione della doppia piegatura e alla riflessione su essa indotta dall'insegnante. L'attività con l'artefatto ha permesso di riconoscere nella perpendicolare all'asse per il punto A la retta sulla quale si deve trovare il simmetrico. Significativo, in tal senso, appare il passaggio in cui l'insegnante conduce i bambini a riflettere sull'unicità della perpendicolare per un punto ad una retta. Infine, la domanda "cos'altro ci serve?" posta dall'insegnante per richiamare l'attenzione sul fatto che costruire la perpendicolare non sia sufficiente, fa riconoscere come necessaria anche l'equidistanza: il segno artefatto "centro dell'incrocio" si evolve prima in "stessa misura" e finisce con l'essere "la stessa distanza dalla retta". Il riconoscimento delle due proprietà come proprietà caratteristiche si rivelerà fondamentale per risolvere il compito assegnato nel ciclo successivo.

3.7.5 Dalla doppia piegatura alla costruzione del simmetrico utilizzando le proprietà

Questo episodio si riferisce al quarto ciclo, ovvero al ciclo in cui l'artefatto a disposizione è nuovamente quello digitale, e si chiede ai bambini di costruire il punto simmetrico del punto A rispetto alla retta rossa, senza usare lo strumento/pulsante "Simmetria". In accordo con la progettazione del percorso, nonché con l'analisi del potenziale semiotico e l'ipotesi di sinergia tra gli artefatti, ci si aspetta che, per svolgere il compito, i bambini facciano ricorso alle proprietà di perpendicolarità ed equidistanza. In particolare, per costruire il punto simmetrico sarà necessario costruire la perpendicolare all'asse passante per il punto d'origine A, e individuare su di essa, nel semipiano opposto a quello in cui si trova A, il punto che ha la stessa distanza di A dall'asse. Per fare ciò si dovranno usare gli strumenti/pulsanti messi a disposizione dall'ambiente utilizzato: "Retta perpendicolare", "Circonferenza" o "Compasso".

I bambini durante il lavoro in coppia, fanno quanto previsto: utilizzano lo strumento perpendicolare e costruiscono la retta per A perpendicolare all'asse; individuano il punto di intersezione tra la perpendicolare e l'asse; utilizzano lo strumento circonferenza e costruiscono la circonferenza con centro nel punto di intersezione trovato e avente come raggio la distanza tra A e la retta; infine evidenziano il punto di intersezione tra la circonferenza e la perpendicolare. Poi, come richiesto, verificano che il punto così ottenuto sia il simmetrico di A rispetto alla retta rossa utilizzando lo strumento "Simmetria".

Questa procedura, che i bambini hanno eseguito con estrema sicurezza, mostrando di padroneggiare lo schema d'uso acquisito nel terzo ciclo, è quella che nel primo studio pilota era risultata essere invece complessa. I risultati ora ottenuti ci danno conferma dell'ipotesi che la difficoltà riscontrata nel primo studio era effettivamente legata alla mancata acquisizione dello schema d'uso dovuta ad una non adeguata consegna del terzo ciclo.

Durante la discussione l'insegnante chiede ai bambini di spiegare quello che hanno fatto e prende la parola G. (Tab. 5)

Trascrizioni e gesti	Commenti
<p>G. allora... lo spiego io... allora prima ... allora abbiamo <u>prima</u> preso lo strumento perpendicolare</p> <p><i>indica con il dito il pulsante perpendicolare e si gira a guardare l'insegnante</i></p>	<p>G. ripercorre mentalmente le azioni fatte con l'artefatto digitale e il segno "prima" indica l'ordine temporale delle azioni.</p> <p>Il gesto che accompagna le parole è un segno artefatto.</p>
<p>T. perché?</p>	<p>Richiesta di giustificazione.</p>
<p>G. perché così <u>ci faceva</u> la retta</p> <p><i>con il dito puntato sullo schermo percorre la retta perpendicolare</i></p>	<p>G. motiva la sua risposta indicando con il dito il prodotto dell'azione compiuta con l'artefatto. Il segno "ci faceva", mette in evidenza che la retta perpendicolare ottenuta è il risultato di un'azione indiretta, compiuta dall'artefatto.</p>
<p>T. che retta?</p>	<p>Richiesta di chiarimento.</p>
<p>G. che <u>passa per</u> l'asse di simmetria...</p> <p><i>con la mano destra disegna nell'aria in prossimità dello schermo prima la retta mentre dice "che passa" e poi l'asse di simmetria mentre dice "per l'asse di simmetria"</i></p> <p>...che <u>forma gli angoli di 90 gradi</u></p> <p><i>mentre parla continua a tracciare con la mano nell'aria una retta orizzontale e poi indica lo schermo</i></p>	<p>G., forte dell'esperienza con l'artefatto manipolativo, riconosce di dover cercare il simmetrico su una retta per A che interseca l'asse. Questo è espresso dal segno pivot "passa per" accompagnato dal gesto di indicare le due rette che si riferisce, da un lato al fatto che la linea congiungente i due punti interseca l'asse e dall'altro all'azione, svolta precedentemente con l'artefatto manipolativo, di piegare il foglio lungo la retta per i due punti.</p> <p>Nel segno successivo spiega che, in sinergia con quanto osservato utilizzando l'artefatto manipolativo, tale retta forma con l'asse angoli di 90 gradi.</p>
<p>T. e perché ci serviva quella retta?</p>	<p>Qui l'insegnante vuole focalizzare sul riconoscimento della proprietà di perpendicolarità in quanto finalizzata alla costruzione</p>
<p>G. e perché <u>poi</u> dall'altra parte... noi poi l'abbiamo <u>allungata</u>, perché poi <u>dall'altra parte si doveva trovare il punto simmetrico</u></p> <p><i>indica sullo schermo il punto A, con il dito fa un salto sull'asse di simmetria e indica il simmetrico mentre dice "perché poi</i></p>	<p>G. risponde alla richiesta dell'insegnante utilizzando il segno "poi" che rappresenta il prosieguo dell'azione compiuta. Inoltre, esplicita con l'espressione verbale "dall'altra parte si doveva trovare il punto simmetrico", accompagnata dal gesto, il fatto che il punto simmetrico si debba</p>

<p><i>dall'altra parte...” si rivolge all'insegnante e mentre dice “il punto simmetrico” porta la mano destra verso le spalle e unisce pollice e indice</i></p>	<p>trovare sulla perpendicolare (“allungata”) nel semipiano opposto a quello di A rispetto all'asse.</p> <p>Si sottolinea anche che nella gestualità di G. si può riconoscere il richiamo all'esperienza passata nel gesto che G. compie unendo pollice e indice e portando la mano verso le spalle.</p>
<p>T. perché?</p>	<p>Qui l'insegnante vuol fare emergere la seconda proprietà.</p>
<p>G. perché <u>poi</u> abbiamo preso lo strumento circonferenza, abbiamo cliccato al centro, abbiamo allungato trascinando verso A, poi abbiamo cliccato e <u>ci è uscito</u> il punto simmetrico, poi per verificare abbiamo usato lo strumento simmetria</p> <p><i>mentre parla G. gesticola con il dito verso lo schermo e ripercorre tutti i passaggi simulando il mouse, cioè punta il dito sui bottoni, simula di allungare la perpendicolare, punta il dito sul punto simmetrico</i></p>	<p>G. continua a ripercorrere quanto fatto. L'idea di utilizzare la circonferenza, probabilmente suggerita dalla presenza dello strumento/pulsante “Circonferenza” guida G. nell'utilizzo dell'artefatto digitale per individuare il punto simmetrico come punto alla stessa distanza di A dall'asse.</p> <p>Il segno “ci è uscito” conferma che l'utilizzo dell'artefatto ha prodotto il risultato atteso.</p>
<p>T. allora torniamo un secondo a quello che stava dicendo G., prima avete fatto la <u>perpendicolare</u>, e poi avete usato lo strumento “circonferenza”...</p>	<p>L'insegnante a questo punto offre una sintesi parziale e invita a proseguire, utilizzando il segno matematico “Perpendicolare”</p>
<p>G. ci è uscito, cioè abbiamo cliccato al centro dove <u>si incrociavano</u> l'asse di simmetria e... emmh e <u>la retta perpendicolare</u>, e abbiamo trascinato col mouse, cioè questo fino al punto A e <u>ci è uscito</u> l'altro punto, <u>il punto simmetrico</u></p>	<p>G. coglie il segno matematico offerto dall'insegnante e lo riutilizza propriamente, parlando di incrocio tra l'asse di simmetria e la “retta perpendicolare”. La sua narrazione prosegue con un duplice implicito riferimento all'uso della circonferenza e al riconoscimento del punto simmetrico quale intersezione della circonferenza ottenuta con la perpendicolare.</p>
<p>T. ok, e perché, dove <u>è uscito il punto simmetrico</u>?</p>	<p>Qui l'insegnante rispecchia per far esplicitare la proprietà di equidistanza e farla connettere con quella di perpendicolarità.</p>

G. <u>qui</u> <i>indica il punto simmetrico sullo schermo</i>	Il segno pivot utilizzato da G. indica con precisione la posizione del punto simmetrico e rimanda all'idea che il punto simmetrico, nella costruzione fatta, sia il punto di intersezione tra la circonferenza e la retta perpendicolare.
T. e perché?	L'insegnante forza verso una prima generalizzazione cercando di far superare i limiti della costruzione legata all'artefatto.
G. perché trascinando veniva anche dall'altra parte, perché <u>si allargava pure dall'altra parte</u> <i>partendo dal centro, con le mani aperte e i palmi rivolti verso il basso traccia una circonferenza nell'aria davanti a sé e simmetricamente indica con la mano destra l'altra parte</i> e quindi dove si incrociavano, questo e questo, è <u>uscito il punto</u>	G. chiarisce ulteriormente facendo riferimento alla circonferenza che allargata verso A "si allargava pure dall'altra parte" incrociando la perpendicolare e producendo il punto simmetrico. G. però non è ancora in grado di generalizzare l'equidistanza.

Tabella 5

L'insegnante fa ancora un tentativo per far emergere la proprietà di equidistanza dei punti corrispondenti dall'asse, in quanto ulteriore proprietà caratteristica. Durante questa fase della discussione P. utilizza lo strumento/pulsante "punto medio" per verificare se il punto di incrocio (M) tra la perpendicolare e l'asse coincida davvero con il punto medio del segmento congiungente i punti corrispondenti. Dopo questa verifica l'insegnante chiede cosa allora si possa dire dei punti A e C e risponde G. (Tab. 6):

G. Hanno la <u>stessa distanza</u>	Il segno matematico "stessa distanza" emerge a seguito della esplicitazione della complessa costruzione compiuta con l'artefatto digitale
T. chi ha la stessa distanza?	Richiesta ulteriore di esplicitazione
P. il punto A e il punto C	Anche P. riconosce l'equidistanza dei punti A e C dal punto di intersezione ovvero dall'asse
G. <u>per arrivare al punto M, dal punto M</u> , che sarebbe in realtà il punto di incrocio tra la perpendicolare e l'asse di simmetria	G. ribadisce che si tratta della distanza dei punti A e C dal punto M e lo fa percorrendo tale distanza dai punti verso M e viceversa, come si vede dai segni "per arrivare al" e "dal". L'"arrivare" dà l'idea del movimento, tipico dell'artefatto

	digitale, e il “dal” fa pensare alla circonferenza costruita con centro in M.
--	---

Tabella 6

Come previsto dall’analisi a priori, la doppia piegatura con il foglio, ha favorito l’appropriarsi dello schema d’uso da parte dei bambini, nonché il riconoscere che le due proprietà utilizzate sono necessarie e sufficienti per costruire punti simmetrici.

3.7.6 Ma dove è la retta?

In quanto segue ci riferiamo al quinto ciclo nel quale, invertendo l’ordine degli artefatti, si procede utilizzando nuovamente l’artefatto digitale. La richiesta è quella di individuare l’asse di simmetria relativa a due punti simmetrici dati. Ci si aspetta che i bambini utilizzino le proprietà di perpendicolarità ed equidistanza emerse nei cicli precedenti, invertendone l’ordine. La soluzione del compito richiede, infatti, che si consideri il segmento congiungente i due punti e la retta ad esso perpendicolare passante per il punto medio. Rispetto alle costruzioni svolte nelle attività precedenti è necessario in questo caso cogliere l’invertibilità della proprietà di perpendicolarità. Questo aspetto risulterà cruciale, sia durante i lavori delle coppie, sia durante la discussione. Relativamente a questo ciclo è utile considerare, in particolare, l’interazione avvenuta tra G. e P. nella risoluzione del compito.

Dall’analisi del video del lavoro di G. e P. emergono due differenti approcci alla soluzione. P., condizionato da quanto fatto nel ciclo precedente con l’artefatto digitale, tenta una costruzione dell’asse basata più sulla procedura precedente che non sui significati legati a ciascun passo di tale procedura. Non riuscendo a cogliere l’invertibilità delle proprietà, cerca di tracciare una retta, passante per il punto medio (M) del segmento AC e per un altro punto preso “a occhio”, in modo da ottenere una retta piuttosto prossima all’asse.

G. invece, sembra avere le idee più chiare: dice subito che occorre tracciare anzitutto la retta per i due punti, anche se inizialmente la chiama “perpendicolare”, in analogia con le attività precedenti in cui la retta congiungente i due punti si caratterizzava come perpendicolare all’asse. Tuttavia, quando G. suggerisce di costruire la retta pensa alla congiungente i due punti, mentre P., puntando esclusivamente l’attenzione sulla retta che deve trovare, ovvero l’asse, non riesce a seguire il ragionamento di G. e continua a cercare un secondo punto che gli consenta, assieme ad M, di tracciare l’asse.

In una fase di stallo, G. e P. provano a tracciare la circonferenza di centro M e passante per A (nonché per C), nel tentativo di ripercorrere quanto fatto nelle attività svolte in precedenza. Non riescono a ricavare nulla e P. giunge a mettere in dubbio la richiesta dicendo: “non sono simmetrici perché se no avrebbero reagito in modo diverso”.

Fondamentale, per giungere alla conclusione, sarà il momento in cui G., appropriandosi del mouse, costruisce il segmento per A e C, trova il punto medio, e clicca sullo strumento/pulsante “perpendicolare”. A questo punto P. riprende il mouse e, dopo altri tentativi inutili, dice: “allora dobbiamo trovare il modo per fare una retta, per avere un incrocio”. Quindi cerca di costruire la perpendicolare ad AC da un punto esterno e involontariamente clicca su M e gli compare un piccolo segmento perpendicolare ad AC e passante per M. Mentre P., che intuisce di aver trovato la retta cercata, allunga il segmento

trascinando gli estremi, G. esclama: “ce l’abbiamo fatta!”. Mentre fa la verifica utilizzando lo strumento “Simmetria”, P. aggiunge: “credo proprio di sì G., si ce l’abbiamo fatta... direi di sì... Sì ce l’abbiamo fatta!”.

Durante la discussione al termine del ciclo i bambini sono riusciti a descrivere le azioni effettuate per trovare la retta, asse tra i due punti assegnati. In particolare, ancora una volta è emerso che per giustificare quanto accaduto con l’uso dell’artefatto digitale, G. ha fatto ricorso all’esperienza svolta con l’artefatto manipolativo.

Nel sesto ciclo, le cui consegne sono sostanzialmente le stesse del quinto, i bambini tornano ad utilizzare l’artefatto manipolativo e, come previsto, costruiscono l’asse invertendo l’ordine delle piegature.

Nel video che intendiamo mostrare durante il seminario si vedrà come nella discussione finale G. sottolinea, quasi stupita, che la costruzione con le piegature è più rapida, perché dopo aver piegato lungo la congiungente i due punti, la piega che individua il punto medio restituisce automaticamente anche la perpendicolare.

Concludiamo l’analisi sottolineando che la scelta di invertire l’ordine degli artefatti, in questa ultima parte della sequenza, aveva l’obiettivo di verificare quale influenza potesse avere, a questo punto della sequenza, l’utilizzo di un artefatto piuttosto che l’altro. Si potrebbe ipotizzare, infatti, una affinità tra gli schemi d’uso elaborati con i due artefatti nella fase conclusiva della sequenza. Tale aspetto è, tuttavia, ancora in fase di studio.

4. La sperimentazione con una intera classe

L'analisi dei risultati degli studi pilota ha mostrato l'efficacia del percorso duale e la sinergia tra artefatti manipolativi e digitali. Gli studi pilota sono stati realizzati con dei piccoli gruppi di studenti, appositamente scelti e motivati. Il gruppo veniva isolato non solo dal resto della classe, ma dal percorso scolastico e dalle dinamiche complesse che caratterizzano una classe. Inoltre la conduzione del lavoro non è stata effettuata dall'insegnante dei bambini.

In accordo con la metodologia della ricerca ed il quadro teorico scelto, si è passati dunque a predisporre la successiva sperimentazione da svolgere con una intera classe. In questa fase, è stato particolarmente determinante il dialogo in corso con Pier Giuseppe. Una domanda che ci siamo posti esaminando i video è come sarebbe cambiato il percorso se attuato in una classe dal docente di classe. Le differenze sono su piani diversi.

1. In primis, la motivazione al lavoro nella sperimentazione con il piccolo gruppo era frutto di un'anticipazione con cui gli studenti venivano avviati alle attività: veniva detto che alcune ricercatrici universitarie avrebbero effettuato un esperimento, puntando sull'autostima e sulla curiosità. Se il percorso diventa una normale attività di classe, occorre individuare un modo diverso per problematizzarla e per motivare gli studenti.

2. L'attività svolta richiede varie sessioni di lavoro e una certa continuità. La gestione del tempo e la necessità di tenere focalizzata l'attenzione degli studenti sull'attività è uno dei principali problemi nella gestione della classe.

3. Le attività di piccolo gruppo erano state realizzate con un'attenzione particolare all'equilibrio del gruppo che lavorava in uno spazio separato. Lavorando con l'intera classe, anche se l'attività prevista è di gruppo, vi è un contagio collettivo e se l'attenzione e l'impegno dei vari gruppi non è equilibrato vi è un rumore di fondo che ostacola il lavoro.

4. Centrale nel ciclo didattico è il momento della discussione in cui il docente guida gli allievi ad esplicitare e organizzare la conoscenza individuale acquisita nell'attività. Come cambia il processo se invece di lavorare con un piccolo gruppo si discute con tutta la classe?

La sperimentazione è stata effettuata in una classe quarta costituita da venti bambini. Le attività sono state sviluppate in orario curricolare con incontri bisettimanali per tre settimane. Nell'alternarsi dei cicli i bambini hanno lavorato in coppia, con coppie costituite in maniera casuale. Le attività con l'artefatto manipolativo sono state svolte in classe da tutti i bambini contemporaneamente. Mentre le attività con l'artefatto digitale sono state condotte in laboratorio in due turni di dieci bambini, suddivisi su cinque computer. Al termine di ciascun ciclo sono state svolte, in classe, le previste Discussioni Matematiche, condotte alcune volte dall'insegnante, altre da Antonella ed Eleonora. Nel caso delle attività con l'artefatto digitale, le discussioni hanno usufruito del supporto della LIM presente in classe.

4.1 Analisi di un episodio in classe: la sinergia nel caso dell'asse

L'episodio che abbiamo scelto di mostrare si riferisce alla discussione in classe al termine del secondo ciclo. Quando sono state svolte le consegne C.4 e C.5 con l'utilizzo dell'artefatto digitale uno dei bambini (Y.) della classe era assente. Il giorno successivo, durante la discussione l'insegnante chiede ai bambini di raccontare a Y. quello che hanno fatto. Questo intervento dell'insegnante è un caso di "back to the task", che apre una discussione ed ha l'obiettivo di suscitare nel racconto l'emergere di segni che si riferiscono all'attività svolta con l'artefatto. I bambini spiegano al compagno che hanno lavorato in coppie, svolgendo una consegna da fare al computer ed una in cui si chiedeva di scrivere quello che avevano osservato e di cercare di spiegare il perché. L'insegnante, allora, ha chiesto ai bambini di spiegare a Y. ciò che si presentava sul monitor del computer.

La prima a parlare è E. la quale dice: "C'era l'asse di simmetria e il punto A, noi dovevamo fare il simmetrico del punto A... e chiamarlo C". L'insegnante focalizza l'attenzione su un aspetto che stava sfuggendo, nel tentativo di far riemergere l'importanza dell'asse, chiedendo: "Il punto simmetrico del punto A...?". Il tentativo dell'insegnante va a buon fine infatti l'importanza dell'asse trova conferma nelle parole di M. che risponde: "rispetto alla retta!".

La discussione prosegue e l'insegnante interviene riportando l'attenzione sull'artefatto (Tab. 7)

Trascrizioni e gesti	Commenti
Ins. E come lo avete fatto questo punto simmetrico?	A questo punto l'insegnante focalizza sull'artefatto.
<i>Voci tra cui interviene</i> L. usando lo strumento Simmetria!	La risposta è immediata e abbastanza unanime.
Ins. Con lo strumento simmetria? <i>Coro di "si"</i>	L'insegnante rispecchia e rilancia per coinvolgere tutta la classe. I bambini annuiscono e in coro rispondono di sì; ma prende la parola G.
G. abbiamo cliccato il punto e l'asse di simmetria e <u>ci è uscito</u> il punto simmetrico del punto A e lo abbiamo poi richiamato C	L'intervento di G. specifica i termini di utilizzo dell'artefatto ricostruendo mentalmente lo schema d'uso e, con l'espressione " <u>ci è uscito</u> " sottolinea che il risultato è stato ottenuto, come prodotto di un'azione, ovvero il punto simmetrico è stato prodotto dall'artefatto digitale a seguito dell'azione dei bambini. Il segno "è uscito" può costituire l'inizio di

	una catena semiotica relativa al significato di simmetria come corrispondenza punto-punto, ma anche alla dipendenza del punto simmetrico dal punto d'origine.
--	---

Tabella 7

Dopo il “back to the task”, Y. viene invitato alla LIM per leggere la consegna e svolgere il compito con l’artefatto digitale. Nella parte successiva (10:57 – 16:42) si discute dell’uso dello strumento simmetria. A. guida Y. e gli dice di cliccare sullo strumento simmetria, e poi prima sulla retta rossa e infine sul punto. Ma G. contemporaneamente dice a Y. di cliccare prima sul punto e poi sulla retta e Y. fa come dice G. Seguendo la direzione dell’intervento di G., e del segno da lui utilizzato “ci è uscito”, M. interviene dicendo che secondo lei, se si fa come dice A., “non funziona... perché poi non farebbe più il punto simmetrico ma... un'altra cosa” e allora provano anche questa seconda opzione... e G. esclama “ed è lo stesso!”.

A questo punto interviene S.:

- (14:37) S. - Y. ha cliccato lo strumento simmetria ed ha cliccato sul punto però sarebbe... oppure prima la retta rossa, la seconda volta, però con la retta rossa io mi sono confusa di più perché all’inizio si vedevano... la simmetria di un altro punto che aveva creato il computer... e però poi ha cliccato il punto A ed è tornata normale cioè che è diventata la simmetria del punto A.

S. si riferisce al comportamento dello strumento/pulsante “Simmetria” che, se dopo averlo selezionato si clicca prima sulla retta asse di simmetria, restituisce come effetto: il testo “di un nuovo punto” in corrispondenza del puntatore, e due punti, uno simmetrico all’altro, la cui colorazione è meno intensa di quella del punto A (Fig. 8). Nel momento in cui si decide di cliccare sul punto A, e quindi il punto in prossimità del puntatore si va a sovrapporre al punto A, la scritta scompare e il punto simmetrico diventa dello stesso colore di A.

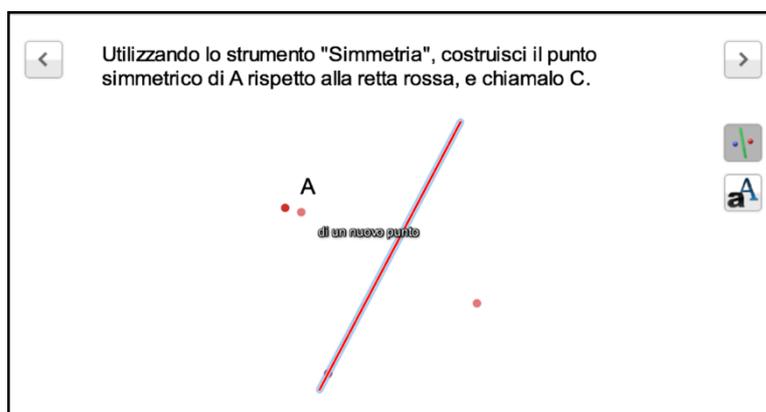
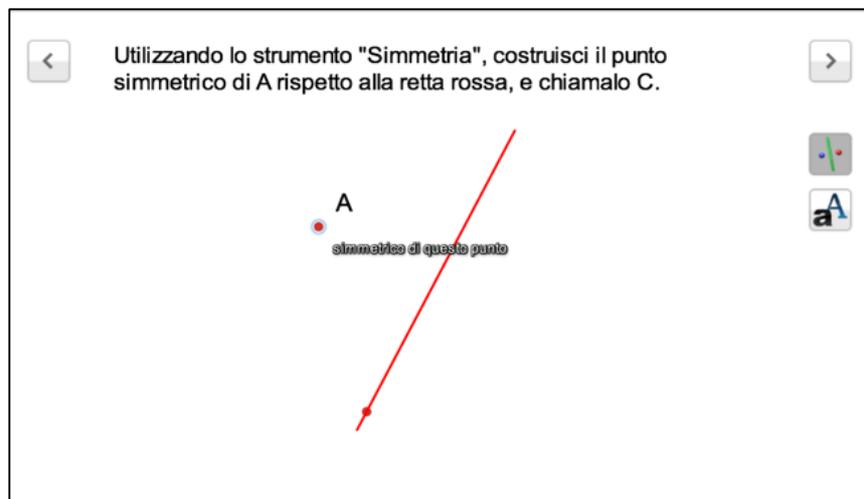
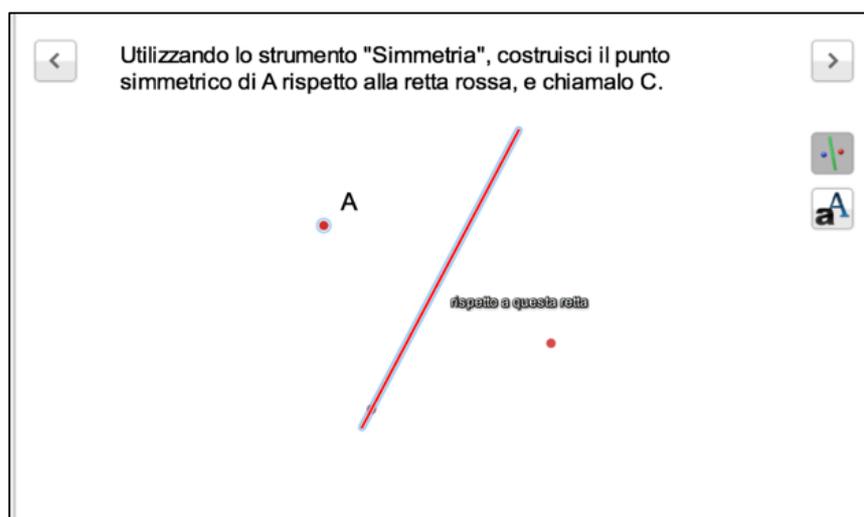


Figura 8: schermata del quaderno nel caso in cui dopo aver cliccato sullo strumento “Simmetria” si sceglie di cliccare prima sulla retta e poi sul punto

Se invece, dopo aver cliccato sullo strumento/pulsante “Simmetria” si seleziona prima il punto A, compare la scritta “simmetrico di questo punto” (Fig. 9a) e quando ci si avvicina alla retta compare la scritta “rispetto a questa retta” (Fig. 9b) e il punto simmetrico (anche in questo caso con una colorazione meno intensa), diventa dello stesso colore di A nel momento in cui si clicca sulla retta.



9.a “simmetrico di questo punto”



9.b “rispetto a questa retta”

Figura 9: schermata del quaderno nel caso in cui dopo aver cliccato sullo strumento “Simmetria” si sceglie di cliccare prima il punto (9.a) e poi l’asse (9.b)

Alla fine del suo intervento S. dice che “...è diventata la simmetria del punto A” riferendosi al punto che si ottiene nel momento in cui si sceglie di far costruire il simmetrico del punto A. L’espressione “è diventata” è un segno pivot in quanto rimanda da un lato al prodotto dell’utilizzo dello strumento/pulsante “Simmetria” (“ha cliccato il punto A”) dall’altro al risultato atteso (“è tornata normale”) secondo il quale S. si aspettava di vedere, oltre al punto A, solo il suo simmetrico.

La questione viene risolta da V.:

(15:55) V. - Perché secondo me è più facile cliccare prima sul punto e dopo sulla retta perché così... tu dici al computer fai il punto simmetrico di questo

punto, e poi cliccando sulla retta viene la scritta... rispetto a questa retta.

L'intervento di V., come quello di G. riportato alla fine della Tab. 7, mette ancora una volta in risalto l'idea che il punto simmetrico può essere ottenuto senza fare un'azione di costruzione diretta (come si faceva piegando e forando con lo spillo) ma simulandola utilizzando lo strumento "Simmetria" a disposizione ("tu dici al computer" o "ci è uscito"), che però restituisce il punto simmetrico a patto che gli si dica di quale punto e rispetto a quale retta si vuole il simmetrico. Risulta chiaro come l'uso dell'artefatto digitale, e dunque il riferimento ad esso nella discussione, abbia fatto emergere i significati chiave della simmetria come trasformazione definita da una retta (asse) e che ad un punto A fa corrispondere il suo simmetrico.

Da sottolineare, nel processo di tessitura durante la discussione, è anche il ruolo del feedback fornito dall'artefatto digitale, in particolare il ruolo dei messaggi forniti a seguito dell'azione di selezionare elementi dell'ambiente (punto, retta). Nel suo intervento G. dice "ci è uscito" per riferirsi al punto prodotto dell'uso del comando "Simmetria". Ed anche V. sottolinea che se si sceglie di indicare (cliccando con il mouse) anzitutto il punto di cui si vuole il simmetrico allora "viene la scritta", ovvero il feedback, che guida all'azione successiva della procedura legata all'uso dell'artefatto. I segni "ci è uscito", "viene la scritta" sono segni artefatto fortemente situati perché indotti dai feedback restituiti dall'artefatto a seconda delle azioni compiute.

Sembra qui che alcuni bambini, come G. e V., comincino ad esprimere la dipendenza del punto simmetrico dal punto d'origine e dall'asse. Si vedrà in seguito come, in maniera condivisa, si arriverà alla duplice dipendenza (del punto simmetrico dal punto d'origine e dall'asse) grazie non solo alla complessa discussione di tessitura, oltre che di bilancio, relativa alla consegna, che coinvolge la funzione di trascinamento dell'ambiente di geometria dinamica, ma anche al richiamo fatto da alcuni bambini all'attività svolta con l'artefatto manipolativo.

[PG - Andrebbe a questo punto evidenziata la differenza tra l'attività costruttiva analogica e quella digitale. Nell'attività con il foglio, il punto in cui si buca è A e la dipendenza con il punto è immediata, mentre con la retta, forse, indiretta e da scoprire. Non solo: è anche percepibile, piegando il foglio, che le distanze dei due punti dalla retta sono uguali. Nell'artefatto digitale la relazione tra i due punti non è data dall'attività, ma dall'aver schiacciato lo strumento/pulsante "Simmetria" e più volte (in questa e nelle precedenti attività) gli studenti sottolineano questa differenza: in riferimento allo spillo dicono "ha creato", in riferimento al digitale dicono "ci è uscito". Il percorso diventa digitale, ovvero convenzionale e non analogico. Inoltre nell'artefatto digitale sono presenti molte etichette e il ruolo del simbolico è sicuramente non indifferente rispetto al processo. La differenza evidenziata è alla base dell'uso sincronico dei due artefatti in quanto operano su processi cognitivi e su modalità operative differenti e non sovrapponibili. Dai passaggi successivi emerge la differenza su come si coglie che la distanza di A e C dalla retta è sempre uguale: in manipolativo piegando il foglio e confrontando, con la sovrapposizione dei due fori, la distanza del punto A e del suo simmetrico, in digitale animando/spostando il punto A e

osservando come di conseguenza si muove C. Il ruolo dell'animazione sembra più efficace dell'analisi statica.

IMPORTANTE Sarebbe interessante anche comprendere la diversità con cui i bambini simulano con il corpo le due attività (manipolativa e digitale). Da una prima analisi sembra che nelle attività del foglio gli studenti simulino le loro azioni (pizzicano il foglio, usano le due dita incrociate per fare la piega...), mentre con l'artefatto digitale simulino il comportamento della retta e del punto (muovono il braccio come fosse la retta, muovono le dita contemporaneamente per simulare la posizione dei due punti). È come se nell'artefatto manipolativo pensassero a sé stessi che operano, e nell'artefatto digitale si trasformassero in rette e punti e fossero loro a muoversi e in questo senso incorporassero la simmetria.]

4.2 Analisi di un episodio in classe: la sinergia nel caso della dipendenza dal punto e dall'asse

Nella fase successiva si discute della C.5, che chiedeva prima di prevedere e poi di verificare cosa succede se si sposta il punto A. In particolare l'insegnante concentra l'attenzione sul perché il punto simmetrico C si muove quando sposto A e perché la retta invece non si muove. L'idea che comincia ad emergere è che, come dice S., "se tu sposti il punto A si deve muovere pure il punto C perché deve rimanere la simmetria". Interessante, per i gesti con cui accompagna le espressioni verbali, è l'intervento di M., riportato nell'estratto in Tab. 8, il cui ragionamento è portato a termine da V. L'importanza di riferirsi ai gesti sta nel fatto che sono proprio questi segni che ci testimoniano chiaramente che i significati che emergono e evolvono sinergicamente hanno la loro origine e restano legati alle azioni compiute con l'artefatto manipolativo e con l'artefatto digitale.

Trascrizioni e gesti	Commenti
<p>M. se muovi solo il punto A, il punto C si deve muovere con il punto A perché devono essere simmetrici</p> <p><i>Mentre parla M. ha i gomiti puntati sul banco e muove le mani davanti a sé</i></p> 	<p>Il piano immaginario su cui si muovono gli oggetti della rappresentazione di M. è quello verticale così come il monitor del computer utilizzato per svolgere la consegna o della LIM che le è di fronte durante la discussione.</p>
<p>T. Cioè?</p>	

M. tipo se muovi il punto A più in su...

porta la mano sinistra in alto ad indicare il punto A che si muove più in su e dirige lo sguardo verso la mano sinistra



il punto A si muove più in basso...
quindi lo stesso...

porta le mani al centro, davanti al viso, per simulare, con pollice e indice di ciascuna mano, due segmenti uguali



ehm... il punto C si muove più in basso...

sposta la mano destra in basso per indicare che, in tal caso, il punto C si muove più in basso e dirige lo sguardo verso la mano destra



M. accompagna le espressioni verbali con dei gesti sincronizzati con quello che dice. Questi gesti possono essere considerati dei segni pivot in quanto da un lato rimandano alle azioni compiute con l'artefatto per risolvere il compito (sposta A... in questo caso "più in su") dall'altro sono connesse, attraverso il feedback ricevuto dall'artefatto (il punto C si muove... in questo caso "più in basso"), alla interpretazione in termini di conservazione della distanza, espressa da M. più avanti, mediante il segno verbale "lo stesso spazio", accompagnato dal gesto in figura.

Qui M. si ferma perché si accorge di aver detto A invece di C e quindi ricomincia

<p>...perché devono esserci... lo <u>stesso spazio</u>... tra i due punti</p> <p><i>con un veloce movimento coordinato delle due mani simula, utilizzando pollice e indice e tenendo piegate le altre dita, due segmenti di uguale lunghezza</i></p> 	<p>L'equidistanza dei punti corrispondenti dall'asse viene dunque evocata contemporaneamente sia dal segno verbale "lo stesso spazio" che dai gesti che lo accompagnano. Anche in questo caso si tratta di segni pivot.</p>
<p>V. deve esserci la <u>stessa distanza</u> tra la retta... deve esserci <u>sempre la stessa distanza</u> tra i due punti e la retta</p>	<p>Il segno pivot stesso spazio si è evoluto nel segno matematico stessa distanza</p>
<p>M. ...tra la retta e il punto A e tra la retta e il punto C</p>	<p>M. riprende quello che ha detto V. quasi come per chiarire ulteriormente che la distanza che deve essere la stessa è quella tra i punti corrispondenti e la retta</p>
<p>T. Perché?</p>	
<p>V. e M. (insieme) perché <u>se no</u> non sono simmetrici!</p>	<p>L'equidistanza tra i punti corrispondenti e la retta viene riconosciuta come condizione necessaria affinché i punti risultino simmetrici</p>

Tabella 8

La discussione continua e i bambini arrivano a condividere l'idea (ripetuta ancora da V., L. ed altri) che se C non si muovesse, quando spostato A, non si manterrebbe la stessa distanza tra il punto A e la retta, il punto C e la retta e che questa distanza è importante perché altrimenti i due punti non sarebbero simmetrici. Per spiegarlo V. fa un esplicito richiamo al foglio:

(24:40) V. - se noi abbiamo a disposizione un foglio che si può piegare...

L'insegnante le dà un foglio e poi anche uno spillo. V. spiega che per fare il simmetrico di un punto deve puntare lo spillo sul punto e il buco che ottiene dall'altra parte del foglio altro non è che il simmetrico del punto. Poi però è ancora molto condizionata dalla non

verticalità della retta e infatti dice che siccome la retta è obliqua il punto le è venuto più giù. Ma l'insegnante la spinge a focalizzare l'attenzione sull'aspetto importante e le chiede: "e la distanza?" V. risponde senza esitazione (e le fanno coro L., G., E. e M.) "Sì! È sempre uguale, è sempre la stessa".

L'insegnante rilancia e chiede ancora da dove si capisce che la distanza è sempre la stessa. E. dice sottovoce "da tutti e due" ma prende la parola G. ritornando mentalmente di nuovo all'artefatto digitale:

(29:34) G. - l'abbiamo capito perché quando [Y.] ha spostato il punto A, si muoveva anche il punto C, ma quando erano lontanissimi dalla retta rossa era sempre la distanza dalla retta rossa... dal punto C alla retta rossa la stessa distanza di... dal punto A alla retta rossa.

(30:32) V. - è più facile... perché lì si può muovere il punto e quindi mi rendo conto più facilmente che se sposto il punto... la figura già fatta... è più facile rendermi conto che c'è la stessa distanza perché appunto muovendo si capisce, soprattutto quando allontaniamo molto dalla retta, che anche il punto C si allontana... e quindi c'è sempre la stessa distanza. Però anche sul foglio sono riuscita a capirlo.

Le parole di V. confermano l'ipotesi che l'artefatto digitale stia agendo in sinergia con quello manipolativo: che i punti simmetrici dovessero avere la stessa distanza dall'asse lo si capiva già piegando il foglio e forando con lo spillo, ma è spostando il punto nell'ambiente di geometria dinamica che è più facile rendersi conto che c'è sempre la stessa distanza. Si sottolinea, inoltre, che sebbene le consegne con l'artefatto digitale avessero richiesto esplicitamente l'uso della traccia per rendere maggiormente evidenti gli effetti del trascinamento, durante la discussione i bambini hanno detto subito che non era necessario attivare la traccia. L'esperienza individuale con l'artefatto digitale è stata sufficiente per poter cogliere l'analogia tra il trascinare/spostare il punto e il fare il foro in un altro punto, ovvero con l'esperienza fatta con l'artefatto manipolativo.

L'insegnante torna al compito e riporta l'attenzione sulla seconda parte della consegna chiedendo ai bambini cosa non si muove quando si sposta il punto A. A questo punto si ritorna ad una discussione di bilancio. I bambini dicono che se sposto A, C si muove ma la retta no. Si cerca allora di far emergere il perché.

Intervengono allora E., dicendo che non si muove perché è fissa, e M., che ha in mano un foglio piegato e uno spillo (Fig. 10) e torna ancora una volta all'artefatto manipolativo:

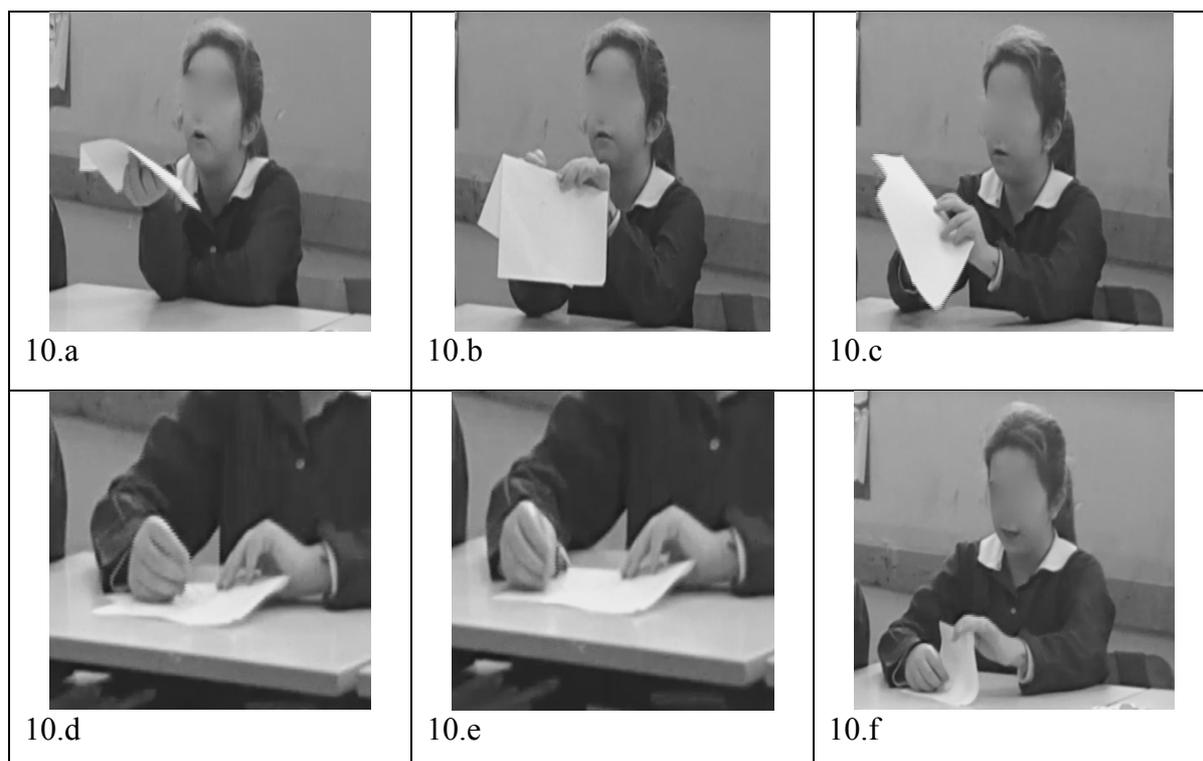


Figura 10

(34:16) M. - È come il foglio (Fig. 10a)... il foglio piegato... Questa per esempio è l'asse di simmetria (Fig. 10b). Se io buco (Fig. 10c) il foglio nel punto A... (Fig. 10d) e magari sposto anche il punto A (Fig. 10e), la linea, cioè l'asse di simmetria rimane sempre lì (Fig. 10f).

È evidente qui come M. connetta sinergicamente gli schemi d'uso dei due artefatti. L'incipit dell'intervento di M. ("è come") esplicita la natura del suo pensiero. M. sta collegando l'esperienza fatta con l'artefatto manipolativo a quella in discussione con l'artefatto digitale: non si limita a richiamare il foglio ma chiarisce che la situazione analoga è quella in cui il foglio è piegato lungo l'asse di simmetria e si buca il foglio in un punto. Il segno "e magari sposto" è la prova che l'azione di spostare (verbo sin qui utilizzato nelle attività con l'artefatto digitale ma non nelle attività con l'artefatto manipolativo) viene ricondotta al considerare un altro punto e cioè a fare un altro buco: gli schemi d'uso relativi ai due artefatti sono così associati. È questa sinergia tra schemi d'uso che le consente di concludere che visto che l'asse di simmetria "rimane sempre lì" anche con l'artefatto digitale la retta non si muove.

Nella fase successiva, i bambini passano spontaneamente a discutere cosa succede se si sposta la retta e dicono che si muove C ma non si muove A e continuano a dire che la ragione è perché deve mantenersi la stessa distanza.

È Lo. (bambino taciturno i cui pochi interventi erano risultati cruciali anche durante la discussione al termine del primo ciclo) a fornire una spiegazione del movimento di C in conseguenza del movimento della retta: "perché C è quello che è stato fatto... da Y." e richiama l'attenzione sulla dipendenza di C da A e dalla retta.

5. Gli artefatti manipolativi, gli artefatti digitali e la mediazione didattica

La sequenza è stata progettata e analizzata da Antonella e Eleonora in termini di mediazione semiotica e sono stati colti con molta attenzione i passaggi da segno artefatto a segno matematico secondo la TMS, facendo emergere come lo studente ha operato nella costruzione del significato matematico. Sono anche emersi alcuni elementi legati al ruolo del docente e alle modalità con cui ha condotto il processo.

Proviamo ora ad analizzare lo stesso processo utilizzando i mediatori didattici e cercando di cogliere il ritmo della mediazione, ovvero individuare quali mediatori sono stati utilizzati e con quale articolazione.

Se sembra ovvio parlare di artefatto per il foglio e lo spillo e di mediatore attivo per il dispositivo predisposto e vissuto nella prima parte della sequenza, una riflessione va fatta per l'artefatto digitale. Come molto spesso accade gli artefatti digitali sono aggregatori di funzioni e artefatti. Ad esempio se si pensa a un cellulare, esso aggrega vari artefatti: telefono, geolocalizzatore, orologio, ecc. che poi possono anche, per singole funzioni, lavorare in modo sinergico. Ugualmente l'artefatto digitale utilizzato nel percorso didattico può essere visto come aggregato di artefatti diversi. Un artefatto è sicuramente l'*app* per costruire il punto simmetrico, dati un punto A e una retta, ovvero la struttura pulsante "Simmetria" con funzioni e procedure ad esso connesse. Un ulteriore artefatto è la funzione di trascinamento che può essere intesa come *app* per muovere o i punti o la retta e vedere come si modifica il sistema, ovvero con la possibilità di attivare una simulazione: "se spostato questo punto, succede che". Un dubbio deriva dall'uso del termine simulazione. In fisica se costruisco il modello digitale di un esperimento e in esso modifico una variabile, l'*app* simula l'evoluzione del sistema ovvero un processo reale. In matematica ha senso usare il termine simulazione? Lo poniamo come interrogativo per la riflessione. Un ulteriore artefatto è la pagina del quaderno interattivo, che può essere intesa come il dispositivo che contiene le varie *app* per costruire il simmetrico sfruttando le proprietà, cioè in cui sono presenti lo strumento/pulsante "Circonferenza", lo strumento/pulsante "Retta perpendicolare"... In questo caso l'azione che si attiva è ancora diversa e sembra essere una costruzione più che una simulazione. Da una prima analisi sembra che le azioni effettuate e i dispositivi di volta in volta costruiti e vissuti, pur utilizzando lo stesso artefatto siano differenti e attivino processi di mediazione differente.

L'utilizzo dell'*app* per creare il punto simmetrico richiede il riferirsi all'esperienza del foglio e spillo, come evidenziano gli studenti nella esplicitazione. Risulta difficile vedere l'artefatto digitale come unico, forse andrebbe analizzato il dispositivo di volta in volta predisposto. Nel caso dell'animazione di retta e punto crediamo che si possa parlare di mediatore analogico, nel caso di cerchio e perpendicolare di mediatore attivo. La differenza dipende dal processo su cui si focalizza l'attenzione dello studente. Nel mediatore attivo l'attenzione è sulla sua azione, nel mediatore analogico nel mettersi al posto di un altro (si pensi al gioco di ruolo). Un'ipotesi tutta da esplorare, effettuando ulteriori sperimentazioni, consiste nel verificare grazie all'analisi del *Semiotic Bundle* se nel mediatore attivo i movimenti delle mani si riferiscono alle azioni effettuate (ad esempio piegatura del foglio, uso dello spillo) e nel caso del mediatore analogico si riferiscono ai movimenti del punto e della retta, come se lo studente si mettesse "nei panni" del punto e

della retta e rappresentasse, con i movimenti del suo braccio e della sua mano, tali posizioni e movimenti. Alcune affinità tra TMS e Mediazione Didattica vanno sicuramente evidenziate. Il potenziale semiotico può essere tradotto in *boundary object*, ovvero la capacità dell'artefatto di connettere due mondi differenti e di divenire un ponte tra l'esperienza contestuale dello studente con la generalizzazione della stessa, tra il sapere quotidiano e il sapere scientifico. Con una diversità: nella mediazione semiotica il passaggio dal segno artefatto al segno matematico, nella mediazione didattica il passaggio dall'azione dello studente in contesto (e spesso il mondo dello studente con le sue esperienze incorporate) all'azione che racchiude una serie di esperienze, generalizzate, pur con un formato multimodale (non solo simbolico).

Crediamo, tuttavia, che l'affinità maggiore sia proprio nella descrizione del processo dove va evidenziato un ciclo micro (il passaggio nel singolo *step* dalla manipolazione alla simbolizzazione) e un ciclo macro (la successione delle varie azioni dei cicli didattici).

Nella TMS si parla di ciclo didattico per passare dall'attività con l'artefatto alla produzione di segni. Nella Mediazione Didattica si parla di ritmo della mediazione (e di regole di composizione (Damiano, 2013, 206)), dal mediatore attivo al simbolico, dall'esperienza diretta ai mediatori simbolici.

Nelle singole attività dopo il lavoro con l'artefatto segue il dibattito in classe, che grazie al ruolo dell'insegnante (centrale sia nella TMS come nella Mediazione Didattica e negli approcci interazionisti) permette di distanziarsi dall'esperienza diretta e di "raccontarla" con un linguaggio più generale (il segno matematico). È il passaggio dal mediatore attivo al simbolico, con la possibilità intermedia di mediatori iconici (se vengono effettuate delle rappresentazioni grafiche).

Nel ciclo macro è possibile vedere processi ricorsivi dall'esperienza con gli artefatti alla simbolizzazione, con passaggi intermedi – a seconda delle fasi – attraverso artefatti iconici e analogici. Va evidenziato come il ritorno in un ciclo successivo al mediatore attivo presenti una diversa consapevolezza della problematica che si evince dal linguaggio utilizzato: non più piega e buco dello spillo, ma sempre più spesso linea e punto.

Un'ulteriore riflessione è connessa alla embodied cognition. Se si accetta la definizione di Borghi (Borghi e Binkofski, 2014) per cui il concetto è la rete stessa multimodale fatta di azioni, emozioni e linguaggio o, in altri termini, che "more specifically, activation of mirror neurons should be considered an integral part of the process of perceiving and responding to other's actions" diviene più facile comprendere molti dei gesti degli studenti.

Se le azioni dopo il lavoro con il foglio possono essere lette come simulazione dell'attività svolta, molti dei gesti che gli studenti fanno dopo l'uso dell'artefatto digitale non possono essere letti come simulazioni delle proprie azioni, ma come embodiment dei processi descritti, come anticipazione in formato corporeo delle conoscenze che man mano stanno costruendo. "The motor activation that has been found in association with the processing of action verbs or words referring to manipulable objects likely supports action prediction or anticipation" (van Elk M., Slors M and Bekkering H., 2010). I gesti non simulano qualche esperienza pregressa, ma aiutano lo studente nella costruzione della propria interpretazione.

Concludiamo dicendo che il lavoro non è stato facile. I linguaggi erano diversi, le teorie differenti, la diffidenza alta. Spogliarsi delle proprie sicurezze non è sempre facile.

Quello che ci ha aiutato è stata la voglia di andare avanti e la possibilità di confrontarci sull'analisi della stessa azione video registrata. L'uso del video, nella ricerca sull'*education* e nella formazione degli insegnanti, è da anni un punto fermo. Anche in questo caso il video è stato il *boundary object* che ha permesso l'articolazione e il confronto delle nostre diverse prospettive.

6. Un passo indietro: gli studi sugli ambienti cooperativi web-based

Riteniamo a questo punto possa essere utile, rispetto ad una delle funzioni che il Seminario Nazionale si pone nella nostra comunità, ripercorrere rapidamente il cammino che ci ha portati fino qui, sebbene esso rappresenti un percorso di ricerca ormai concluso.

Le origini di questa ricerca sono da rintracciarsi nei lavori sull'apprendimento cooperativo supportato dal computer (CSCL) condotti alla fine degli anni novanta nel gruppo di ricerca in cui Eleonora Faggiano ha svolto il dottorato di ricerca negli anni 2002-2004, che tutt'oggi si occupa di e-learning e tecnologie per la didattica presso il laboratorio TELL (Technology Enhanced Learning Laboratory) dell'Università di Bari.

Erano anni in cui le forti sollecitazioni provocate dalle emergenti tecnologie della comunicazione inducevano anche a ripensare concetti, metodologie e pratiche proprie della formazione. Si assisteva ad una spinta verso una maggiore indipendenza dell'attività formativa dalla condivisione fisica spazio-temporale e ad uno spostamento del focus dal docente all'allievo che apprende, con una enfasi particolare sul carattere collaborativo delle esperienze di apprendimento. Sotto l'egida del "costruttivismo", termine con il quale si andava contrassegnando la svolta rispetto ai tradizionali modelli di apprendimento, si erano raccolti studiosi di più aree di ricerca, non solo l'area cognitiva e quella della progettazione educativa o l'area più prettamente tecnologica, ma anche quelle delle didattiche disciplinari, non ultima l'area della didattica della matematica. Parallelamente, si sviluppava anche una diversa concezione della progettazione didattica, più centrata sull'idea di percorsi aperti e favorita dalla diffusione della multimedialità, in cui confluiscono competenze provenienti da ambiti diversi: la competenza tecnica (tecnologia dei media), quella comunicativa e semiotica, la competenza didattica, e quella critico-sociale (Calvani, 2001).

Gli approcci di uso didattico delle tecnologie della fine degli anni novanta, possono essere accomunati dal loro denominarsi con il termine di "e-learning". Essi erano per lo più caratterizzati dall'accesso a contenuti multimediali e ipertestuali via internet e, quindi, erano basati su una trasmissione di contenuti il cui carattere innovativo consisteva nell'organizzazione non lineare e nella loro diffusione attraverso strumenti digitali. Dopo questi primi approcci entusiastici, seppur piuttosto acritici, si sono avviate riflessioni e ricerche caratterizzate dalla focalizzazione sull'apprendimento più che sulla tecnologia. Sono stati così sviluppati una serie di studi che hanno portato a nuove pratiche didattiche, nelle quali le tecnologie erano utilizzate per quelle caratteristiche che consentivano una interazione tra i soggetti coinvolti. Dalla mera fruizione di contenuti si è passati al comunicare per condividere conoscenze ed esperienze, per argomentare e contro argomentare, per affrontare e risolvere problemi, per rappresentare la propria conoscenza. Negli ambienti di apprendimento aperti e collaborativi, la centralità, ovvero il controllo del processo di apprendimento, è assunta dal soggetto che apprende e ciò che si va a valutare è la sua capacità di costruire la propria conoscenza, autonomamente e collaborativamente con altri soggetti. Al docente spetta un ruolo di supporto all'apprendimento caratterizzato dalla predisposizione di attività di apprendimento di adeguata difficoltà cognitiva, che prevedano la messa a disposizione di risorse digitali, in qualche modo innovative.

Le prime esperienze condotte nell'ambito del gruppo di ricerca che oggi afferisce al TELL hanno portato alla realizzazione di alcuni ambienti ipermediali per il supporto all'insegnamento della Matematica nella scuola primaria (Roselli, 1995; Costabile et al., 2003). Il primo sistema ipermediale per la matematica, "Logiocando", è stato progettato con la collaborazione di alcune insegnanti considerate "esperte del dominio". Lo studio sperimentale, di tipo classico/quantitativo con classe di controllo, pre-test e post-test, è stato realizzato con l'obiettivo di verificarne l'efficacia in termini di apprendimento (Lanzilotti e Roselli, 2007).

L'interesse dei ricercatori del TELL si è poi spostato verso la realizzazione di un ambiente web-based per l'apprendimento cooperativo (Johnson & Johnson, 1990; Sthal, 2002) della geometria piana, "Geometriamo", sempre destinato a bambini di scuola primaria, basato sul modello dello Student Teams Achievement Division (STAD) di Slavin (1990). Lo STAD prevede la competizione fra gruppi e pone l'enfasi sul conseguimento degli obiettivi del gruppo, considerando anche la responsabilità individuale in termini di miglioramento del proprio rendimento. Anche per questo ambiente, il contenuto matematico è stato realizzato con il supporto di alcune insegnanti. Esso consisteva in un ipertesto contenente le formule per il calcolo delle aree e dei perimetri delle figure regolari e alcuni esercizi che dovevano essere risolti dagli studenti cooperando attraverso un sistema di messaggistica integrato nell'ambiente (Roselli et al., 2002a). La sperimentazione, che ha seguito la realizzazione tecnica dell'ambiente, aveva anch'essa come obiettivo quello di valutare l'efficacia dell'apprendimento (in questo caso apprendimento cooperativo in una situazione di formazione a distanza) attraverso una metodologia della ricerca che si limitava al confronto dei miglioramenti dei risultati degli studenti tra gruppo sperimentale e gruppo di controllo (Roselli et al., 2002b).

Quando Eleonora Faggiano ha iniziato il dottorato, all'interno del gruppo di ricerca si stava procedendo all'analisi dei dati della sperimentazione e a una ridefinizione dell'architettura del sistema. In particolare dall'analisi dei dati emergeva che i migliori risultati in termini di apprendimento sembravano essere legati a una più intensa attività di cooperazione all'interno dei gruppi di studenti. Contemporaneamente, sfruttando la stessa progettazione tecnica del sistema, si è voluto realizzare un ulteriore ambiente destinato a studenti di Scuola Secondaria di Secondo Grado nel quale si chiedeva di risolvere dei problemi, eventualmente consultando il materiale disponibile (Faggiano et al., 2005). D'altro canto la componente del sistema che si faceva carico della gestione della comunicazione all'interno dei gruppi sembrava richiedere un approfondimento e per farlo si è pensato di utilizzare le emergenti tecniche di intelligenza artificiale basate su un sistema di regole. Si è cercato, infine, di andare a definire un modello per la progettazione e l'implementazione di sistemi ipermediali in grado di supportare l'apprendimento cooperativo a distanza.

I risultati di questo lavoro sono stati oggetto della tesi di dottorato (Faggiano e Roselli, 2005; Faggiano et al. 2007). Alla fine di questo lavoro, però è rimasta l'idea che questi ambienti per l'apprendimento cooperativo web-based, pur svolgendo la funzione di mediatori tra il docente, lo studente e il sapere, non siano in realtà stati progettati, utilizzati e studiati prendendosi carico anche delle dimensioni epistemologiche e cognitive oltre che di quella didattica. Nell'ambito dell'e-learning sono stati nel frattempo anche svolti una serie di studi i cui risultati hanno applicazioni nel campo della didattica della matematica

sia a livello nazionale che a livello internazionale. Inoltre, tali ambienti potrebbero essere riguardati come strumenti aggregatori che con la loro struttura mostrano la logica del percorso e svolgono un ruolo di orientamento e accompagnamento dello studente nella costruzione di senso. Ma questi al momento restano possibili propositi per il futuro. Anche perché nel frattempo, Eleonora Faggiano ha scelto di rivolgere l'attenzione verso gli artefatti che si andavano affermando nell'ambito della Didattica della Matematica, per le loro potenzialità in termini di supporto alla costruzione di significati e di guardare in particolare alle tecnologie come mediatori nell'azione e nei processi di costruzione di conoscenza. A questo cambiamento di prospettiva ha contribuito in modo significativo la sua partecipazione al gruppo di lavoro sull'utilizzo delle tecnologie nella didattica della matematica, coordinato da Colette Laborde, durante la scuola estiva dello YERME nel 2004. I suoi lavori degli anni seguenti sono stati finalizzati a mettere a fuoco possibili modalità di integrazione delle tecnologie per l'apprendimento della matematica nelle pratiche didattiche a vari livelli di scuola (Faggiano et al, 2015). Più recentemente, la scoperta dell'esistenza del sistema autore New Cabri, che con licenza personale rilasciataci da CabriLog ci è stato consentito di utilizzare, ha contribuito a dirigere la ricerca verso la Scuola Primaria (Montone et al., 2015). È apparso presto evidente che per progettare risorse digitali con l'obiettivo di promuovere la costruzione di significati, come quello della simmetria assiale per allievi di Scuola Primaria, fosse necessario prendersi carico esplicitamente del passaggio dai significati personali, che l'allievo può costruire operando con l'artefatto, ai significati matematici. L'interesse per questa nuova ricerca sull'utilizzo di artefatti digitali, basato sul quadro di riferimento della mediazione semiotica è stato così condiviso con Antonella Montone. L'esigenza di rileggere il lavoro in corso anche da una prospettiva diversa, è infine quella che ci ha spinto a intraprendere questo dialogo con Pier Giuseppe Rossi che ci ha portato fin qui.

Riferimenti bibliografici

- Altet M. (2012). L'apporto dell'analisi plurale dalle pratiche didattiche alla co-formazione degli insegnanti. In P.C. Rivoltella, P.G. Rossi (eds.), *L'agire didattico*. Brescia: La Scuola.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *Int J Comput Math Learn*, 7(3), 245–274
- Arzarello, F. & Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies In Mathematics*, vol. 57 (3), 305-308
- Arzarello, F. & Robutti, O. (2008). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*, 2nd revised edition. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 716-745
- Arzarello, F. & Sabena, C. (2014). Introduction to the approach of Action, Production and Communication (APC). In A. Bikner-Ahsbabs & S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. ZDM-Series Advances in Mathematics Education. New York: Springer, 31-45
- Barberini G. & Bartolini Bussi M.G., (1993). A proposito di trasformazioni geometriche nella scuola elementare (I), *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, Vol. 16 A, 643-662
- Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective, in L. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, (second edition), Routledge, 746-783
- Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (2009), Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, Vol. 32 A-B, 270-294
- Bartolini Bussi, M. G. (1998). Verbal interaction in mathematics classroom: A Vygotskian analysis. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpiska (Eds.), *Language and communication in mathematics classroom* (pp. 65–84). Reston, VA: NCTM
- Berthoz, A. (2011). *Semplicità*. Torino: Codice Edizioni
- Biggs, J. (1993). From theory to practice: A cognitive systems approach. *Higher Education Research and Development*, 12(1), 73-85
- Biggs, J. (2003). *Teaching for quality learning at university*. Buckingham: SRHE/OUP.
- Bodemer, D., Ploetzner, R., Feuerlein, I., & Spada, H. (2004). The active integration of information during learning with dynamic and interactive visualisations. *Learning and Instruction*, 14, 325-341

- Borghi, A.M. Binkofski, F. (2014). *Words As social Tools: An embodied view on abstract concepts*. SpringerBriefs in Cognition series. Springer: New York
- Bruner J.S., Olver R.R. & Greenfield, P.M. et al. (1968). *Lo sviluppo cognitivo*. Armando
- Calvani A. (2001). *Educazione, comunicazione e nuovi media*, Utet, Torino
- Caruana F. e Borghi A. (2016). *Il cervello in azione*. Il Mulino
- Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble
- Clements D. H., & Sarama J. (2011). Early childhood teacher education: The case of geometry. *J. Math. Teach. Educ.* 14, 133–148
- Costabile M.F., De Angeli A., Roselli T., Lanzilotti R. and Plantamura P. (2003). Evaluating the Educational Impact of a Tutoring Hypermedia for Children. *Information Technology in Childhood Education Annual*, 2003(1), 289-308
- Dalziel J., Conole G., Wills S., Walker S., Bennett ,S. Dobozy, E. and Bower, M. (2013). *The Larnaca declaration on learning design*. retrieved from www.larnacadeclaration.org [2016]
- Damiano, E. (2006). *La nuova alleanza*. La Scuola, Brescia
- Damiano, E. (2013). *La mediazione didattica*. Milano: Franco Angeli.
- Develay, M. (1993). *A propos de transposition didactique en sciences biologiques*, in Develay M., Astolfi J.-P. *La didactique des sciences*, PUF, Paris, 119-138
- Duit, R., Gropengießer, H., Kattmann, U., Komorek, M. and Parchmann, I. (2012). *The model of educational reconstruction – a framework for improving teaching and learning science*. In Jorde D. and Dillon J. (Eds.), *Science Education Research and Practice in Europe: Retrospective and Prospective*, Sense Publisher, 13–37
- Edwards, L., Radford, L., Arzarello, F. (Eds.). (2009). Gestures and multimodality in the construction of mathematical meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2).
- Faggiano, E. & Roselli, T. (2005). A framework for supporting Web-based Cooperative Learning. In: *Proceedings of the International Conference Cognition and Exploratory Learning in Digital Age (CELDA 2005)*. IADIS Press, Portugal, 215-222
- Faggiano, E., Montone, A., Pertichino, M. (2015). About the awkward process of integrating technology into math class, in Amado & Carreira (Eds.) *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. University of Algarve, Faro, Portugal, 277-284
- Faggiano, E., Montone, M., Mariotti, M.A. (2016). Creating a synergy between manipulatives and virtual artefacts to conceptualize axial symmetry at primary school, In *Proceedings of PME 40*, Vol 2. 235-242
- Faggiano, E., Pertichino, M., Roselli, T. (2005). CSCL in Math Education. In: 35th ASEE/IEEE *Frontiers In Education Conference Proceedings*. vol. F4C, 14-19
- Faggiano, E., Roselli, T., Rossano, V. (2007) Web-based cooperative learning in mathematics. *Advanced Technology for Learning*, vol. 4 n. 1, 1-8

- Gallese, M.D. (2009). Mirror Neurons, Embodied Simulation, and the Neural Basis of Social Identification. *Psychoanalytic Dialogues*, 19, 519–536
- Grenier, D. (1990). Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale: éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie des situations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(1), 5-60
- Kalenine, S., Pinet, L., and Gentaz, E. (2011). The visuo-haptic exploration of geometrical shapes increases their recognition in preschoolers. *International Journal of behavioral Development*, 35, 18-26
- Hollebrands, K. F. (2007). The Role of a Dynamic Software Program for Geometry in the Strategies High School Mathematics Students Employ, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 38, No. 2, 164-192
- Houssaye, J. (2000). *Le triangle pédagogique*, Peter Lang, Berne.
- Johnson, D.W. & Johnson, R.T. (1990) Using cooperative learning in math, In Davidson N. (Ed), *Cooperative Learning In Math*
- Jonassen, D. H. (1999). *Designing constructivist learning environments*. In C. M. Reigeluth (Ed.), *Instructional-design theories and models: A new paradigm of instructional theory*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Vol. II, 215-39
- Jones, K. (2002). *Issues in the Teaching and Learning of Geometry*. In: Linda Haggarty (Ed), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice*. London: RoutledgeFalmer, 121-139
- Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 6: 283–317
- Laborde, C. & Laborde, J-M. (2011). Interactivity in dynamic mathematics environments: what does that mean?, *e-Proc. of the 16th Asian Technology Conference in Mathematics 2011*, http://atcm.mathandtech.org/EP2011/invited_papers/3272011_19113.pdf
- Lakoff, G., Johnson, M. (1999). *Philosophy in the Flesh: The Embodied Mind and Its Challenge to Western Thought*. New York: Basic Book.
- Lakoff, G., Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From*, Basic Books, traduzione italiana (2005), *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*, Torino: Bollati Boringhieri.
- Lanzilotti, R. & Roselli, T. (2007). An Experimental Evaluation of Logiocando, an Intelligent Tutoring Hypermedia System, *International Journal of Artificial Intelligence in Education (IJAIED)*, IOS Press, 17 (1), 41-56
- Laurillard, D. (2014). *Insegnamento come progettazione*. Milano. FrancoAngeli.
- Li, Q., Clark, B., Winchester, I. (2010). Instructional Design and Technology Grounded in Enactivism: a Paradigm Shift?. *British Journal of Educational Technology*, 41, 3, 403-419.
- Mariotti, M. A. (2015). *Transforming Images in a DGS: The Semiotic Potential of the Dragging Tool for Introducing the Notion of Conditional Statement*. In Rezat, S.;

- Hattermann, M.; Peter-Koop, A. (Eds.) Transformation—A Fundamental Idea of Mathematics Education. Springer, 156-175
- Mariotti, M.A. (2010). *Riflessioni sulla dinamicità delle figure: il comando di trascinamento*. In Accascina G., Rogora, E. (a cura di) *Seminari di geometri dinamica*, Edizioni Nuova Cultura, Roma,
- Mariotti, M.A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher, *ZDM Mathematics Education*, 41, 427–440
- Martinand, J.-L. (1989). Pratiques de référence, transposition didactique et savoirs professionnels en sciences techniques, in *Les sciences de l'éducation, pour l'ère nouvelle*, n. 2, 23-29
- Maschietto, M. & Bartolini Bussi, M.G. (2009). Working with artefacts: gestures, drawings and speech in the construction of the mathematical meaning of the visual pyramid, *Educational Studies in Mathematics*. vol. 70 (2), 143-157
- Maschietto M., Soury-Lavergne S. (2013) Designing a Duo of Material and Digital Artifacts: the Pascaline and Cabri Elem e-books in Primary School Mathematics. *ZDM Mathematics Education* 45(7), 959-971
- Montone, A., Faggiano, E., Fiorentino, M.G. (2015). Conceptualising axial symmetry through the use of Cabri Elem within an integrated laboratory approach, in Amado & Carreira (Eds.) *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. University of Algarve, Faro, Portugal, 210-217.
- Ng, O. & Sinclair, N. (2015). Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 421-434
- Norman, D.A. (1993). *Things that make us smart*, Addison-Wesley Pub. Com.
- Paola, D. (2001). Nuove tecnologie e nuova scuola: quali opportunità per una didattica “sensata” della matematica. *Didattica della matematica e rinnovamento curricolare*. Bologna: Pitagora, 81-93
- Piaget, J. (1981). *L'equilibrage delle strutture cognitive*. Boringhieri, Torino
- Poisard, C., Bueno-Ravel, L., & Gueudet, G., (2011). Comprendre l'intégration de ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. *Recherches en didactique des mathématiques*, 31(2), 151-189
- Proulx, J., Simmt, E. (2013). Enactivism in mathematics education: moving toward a reconceptualization of learning and knowledge. *ES&S*. 4, 1, 59-80
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin
- Rézeau, J. (2000). *Médiatisation et médiation pédagogique dans un environnement multimédia* (testo della tesi di dottorato riprodotto in <http://joseph.rezeau.pagesperso-orange.fr>).
- Roselli, T., (1995). Artificial Intelligence Can Improve Hypermedia Instructional Technologies for Learning. *ACM Computing Surveys*, Vol.27, No 4.

- Roselli, T., Faggiano, E., Rossano, V. (2002a). Imparare la geometria cooperando in rete. In: *Atti del Convegno Didattica 2002*. 129-136
- Roselli, T., Faggiano, E., Plantamura P., Rossano V. (2002b). A WWW-Based Cooperative Learning System and its effects on students' achievement. In: *International Conference on Computer in Education ICCE 2002*, 283-287
- Rossi, P.G. (2011). *Didattica Enattiva*. Franco Angeli. Milano.
- Rossi, P.G. (2014). Le tecnologie digitali per la progettazione didattica. *ECPS Journal*. 10, 113-133
- Rossi, P.G. (2016a). *Tecnologie, azione, corpo*. Franco Angeli. Milano.
- Rossi, P.G. (2016b). Gli artefatti digitali e i processi di mediazione didattica. *Pedagogia Oggi*, volume 2, 11-26
- Rossi, P.G. (in press). Alignment. *Education Science & Society*. 2, 2016, 12-25
- Rossi, P.G., Giannandrea, L., Magnoler, P. (2013). APOL o l'aula virtuale. I master online dell'università di Macerata. In E. Damiano. *La mediazione didattica*. Franco Angeli. Milano.
- Slavin, R.E. (1990). *Cooperative Learning: Theory, Research, and Practice*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall
- Sowell, E. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal of Research in Mathematics Education*, 20, 498-505
- Stahl, G. (2002). Contributions to a theoretical framework for CSCL, *Proceedings of CSCL 2002*, Boulder, CO, 62-71
- Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (eds.), *Research design in mathematics and science education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 267-307
- Usiskin, Z. (1972). The effects of teaching Euclidean geometry via transformations on student attitudes and achievement in tenth-grade geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 3, 249-259
- van Elk, M., Slors, M. and Bekkering, H. (2010). Embodied language comprehension requires an enactivist paradigm of cognition. *Frontiers in Psychology*. 11, 120-128
- Varela, F. J.; Thompson, E.; Rosch, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. MIT Press, Cambridge, MA, USA
- Verret, M. (1976). *Le temps des études*, Honoré Champion, Paris
- Vinatier, I., & Numa-Bocage, L. (2007). Prise en charge d'un enfant en difficulté de lecture par un maître spécialisé: gestion de l'intersubjectivité et schème de médiation didactique. *Revue française de pédagogie*. 158, 85-101
- Vygotskij, L.S. (1980). *Il processo cognitivo*, Torino, Boringhieri
- Vygotskij, L.S. (2001). *Pensiero e linguaggio*. Ricerche psicologiche, Laterza. Roma-Bari