CORPO E MOVIMENTO IN MATEMATICA: INCONTRI, INTRECCI E SVILUPPI

Francesca Ferrara, Dipartimento di Matematica "G. Peano", Università di Torino
Elizabeth de Freitas, Education and Social Research Institute, Manchester Metropolitan University
Maria Flavia Mammana, Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Catania
Michela Maschietto, Dipartimento di Educazione e Scienze Umane, Università di Modena e Reggio Emilia

Sono i mondi che l'uomo inventa nella realtà della vita quotidiana, trasformandola secondo i propri desideri.
Sono i mondi che l'immaginazione plasma nei romanzi e nell'invenzione narrativa.
Sono anche i mondi cui possiamo accedere con le moderne tecniche di imaging,
e sono i mondi immaginari detti virtuali.

Alain Berthoz

1. Background teorico

Il seminario intende focalizzarsi sul ruolo peculiare di corpo e movimento nell'attività matematica, in particolare in seno ai processi di apprendimento e insegnamento della disciplina nel contesto classe.
Le dimensioni del corpo e del movimento hanno assunto particolare importanza e interesse nel- e per la ricerca in didattica della matematica da ormai due decenni, da quando cioè il lavoro di Lakoff e Núñez sulla mente *embodied* e sulla sua relazione con la matematica astratta (proveniente dalla linguistica cognitiva) è divenuto noto ai ricercatori del nostro campo (Lakoff & Núñez, 2000). Brevemente, in tale lavoro si metteva in luce come la nostra comprensione di concetti matematici astratti sia fondata su esperienze senso-motorie e sull'interazione con il mondo che ci circonda. La teoria di Lakoff e Núñez restituiva attenzione al corpo e, parzialmente, al movimento (dopo le antiche radici ritrovabili in Piaget e Vygotskij). Tuttavia, il focus dell'*embodied cognition* sul pensiero metaforico con i suoi *'schema'* finiva per ricadere in modo sottile in quella divisione mente/corpo che la ricerca in didattica proprio in quegli anni mirava a superare, secondo prospettive post-Vygotskijane (anche affetta dagli studi psicologici sul carattere non puramente epifenomenico della gestualità nel pensiero e sulla presunta unità cognitiva tra gesti e linguaggio). Il filone dell'*embodiment* richiamava anche la visione enattivista, precedentemente proposta da Varela e dai suoi collaboratori a partire dalla prospettiva fenomenologica di Merleau-Ponty, che metteva al centro della costruzione di conoscenza il coinvolgimento del corpo con l'ambiente e ciò che l'individuo esperisce (Varela *et al*., 1991).
Da allora, numerose sono state le evoluzioni e le contaminazioni del paradigma, così chiamato, dell'*embodied mind* che vedeva i confini tra mente e corpo "porosi" (ad esempio, Seitz, 2000; Wilson, 2002). Queste hanno portato all'eterogeneo proliferare di studi sul campo come al suo esterno, ad esempio nell'ambito della psicologia sperimentale e in quelli neurofisiologico e delle neuroscienze.
Per quanto riguarda in particolare la ricerca in didattica della matematica, in un lavoro presentato in occasione di un *Research Forum* alla conferenza PME 27 nel 2003, Nemirovsky congetturava un legame indissolubile tra percezione, azione motoria e pensiero, sottolineando che le attività percettivo-motorie sono costitutive della comprensione in matematica e che "ciò che pensiamo emerge da e in queste stesse attività". Tale lavoro, assieme agli altri coinvolti nel *forum*, ha portato alla creazione di un volume speciale di

Educational Studies in Mathematics, dedicato al ruolo dell'attività corporea nella comprensione matematica (vol. 57, n. 3, 2004). Con questo, per la prima volta, si allegava una serie di *videopapers*, in cui l'utilizzo del video come strumento metodologico di analisi delle attività di classe si univa alla decodifica del discorso degli studenti. Il video era diventato il mezzo per catturare il corpo, allora in primis la gestualità, nel fare matematica. Questa direzione della ricerca didattica si è approfondita in seguito, anche grazie ai risultati neuroscientifici legati all'esistenza di neuroni specchio e di altri neuroni bi- e multi-modali (Gallese & Lakoff, 2005; ma si veda anche Rizzolatti *et al.*, 1997), e ha portato alle considerazioni più recenti sul carattere sensorio (*sensuous*) o multimodale della conoscenza in matematica e all'emergere di nuove prospettive sulla, e a partire dalla, matematica *embodied* (Arzarello, 2006; Nemirovsky & Ferrara, 2009; Radford *et al.*, 2009; Hwang & Roth, 2011; Radford, 2013; Streeck, 2013; Edwards *et al.*, 2014; Ferrara, 2014; de Freitas & Sinclair, 2014; de Freitas, 2016; Roth, 2016).
Senza entrare troppo in tali questioni che ci farebbero perdere di vista il nostro scopo qui, vogliamo evidenziare che le attività percettivo-motorie sono state studiate sia da un punto di vista cognitivo sia da un punto di vista fondazionale, in particolare a proposito dei fondamenti cognitivi della matematica. Proprio negli stessi anni in cui incontravamo le idee della teoria dell'*embodied cognition*, usciva anche la traduzione italiana del libro *Le sens du mouvement* del francese A. Berthoz, fisiologo della percezione e dall'azione, che attribuiva al movimento il carattere peculiare di un "senso dei sensi". Berthoz lo chiama cinestesia. Propriocezione e cinestesia (brevemente, la percezione della configurazione del proprio corpo e la percezione del movimento del proprio corpo e dei suoi stati) sono elementi essenziali di ciò che noi indichiamo generalmente con percezione (si noti che già la visione fenomenologica di Husserl assegnava caratteristiche cinestetiche alla coscienza). In un recente lavoro, Sheets-Johnstone (2012) sottolinea che "non solo la nostra percezione del mondo è in ogni dove e sempre animata, ma il nostro movimento è in ogni dove e sempre aggiornato per via cinestetica". Il termine *animation* è, per Sheets-Johnstone, migliore del termine *embodiment* per riferirsi alle dinamiche cinestetiche e affettive attraverso cui si strutturano i significati.
È inoltre interessante come Berthoz richiami Poincaré e il modo in cui trattava i fondamenti della geometria, in particolare nel volume "La scienza e l'ipotesi", mettendo in luce come rivalutasse il ruolo del corpo e dell'azione nell'origine della geometria, nella costituzione del senso dello spazio, nella concezione di ciò che è punto e distanza. Si tratta di questioni delicate ma particolarmente indicative, che ritornano più volte anche nelle analisi fondazionali di G. Longo, matematico italiano che lavora a Parigi, il quale, nella sua critica al logicismo, sottolinea la tensione tra la formalizzazione della matematica amputata del suo rapporto allo spazio e quello che vede come uno degli "elementi costitutivi del senso", quel "muoversi nel pensiero come muoversi nello spazio" (Longo, 2002; cfr. anche Longo, 2005). Il pensiero di Poincaré è in qualche modo simile a quello espresso in anni recenti dal matematico e filosofo della matematica francese G. Châtelet (1993/2000)—che troviamo citato sia in Berthoz sia in Longo.
Rispetto al lavoro di Châtelet, ci interessa particolarmente la prospettiva sull'attività diagrammatica e sul suo inseparabile intreccio con la gestualità, poiché ci offre la possibilità di espandere la visione di come corpo e movimento possano essere coinvolti e teorizzati nell'attività matematica e di estendere il pensarli *solo* come corpo umano e movimento del corpo. Nello specifico, Châtelet propone la nozione sottile di *virtuale* per riferirsi a quella "indeterminatezza che sta alla base di tutte le azioni", possiamo dire a quella sfera 'intensiva' dell'attività matematica, o potenziale, immaginativa, che costituisce il carattere mobile, dinamico, della disciplina. L'immaginazione era già stata proposta come inseparabile dal percettivo-motorio in matematica (Nemirovsky & Ferrara, 2009), parte "viscerale" di una *sensuous cognition* (Radford, 2013), e il ruolo della sfera immaginativa era importante anche

nel lavoro di Husserl sulla coscienza. Châtelet afferma che in matematica si dà molto spazio alla realizzazione (nel senso di rendersi conto, della comprensione) del possibile (l'accordo delle nostre azioni con vincoli logici), ma si finisce per dimenticare l'attualizzazione del virtuale e il ruolo *pivot* che i diagrammi giocano nell'ontogenesi matematica (le sue asserzioni sono basate sullo studio del pensiero diagrammatico attraverso cui nello sviluppo storico della matematica sono state generate nuove idee). I diagrammi sono per lui sostenitori di pensiero implicito, intuitivo e persino irrazionale catturato nella materia sensibile, ri-assemblano l'immaginario e il reale, il virtuale e l'attuale, sono il punto di incontro tra pensiero e segno. In sostanza, la natura mobile, la virtualità, di un diagramma consiste di tutti i gesti e le future alterazioni in esso contenuti in qualche modo. Riprendendo Châtelet, B. Rotman critica la visione della matematica che si è formata sin dagli inizi del XX secolo con la sistemazione bourbakista, basata essenzialmente sul linguaggio degli insiemi astratti e sulla netta scomparsa dei diagrammi. L'osservazione nella classe di matematica rivela invece che "l'impulso a gesticolare e a costruire diagrammi è sempre presente nell'apprendere e nel risolvere problemi" (Rotman, 2012). Rotman offre il linguaggio delle categorie come esempio di una logica dinamica che mediante schemi di frecce permette di comprendere e praticare la matematica in termini di pensiero diagrammatico. In contrasto alla fissità degli insiemi e della relazione di appartenenza, infatti, "le frecce e la composizione connotano movimento e trasformazione", restituendo una dimensione corporea ai concetti matematici.

2. Prospettive e luci

Alla luce del background appena delineato, il nostro interesse cade proprio sulla sfera potenziale (fatta di motilità) che possiamo restituire alla matematica e all'attività matematica. Focalizzeremo dunque l'attenzione non solo sul ruolo del corpo e della percezione, ma anche sulla possibilità di catturare estesamente l'idea di movimento da diverse prospettive, in modo da tracciare aspetti della temporalità e della spazialità in termini di una tensione produttiva tra movimento e forma, e di una relazione dialogica tra movimento e struttura. Il nostro intento non è quello di trovare posto a una classificazione del corpo (ad esempio, della gestualità) e/o del movimento, ma di comprendere più in profondità il carattere intensivo e generativo dei processi di pensiero e di scoperta in matematica, in un contesto di insegnamento e apprendimento della disciplina. La ricerca che presentiamo, in quest'ottica non va nella direzione di applicare tecniche ma di (di)svelare intuizioni (e interpretazioni) sullo stretto intreccio di corpo e movimento nello sviluppo di conoscenza matematica.
A tale scopo, presentiamo di seguito alcune linee di pensiero che ci hanno fornito spunti da prospettive diverse (tutte già citate sopra e, comunque, di stampo fenomenologico, neuro-scientifico, epistemologico, filosofico), ma per noi complementari e, in parte, mutuamente sovrapponentesi, nell'aiutarci a inquadrare questo nostro lavoro. L'ordine con cui tali linee sono presentate non è perciò necessario per la lettura, ma è imposto dalla sequenzialità cui ci costringe la comunicazione scritta.

2.1 Sheets-Johnstone e la supremazia del movimento

Sheets-Johnstone pone alcune questioni profonde sull'utilizzo del termine *embodiment* e, nello specifico, sull'idea di movimento. I lavori cui ci riferiamo sono il volume *The primacy of movement* (Sheets-Johnstone, 2011, Expanded 2nd ed.) e i tre articoli intitolati: *Animation: an essential, fundamental, and properly descriptive concept* del 2009, *Body and movement: basic dynamic principles* del 2010 (un capitolo di libro) e infine *Movement and mirror neurons: a challenging and choice conversation* del 2012.

Embodiment e movimento sono per Sheets-Johnstone fortemente connessi: *l'embodiment* sta al corpo come ciò che si indica con "*enaction*" sta al movimento. Il termine *enaction* fa capolino con la teoria enattivista di Varela e colleghi e va inteso come il modo in cui un soggetto nell'atto della percezione attiva delle azioni a soddisfare le richieste della situazione. Nel capitolo del 2010, Sheets-Johnstone sottolinea che entrambi i primi termini dell'analogia (*embodiment* ed *enaction*) sono poco congeniali alla realtà di fondo che mirano a catturare e a descrivere, e associa questa mancanza di congenialità alla mancanza, o alla misera presenza, di attenzione al corpo affettivo, tattile e cinestetico:

> *either no entry exists for the tactile-kinesthetic/affective body and kinesthesia or paltry entries exist. In effect, the foundational ontological and epistemological reality of life is missing: animation is nowhere on the map.* (Sheets-Johnstone, 2010, p. 217; il sottolineato è enfatizzato nell'originale).

Tale mancanza è amplificata inoltre dai termini in cui è discussa la propriocezione negli studi sul corpo e dal fatto che spesso non sia definita, in modo sostanziale, differenza alcuna tra *propriocezione* e *cinestesia*.

> *Given the inherent qualitative spatio-temporal-energic character of kinesthesia, it is hardly surprising that discussions of body and of movement that omit kinesthesia from their register omit the very stuff of life and the qualitative nature of that stuff. They omit animation.*
> *Understandings of body and movement that are grounded in the natural history of animate life begin with proprioception, with the beginning dynamics of life itself in surface recognition sensitivity, and thereby proceed naturally to understandings that encompass kinesthesia, affectivity, cognition, and the world, including a world of others.* (*ibid*., p. 218)

La nozione di "animation", nel senso di vitalità o dinamismo in italiano, è la chiave di lettura che Sheets-Johnstone propone nel considerare il movimento:

> *Movement is in other words at the heart not only of being alive but of staying alive. In an existential as well as evolutionary sense, survival is a matter of effective movement, which means movement that is affectively and cognitively responsive to an ever-changing world that is not the same from 1 day to the next and that demands attentiveness in precisely the way an ant, a spider, a fly, or a human is attentive, not only to the expected and familiar, but to the unexpected or the unfamiliar* (*ibid*.).

Nel lavoro del 2012, Sheets-Johnstone critica la comprensione comune del movimento e il modo abituale di concepirlo che, secondo lei, falliscono nel riconoscere, e tanto meno catturano, le dinamiche del fenomeno e anzi insistono su misconcetti sul vero e proprio fondamento della vita animata. Lo stesso termine *embodiment* e i suoi derivati sono per lei capricciosi e deviano l'attenzione dalla vera natura animata della vita. A ciò va aggiunta l'insopprimibilità della cinestesia come modalità sensoria fondamentale:

> *It is truly amazing that in this twenty-first century, we humans still believe we have only five senses; that is, that we fail to recognize and duly acknowledge kinesthesia, the sense we have of our own movement and its spatio-temporal-energic dynamics* (Sheets-Johnstone, 2012, p. 389).

Già nel lavoro del 2009, Sheets-Johnstone propone un approccio epistemologico che riconosce supremazia al movimento senza presupporre l'esistenza a priori di strutture sottostanti ai diversi movimenti coinvolti. La nozione di "animation" non è più considerata "the mere output but the proper point of departure for the study of life" (Sheets-Johnstone, 2009, p. 214). De Freitas (2016) evidenzia come, per Sheets-Johnstone, questo aspetto implichi una critica della frase "cognition is embodied", per il modo in cui "it demotes the body to being merely the vessel or container of some higher act of cognition" (p. 1). Inoltre, non soltanto la nostra percezione del mondo è dovunque e sempre animata, ma il nostro movimento è dovunque e sempre informato per via cinestetica. Propriocezione e cinestesia sono centrali al movimento e *pivot* per la nostra comprensione della cognizione.
La propriocezione è stata originariamente definita come un "senso di locomozione" ed è evoluta nell'idea di "senso muscolare" e delle configurazioni che possono essere assunte dal proprio corpo (un senso del movimento e della posizione). Propriamente parlando, è una questione di ogni sorta di organi corporei che percepiscono il movimento e le deformazioni, una forma primordiale di consapevolezza animata, ed è per definizione una proprietà relazionale. Rush (2008) sottolinea: "no one occupies a completely stable, immobile perspective from moment to moment of perception" (p. 3). Quando ci si muove, le "proprioceptive potentialities" (*ibid*., p. 38) del corpo sono continuamente riconfigurate, come lo sono le posizioni relative degli oggetti in primo piano e sullo sfondo. Tuttavia, è necessaria ulteriore ricerca "on how the proprioceptive potentialities of the body are provisional and indeterminate" (de Freitas, 2016, p. 3), anche per via del crescente interesse in approcci post-fenomenologici allo studio della percezione, in modo da opporsi a "simplistic images of neuronal activity that reduce the capacities and potentialities of the human body to the brain" (*ibid*., p. 4).
Parte meno estesa della propriocezione è la cinestesia, in cui la prima evolve mediante lo sforzo muscolare esercitato dagli organi interni che percepiscono il movimento. La cinestesia è la modalità sensoria fondamentale che riguarda l'abilità del corpo umano di sentire il proprio movimento e i propri stati e quindi contribuisce, secondo Streeck (2013), al senso di essere fonte dell'azione e dunque all'essere "aware that it is *I* that is acting or feeling" (p. 69; enfasi nell'originale). Persino il sistema dei neuroni specchio sembra "contingent on our own kinesthetically experienced human capacities and possibilities of movement" (Sheets-Johnstone, 2012, p. 391). Per Sheets-Johnstone, è attraverso la cinestesia che noi sperimentiamo (sentiamo) in modo spontaneo dinamiche qualitative direttamente distintive del movimento. Vale a dire che tutto il movimento crea spazi, tempi e forze che lo contraddistinguono e, quando prestiamo attenzione alle nostre dinamiche coordinate, siamo in grado di riconoscere "kinesthetic melodies" (*ibid*., p. 390; enfasi nell'originale). L'idea di "*thinking in movement*", sviluppata nello specifico nel capitolo 12 del volume del 2011, è legata a quanto detto:

> *To think is first of all to be caught up in a dynamic flow; thinking is itself, by its very nature, kinetic. It moves forward, backward, digressively, quickly, slowly, narrowly, suddenly, hesitantly, blindly, confusedly, penetratingly. What is distinctive about thinking in movement is not that the flow of thought is kinetic, but that the thought itself is. It is motional through and through; at once spatial, temporal, dynamic.* (Sheets-Johnstone, 2011, p. 421)

L'espressione "thinking in movement" non si riferisce al pensare *per mezzo del* movimento o al fatto che i pensieri sono trascritti (riprodotti) *nel* movimento. In breve, il movimento è visto come l'armonizzazione essenziale dinamica e affettiva del corpo con il mondo. L'idea si lega piuttosto a una sorta di "movement-thought experiment" che si rifà al modo in cui il mondo è esplorato in movimento. Non c'è alcun divario per Sheets-Johnstone tra il "global dynamic world" percepito e il "kinetic world" in cui ci si muove. Il mondo che si esplora in movimento non può essere separato dal mondo che si crea in movimento, di conseguenza:

> *the idea that thinking is separate from its expression — a thought in one's head, so to speak, existing always prior to its corporeal expression — is a denial of thinking in movement.* (*ibid*., p. 423)

Con questa posizione, Sheets-Johnstone sfida visioni classiche per cui il movimento è un mezzo mediante il quale i pensieri arrivano a emergere o un sistema cinetico per mediare i pensieri. Al contrario, il movimento è significativo di per sé, come la ricercatrice afferma pensando all'immagine di un ballerino che improvvisa la sua danza e distinguendola da quella di Cezanne "thinking in painting" (richiamato in Merleau-Ponty), immagine con cui si propone di catturare l'intreccio inestricabile di percezione e movimento, per cui l'una informa l'altro e viceversa: "it is impossible to separate out where perception begins and movement ends or where movement begins and perception ends", vale a dire che "it is a question not of *vision* becoming gesture, but of *movement* becoming movement" (*ibid*., p. 429; enfasi nell'originale). Se caratterizziamo la danza come un processo artistico invece che un prodotto artistico, non c'è divisione alcuna tra espressione e rappresentazione, tra movimento e pensiero, ma il movimento è il fondamento della nostra costruzione epistemologica del mondo: "thinking in movement is our primary way of making sense of the world" (*ibid*., p. 432).
È qui che Sheets-Johnstone affronta la relazione del movimento con le parole e il linguaggio, affermando da un lato: "The actual dynamic kinetic event is not reducible to a word or even to a series of words" e "we all have nonlinguistic concepts" delle sue dinamiche (*ibid*., p. 434). Dall'altro lato, "What moves and changes is always in excess of the word — or words — that tries to name it. Thinking in movement is different *not in degree but in kind* from thinking in words" (*ibid*., p. 436; nostra enfasi). Sheets-Johnstone richiama sia Husserl sia Stern per la loro posizione sul carattere perturbatore del linguaggio che spesso fallisce nel catturare la vivacità e veracità ("aliveness") qualitative dell'esperienza come elemento di disturbo rispetto all'esperienza. I comportamenti comunicativi, non verbali, non sono né trasformati né trasformabili in linguaggio; una parola che indica (nominandolo) un comportamento non ha alcuno degli effetti del comportamento stesso, poiché il linguaggio non è uguale al potere comunicativo dei comportamenti non verbali, che sono dimensionali, non categorici per loro natura, e trasmettono "gradient information": "postures, gaze, upper and lower body orientation, and so on, have a variable affective tone according to *how* they are enacted" (*ibid*., p. 436; enfasi nell'originale).
In aggiunta, al contrario del messaggio verbale, questa informazione è precisa e l'aspetto 'intensivo', legato alle variazioni, è nel profondo una questione di dinamiche spazio-temporali, sostiene Sheets-Johnstone. Non significa tuttavia disdegnare il linguaggio, ma mettere in luce che c'è tutto un mondo non verbale sottile e assai complesso che è, e rimane, significativo in e di per sé, non puro accessorio epifenomenico:

> *a dynamic world articulating intercorporeal intentions that, although clearly affective in origin, are enmeshed in "agentivity," in expectations, in consequential relationships, and thereby in the phenomenon of thinking in movement* (*ibid*., p. 437).

"Thinking in movement" è a fondamento della nostra conoscenza del mondo, non una sorta di meccanismo adattivo; è pensare non in termini di comportamento nella sua interezza, bensì in termini dinamici:

> *in terms of speed, postural orientation, range of movement, force, direction, and so on. Behavioral variations exist precisely because kinetically dynamic possibilities exist. It is just such kinetically dynamic possibilities that distinguish one creature from another: one creature runs faster than another, is less easily aroused or startled than another, is quicker to withdraw than another, and so on. [...] When circumstances change, ways of living change, and these changes in the most basic sense are a matter of movement possibilities*. (*ibid*., p. 442; il sottolineato è enfatizzato nell'originale)

Il pensiero dunque è esso stesso cinetico, esso stesso una forma di "animation", per la quale non vi è separazione tra pensare e fare, né tra sentire e muoversi, ma dalla quale emerge tutto un mondo spazio-temporale, pieno di possibilità cinetiche, che cambia dinamicamente. Attingendo alla prospettiva fenomenologica di Sheets-Johnstone (che recupera numerosi aspetti dalla fenomenologia husserliana e merleau-pontyiana, fondendoli con prospettive più recenti di stampo psicologico e cognitivo, ad esempio la visione di Stern), possiamo in sostanza dare spiegazione della capacità di un corpo di essere toccato (nel senso di "affect") da, o di toccarne, un altro e della natura reattiva ("responsive") dei corpi, di come si respingano o propendano gli uni verso gli altri e, nel contempo, di come si uniscano ad altri corpi in movimenti coordinati (che tendono a coinvolgere la dimensione affettiva; un tentativo di studiare questa componente affettiva è offerto in de Freitas *et al*., 2017). Volendo riassumere, possiamo dire che ci possiamo muovere in concerto o in disarmonia con gli altri, possiamo unirci alle cose o separarci da esse, assemblarci o meno in più grandi e manifeste risposte coordinate tra corpi.

> *In sum, we are first and foremost animate beings who, in being animate, are alive to our animateness, which is to say that whatever affects us moves through us, permeating the whole of our being and moving us to move in ways dynamically congruent with the ongoing stirrings and commotions we feel*. (Sheets-Johnstone, 2012, p. 379; il sottolineato indica nostra enfasi)

Alla luce di quanto esposto, la prospettiva di Sheets-Johnstone risulta intrigante per studiare il modo in cui l'idea di movimento e di movimento coordinato possa aiutare a caratterizzare i processi di pensiero e di apprendimento nel contesto di nostro interesse (quello fenomenologico della classe di matematica) e a svelare come nuovi significati matematici possano emergere da configurazioni relazionali, complesse e contingenti, di parti in movimento.

Prima di passare alla prossima linea di pensiero, vogliamo riflettere su una peculiarità del movimento. In *Beyond Words*, opera centrata sull'osservazione della vita umana per mezzo del movimento, Moore e Yamamoto affermano di aver scelto il movimento come focus poiché è "an omnipresent accompaniment to human endeavors of all kinds. Not a word is uttered or a thought shaped without an accompanying motion, however subtle, somewhere in the body" (Moore & Yamamoto, 2012, p. 5), sebbene "this very ubiquity causes movement to be taken for granted" (*ibid*., p. 2). Gli autori vogliono incoraggiare una riflessione consapevole sul significato di questa dimensione silente del comportamento, che ritengono espressiva ma paradossale, per il suo essere "an elusive subject to study, because movement disappears even as it is occurring and leaves no artifacts behind" (*ibid*., p. 11). Studi sulla percezione del movimento biologico suggeriscono che siamo particolarmente sensibili al movimento umano:

> *We each possess a body; we feel it, see it, and control it. We are also frequently in close proximity to other bodies, observing, imitating, interacting with, and predicting their movements*. (Thornton, 2006, p. 261)

Pur se elusivo e di natura fugace, il movimento è quindi un elemento particolarmente significativo del comportamento. Ciò nonostante,

> *awareness of movement is often relegated to the perifery of consciousness, guiding our actions and reactions subliminally. It is rather unbelievable that the sense of movement, so essential to self and survival, has so often been overlooked*. (Moore & Yamamoto, 2012, p. 11)

La ricerca contemporanea in neuroscienze sfida questa trascuratezza, grazie al fatto che l'aumentata capacità di studiare il cervello e le funzioni del corpo sta portando a una nuova comprensione delle relazioni tra sensazioni, percezione, cognizione, emozione e azione. La percezione oggi è intesa coinvolgere più della registrazione e trasmissione meccaniche di immagini, così come il cervello è pensato molto meno simile a una macchina, grazie alla sua neuroplasticità. In parte, questo alimenta la nostra scelta di rivolgerci anche ad aspetti messi in luce negli studi di Sheets-Johnstone e Berthoz, tra l'altro entrambi ripresi da Moore e Yamamoto. E non è solo questione di movimento ma anche di coinvolgimento del corpo tutto, infatti: "as more becomes known about the complex interrelations of sense organs, the neuro-muscolar system, and brain physiology and function, the body assumes a new importance" (*ibid*., p. 13).

2.2 Berthoz e il senso del movimento

Del lavoro di Berthoz vogliamo discutere l'importanza che attribuisce all'azione e, ancor di più, al "senso del movimento". Ci limitiamo riguardo a questi aspetti a due riferimenti essenziali e faremo cenno nel seguito a loro sviluppi recenti, come quelli che introducono la nozione di vicarianza. I due testi in questione sono *Physiologie de la percetion et de l'action* (2010), capitolo nell'annuario del Collège de France del 1997-1998, e il volume *Il senso del movimento* (1998), versione italiana del testo originale francese del 1997. È interessante osservare che lo stesso autore afferma che il volume è un'apologia del corpo, che studia in particolare il senso del movimento in una prospettiva neuro-scientifica basata su risultati della fisiologia. Dal fatto che i sensi non sono dei recettori passivi, Berthoz mette in luce che oltre ai cinque sensi noti è possibile identificarne molti altri, nei muscoli, nelle articolazioni, nel sistema vestibolare dell'orecchio. Una caratteristica del funzionamento cerebrale, inoltre, sembra essere quella di non trattare le informazioni dei recettori sensoriali indipendentemente le une dalle altre. Questo quadro non fornisce una perfetta corrispondenza con una visione multimodale della conoscenza, oggi diffusa anche nel nostro campo di ricerca. L'idea della multimodalità si basa sull'esistenza di neuroni che assolvono più funzioni in una volta, tra cui i neuroni specchio (la cui capacità sembra derivare dalle nostre esperienze di movimento: cfr. § 2.1). Tuttavia, ogni volta che un'azione viene intrapresa o un movimento programmato, i recettori sensoriali legati al movimento e allo spazio si affidano anche alla loro caratteristica anticipatoria di previsione di stati futuri, adattabile alle esigenze del movimento. Ai cinque sensi, "bisogna in effetti aggiungere il senso del movimento o "cinestesia". La sua particolarità sta nel fatto che esso si serve di vari tipi di recettori" (Berthoz, 1998, p. 17). Il nostro autore considera questo senso come il "più importante per la sopravvivenza", ma dice anche che "non è identificato dalla coscienza" e "i suoi recettori non sono evidenti" (*ibid*., p. 18).

Non entriamo nei dettagli più tecnici della trattazione (che passa dal senso del tatto a quello dello sforzo per poi sottolineare che i recettori vestibolari sono sensibili alle variazioni di movimento sino alla derivata terza), ma citiamo che Berthoz richiama Poincaré nel momento in cui sviluppa il suo discorso sul senso del movimento, poiché Poincaré reinseriva il ruolo del corpo e dell'azione nelle origini della geometria (cfr. Berthoz, 1997-1998, pp. 422-424, dove il discorso su Poincaré è più esteso). Per Poincaré, la nozione di spazio non è in alcun modo pre-esistente, anzi si lega proprio al movimento. Noi *non* ci *rappresentiamo* i corpi esteriori nello spazio geometrico, ma ragioniamo su questi corpi *come se* fossero localizzati nello spazio geometrico. Nel domandarsi che cosa intendiamo nel dire che localizziamo un dato oggetto in un dato punto nello spazio, Poincaré rispondeva:

> *"Localizzare un oggetto vuol dire semplicemente rappresentarsi i movimenti che bisognerebbe fare per raggiungerlo. Mi spiego: non si tratta di rappresentarsi i movimenti stessi nello spazio, ma soltanto di rappresentarsi le sensazioni muscolari che accompagnano questi movimenti e che non presuppongono la preesistenza della nozione di spazio".* (Poincaré citato in Berthoz, 1998, p. 29)

È qui che Berthoz si chiede come allora sia potuta nascere l'idea dello spazio geometrico e che egli collega alla risposta di Poincaré l'importanza dei recettori sensoriali. Infatti, per Poincaré, in seguito a un semplice cambiamento di posizione è possibile riposizionare il proprio corpo, mediante il movimento, in modo da ripristinare l'oggetto nella sua situazione originaria (è tipico ad esempio di quando percepiamo che una figura è stata ruotata di 90 gradi: tendiamo a ruotare la testa per vederla dalla prospettiva iniziale, in assenza di movimento). Poincaré aggiunge, afferma Berthoz:

> *"un essere immobile non avrebbe mai potuto acquisire la nozione di spazio perché, non potendo correggere con i suoi movimenti gli effetti dei cambiamenti di posizione degli oggetti esterni, non avrebbe avuto alcuna ragione di distinguerli dai cambiamenti di stato".* (*ibid.*)

Insomma, la conclusione di Berthoz è che il tatto e la vista, da soli, non potrebbero darci il senso dello spazio senza il "senso muscolare". Il punto diventa, secondo questa visione, "la suite des mouvements qu'il convient de faire pour l'atteindre à partir d'une position initiale du corps" (Berthoz, 1997-1998, p. 422), una condizione di possibilità *à la* Longo basata sulla cinestesia, la quale è 'primaria' anche per Sheets-Johnstone (cfr. § 2.1). La geometria è fondata quindi su gesti orientati verso scopi, un pensiero che si avvicina a quello espresso da Châtelet (cfr. § 2.4), citato proprio in questo contesto.
Altri due aspetti per noi piuttosto interessanti dell'analisi di Berthoz concernono: il fatto che la percezione delle forme geometriche, invece di essere come si pensa sovente, "une propriété statique de traitement d'images, est profondément liée à la perception et au contrôle du mouvement", è "une *décision perceptive* et pas seulement un traitment passif" (*ibid.*, p. 432; enfasi nell'originale); e il fatto che il movimento sia utilizzato anche per ricostruire la forma tridimensionale. Questi sono aspetti che ci possono invitare a pensare al movimento come fonte di possibilità di apprendimento, ad esempio in situazioni legate alla percezione di forme del piano e dello spazio.
Non ci dilungheremo ulteriormente qui sugli innumerevoli aspetti affrontati da Berthoz, ci limitiamo a fare alcune riflessioni che egli affronta nel capitolo 6 del volume, dedicato al "movimento naturale". In questo capitolo, il nostro autore sostiene che i problemi che il cervello deve risolvere sono essenzialmente problemi di meccanica e che gli scultori ci

insegnano che il movimento si esprime innanzitutto attraverso la postura, un movimento fermato o abbozzato, inoltre

> *che la cinematica del movimento è portatrice di significati e che la traiettoria di un dito, lo spostamento della testa, l'equilibrio del corpo devono rispondere a delle leggi che sono al confine tra la meccanica e la neurologia. Ci dicono infine che un movimento naturale è fonte di piacere.* (Berthoz, 1998, p. 125)

E poiché il piacere è elemento essenziale della percezione e della conoscenza, per Berthoz, è rilevante che abbia origine anche nel movimento. Se avessimo la possibilità di ampliare qui il discorso, sarebbe interessante approfondire la dimensione delle emozioni che un movimento può suscitare o esprimere (visto anche il legame tra movimento ed emozioni proposto da Sheets-Johnstone, cui noi, tuttavia, abbiamo solo fatto cenno).
È interessante nella nostra prospettiva il modo in cui, nei lavori più recenti, Berthoz leghi il senso del movimento e le nostre esperienze cinestetiche a quella capacità creativa che attribuisce al nostro cervello e chiama "vicarianza" (lo specifico testo di riferimento è *La vicarianza. Il nostro cervello creatore di mondi*, uscito in lingua italiana nel 2015). La *vicarianza*, dice Berthoz, è "un principio semplesso, una deviazione creatrice resa possibile dalla diversità" e, citando quanto descritto da Changeaux, aggiunge:

> *Questa diversità attiene a una proprietà fondamentale dell'essere umano, quella di sopravvivere travalicando la realtà, sfuggendo ai vincoli rigidi della norma, attiggendo a nuove risorse di cui l'evoluzione ha dotato il nostro cervello per trovare soluzioni originali ai problemi che sorgono quando interagiamo con le forze ambientali o con gli altri, creando così mondi possibili.* (Berthoz, 2015, p. xiv)

La semplessità non è semplicità, bensì consiste nell'insieme di soluzioni (o principi semplificativi) "trovate dagli organismi viventi affinché, nonostante la complessità dei processi naturali, il cervello possa preparare l'atto e anticiparne le conseguenze" (Berthoz, 2011, p. xi). Queste soluzioni non sono per Berthoz né caricature, né scorciatoie, né riassunti. Nel porre il problema in un altro modo, consentono di arrivare ad "azioni più eleganti, più rapide, più efficaci" e permettono "anche di mantenere o di privilegiare il senso, anche a costo di fare una deviazione" (*ibid.*). La semplessità è dunque una complessità decifrabile, poiché semplificare in un mondo complesso non è mai semplice.
In breve, come principio semplesso, la vicarianza considerata nella ricchezza delle sue molteplici accezioni, si rifà al carattere adattativo dell'individuo nelle situazioni, negli ambienti e nelle interazioni con gli altri e ha a che vedere con i modi in cui il cervello è inventore di soluzioni e creatore di mondi nei quali si aprono *nuovi* scenari per anticipare il futuro e per costruirlo. Come tale, l'idea di vicarianza è "inventrice": è connessa con il nostro potenziale creativo e, secondo Berthoz, contribuisce anche a modificare le nostre strategie di apprendimento. La vicarianza è implicata nel complesso rapporto tra particolare e universale, nel cui dibattito è stato spesso "preferito il secondo, dimenticando, o negando, la diversità degli individui e delle loro culture, la flessibilità del loro cervello e la creatività della loro immaginazione": essa fa parte di quei meccanismi semplessi inventati dall'evoluzione per risolvere l'opposizione tra "razionalità ed emozione, determinismo e indeterminazione, universalità delle leggi generali e diversità dei casi particolari" (*ibid.*, p. xvi). Inoltre, sostiene Berthoz, "la tensione tra la diversità e le leggi generali può essere creativa, e la vicarianza è uno strumento di elezione di questa ricchezza dialettica" (*ibid.*, p. xviii). Berthoz è ben attento a specificare nella sua opera che queste riflessioni si pongono in continuità con il profondo movimento che in anni recenti ridiscute l'impostazione formalista in ogni campo di attività

umana e che esse non intendono "mettere in contrasto pensiero pragmatico e pensiero teorico, bensì dimostrare la ricchezza di soluzioni possibili, superando il dualismo" (Berthoz, 2015, p. 9) e focalizzarsi sulla capacità dell'individuo di creare.
A seconda che si tratti di vicarianza funzionale o vicarianza d'uso, per Berthoz la vicarianza indica, da un lato, che possiamo svolgere uno stesso compito in molti modi, dall'altro che possiamo percepire uno stesso oggetto, una medesima parte del nostro corpo, persino una stessa persona, come adempienti ruoli diversi. Il concetto di vicarianza racchiude in sé questa potenza creativa, la quale è caratteristica anche della tensione tra le proprietà universali e la diversità nelle specie animali e nei cambiamenti del pianeta (ad esempio nella deriva dei continenti e nei cambiamenti climatici che sono stati fattori di diversificazione). La diversità ha dunque una funzione creatrice: nell'implicare forme di diversificazione, il concetto di vicarianza implica il concetto di *atto* (il cui senso profondo era già stato oggetto di trattazione nelle opere precedenti, tra cui il volume del 1998), nel quale sono intrecciati percezione e azione ed elementi di intenzionalità, come la motivazione, l'emozione e la relazione tra esperienza passata e previsione di un futuro. Anche l'aspetto del legame tra memoria del passato e scenari del futuro è assai rilevante per la creatività vicariante e coinvolge fortemente l'immaginazione. Berthoz fa riferimento qui all'idea husserliana di un movimento permanente di "ritenzione-protenzione" come uno dei presupposti per ricercare e trovare soluzioni alternative e per costruire nuovi percorsi, una caratteristica della vicarianza.
L'immaginazione è perciò un processo vicariante, che offre una libertà di cammino cognitivo e crea nuovi scenari in mondi virtuali. Pur essendo legata al compito, al contesto e all'individuo, questa complessità di processi è essenziale nella teoria della vicarianza e permette "di creare molteplici soluzioni per risolvere un problema" (*ibid*., p. 43). A ciò va aggiunto che la scelta di scenari possibili "richiede di adottare un nuovo punto di vista. Per scoprire nuovi modi di svolgere un compito, dobbiamo poterlo concepire cambiando prospettiva" (*ibid*., p. 63).
Qui Berthoz richiama nuovamente Poincaré nel sostenere che possiamo ritrovare il concetto di vicarianza nei fondamenti della geometria. Poincaré, infatti, come già abbiamo accennato sopra, riteneva che le leggi della geometria "scaturiscono dalle nostre osservazioni del cambiamento di forma degli oggetti mentre ci muoviamo" e che il movimento "dà l'opportunità di modificare la nostra interpretazione delle proprietà del mondo. È dunque una forma di vicarianza", per la quale "attribuiamo al mondo reale proprietà che dipendono dai nostri atti" (*ibid*., p. 76). Anche i numeri complessi forniscono un esempio di "vicarianza matematica":

> *Ebbene, anche se succede che coincidano con le soluzioni a un problema da risolvere, questi nuovi concetti matematici generano nuovi problemi, e poi nuovi concetti o nuovi oggetti matematici. Questi mutamenti creativi caratterizzano la vicarianza. Un esempio eloquente è la storia dei numeri complessi*. (*ibid*., p. 77)

Il calcolo con gli immaginari è un "calcolo intermedio" che porta a una soluzione "assolutamente reale", è, sostiene Berthoz, "una deviazione semplessa". Questo strumento immaginario, infatti, considerato "una cosa impossibile" ma "bella, potente ed elegante", ha permesso a matematici come Descartes, Leibniz, Newton ed Euler di sviluppare un calcolo più semplice (per cui si sarebbero potuti chiamare i numeri complessi "*numeri semplessi*", secondo il nostro fisiologo). Inventati dapprima per risolvere equazioni algebriche, i numeri immaginari hanno portato al calcolo complesso con le sue regole, per poi avviare la dimostrazione di rimarchevoli identità. Solo più tardi, tra la fine del diciottesimo secolo e l'inizio del diciannovesimo, Wessel, Argand e Gauss scoprirono che un numero complesso è un punto del piano euclideo reale con addizione e sottrazione data dalla composizione di vettori e divisione e moltiplicazione date dalle similitudini. Per Berthoz è come se il piano euclideo fosse servito per estendere il concetto di numero "e uno stuolo di nuove domande è sorto a proposito dei numeri complessi" (*ibid*., p. 78), che si sono poi "rivelati essenziali per risolvere numerosi problemi di geometria, di analisi e di fisica" (*ibid*., p. 79). Si tratta di una vicarianza d'uso per cui il numero complesso si apre a molteplici processi, intenzioni, funzioni per finalità differenti, aprendo a nuovi mondi possibili (in tale direzione, sia il lavoro di Longo sia quello di Châtelet ci offrono altre riflessioni sul piano epistemologico; cfr. § 2.3 e § 2.4). In questo senso, e anche negli altri in cui è presentata nel volume (che non prendiamo in esame qui), la vicarianza è insomma fonte di creatività e innovazione che nel processo immaginativo trova una sua forma originale di pensiero cognitivo (cfr. § 2.5).

2.3 Longo e l'idea di possibilità

Longo offre nei suoi studi una riflessione di stampo epistemologico e filosofico sulla matematica e sui suoi fondamenti, partendo dalla matematica greca fino agli sviluppi contemporanei. Prendiamo principalmente in considerazione la sua posizione in alcuni lavori recenti, pur in continuità con il pensiero già espresso in passato, che permetteranno di introdurre l'idea di possibilità che per lui sta alla base della costruzione matematica. Si tratta dei quattro testi: *L'infinito matematico in "prospettiva" e l'ombra dei possibili* (Longo, 2014), rivisitazione italiana del testo originale in francese *Le formalisme en action: aspects mathématiques et philosophiques* del 2012; *Conceptual analyses from a Grothendieckian Perspective. Reflections on Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics* di Zalamea; Longo, 2015); *Le conseguenze della filosofia* (Longo, 2016) e il più recente capitolo *Marriages of Mathematics and Physics: a challenge for Biology*, scritto con Arezoo Islami e previsto su un volume in uscita nel 2018. Nella riflessione sul volume di Zalamea, Longo mette in luce come il dibattito sui fondamenti della matematica sia sovente rimasto intrappolato tra ontologie platoniste e formalismi senza senso (con alcune eccezioni da Euclide a Gödel) per cercare di liberare significato dall'esterno del mondo, vale a dire, dall'esterno della difficile analisi della costruzione concettuale, che è invece reale portatrice di significato. Il dibattito non ha, secondo Longo, posto una sufficiente attenzione *propriamente filosofica* a programmi e risultati della matematica contemporanea (persino nel campo della logica, dalla teoria dei Tipi all'incompletezza dell'aritmetica, e così via). Nel recentissimo lavoro con Islami, come già in passato, Longo evidenzia l'importanza (epistemologica) di analizzare "come" costruiamo, o accediamo alla, conoscenza matematica o del "processo di conoscenza", oltre al formalismo, rimarcando questo interesse filosofico:

> *the one century long identification of these deep notions with "a logic of integers" or with "formal" excluded epistemology and then meaning from the foundational analysis. We have to broaden the foundational project to the "constitutive path" of mathematical abstract structures, beginning by their meaningful grounding in (and their organizing) phenomenal space and time.* (Islami & Longo, 2018, p. 20; il sottolineato è enfatizzato nell'originale)

Gli approcci formalisti e locigisti del ventesimo secolo ai fondamenti della matematica, con il loro focus solo su dimostrazioni logico-formali e sugli invarianti del linguaggio, hanno trascurato, se non accantonato, l'analisi della costitutizione dei concetti e delle strutture. Tale focus sarebbe oggi una grave limitazione per altre indagini. Del resto, l'esame del "mode of access" allo spazio fenomenico "is an essential component of an epistemological reflection and contributes to open to new interactions between mathematics and empirical sciences" (*ibid*., p. 30). Richiamando Poincaré (come Berthoz), Islami e Longo sostengono:

> *Mathematics is not grounded on arbitrary conventions: these conventions are the most convenient choices («les plus comodes», writes Poincaré) for us, human beings, in this world, with our shared biological being. Poincaré's program, as we understand it, is a preliminary step to ground mathematics in our reference to the regularities of the world that we see, that we may act on, beginning with symmetries, from Euclid to contemporary Mathematical Physics. In short, we draw mathematics on the phenomenal veil on the grounds of our active, cognitive experience*. (*ibid*., pp. 18-19; il sottolineato è enfatizzato nell'originale)

A ciò si deve aggiungere che "any constitution is contingent" e le costruzioni storiche della matematica non fanno eccezione. I concetti sono costituiti nell'interfaccia tra noi e il mondo e queste costruzioni "are not arbitrary, as "reality" makes frictions and canalizes our knowledge dynamics" (*ibid*., p. 30). Immersi in diversi contesti storici o nell'affrontare nuove sfide, i matematici hanno inventato nuovi strumenti e nuove strutture "for the purposes of knowledge constructions" (*ibid*., p. 27). Così, l'incognita è sorta come una nuova entità che forniva una sintesi di entità matematiche altrimenti ritenute indipendenti, vale a dire numeri e grandezze. La sua invenzione è stata una conseguenza di una "view of mathematics, which did not limit mathematics to pure, ideal objects of the Platonic realm nor an Aristotelian knowledge construction" (ibid., p. 28). Le manipolazioni algebriche con l'incognita portano a dimenticarsi delle proprietà dell'entità cui l'incognita si riferisce e a focalizzarsi invece sulle relazioni tra i diversi termini dell'equazione, noti e incogniti. In tal modo, queste stesse manipolazioni sono operate a un livello meta, per il quale il soggetto dello studio matematico passa dalle grandezze alle relazioni tra di esse (e più tardi, nell'algebra astratta, a strutture quali i gruppi, gli anelli e i campi). L'autonomia dai metodi della geometria euclidea ha poi portato alla possibilità di dimostrare risultati negativi, le cosiddette soluzioni "impossibili". Alcune equazioni erano considerate dei "casi impossibili". La loro impossibilità non era altro che il risultato della limitazione del mondo dell'algebra ai numeri reali, ma la successiva invenzione dei numeri immaginari (con Cardano nel XVI secolo) e dell'interpretazione geometrica dei numeri complessi come vettori e punti del piano (con Wessel, Wallis, Argand e Gauss, nel XVIII e XIX secolo) ha implicato che "every polynomial turns out to be a "possible" equation" (*ibid*., p. 28).
Riscopriamo nelle (im)possibilità di Islami e Longo esempi forniti da Berthoz nella sua trattazione della creatività vicariante in matematica. Passando per gli sviluppi dei metodi algebrici, anche applicati alla fisica contemporanea, gli autori fanno riferimento infine all'approccio più di recente proposto da Grothendieck in matematica pura, che si basa su concetti e strutture "trasversali" profondi, per introdurre la nozione di Topos come una generalizzazione estrema dello "spazio" matematico a fondamento della moderna geometria algebrica. Grothendieck è considerato, proprio nel lavoro di Zalamea, il punto più alto e rivoluzionario raggiunto dalla matematica dopo la seconda guerra mondiale, sulla cui scia si è originata l'attuale svolta "geometrica" in matematica. Una svolta considerata da molti (abbiamo ad esempio citato Rotman nel nostro background) lontana dalle immagini statiche della matematica introdotte dalla teoria degli insiemi, la quale finiva per ridurre le plateali 'fioriture' materiali matematiche a un piatto regno di relazioni statiche, bandendo diagrammi e gesti dalla matematica.
Senza addentrarci troppo nello spessore della trattazione in riferimento all'analisi di Zamalea, vogliamo esplicitare che quello di Longo è un tentativo di suggerire, come egli stesso indica, una "epistemology of new interfaces" (Longo, 2015, p. 209), che eviti una visione piatta del mondo e un tipo di immagine esclusivamente assiomatica della matematica. Longo afferma che la matematica è, *in primis*, l'analisi delle invarianti e delle trasformazioni che le conservano (il che include l'analisi delle non-conservazioni, delle deformazioni e delle rotture

di simmetria). Con ciò, non vuole fornire un inquadramento esaustivo della costruzione matematica ma piuttosto la proposta di un diverso punto di vista, in opposizione per esempio a quello analitico della teoria degli insiemi. Un tale approccio assegna un ruolo centrale alla nozione di categoria (cruciale anche nel lavoro, ad esempio, di Grothendieck):

> *This is not a Newtonian universe anymore, a unique and absolute framework, the Universe of Sets, with an absolute origin of time and space (the empty set). It is rather the realm of plurality of Categories and of an analysis of transformations, functors, and natural transformations that allow their correlation (preserving what is interesting to preserve). Among them, the Category of Sets is surely one of the most interesting, but just one of many. We are presented with an open universe of categories, then, to which new categories are constantly added; new invariants, and new transformations. Concepts are created by being correlating with existent ones, and by deforming one into the other, thus enriching them, paying attention to the meaning (the mathematical meaning, at least) of what is being done.* (*ibid*., pp. 213-214).

Ecco che ritroviamo il muoversi nel pensiero citato nel nostro background: "the synthetic movement of thought which lies at the heart of the construction of mathematical knowledge, rich in concrete and historical friction with the world" (*ibid*., p. 251). Questa reale frizione con il mondo coinvolge processi materiali con la matematica, una sorta di conseguenza geologica che ritorna agli invarianti delle nostre azioni nello spazio e nel tempo. Le nostre strutture fisiologiche e reti neurali specifiche sono entrambe condizioni per un particolare tipo di geometria (la più comoda, per Poincaré) e, contemporaneamente, sono plastiche, reattive e generative, permettendo l'emergere di nuove sensibilità, sostiene de Freitas (2017). Si tratta di una visione che dirige l'attenzione al *lavoro* e all'*attività* della matematica (nella stessa ottica di Freudenthal che, nella proposta di una 'guided reinvention of mathematics' e con la sua idea di 'mathematizing', considerava la matematica come attività). Proprio alla luce della natura 'dinamica', aperta, instabile, dell'edificio della matematica del XX secolo, Longo sostiene che sia necessario aggiungere all'analisi della dimostrazione, preoccupazione dominante dei progetti fondazionali nella matematica contemporanea, il nodo concettuale dell'analisi della costituzione dei concetti e delle strutture. Se la visione categorica prova a farci apprezzare il senso strutturale della costruzione matematica, tuttavia il richiamo al lavoro illuminante di Châtelet sull'intreccio tra mondo fisico e matematico (cfr. § 2.4) riporta l'attenzione indietro:

> *to the "gesture" constitutive of mathematical objectivity, which lies "on the border of the virtual and the actual", in a tight interrelation between the construction of objects and objectivity in physics and the analysis of the organizational structures of the world, starting with symmetries. Châtelet's book, it should be emphasized, is also an history; rather, it is a historico- rational reconstruction of the rich entanglement between physics and mathematics running through the 1800s up to, and stopping short of, the advent of Set Theory. Regarding some related aspects of contemporary mathematics, Patras 2001 (a book that Zalamea cursorily mentions), has retrieved the point of view of "structural mathematics" with a philosophical competence rare to find in a mathematician. Patras exhibits the weaving together of structures and transformations that governs mathematical construction from the inside, from the point of view of mathematical practice and invention.* (*ibid*., p. 216)

In generale, afferma Longo, l'origine del significato in matematica va trovata nei modi in cui essa permette di organizzare e strutturare il mondo. Solo allora si distacca dal mondo nell'autonomia dei gesti costitutivi, tra virtuale e attuale, dove, alla massima distanza dalla costituzione originale di significato, si ottengono risultati rilevanti dall'intersezione di costruzioni di origini diverse (dalla classica geometria algebrica alla geometria differenziale, per esempio) e la continuità strutturale diviene anche continuità concettuale, "a navigation between concepts as a "sophisticated technical transits over a continuous conceptual ground"" (*ibid*., p. 217). In breve,

> *the study of structures, of their continuous enchaînements and deformations, is an essential component of foundational analysis. (...) The origin of mathematics and its principle of construction are located in that which is meaningful, in thought operations that structure and organize the world, but which then go to intersect on planes far removed from the world and acquire by these conceptual interactions a proper mathematical sense.* (*ibid*., p. 217)

La matematica è tutta una costruzione al limite, una "scienza al limite", del limite, "una geometria di puri bordi, di lunghezze ben definite, che possono essere numericamente irrazionali, ovvero ben al di là del logos aritmetico", "non è esclusivamente l'invenzione della prova, ma *anche* una pratica di strutture lontane dal mondo sensibile" (Longo, 2016, p. 19; nostra enfasi). È scritta in linguaggio naturale, è un linguaggio e uno sguardo sul mondo, *al* e *dal* limite del mondo. Noi vediamo solo prospettive, punti di vista su frammenti del mondo, organizziamo e rendiamo accessibili solo suoi piccoli angoli, sostiene Longo.
È importante dunque abbandonare l'ambizione di pensare a una "matematica assoluta", una matematica "a riposo", nello stile di Russell e di procedere invece verso una "matematica relativa", una matematica *in movimento* (come nello stile di Grothendieck). Longo fa riferimento a Zalamea nel pensare a una dinamica di "webs incessantly evolving as they connect with *new* universes of mathematical interpretation", visione questa che "just goes to reinforce the position of Cavaillès, who understood mathematics as gesture" (Zalamea, p. 273, citato in Longo, 2015, p. 236; nostra enfasi). Longo aggiunge:

> *Such are organizational gestures of correlated mathematical universes, correlated by a web of <u>transformations</u>, like the hand gesture that organizes space, gathers, delimits, and transfers, as we can say with Châtelet. This process assumes an historicity that serves to highlight the sense and the relationship of mathematics vis-à-vis the real: mathematics works (where it does work) and has meaning because it is constituted through a human – all too human – praxis*. (Longo, 2015, p. 236; il sottolineato indica nostra enfasi)

Qui si coglie profondamente anche il carattere fisico-matematico di dimostrazioni e teorie contemporanee e l'unità affermata tra matematica e fisica, guidate entrambe da un principio di intelligibilità del mondo fisico, per cui si può ipotizzare "a continuity between the phenomenal, the ontic and the epistemic... From an epistemological point of view, the distinct perspectives are nothing other than breaks in continuity" (Zalamea, pp. 304-305; citato in Longo, 2015, pp. 241-242). Tuttavia, nulla (dimostrazioni matematiche e teorie fisiche, concetti e strutture) è "already there", nemmeno nel senso platonico più debole. C'è invece una sorta di embricatura tra matematica e mondo materiale.
Così, il numero non è "already "inscribed in the world", not even in the discrete material of the stones on the ground, not before they are isolated from their background", né deve essere "located in the biological rhythms that regulate the time of the living" (*ibid*., pp. 245-246). In verità, ci sono diverse azioni invarianti, da un momento all'altro, ma non c'è "number in itself" in natura: "only a plurality of active experiences permits the constitution of an invariant, of that which does not change in the transformation of one experience into another" (ibid., p.

246). In tale approccio, è interessante l'affermazione di Longo della necessità del "body of a human", accanto a una "plurality of praxis from which to distill an invariant in memory and then produce (in language) number" (*ibid.*).
L'idea dell'invarianza è ancor più presente quando si vogliano analizzare processi e dinamiche, come nel caso delle scienze, dove ci sono solo processi dinamici al lavoro. Ciò porta Longo ad affermare che è l'intervallo, classico strumento di misura, non il numero, a salvare l'intelligibilità della matematica. La misura, di cui abbiamo bisogno per gli osservabili pertinenti alla dinamicità dei processi, è necessariamente un intervallo (una continuità che rifiuta tagli e conteggi), implicando un atto molto più complesso di quello del contare ad esempio cinque pietre. Non c'è numero intrinseco in alcun processo fisico: siamo noi, sostiene Longo, che attraverso il difficile gesto del misurare associamo numeri a certe dinamiche, come coppie, estremi di intervalli razionali, come concetti e come scrittura, costruita nel linguaggio. E poi, con un passaggio al limite decisamente matematico, abbiamo proposto numeri senza salti né buchi, il continuo di Cantor, uno dei molti continui possibili cui gli intervalli di misura possono convergere. L'interfaccia tra la matematica e il mondo richiede la selezione di un quadro di riferimento e di misura, la produzione di un numero che non è nel mondo, ma è estratto o proposto per organizzare il mondo.
Per Longo, le creazioni della matematica non vanno pensate come fondamento ultimo, per non perdere il significato dell'intero edificio, una rete di relazioni di intelligibilità, le quali richiedono un'analisi delle radici concettuali e cognitive e delle strutture di senso come correlazioni. La costruzione di conoscenza

> *is the result of a protensive gesture which organizes the world, rich with desire for (knowledge of) the real and constitutive of the mathematical object through which it can be made intelligible; a real which resists and channels mathematical invention, together with its history. The analysis of this protensive gesture, and of its historicity, is part of epistemological reflection* (Longo, 2015, p. 260).

Dal punto di vista epistemologico e di un'analisi critica della costruzione di conoscenza e di scienza dunque, Longo non è interessato a un'ontologia della trascendenza degli oggetti matematici, ma alla loro "costituzione trascendente", vale a dire alla loro costituzione attraverso la pratica della vita e della conoscenza interna alla matematica, spesso localizzata nell'interfaccia con altre forme di conoscenza (ad esempio, con la fisica, e di recente con la biologia). La riduzione si applica raramente nello sviluppo della scienza, il quale è piuttosto stato segnato dall'unificazione di *nuove* teorie:

> *Science is not the progressive occupation of the real by known tools, in a sort of fear of the novelty, but the difficult construction of new theoretical frames, objects and structures for thought, conceptual bridges or even enlightening dualities, such the specificity of the biological vs. the genericity of the inert* (*ibid.*, p. 261).

Discutendo l'incompletezza del formalismo, specifica attenzione all'impegno filosofico delle ipotesi che hanno permesso passaggi fondamentali della costruzione di conoscenza in matematica e fisica è data negli altri due lavori. In particolare, nel lavoro sulle 'conseguenze della filosofia' (Longo, 2016), il focus è posto sulla definizione delle strutture. Il primo esempio calzante è quello all'origine della geometria tutta, in Euclide, della definizione di linea come una lunghezza senza spessore, che per Longo è una "decisione filosofica" e ci riporta a quanto già accennato sulla matematica come scienza del limite: solo una linea con un qualche, seppur minimo, spessore si potrebbe derivare dai sensi, poiché anche "le linee più sottili tracciate dagli artigiani od i fili di una ragnatela hanno tutti uno spessore" (richiamando

Sant'Agostino; *ibid*., p. 17). Tralasciando assolutizzazioni, ecco che Longo ricostruisce il gesto alla base dell'invenzione della linea:

> *un bordo che ritaglia le figure della geometria greca, che sono fatte di sole linee, limite allo spessore 0 del tratto con cui i nostri antenati, nelle grotte di Lascaux, 20.000 anni fa, hanno mostrato ad altri uomini, nel linguaggio, dei bisonti appena tracciati, resi solo con linee. Bisonti fatti di soli bordi, inesistenti, ed in cui solo un altro uomo sa vedere un animale; visione del movimento o del gesto che disegna un contorno, che è una traccia, una traiettoria, origine del continuo sensibile.* (*ibid*., pp. 17-18)

La linea così pensata (un movimento, un tracciato) e il punto (un segno, la cui definizione di "senza parti" arriva più tardi) sono oggetti limite, lontani dall'esperienza sensibile, ma che esistono solo nella loro relazione allo spazio rinviando all'esperienza, poiché "organizzano, ritagliano e misurano il mondo", "concettualizzano "visioni" che si stabilizzano nell'interazione umana":

> *Una siffatta nozione di linea può essere solo detta e scritta, nel linguaggio, ed è il risultato di una filosofia delle idee, ma il suo senso, la sua continuità, è in una <u>pratica</u> del gesto, del disegno: per capirla, bisogna riattivarne il senso, riandare alla linea tracciata sulla lavagna dal primo maestro, al suo gesto-traiettoria nello spazio.* (*ibid*., p. 18; enfasi nell'originale)

Longo fa notare che il punto per Euclide è "una lettera dell'alfabeto, agli estremi di un segmento" (per la definizione di segmento), "una posizione su una linea" o "all'intersezione di due linee" senza spessore (per il teorema sul triangolo equilatero, per cui dato un segmento e tracciati gli archi di cerchio con centro negli estremi del segmento si ottiene un nuovo punto, il quale dà il triangolo). La sua definizione di "senza parti" è, dunque, derivabile. Inoltre, "basta un segno per dare un punto ed un solo punto è completamente determinato da un segno" (*ibid*., p. 19). La dimostrazione del teorema sul triangolo equilatero a sua volta definisce la continuità di una linea, che è sempre

> *un tracciare, un flusso: una linea senza spessore è continua è continua quando, intersecandone un'altra, produce un punto (ed in buone condizioni, uno solo); ovvero quando si può identificare tale intersezione con un segno.* (*ibid*.)

Ci sembra intrigante l'insistenza di Longo qui nell'osservare che la linea non è perciò necessariamente fatta di punti, come sarà per Cantor, poiché questi sono agli estremi di segmenti o posizioni su una linea e dunque sono "posti dal geometra o prodotti da linee" (*ibid*.). Ancora, che la nozione di linea diventi così fondamentale è suggerito dal fatto che le figure della geometria greca sono costruite mediante intersezione di linee continue e date dai soli bordi (come il triangolo che deriva dal suddetto teorema): "solo allora ha senso calcolare superfici: quale è la superficie di una figura con un bordo di un qualche spessore?" (metafora assai calzante per farci intuire la profondità filosofica della trattazione; *ibid*.). Da qui nasce l'ulteriore sorpresa dell'irrazionalità della lunghezza della diagonale del quadrato dato dai soli bordi e, in modo analogo, del rapporto "che non si finisce mai di calcolare" fra la circonferenza senza spessore di un cerchio e il suo raggio. Del resto, Longo evidenzia ancora una volta come l'invenzione della matematica sia anche

> *una pratica di strutture lontane dal mondo sensibile, che producono senso e si radicano nel senso l'una con l'altra, co-costruendosi, come i punti prodotti dall'intersezione di linee, come i segni che percorrono ed individuano luoghi su rette o delimitano segmenti.* (*ibid*.)

L'introduzione della moneta è un secondo esempio avanzato da Longo (2016):

> *stabilisce nuove reti di significati, partecipa di una nuova filosofia del vivere insieme, dello scambio fra gli uomini. Distacca il valore dagli oggetti, lo pone fuori di essi, li raccoglie in classi di ugual valore, tutti scambiabili, tutti equivalenti e garantiti da una scrittura coniata, nuovi oggetti del pensiero, che modificano la vita e l'interazione umana.* (p. 20)

Altro orizzonte interessante si trova nella proposta fisica del principio di inerzia (essenziale per studiare la conservazione della quantità di moto), che Galileo avanza con la medesima audacia di Euclide nel caso della retta. Il movimento inerziale perfetto non esiste. Eppure Galileo, con un principio asintotico, introduce questo movimento uniforme di un punto materiale su una retta euclidea, "limite esterno di tutti i movimenti" seppur fisicamente privo di senso:

> *proprio mettendosi all'orizzonte di tutti i movimenti, Galileo li rende intellegibili tutti, di un colpo solo, proponendo quel che li accomuna tutti. E così può studiare quel che <u>modifica</u> tale stato limite: la gravitazione, le frizioni, nelle esperienze, pensate o fatte, con i gravi o sul piano inclinato.* (*ibid*.; enfasi nell'originale)

Quello di Galileo, nota Longo, è un principio di tipo matematico, anche se non ancora scritto in linguaggio matematico, sorretto dall'incontro tra infinito e finito. Ecco di nuovo l'unitarietà di cui si parlava più sopra. La matematica e la fisica agiscono nello stesso modo: "con principi limite, all'infinito, rendono intelligibili forme geometriche e movimento di corpi materiali, al finito (Longo, 2016, p. 21). In un continuo movimento tra finito e infinito, dalla linea senza spessore di Euclide si è più tardi passati, attraverso la discussione teologica sull'infinito attuale, alla prospettiva nella pittura (ben analizzata in Longo, 2014), che segnava nuovi punti di vista e una nuova organizzazione dello spazio, contribuendo alla successiva costruzione dello spazio della scienza (euclideo con Descartes, proiettivo con Desargues), fino ad arrivare ai principi fisico-matematici di Galileo e al calcolo infinitesimale con Newton e Leibniz, con i quali limiti infiniti torneranno a parlare di quantità finite. E così via, passando da Poincaré e Hilbert fino alla matematica contemporanea dei Topos di Grothendieck, (attra)verso spazi di possibilità (di eventi e traiettorie possibili per successive concettualizzazioni) o "uno spazio infinito *dei possibili*, uno spazio e un tempo di tutti i fenomeni e di tutte le dinamiche possibili" (Longo, 2014, p. 156; nostra enfasi). E sono le simmetrie (gli invarianti matematici) che "consentono di definire geometricamente e formalmente" gli "spazi matematici infiniti di tutti i possibili" (*ibid*., p. 159). È proprio in queste e analoghe condizioni di possibilità che ci sembra di capire che Longo voglia fondare il discorso su una costruzione della conoscenza scientifica che apprezzi non tanto l'oggetto matematico in sé ("already there", come dicevamo sopra) quanto piuttosto il processo di costruzione, anche nell'interazione con le altre scienze (come la biologia, interesse più recente di Longo):

> *le scienze matematiche e il pensiero non sono "già presenti" prima del nostro agire nel mondo; sono piuttosto, e per fortuna, dei co-costituiti delle nostre attività cangianti e sempre più ricche in questo stesso mondo. Sempre più ricche se non viene impedito il pensiero critico e, con esso, il correlarsi della scienza con la filosofia*. (*ibid*., p. 165)

Non possiamo dunque dire che la linea senza spessore esista (dove?), forse possiamo dire che è "possibile", o meglio potenziale, volendo adottare un linguaggio non deterministico. Gli oggetti al limite che Longo discute, come i punti, le rette, il movimento inerziale, ci sembrano implicare l'immaginazione di orizzonti *à la* Châtelet (cfr. § 2.4 e 2.5), specificando nel linguaggio virtualità attualizzate *nel e dal* movimento e nutrendosi della natura imprevedibile e creativa del gesto del tracciare, che è già diagramma e già flusso di pensiero, generatore di *nuovi* significati. Ci interessa qui il potenziale legame tra questa "novità" e quegli spazi di possibilità introdotti da Longo, pensando sempre al contesto di nostro interesse, che è la classe di matematica. Quegli spazi (nella ricostruzione storica, spazi di senso) sono anche legati a condizioni di possibilità cognitive e biologiche. Ad esempio, nel caso della linea senza spessore, viene messo in luce come analisi della corteccia cerebrale visiva, essenziale all'azione, rivelino l'attivazione di processi che sembrano costruire e fissare bordi, contorni, agli oggetti. Questi processi non danno certo le nozioni di linea o di bordo e non esauriscono la fenomenalità del continuo, ma vengono a costituirsi come ulteriori "condizioni di possibilità" nella nostra organizzazione del mondo e, dunque, nella costruzione di conoscenza, proprio come, crediamo, il senso del movimento e la vicarianza studiati da Berthoz (cfr. § 2.2).

2.4 Châtelet e l'incanto del virtuale

Châtelet offre una prospettiva di ampio respiro sul pensiero matematico e sulla sua relazione con il mondo fisico. Facciamo qui riferimento essenzialmente al volume *Figuring Space: Philosophy, Mathematics and Physics*, traduzione inglese della sua opera più famosa *Les Enjeux du Mobile: Mathématique, Physique, Philosophie* (Châtelet, 1993/2000), e al vecchio scritto *L'enchantement du virtuel* (Châtelet, 1987), nel quale il contenuto del capitolo 2 del volume è in parte anticipato.
Nell'introdurre il volume, Knoespel afferma che il lavoro di Châtelet rappresenta un momento significativo nel riesame della pratica della matematica. Quella di Châtelet non è, infatti, una semplice descrizione storica del pensiero matematico, ma una rivisitazione (e riattivazione) di problemi esterni alla matematica e delle loro risposte come siti di sviluppo della disciplina, in particolare per quanto riguarda *i modi* in cui la matematica ha esplorato e organizzato lo spazio geometrico, contribuendo alla formazione concettuale e cognitiva dello spazio. Per Châtelet, la visione della matematica, intesa come pratica, appare distorta dal pensarla 'pinzata' alla natura e uguagliata alla logica e la nostra relazione con essa è stata spiegata solo a metà. Per avviare una comprensione dell'intuizione, dell'invenzione e della scoperta in matematica è invece necessario essere consci che lo spazio della matematica è stato mediato non solo attraverso teoremi ma anche, e forse in modo più prominente, mediante diagrammi. Scrive Knoespel:

> *For Châtelet our own interaction with the figures that we draw constitutes a place of invention and discovery that cannot be explained away by the theorems that appear to lock-down a particular mathematical procedure.* (Châtelet, 1993/2000, p. xi)

È la continuità dei problemi ("dynasties of problems") che interessa Châtelet, non sono i cambiamenti di paradigma, non è il punto di vista filosofico né la storia devota ai teoremi. Il progetto di Châtelet enfatizza piuttosto l'importanza di prendere in considerazione le tecnologie manuali che sono state utilizzate per rappresentare e formulare lo spazio ("marking, drawing, sketching, scribbling"; *ibid*., p. xi). Dalla riga al compasso agli angoli retti a sistemi di coordinate e così via, queste tecnologie sono state date talmente per scontato da oscurare il modo in cui hanno controllato le nostre interazioni spaziali e, con esso, l'autonomia dei diagrammi come complici naturali degli esperimenti di pensiero.

Ci sono per Châtelet due diversi ritmi che sorreggono la storia delle idee: quello discontinuo e intermittente delle rotture, dei paradigmi e delle loro contestazioni, e quello più silenzioso delle problematiche rimaste latenti ma sempre passibili di riattivazione e, come lui stesso afferma, "full of treasures for those who can reawaken them" (*ibid*., pp. 69-70).
Ciò che Châtelet si figura è una genealogia dei diagrammi, la quale permetta di catturare il modo in cui la matematica ha funzionato attraverso la scrittura, una indagine dunque dei diagrammi come tópoi matematici e del modo in cui stimolano a pensare e non meramente a ricordare, funzionando come "prosthetic devices that become vehicles of intuition and thought" (p. xiii). In breve, Châtelet dimostra come la natura sperimentale della matematica possa essere recuperata dai diagrammi registrati nella storia della matematica e della fisica. Tuttavia, egli non ci invita tanto a pensare ai diagrammi di per sé, come registro di un processo meccanico, bensì al registro che essi forniscono per interrogarci sulla scoperta dello spazio geometrico e su come tale spazio a sua volta diventi uno spazio per pensare, un mezzo per la scoperta e l'esplorazione matematiche (elaborando la visione di Deleuze sulla capacità della materia di diventare un agente attivo nella creazione della forma).

> *It is here that Châtelet's project involves not simply diagrams but diagrammatics as the study of diagrams within our evolving cognitive histories.* (*ibid*., p. xxi)

Tale progetto ha diverse radici: dall'epistemologia neo-Kantiana di Cassirer, agli sforzi della fenomenologia di descrivere operazioni matematiche, ad esempio con Husserl, Heidegger e Derrida, alla semiotica pragmatica di Pierce.
Rotman (2015) mette in luce che l'opera di Châtelet tiene traccia della creazione dello spazio matematico-geometrico mediante la triplice prospettiva della matematica, della fisica e della filosofia, nella forma, da un lato, del concetto di spazio elastico e flessibile di Leibniz e, dall'altro, dell'ontologia del virtuale di Deleuze. Attraverso i suoi esempi, Châtelet rende accessibile il significato operativo, l'origine *embodied* e il potenziale intellettuale (che chiama la *virtualità*) di concetti fondamentali quali, ad esempio, "punto", "spazio", "dimensione", "curva" e "linea".
È proprio la nozione di *virtuale* che Châtelet propone a interessarci maggiormente come chiave di lettura di un nuovo approccio al pensiero matematico. Questa nozione è il *leitmotiv* cui è dedicato il primo capitolo, nel quale Châtelet contrasta la concezione aristotelica della materia che contrappone "les *êtres mathématiques* qui sont dans l'éternité et qui n'ont pas d'existence par eux-mêmes" e "les *êtres physiques* qui, eux, ont une existence séparée, mais ne sont pas éternels" (Châtelet, 1987, p. 1; enfasi nell'originale). Nella metafisica di Aristotele, la natura matematica, immobile e necessaria, e quella fisica, dedicata alla mobilità e soggetta a cause ultime, sono agli estremi opposti. Per Châtelet invece il virtuale, uno stato d'essere che è sia fisico sia matematico, è il collegamento necessario tra le due nature (già Galileo, anche richiamato da Longo, proponeva una visione alternativa alla spiegazione teleologica aristotelica, suggerendo una coesione tra la genesi dei concetti matematici e quella dei concetti fisici). Quello che Châtelet chiama "enchantement du virtuel" è una formula provocatoria con cui si propone di svelare come la virtualità consenta di intervenire nella costruzione di concetti "fisico-matematici". Gli esseri matematici, prodotti mediante astrazione, appaiono soprattutto come esseri fisici impoveriti, spogliati di materia e mobilità, poiché l'operazione di astrazione è anche sempre una "mutilazione", che non può essere ridotta a una sottrazione inoffensiva di determinazioni, neutralizzabile come e quando si vuole. L'idea di virtualità o potenzialità della natura era presente nella visione aristotelica come già legata al movimento: "The fulfilment of what is potentially, is motion" (Châtelet, 1993/2000, p. 19). Ma la concezione di Châtelet è molto più sottile: il movimento non è semplicemente il processo di attualizzazione di una forma potenziale che appartiene a una

transizione di stati verso una forma più alta. Per lui, tutto il movimento è prima di tutto un germe di movimento.

> *But neither is motion the passive waiting of a form. Motion is a way of knitting act and power together and, if potential is not reduced to the receiving of accidents, a thought of the matastable becomes possible: the melting of ice is not of ice that 'can' melt, but of ice that is 'really' in the process of melting; water is of course 'potential' in ice, but above all it actualizes itself there. Potential is what, in motion, allows the knotting together of an 'already' and a 'non yet'; it gives some reserve to the act, it is what ensures that act does not exhaust motion and, in giving some scope to the grasping of the motion, it respects and extols the latencies coiled in the bodies. That is why perfect motion must be understood as an indefinitely suspended actualization, dissipating no power and requiring no displacement (no 'local motion')* (*ibid*., p. 19).

Possiamo qui comprendere come il movimento non sia inteso come movimento nel senso fisico (cambiamento di posizione) e ritrovare la distinzione cara a Châtelet tra reale e possibile e attuale e virtuale, di cui abbiamo accennato nel background teorico e che distingue il suo approccio alla matematica da quello aristotelico ma anche da quello platonico. Il pensiero del potenziale non è dunque una sottrazione, un passaggio di mobilità da ciò che muove ("the motor") verso ciò che è mosso ("the moved"):

> *The motor and the moved are not two inert beings opposite one another, transmitting a quality; the moved is not the only one to change: the motor possesses the form, but can only act in the presence of the moved. The moved is <u>awakened</u> to mobility; there is a whole preparation of the moving body to the superior form* (*ibid*., p. 19; il sottolineato è enfatizzato nell'originale).

Era proprio la dinamica di una tale concezione di virtualità che, secondo Châtelet, ha mosso Leibniz a pensare alla materia in vita (animata, potremmo dire). Mentre i cartesiani, infatti, percepivano la geometria come un insieme di entità astratte e immobili, figure, cose fissate come i punti nello spazio, Leibniz ha introdotto una visione differente. Un punto dello spazio non è per lui una semplice posizione, il cui movimento è un "fantasma" direttamente contrario alla legge di identità (come sosteneva B. Russell). Leibniz considerava lo spazio come un ambiente dinamico e molto più flessibile in cui i punti sono intersezioni di rette (intravedendo il dualismo proiettivo) e devono essere pensati, anche matematicamente, come creatori di "*possibilità*". Châtelet preferisce il termine 'virtuale'. I punti cominceranno a pesare se possono essere catturati correttamente, non come "figure geometriche" ma come "*puissances d'explosion*" (Châtelet, 1987, p. 3), o "forze esplosive" generatrici di *nuove* cose: cerchi, linee, intersezioni, e così via. I punti non sono tali perché sono un modo di designare, un modo di indicare una cosa, sono invece virtualità che racchiudono la dinamicità del movimento e la possibilità di essere generati in modi diversi e come tali vanno intesi:

> *comme des puissances de movement, des puissances d'explosion. Les points sont des puissances d'explosion de droites, des intersections de droites, et d'un point de vue moderne dans la géométrie algébrique, ces points-là sont des intersections de courbes.* (*ibid*., p. 4; Figura 1).

Lavorare con i punti come forze di movimento consente un tipo di "provocazione sperimentale" che porta a incontri con il virtuale. Considerati come corpi materiali mobili, i punti possono essere animati e diretti verso nuovi luoghi, persino 'sfilati' dal piano cartesiano:

invece di richiedere che obbediscano alla legge fisica della posizione in un piano a due dimensioni, possono, per esempio, muoversi lungo curve e incontrare altre curve che non si intersecano nel piano cartesiano, dando origine a nuove entità. Così nasce il piano complesso, dove due curve che non si intersecano possono in effetti incontrarsi. Ma questo spazio in cui si incontrano è uno spazio virtuale che è stato 'costruito', o 'realizzato', da matematici come Abel, non è astratto, poiché conserva la mobilità e la qualità temporale che sono state forgiate dal matematico.

Figura 1. Punti come "puissances du movement" in Leibniz

Châtelet chiama in causa anche il lavoro di Abel sulle relazioni tra integrali presi su una stessa curva per sottolineare come egli abbia utilizzato questo genere di idee sulla virtualità. Per Abel la curva non è fissa, ma è lei stessa una potenza ("puissance") pronta a ricevere intersezioni, è una possibilità di passaggio di un fascio di curve.
Nella sua provocazione del fisico-matematico, un esempio (fra tutti) dalla storia discusso da Châtelet è quello del lavoro di Oresme. Secondo Lagacé (2015), esso ben illustra l'interesse del nostro filosofo nel "modo in cui la matematica e la fisica *si trasformano* mutuamente espandendo i loro campi di azione" (p. 24; enfasi nell'originale), piuttosto che in una subordinazione tra le due.
Nel XIV secolo, Oresme, lavorava sul 'movimento del movimento' e voleva calcolare la distanza percorsa da un corpo la cui velocità è in continuo cambiamento, un problema che implica la considerazione di più dimensioni: tempo, distanza percorsa, cambiamento di velocità, confronto di velocità diverse. Oresme giunse a calcolare la distanza percorsa mediante una rappresentazione ingegnosa (Figura 2). Nei tre casi mostrati in figura, la distanza percorsa corrisponde all'area di quella che Châtelet chiama *deformazione* di un rettangolo standard (a sinistra), che diventa per esempio un triangolo (al centro) o un trapezio (a destra). Vediamo come, partendo da C, un segmento che cattura la velocità si sposta orizzontalmente nell'intervallo di tempo considerato, AB. I tre movimenti sono caratterizzati dalla deformazione o meno del rettangolo standard e mostrano, da sinistra a destra, velocità costante, accelerazione costante e decelerazione.

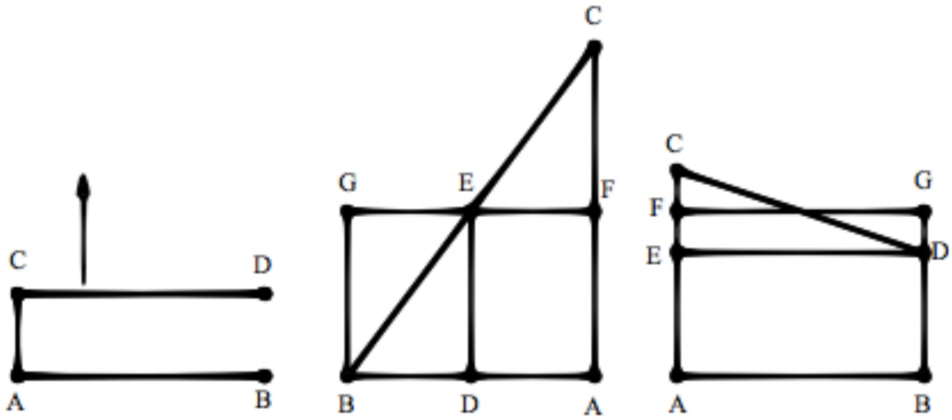


Figura 2. Esempi di "*configurationes*" in Oresme

Per Châtelet, il lavoro matematico di Oresme trasforma i concetti di rettangolo e di triangolo e, nello stesso tempo, questi concetti geometrici cambiano, e arricchiscono, le nozioni fisiche di tempo, distanza, spostamento, e così via. Le figure non sono così più statiche ma dinamiche: si deformano per rispondere a cambiamenti di velocità.

> *Elles gagnent élasticité et mobilité, leur permettant de participer à la compréhension d'un phénomène au lieu d'être simplement le produit fini d'une compréhension (Sinclair et al., 2013), et c'est toute une (nouvelle) géométrie de morphismes qui voit le jour.* (Lagacé, 2015, p. 24)

È questo modo di concepire il mondo intorno a noi, il quale deriva da un risvegliare le potenzialità latenti, da un'estensione dei campi, da un'esplosione mediante cui le due discipline si provocano a vicenda, che Châtelet (1987) caratterizza come "fisico-matematico". Un altro esempio da lui fornito è quello del triangolo infinitesimo di Leibniz, che non va pensato come una figura rigida dello spazio che può spostarsi di una quantità infinitamente piccola. Non è corretto descrivere il triangolo affermando semplicemente che vi è un piccolo incremento, senza tenere in considerazione il ruolo giocato dalla virtualità: di fatto un triangolo che si muove infinitamente poco non è possibile, non è certamente reale, eppure per Leibniz non è fisso ma "bougeant «un peu»" (un po' in movimento). Questo è l'errore classico che si fa anche nell'insegnamento, in cui prevalgono le categorie dell'attualizzazione, del reale e del possibile sul virtuale. Il triangolo di lati infinitesimi non è una figura immobile, al contrario esiste solo in termini di movimento, di comportamento (soprattutto agli estremi), in virtù della famiglia di triangoli virtuali che si possono percepire attorno a esso.
In altre parole, il virtuale (o potenziale) concerne l'indeterminatezza che sta alla base di tutte le azioni, *élan vital* della materia in cui è insito, e in ciò differisce dal possibile, il quale riguarda invece la conformità delle nostre azioni con vincoli logici, regole inferenziali e consuetudini percettive. Il concetto di virtuale è delicato e difficile assieme, poiché sembra indicare un aspetto o una dimensione invisibile della materia. Essenzialmente, virtuale e attuale sono due dimensioni della materia che si presuppongono mutuamente e il vituale è immanente a essa, non la trascende. Châtelet utilizza il virtuale come una categoria ontologica che gli permette di descrivere molteplicità che sono reali ma mai pienamente formate, determinate o esaurite, quindi mai pienamente attualizzate. Nel suo essere divergente e non uniforme e nell'alterarsi storicamente, l'idea di molteplicità contrasta con quella di essenza. I concetti sono animati dalla dimensione virtuale della materia e l'attività matematica implica due movimenti, l'uno tra il virtuale e l'attuale, l'altro tra il possibile e il reale. L'attualizzazione del virtuale non avviene mediante regole logiche (come la realizzazione del possibile, che struttura e limita l'apparizione di un'entità) ma coinvolge un diverso tipo di determinazione, la quale genera qualcosa di ontologicamente nuovo, come nel caso del luogo di incontro di due curve che non si intersecano (e così di un numero complesso, ma anche del punto all'infinito della geometria proiettiva). Il cerchio può essere pensato logicamente come insieme di punti equidistanti da un dato centro, il che concretizza ed esemplifica la possibilità del cerchio, vale a dire l'insieme dei punti determinati dal vincolo della definizione. C'è tuttavia anche un altro tipo di determinazione, materiale e non logica, per la quale il cerchio è *anche* prodotto materialmente dalla traccia di un punto che sia costantemente tirato verso un centro da una forza uguale e reciproca, mentre si muove in avanti. Questa determinazione coinvolge un'attualizzazione delle dimensioni virtuali della materia, ossia una mobilità che è intrinseca al cerchio e, quindi, un modo di concepire il cerchio attraverso una tale attività generativa, la quale è altrettanto importante nel determinarne l'esistenza. Anche in certe dimostrazioni si trovano esempi di questa duplice dimensione. Per esempio, la dimostrazione dell'irrazionalità

della radice di 2 si basa estensivamente sulla uguaglianza pari/dispari. Quest'ultima opera logicamente nel determinare i confini tra ciò che ha senso e ciò che non lo ha, realizzando il possibile, ma porta anche in essere qualcosa di nuovo, mostrando come, in questo caso, genera il concetto di numero irrazionale (un nuovo tipo di entità matematica).
Il virtuale non indica dunque un regno delle forme (in senso platonico) che deve essere rispecchiato nel mondo fisico, bensì vibrazione, potenzialità e mobilità. Per tale ragione, novità, genesi e creatività sono concetti fondamentali in una teoria dell'attualizzazione, oltre sforzi riduzionistici o determinazioni sottrattive, tipici dell'astrazione (si veda anche Sinclair *et al*., 2013; Ferrara & Ferrari, 2017).
Le entità matematiche sono concepite da Châtelet in modo nuovo, come oggetti materiali sui quali, e con i quali, i matematici compiono esperimenti di pensiero (fisico-matematici): "physical experiments in which objects are set in motion, cut out from the plane, plunged into singularities, stretched around points of inflection, packed into Abelian groups and so on", non "the disembodied mental ruminations with which we typically associate mathematical thinking" (in de Freitas & Sinclair, 2017, p. 80).
A questa analisi (che non si esaurisce con gli esempi sopra) va aggiunta l'importanza che Châtelet attribuisce all'idea di *orizzonte* e alla dimensione virtuale dei diagrammi nella loro interrelazione con la gestualità. Per lui, i gesti o i diagrammi che catturano la materia sono importanti non perché sono indice di comprensione ma perché diventano momenti per un'intuizione dei modi in cui possa essere alterato l'orizzonte, che non va pensato nel senso di una barriera o di un confine. La metafora utilizzata da Knoespel per precisare questa idea è calzante: ciò che interessa Châtelet non è la potenzialità della pietra che precede la scultura ma la potenzialità dello *spazio che circonda* la pietra e la scultura. L'orizzonte è quindi parte della virtualità dei diagrammi, che per la loro natura dinamica non sono mai completi e i cui tratti, pur con il loro potere evocativo, non sono rappresentativi di contenuti già noti, bensì orientati verso l'evoluzione della conoscenza e allusivi di nuove dimensioni spazio-temporali. Qui compare anche la relazione intima tra gesti e diagrammi: la virtualità di un diagramma consiste di tutti i gesti e le future alterazioni che sono in qualche modo "contenuti" in esso.

> *They* [*diagrams*] *capture gestures mid-flight; for those capable of attention, they are the moments where being is glimpsed smiling. Diagrams are in a degree the accomplices of poetic metaphor. But they are a little less impertinent — it is always possible to seek solace in the mundane plotting of their thick lines — and more faithful: they can prolong themselves into an operation which keeps them from becoming worn out. Like the metaphor, they leap out in order to create spaces and reduce gaps: they blossom with dotted lines in order to engulf images that were previously figured in thick lines. But unlike the metaphor, the diagram is never exhausted: if it immobilizes a gesture in order to set down an operation, it does so by sketching a gesture that then cuts out another.* (Châtelet, 1993/2000, p. 10)

L'interesse di Châtelet nei gesti è molto diverso da quello ad esempio di McNeill (2005) o di un qualunque tentativo classificatorio e proposizionale di descrivere i gesti. Châtelet vuole focalizzarsi sulle implicazioni dei gesti sui diagrammi e considera la gestualità come un intermediario tra il corpo, nuovi movimenti del corpo, e i diagrammi, mantenendo una distanza rispettosa da forme di catalogazione. Ciò si lega all'insistenza sul carattere allusivo, evocativo e persino nascosto del gesto che e, d'altra parte, è il diagramma non il gesto a essere sopravvissuto. De Freitas e Sinclair (2012), nel ripensare la relazione tra gesti e diagrammi, notano:

> *Châtelet is concerned with gesture as a kind of interference or intervention that has driven mathematics and the sciences forward, not as a semiotic divorced from the event, but as a dynamic process of excavation that conjures the sensible in sensible matter.* (p. 138)

È questo processo dinamico di escavazione che si apre al problematico (ancor prima che all'assiomatico) degli eventi nella pratica matematica, come anche Rotman (2015) sottolinea:

> *Virtuality concerns what is actualizable in an event, its potential, all the futures it could/might give rise to. Unlike the possible, which refers to determinations that are fixed but lack the conditions to realize them, the virtual is inseparable from tensions, problems, and open questions. And, since for Châtelet mathematical creation is primarily the business of finding determinate solutions to problems, virtuality is the source for the novel abstractions solutions demand.* (p. 5)

Del resto, Châtelet stesso affermava:

> *Confrondre les mathématiques avec de simples chaînes déductives et ignorer le caractère crucial du sens de la "bonne conjecture" — de ce que nous avons appelé le <u>diagnostic du mathématicien</u> — nous semble une conception aussi mutilante que celle qui prétendrait réduire la Physique à un simple exercise de Calcul Différentiel.* (Châtelet, 1997, p. 14; il sottolineato è enfatizzato nell'originale)

2.5 Virtuale e immaginazione

La concezione di virtuale di Châtelet appare potente in gran parte perché egli l'ha sviluppata specificatamente a proposito della matematica, dove le questioni del concreto e dell'astratto sono così scivolose. Va anche detto, e questo è intrigante, che la nozione di virtuale è stata discussa inoltre in studi sui media. Per esempio, Burbules (2006) propone di ripensare al virtuale come a ciò che crea un *senso di immersione*, coinvolgendo una estensione o una elaborazione di ciò che è presente nell'esperienza. Il virtuale non è dunque, per Burbules, necessariamente legato a una tecnologia e neppure a qualcosa di sostitutivo della realtà, una visione questa che inibisce una conoscenza profonda della virtualità (tipica nel caso della prospettiva della realtà virtuale):

> <u>*Yet the key feature of the virtual is not the particular technology that produces the sense of immersion, but the sense of immersion itself (whatever might bring it about), which gives the virtual its phenomenological quality of an "as if" experience.*</u> (*ibid*., p. 37; il sottolineato è enfatizzato nell'originale)

L'esperienza del "come se" e il suo carattere immersivo fanno del virtuale à la Burbules un concetto che non assume una separazione troppo netta tra virtuale e reale, per la quale il primo significa altrimenti sintetico o illusorio mentre il secondo si riferisce a un dato di fatto non problematico. L'autore discute la questione con un richiamo alla fenomenologia heideggeriana (per cui ad esempio un fiume è una fonte potenziale di potenza elettrica, un albero è un tavolo potenziale, e così via, e in cui la visione del nostro rapporto con la tecnologia è troppo deterministica) e sostiene che, nel contesto della cultura digitale, la biforcazione tra sintetico e reale ha oscurato una vera comprensione di ciò che cambia nei modi in cui esploriamo i nostri mondi. Il virtuale è per Burbules un concetto *mediale*, né reale né immaginario, o meglio reale *e* immaginario:

> *The virtual should not be understood as a simulated reality exposed to us, which we passively observe, but a context where our own active response and involvement are part of what gives the experience its veracity and meaningfulness.* (*ibid*., p. 38; il sottolineato è enfatizzato nell'originale)

Sebbene il costrutto di virtuale di Burbules abbia lo svantaggio di imporre stati psicologici sull'individuo e quindi di perdere di vista la complessa interazione materiale coinvolta nell'esperienza, è interessante che tra i tratti distintivi del senso di immersione, dell'esperienza del "come se", vi sia l'immaginazione. Un'esperienza, per l'autore, coinvolge la nostra immaginazione se è possibile introdurre o estrapolare nuovi dettagli. Vi è un senso che il virtuale abbia a che fare con ciò che è potenzialmente, non realmente, presente:

> *Actively going beyond the given is part of what engages us deeply in it.* (*ibid*., p. 41)

L'immaginazione così definita può essere anche pensata come un tipo di interattività che ha a che vedere con la natura potenzialmente problematica di una qualsiasi esperienza (lo stesso carattere problematico già messo in evidenza dalla trattazione di Châtelet). Il discorso di Burbules si apre quindi al considerare le caratteristiche del virtuale come risorse educative essenziali per coinvolgere e motivare un apprendimento attivo degli studenti. Ecco che il virtuale diviene "a very concrete way of rethinking the nature of learning spaces—spaces where creativity, problem-solving, communication, collaboration, experimentation, and inquiry can happen" (*ibid*., p. 43).
Burbules è molto attento (ancora una volta dialogando con la prospettiva che è propria degli ambienti di realtà virtuale) a precisare che, basando la nozione di virtuale sul carattere immersivo dell'esperienza, i nostri corpi e un senso *embodied* del movimento non scompaiono ma sono parte di ciò che crea lo stesso senso di immersione. Chiedendosi se ci stiamo "davvero muovendo", Burbules afferma che la questione della virtualità ci induce a vedere questo interrogativo da un nuovo punto di vista, quindi risponde che l'esperienza implica una trasformazione dello spazio e del tempo e che ci stiamo "proprio muovendo nello spazio e nel tempo virtuali".

> *The experience of movement is one of the primary dimensions underlying the sense of immersion which, I have suggested, defines the "virtual".* (*ibid*., p. 45)

L'immersione è dunque, manifestamente, di per sé una metafora corporea. Questa intima connessione tra virtuale e corporeo è legata qui anche al crescente interesse nella interazione aptica ("haptics"), vale a dire nell'utilizzo del tatto e delle sensazioni tattili per comunicare o riconoscere oggetti. Questo collegamento potrebbe ulteriormente essere approfondito in virtù di studi che negli ultimi anni sono sorti nel campo della ricerca didattica e che esaminano le interazioni tattili come parte della natura multimodale dell'attività matematica. È inoltre importante spostare il focus dell'attenzione sulla distinzione operata da Burbules tra "space" e "place" per portare alla luce come spazi di apprendimento possano trasformarsi in luoghi ("learning places" piuttosto che "delivery systems") interessanti e familiari, 'abitati' dagli studenti, di cui il virtuale costituisce un tratto definitorio: "a place (as opposed to a space) always entails to some extent, the quality of the virtual" (*ibid*., p. 53). In alcuni studi di questi anni, la prospettiva di Burbules ha permesso di studiare incontri virtuali in matematica nei quali i confini tra attuale (reale o possibile) e virtuale sono in continuo movimento, riconfigurando costantemente l'attività matematica (cfr., ad esempio, Sinclair *et al*., 2013; Ferrara & Ferrari, 2016). In particolare, in tali studi, l'immaginazione alimenta atti creativi che suscitano nuove dimensioni e nuove tracce, introducendo o catalizzando ciò che prima non era presente: il nuovo (abbiamo già visto con Berthoz come l'immaginazione sia parte della creatività vicariante che rende plastico il nostro cervello; cfr. § 2.2). La creatività non è localizzata nell'individuo, come per tutta la letteratura che distingue fra studenti dotati e non (ossia "gifted" e "non-gifted") e il cui focus è sui tratti e sulle abitudini di chi è considerato particolarmente creativo. È piuttosto intrinseca all'attività: non esiste indipendentemente dal suo esercizio e sono le azioni a esprimerla, nella relazione tra l'individuo e il mondo materiale. Indipendentemente dal fatto che esperienze immersive virtuali si possano avere in molti contesti, riteniamo importante infine il discorso di Burbules sulle tecnologie digitali, capaci, con le loro particolari caratteristiche, di generare tali esperienze. Cinque sono gli elementi presi in considerazione: "mobility, inhabitation, action at a distance, haptic sensitivity, and performative identities" (Sinclair *et al*., 2013, p. 250). Essi coinvolgono tutti il virtuale in termini di trasformazioni spazio-temporali: il primo riguarda la capacità di muovere realmente delle cose (linee, punti, noi stessi) in nuovi spazi (non necessariamente spazi che soddisfano le normali leggi fisiche); il secondo l'estensione o la trasformazione dello spazio e del tempo e il fatto che il corpo occupi quello spazio e quel tempo (viaggio nel tempo, movimento istantaneo, replica di esperienze precedenti); il terzo la capacità di trasformare la dimensione temporale della nostra partecipazione; il quarto il modo in cui i nostri corpi sono fermamente implicati negli spazi virtuali che esploriamo, e come vista, tatto e percezione partecipino alla creazione di esperienze del tipo "come se"; infine, il quinto riguarda l'estensione e la trasformazione delle nostre identità in ciberspazi. Sebbene alcuni di questi aspetti possano sembrare banali, la loro rilevanza rispetto alla matematica non va tuttavia sottovalutata, vista la caratteristica di de-temporalizzazione della matematica formale e la visione degli oggetti matematici come statici e inerti. Nell'ottica qui discussa, la ricerca può investigare le caratteristiche dell'utilizzo di tecnologie che attivano attualizzazioni del virtuale e si aprono a opportunità di atti creativi in matematica.

L'analisi offerta da Châtelet e le implicazioni discusse da Burbules ci invitano insomma a pensare alla virtualità del fare matematica, apparendo molto utili al nostro discorso: da un lato, ci permettono di legare il carattere virtuale che possiamo attribuire alla matematica a un'idea di movimento di cui il movimento del corpo, in particolare il gestuale (ma anche il movimento degli occhi), e il parlato sono attualizzazioni (de Freitas & Ferrara, 2015) e, nel contempo, di introdurre nel discorso il ruolo profondo che può essere rivestito dall'immaginazione nei momenti di scoperta e di costruzione del nuovo (nuove idee, nuovi significati, nuova conoscenza), chiamando in causa in qualche modo il mondo infinito dei possibili di Longo aperto proprio alla novità.
Vogliamo concludere questa sezione, mettendo in luce che la visione di Longo si avvicina alla posizione di Lakatos, il quale considerava l'attività matematica come una questione principalmente riguardante la formazione e la deformazione di concetti:

> *Mathematicians are always working with ill-defined or ambiguous concepts, and as they try to prove things about those concepts, they stretch them in new directions. In his famous example, the concept of polyhedron is stretched and moulded, and indeed transformed beyond recognition. However, this perturbation does not occur in a vacuum; it emerges in relation to a particular problem – which, in Lakatos' case, is about the relation between polyhedral vertices, edges and faces.* (de Freitas & Sinclair, 2017, pp. 85-86)

Esempi di 'deformazione', che inizialmente hanno creato dissenso (rotture), provengono dalla storia: lo zero, i già citati numeri immaginari e complessi, le funzioni continue dovunque ma mai differenziabili, gli spazi a 17 dimensioni, e così via. Esempi abbondano però anche in classe, dove gli studenti spesso si trovano a partecipare a formazioni divergenti di concetti, che chiamano in causa che cosa sarà considerato 'sensato' nella loro classe di matematica. D'altro canto, la prospettiva di Longo ricorda quella di Vygotskij in *Pensiero e linguaggio*, dove descriveva i concetti come "taking shape in the course of a complex operation aimed at the solution of some problem" e insisteva sul fatto che un concetto

> *is not an isolated, ossified, and changeless formation, but an <u>active</u> part of the intellectual process, constantly engaged in service of communication, understanding and problem solving* (Vygotskij, 1934/1986, p. 98; il sottolineato indica nostra enfasi).

Con Lakatos e con Vygotskij, i concetti emergono da particolari problemi e dimostrazioni, così che difficilmente si può parlare di concetti senza parlare anche di problemi. Per de Freitas e Sinclair (2017), questo modo di pensare al concetto è molto vicino a quello di Châtelet, non solo per la sua connessione ai problemi ma anche per il suo focus intrinseco "on what the concept is *doing*, that is, on the mathematical event in which the concept is activated" (p. 86), come abbiamo visto più sopra (cfr. § 2.4). In linea con questa prospettiva, Cutler e MacKenzie, analizzando la relazione tra filosofia e neuroscienze, offrono una visione dell'apprendimento come ciò che sostiene la mobilità dei concetti, in altre parole, "that which resists determination as knowledge" (Cutler & MacKenzie, 2011, p. 68). Suggeriscono inoltre che "the real challenge to Cartesianism" (il superamento del dualismo mente/corpo) sembra giacere "not in reconfiguring how we know what we know" ma nel considerare "the body of knowledge on the same material plane of existence as the lived and the physical bodies" (*ibid*., p. 63).

3. Linee di discussione tra incontri e sviluppi

Sulla base del background teorico, delle linee di pensiero discusse fino a qui ed eventuali loro sviluppi, il seminario si propone di approfondire la discussione focalizzando attenzione su alcuni aspetti dell'attività matematica nei quali crediamo possibile catturare l'intreccio tra le dimensioni del corpo e del movimento: i *diagrammi*, i processi *immaginativi* e l'utilizzo delle *tecnologie*. Dei diagrammi abbiamo parlato in riferimento soprattutto al lavoro di Châtelet (e accennato con Rotman ma anche con Longo), l'immaginario è coinvolto sia nel discorso onto-epistemologico sul virtuale, sia negli studi cognitivi già citati sulla natura della comprensione in matematica e in quelli sul cervello vicariante. Inoltre, il virtuale diventa parte del processo immaginativo, in larga misura attualizzato mediante azioni materiali dallo studente o dal matematico, che costantemente re-iscrivono se stessi nell'attività (e nella) matematica. Il ruolo delle tecnologie, digitali e non, che permettono di esplorare relazioni matematiche restituendo le dimensioni della temporalità e del corpo all'attività, assume importanza in questo discorso.
Gli aspetti appena delineati si possono ritrovare in nuce in alcuni nostri studi, come quelli discussi al gruppo di lavoro sul *Geometrical Thinking* di CERME 8, ad Antalya (Ferrara & Mammana, 2013; Ferrara & Maschietto, 2013a; de Freitas & Mccarthy, 2013) e in lavori successivi (Ferrara & Maschietto, 2013b; Ferrara & Mammana, 2014; de Freitas & Ferrara, 2015; de Freitas & Ferrara, 2016). Richiamiamo ddapprima proprio il contenuto di questi studi.
In Ferrara e Mammana (2013, 2014), ad esempio, proponevamo uno studio della visualizzazione nel passaggio piano-spazio e viceversa, investigando che cosa e come gli studenti vedevano o visualizzavano oltre al visibile, in, con e attraverso configurazioni geometriche di punti e segmenti che potevano essere 'guardate' come figure nel piano oppure

nello spazio secondo cambiamenti di prospettiva. L'utilizzo di un software di geometria dinamica permetteva di agire in termini temporali e spaziali sulle configurazioni e di operare il passaggio piano-spazio mediante trasformazioni di oggetti geometrici (movimenti fisici). L'interesse era sui processi che tali trasformazioni potevano stimolare in termini di un cambio di prospettiva, movimento che presuppone uno slittamento di attenzione. In particolare, sulla possibilità di vedere in una configurazione, che poteva apparire la stessa di partenza, una nuova figura (oppure di vedere due figure distinte in una sola configurazione) e, quindi, di comprendere le proprietà che potevano rimanere invarianti nella trasformazione, vale a dire rispetto al cambio di prospettiva o nel passaggio dal piano allo spazio e dallo spazio al piano. Lo stesso studio era stato in questo caso applicato a una classe terza di scuola secondaria di secondo grado e a un gruppo di studenti universitari magistrali che frequentavano il corso di Didattica della Matematica (la ricerca fa capo a studi fondazionali nell'ambito delle geometrie finite che, prima di un'eventuale trasposizione didattica nella classe, prendevano in esame, per dirla à la Châtelet, la virtualità di una configurazione di 4 punti e dei 6 segmenti che li uniscono a coppie, sia essa nel piano o nello spazio; cfr., ad esempio, Mammana *et al*., 2012).
In Ferrara e Maschietto (2013a e b), il movimento indagato era soprattutto immaginativo, accanto a quello fisico veicolato dal coinvolgimento di possibili azioni con una macchina matematica per disegnare coniche specifiche. Agli studenti di un corso universitario di Didattica della Matematica era richiesto, dopo aver incontrato e sperimentato una macchina per disegnare un'ellisse e una parabola, di immaginare di dover costruire una macchina per disegnare un'iperbole e di spiegare come sarebbe stata fatta. Il nostro interesse cadeva dunque sul passaggio dall'esperienza fisica con la macchina materiale a quella solo immaginativa in cui è necessario comprendere non solo che cosa la macchina può fare, ma anche come fa e perché. L'utilizzo di perni su una base di legno e di un filo, opportunamente forniti a gruppi di studenti, stimolava la creazione di diagrammi, da un lato legati alle azioni con la macchina (movimenti fisici) e, dall'altro lato, soggetti a vincoli strutturali per il tipo di conica considerata (movimenti questi, che dovevano attualizzare le relazioni matematiche da soddisfare ma anche l'invarianza di tali relazioni nel movimento).
In de Freitas & Ferrara (2015, 2016), abbiamo proposto di teorizzare la gestualità e il movimento del corpo come attualizzazioni di un più raffinato e invisibile *movimento del pensiero*, adottando una prospettiva filosofica che riflette sulla natura dell'apprendimento. In questo studio, la tecnologia non è presente e i soggetti, bambini del terzo anno della scuola primaria, lavorano nel gruppo classe con una sequenza di figure tridimensionali fatte di cubi di piccole dimensioni (chiamate edifici di cubetti), posta sul pavimento, liberi di muoversi attorno a essa mentre cercano di coglierne la struttura soggiacente (che cosa le diverse figure hanno in comune, che cosa cambia, come sarebbe fatta la figura successiva, ecc.). L'attività è parte di una ricerca più ampia che vuole studiare i processi di generalizzazione come base per il pensiero algebrico precoce e per lo sviluppo del pensiero funzionale (cfr., ad esempio, Ferrara & Ng, 2015; Ferrara & Sinclair, 2016). Possiamo inoltre richiamare la prospettiva offerta in un recente articolo apparso sulla rivista *For the Learning of Mathematics*, nel quale le idee di movimento, di flusso e di temporalità aiutano il ricercatore a teorizzare il pensiero matematico e la pratica matematica in termini nuovi ("an alternative epistemology"), animati e dinamici: "mathematical thinking is a form of movement that grasps itself only in its results rather than being prefigured in schemas, constructions, representations, or conceptions" (Roth, 2015, p. 2). Partendo da Merleau-Ponty e Sheets-Johnstone, Roth afferma:

> *A movement-based approach recognizes the generativity of moving thinking that is <u>in excess of itself</u>, so that chalkboard lines may emerge following and as the result of a series of hand/arm movements in which the thinking finds what it wants to do. Unintended*

> *thinking movement is pregnant with the new, invisible, and unforeseen*. (*ibid*., p. 5; il sottolineato è enfatizzato nell'originale)

Ritorna l'aspetto dell'immanenza messo in luce con Longo, fondamentale per Roth per riconoscere la supremazia del pensiero in termini di movimento. Mentre i termini *embodiment* ed *enaction* indicano rispettivamente il mettere qualcosa in un corpo e il mettere qualcosa in azione (per cui è sempre richiesto qualcosa di esterno al corpo), invece:

> *movements do not enact anything but produce and reproduce themselves: they are completely immanent and do not require transcendent structures to make them do what they do*. (*ibid*., p. 6)

A seguire presentiamo e prendiamo in esame alcuni episodi che provengono da classi di ordine diverso. Il nostro obiettivo è di discutere questi episodi per esemplificare e sviluppare il discorso sull'intreccio tra corpo e movimento nei processi di insegnamento e apprendimento della matematica, lungo i filoni della possibilità e della virtualità, che attribuiscono nuova importanza ai diagrammi e all'immaginazione. Utilizzeremo gli episodi anche come eventi peculiari e contingenti per sperimentare modi di fare ricerca e di osservare come nel suddetto intreccio sia racchiuso gran parte del carattere dinamico e creativo che possiamo attribuire alla nostra disciplina e, dunque, ai processi di pensiero in matematica. Prima di fare ciò, tuttavia, introduciamo una breve riflessione metodologica.

3.1 Premessa

In un articolo apparso nel 2013 su un volume speciale di *ZDM Mathematics Education*, Stylianides e Stylianides mettevano in luce la necessità di una maggior attenzione alla ricerca sui cosiddetti "classroom-based intervention" (interventi in classe) nella didattica della matematica. Il termine "intervention" denota per i due ricercatori l'idea di "action taken to improve a situation" di Stevenson e Lindberg (2012), ed è utilizzato "in relation to the practice of teaching and learning mathematics in classrooms" (Stylianides & Stylianides, 2013, p. 334). Secondo questo studio, i ricercatori tendono a sovrasemplificare la ricerca in ambienti 'disordinati', come quello della classe reale, se percepiscono che il contesto scelto può eventualmente portare a considerare la loro ricerca povera dal punto di vista metodologico. Nonostante ciò, Cobb e colleghi (2003) hanno mostrato che sembra esserci una forte correlazione tra interventi in classe e studi che seguono la metodologia di ricerca dei "design experiments" (nell'ottica della "design-based research"). Per Stylianides e Stylianides, un "design experiment" implica la progettazione di un intervento e lo studio del suo impatto, per esempio investigando delle possibilità di miglioramento educativo, come quando gli studenti sono coinvolti in problemi nuovi. La filosofia di questi tipi di esperimenti è inoltre connessa con l'idea di una stretta collaborazione tra i ricercatori e gli insegnanti. Questa, per esempio, è una caratteristica fondamentale delle attività che andiamo a introdurre, nelle quali il ricercatore è quasi sempre presente in classe assieme all'insegnante. Nell'ultima decade, sono diventati predominanti nella ricerca in didattica della matematica i metodi dei "design experiments" e, con essi, dei "teaching experiments" (quando il ricercatore sperimenta, e riflette su, il suo stesso insegnamento in classe; questi possono fare capo alla ricerca azione, o "action research", se non fanno capo direttamente ai "design experiments"; Steffe & Thompson, 2000). Questo tipo di ricerca ci interessa molto perché "can offer an "existence proof" that students can participate in creative or inventive mathematics" (Swinyard, 2011, p. 93). Inoltre, supporta l'interesse nella ricerca verso lo sviluppo della figura dell'insegnante-ricercatore come identità professionale.

Gli episodi che qui discutiamo possono essere considerati sotto il cappello di "intervention studies", come facenti parte di interventi in classe di medio o lungo termine, che seguono i tipi di metodi introdotti (principalmente "teaching" e "design experiments"), pur collocandoci nel panorama nazionale della ricerca per l'innovazione (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998).
Per l'analisi dei dati, infine, assumiamo una metodologia qualitativa, principalmente basata sull'osservazione e su analisi di tipo etnografico, vista la natura situata delle attività in classe. L'osservazione, infatti, denota la pratica empirica di raccogliere dati utilizzando note, audio, video e strategie di registrazione di diverso tipo, mentre il carattere etnografico della ricerca si lega alla presenza di ricercatori e insegnanti come partecipanti e osservatori.

3.2 Episodio 1: Filippo e la sequenza di pallini

L'expérience de pensée menée à son terme est une expérience diagrammatique, où il devient manifeste que le diagramme est à lui-même sa propre expérience.

Gilles Châtelet

3.2.1 Premessa

Il primo episodio che presentiamo parla di Filippo, un bambino in classe terza primaria che sta affrontando un'attività chiamata 'Ti ricordi di Tobia?', per la quale è fornito il diagramma mostrato in Figura 3. Si tratta della ripresa di un'attività già affrontata in classe seconda ('Che strana combinazione'), in cui i bambini hanno lavorato in modo ricorsivo sui primi sei termini della sequenza, tra cui il secondo termine nascosto dall'impronta (del cane Tobia) e i due successivi e mancanti dal lato strappato del foglio (nell'immagine, sulla destra). L'attività fa parte di una ricerca a lungo termine, che ha coinvolto la classe in esperienze matematiche nell'arco dei cinque anni (dal 2010 al 2014), con l'obiettivo di sviluppare pensiero algebrico precoce mediante la ricerca di regolarità e (soprattutto nell'ultimo anno) di proprietà soddisfatte da numeri.

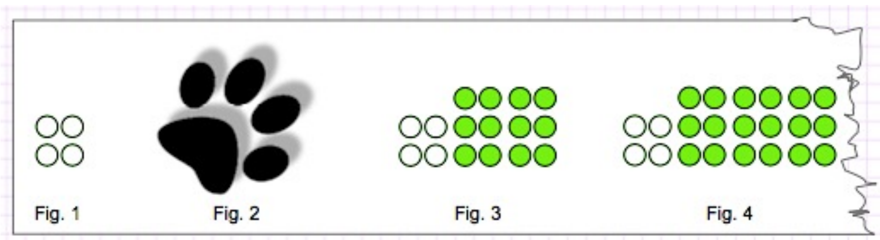


Figura 3. La sequenza di figure dell'attività 'Ti ricordi di Tobia?'

Brevemente, in classe seconda, ai bambini era stato chiesto con una scheda individuale di: (a) completare la sequenza con la figura coperta dall'impronta e spiegare il ragionamento; (b) estendere la sequenza alle due figure mancanti; infine, (c) elencare i numeri che raccolgono il totale di pallini nelle sei figure considerate (numeri che il nonno vuole giocare al lotto), spiegando a Pietro, il padrone di Tobia, la regola seguita per decidere i numeri da giocare. Le risposte dei bambini sono quindi state condivise in una discussione collettiva condotta dalla ricercatrice, che era sempre presente in classe assieme alla maestra. La scelta di introdurre il colore per i pallini non è stata casuale, bensì intendeva porre l'accento sulle relazioni tra elementi vicini della sequenza e tra ciascun elemento e la sua posizione (indicata in questo caso con il prefisso "Fig."). Quasi tutti i bambini hanno espresso la regolarità con cui si può

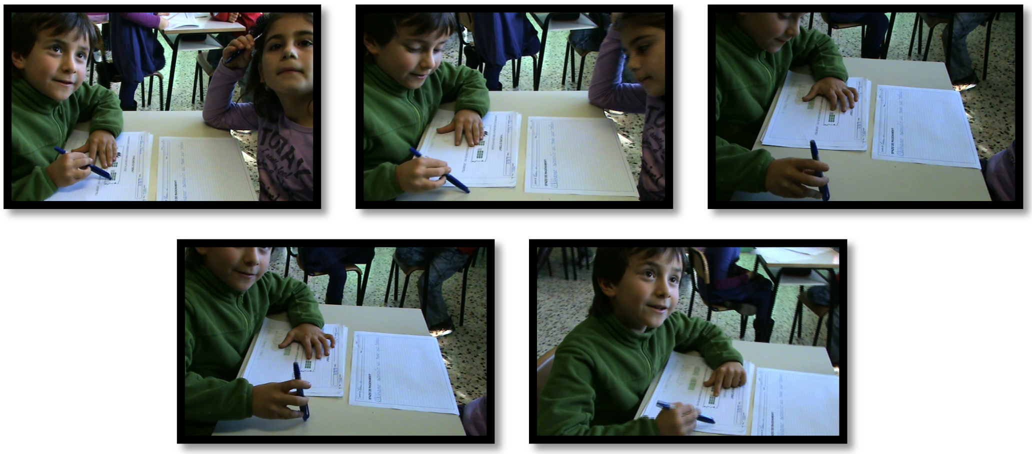
passare da una figura all'altra, vale a dire: "Aggiungo sempre 6", "Vai avanti di più 6" o anche "Aggiungere sempre 2 file di 3".
In classe terza, è ripresentato lo stesso diagramma e i bambini, dapprima suddivisi in coppie, devono rileggere alcuni dei ragionamenti elaborati l'anno precedente per la regola del punto (c) e spiegare se uno tra essi li aiuta a capire meglio la regola per "trovare *direttamente* una figura qualunque della sequenza". Si vuole dunque spostare l'attenzione sul legame diretto tra una figura e la sua posizione (catturato dalla formula chiusa $6(n\text{-}1)+4$ o, analogamente, $6n\text{-}2$, dove n è la posizione). L'attività si svolge nell'arco di circa tre ore, durante l'intera mattinata scolastica.

3.2.2 Lara e Filippo e la divisione per 2

Filippo e Lara lavorano assieme alla nuova attività, prima dell'intervallo di metà mattina. Non prendiamo qui in considerazione nello specifico che cosa è accaduto durante il lavoro di coppia, ma ci limitiamo a mettere in risalto che i due bambini, nel ragionare sulla richiesta mediante le quattro figure date, iniziano a scoprire nuove relazioni e proprietà, stimolati anche dalle domande della ricercatrice, che interveniva nei diversi gruppi. Nello specifico, Filippo percepisce che, contando il numero dei pallini che formano la riga in basso e dividendolo per 2, si ottiene proprio il numero della figura. Ciò introduce nel discorso dei bambini la nuova operazione di divisione per 2, che i bambini condividono con il ricercatore non appena gli si avvicina. Filippo esemplifica la scoperta nel caso della figura 3 ("conti i pallini sotto, uno, due, tre, quattro, cinque, sei, poi dividi sei per due", "e questa è la posizione") e Lara la estende alla figura 4 ("puoi anche prendere questa"), entrambe direttamente accessibili sul foglio, quindi Filippo con una certa soddisfazione ripete la sua spiegazione nel caso della prima figura ("questa, uno, due, due diviso per due dà uno", sorride). Filippo e Lara insomma iniziano a cogliere un primo legame tra la numerosità dei pallini in una figura e il numero della figura, espandendo il discorso oltre l'operazione ricorsiva di aggiungere sei pallini, introducendo il termine "posizione" e gesticolando per attualizzare la potenziale divisione che emerge dalle configurazioni nella sequenza. I bambini iniziano a notare qualcosa di diversa natura, che permette loro di iniziare a ragionare sulla sequenza in termini di numeri interi (numeri di pallini), anche se hanno una visione ancora locale (per righe). L'operazione di divisione per 2 diviene necessaria per parlare delle relazioni tra numeri, come una delle possibilità di guardare la sequenza e coglierne legami strutturali (il suo essere "fatta così").
La ricercatrice, incuriosita da questa diversa attenzione, pone allora ai bambini un nuovo problema, essenzialmente quello inverso, vale a dire: trovare una figura partendo dalla sua posizione, prendendo in considerazione una diversa figura, lontana, la figura 25 ("E alla posizione 25?"). Lara e Filippo restano sorpresi e, mentre Lara risponde: "venticinque diviso per due!", Filippo rimane silente per alcuni secondi, guardando prima i suoi interlocutori, poi nuovamente la sequenza, per poi rispondere che si deve fare la moltiplicazione per 2 ("fai venticinque per due"). Tuttavia, alla richiesta di spiegazione, Filippo si mostra confuso e chiede dubbioso: "Ma dici la posizione venticinque o il numero venticinque?". Non appena la ricercatrice chiarisce il dubbio, Filippo insiste sull'operazione di moltiplicazione e alla domanda: "E che cosa trovo?" risponde che si ottiene il numero "da mettere sotto", intendendo il numero di pallini di cui è formata la riga in basso, aspetto che Filippo attualizza con l'azione, ripetuta più volte con la penna, di scorrere 'a saltelli' la riga corrispondente della figura 4 della sequenza, spingendosi oltre il foglio, fino al lato del banco, come se immaginasse di disporre i singoli pallini della figura 25 sulla superficie a sua disposizione (Figura 4a-c). La medesima gestualità è ripetuta per la riga intermedia e per la riga in alto, con l'accortezza in questo caso di "saltare" i primi due pallini (sopra ai quattro bianchi; Figura 4d-e). Filippo

insomma pensa ora alla sequenza mediante numeri che sono i risultati di operazioni e non più solo numeri di pallini.

a b c



d e

Figura 4. Filippo e la figura nella posizione 25

Filippo immagina di 'allungare' la figura 4, 'dilatando' ciascuna sua riga con un numero maggiore di pallini (senza alterarne la struttura). Una nuova figura emerge così dal modo in cui Filippo si muove, in particolare dal muoversi delle mani, delle dita e degli occhi. Peculiare in questo momento è che il movimento avvenga verso destra, proprio nella direzione in cui la sequenza cresce rispetto all'orientamento del foglio sul banco. Il corpo di Filippo cattura una forma di pensiero diagrammatico che origina dalle figure iniziali per generare novità. Attraverso queste azioni materiali, i pallini iniziano a essere mossi assieme ai numeri nella sequenza. È un modo di creare la nuova figura, lontana, sconosciuta, e assieme di ri-creare, animandola, la sequenza, con la figura 4 che è contenuta nella figura 25. Le due figure sono tanto distanti che è necessario coprire tutto lo spazio utile del foglio, dopo la quarta figura, e lo spazio restante sul banco, per collocare ritmicamente i pallini che rendono presente la nuova figura. È davvero interessante che Filippo non conti i saltelli prodotti con la penna, ma sfrutti piuttosto l'estensione della superficie che ha di fronte per immaginare la grandezza (la lunghezza) della figura 25. Lara è più silente in questo momento, ma il suo sguardo segue attentamente la mano di Filippo, mostrando come anche lei sia partecipe del ragionamento del compagno. Si tratta di un movimento coordinato, tra Filippo (e Lara) e le figure sul foglio, che inizia a mostrare i germi di una generalizzazione nella scoperta della sequenza.
Per questa ragione, dopo aver posto l'attenzione sulla figura 25, la ricercatrice introduce la nuova sfida di una figura in una posizione qualunque, indicata con 'Pippo': "Che cosa accadrebbe se fosse la posizione cento, o la posizione Pippo, che cosa fareste?". Pippo diventa il parametro mediante cui generalizzare ulteriormente il ragionamento, suggerendo che non ha importanza il numero della figura che si considera e quindi invitando i bambini a porre l'attenzione sulle operazioni su Pippo piuttosto che sul risultato numerico delle operazioni. Filippo risponde introducendo nel discorso: "Pippo per due!", o "Due Pippo!", pur con qualche dubbio sull'utilizzo di espressioni del tipo "il risultato di Pippo per due" per la sua natura incognita. A questo punto suona la campanella di metà mattina e l'attività è interrotta.

3.2.3 Filippo e la posizione con 22 pallini

Durante l'intervallo, Filippo entusiasta raggiunge la maestra per raccontarle che cosa lui e Lara hanno scoperto sulla figura 25 e sulla figura Pippo. La maestra coglie questo entusiamo e pone il nuovo problema di trovare la posizione di una figura partendo dal numero totale dei suoi pallini. Il dialogo si svolge come segue (cfr. le Figure 5, 6 e 7 e la Tabella 1, richiamate nel dialogo; durata del video: 01:18,16):

Maestra: *Io ho una posizione, che non so quale sia, che ha ventidue pallini* (*Filippo saltella*). *Come faccio a scoprire che posizione è?*

Filippo: *Ventidue pallini?*

Maestra: *In tutto* (gesticola in aria come a racchiudere un insieme)

Filippo: *In tutto?* (*affascinato e sorpreso*)

Maestra: *Eh sì!*

Filippo: *Allora faccio, ventidue, hmm... A ventidue ne togli quattro* (muove assieme le sue mani di fronte al torso, prima verso destra e poi da destra a sinistra; Figura 5a, Tabella 1a(1i)) *e ti viene diciotto* (Tabella 1a(1ii)), *e è il primo gruppo* (mima un raggruppamento; Figura 6a, Tabella 1b(1iii)) *di quattro* [pallini], *diciotto. Poi, a diciotto ne togli sei* (mima un blocco, con un movimento verticale della mano destra, guarda la maestra; Tabella 1a(2i)) *e ti viene dodici* (sposta la mano destra sulla destra, si avvicina; Figura 5b, Tabella 1a(2ii)) *che, quindi, sono quattro e una riga da sei* (mima di nuovo il gruppo iniziale con entrambe le mani e un nuovo blocco con un movimento verticale della mano destra, guarda la maestra; Figura 6b-c, Tabella 1b(2iii-2iv)). *Poi, hmm* (si avvicina ancora con entrambe le mani aperte a mimare i pallini rimanenti, piega la testa), *a dodici ne togli sei e fa sei* (ripete il movimento delle mani da destra a sinistra per l'operazione di sottrazione; Figura 5c, Tabella 1a(3i-3ii)), *quindi sono quattro* (indica un gruppo con la mano sinistra; Figura 6d, Tabella 1b(3iii)) *e due righe da sei* (mima i due blocchi con un movimento verticale della mano destra; Figura 6e-f, Tabella 1b(3iv)). *E* (pausa) *poi, fai sei meno sei, quindi fa tre righe da sei* (mentre mantiene ferma la mano sinistra, indica i tre blocchi con una sorta di saltello verticale, ripetuto e meno ampio, della mano destra, guarda la maestra; Tabella 1a(3v)), *più quattro* (indica ancora il gruppo iniziale con la mano sinistra, guarda la maestra e sorride), *e poi, hmm, non ce ne sono più* (ruotando di più verso la maestra) *e allora fai, sono quattro più tre righe da sei* (mima il gruppo iniziale con la mano sinistra e scorre i blocchi restanti con la mano destra, mentre si avvicina verso la videocamera; Tabella 1b(3vii-3viii))

Maestra: *Ok, e quindi, che posizione è?*

Filippo: (si allontana dalla videocamera) *Quindi, è, uno, due… tre, quattro… cinque, sei* (immagina i pallini della riga in basso della figura e, accuratamente, li indica, facendosi più piccolo e curvo come per avvicinarsi alla figura, con gli indici della mano destra e della mano sinistra molto vicini e mossi in sincrono, assieme al corpo, verso la telecamera; Figura 7a-f, Tabella 1(4i-4ii)… *quattro!*

Maestra: *La posizione quattro!* (*Filippo sorride*)

a b c

A 22 ne togli 4 e ti viene 18 *Poi, a 18 ne togli 6 e ti viene 12* *a 12 ne togli 6 e fa 6*

Figura 5. Filippo attualizza le operazioni

a b c

e è il primo gruppo di quattro *che, quindi, sono quattro* *e una riga da sei*

d e f

quindi sono quattro *e due righe da sei*

Figura 6. Quattro e righe da sei

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">a: operazioni</th><th colspan="2">b: blocchi</th></tr>
<tr><th>quattro pallini</th><th>e righe da sei</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
1i. a 22 ne togli 4
1ii. e ti viene 18</td><td>
1iii. e è il primo gruppo di quattro</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>
2i. poi a 18 ne togli 6
2ii. e ti viene 12</td><td>
2iii. che, quindi, sono quattro</td><td>
2iv. e una riga da sei</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
3i. a 12 ne togli 6
3ii. e fa 6

3v. poi fai 6 meno 6
3vi. non ce ne sono più</td><td>
3iii. quindi sono quattro

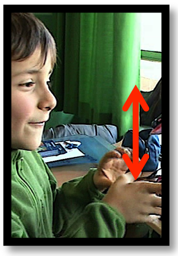
3vii. sono quattro</td><td> 
3iv. e due righe da sei
 
3viii. più tre righe da sei</td></tr>
<tr><td>4</td><td colspan="3">
4i. è, uno, due... tre, quattro... cinque, sei...
4ii. quattro!</td></tr>
</table>

Tabella 1. Il movimento iniziale di Filippo: i blocchi immaginati attraverso le operazioni

Leggendo la Tabella 1 per righe, possiamo focalizzarci sul flusso temporale del movimento di Filippo, mentre l'attenzione alle colonne cattura il modo in cui gesti e movimenti diversi attualizzano le operazioni di sottrazione (come mostra la Figura 5) o gli elementi spaziali, i 'blocchi' virtuali (come mostra la Figura 6), mediante cui Filippo immagina i 22 pallini e la loro disposizione nello spazio, creando la nuova possibilità di una figura della sequenza da un numero totale di pallini. Il pensiero di Filippo è movimento e animazione. Il corpo e il parlato esprimono un movimento più sottile, invisibile, per il quale tutto si muove, non solo Filippo nello spazio: la sequenza, la figura, i 22 pallini, la posizione, i blocchi, i numeri, assieme alle mani, alle braccia, agli occhi, ai piedi. Le figure della sequenza sono solo apparentemente ferme: ciascuna è messa in movimento, resa dinamica, perché parte delle successive e contenitore delle precedenti. Hanno tuttavia minore libertà di movimento rispetto, ad esempio, alla gestualità e ancora meno rispetto al pensiero. Il movimento del pensiero è proprio quello che cattura la potenzialità del concetto di numero mediante il processo immaginativo. La gestualità partecipa a questo movimento attualizzando le successive figure, l'una dentro l'altra, l'una dopo l'altra, attraverso le operazioni di sottrazione, l'andare indietro e avanti (verso sinistra e verso destra), a esaurire il numero di pallini (da 22 a zero: "non ce ne sono più") e a scoprire il numero di blocchi (dal "primo gruppo di quattro" alle "tre righe da sei, più quattro" o "quattro più tre righe da sei"). Filippo crea e, assieme, svela la nuova figura e la sua posizione in modo inaspettato, animando anche il foglio di carta dell'attività e il ritmo discreto e numerabile delle figure su di esso. È un incontro virtuale: Filippo si coordina con i 22 pallini che immagina proprio lì di fronte e decompone e ricompone il loro disporsi nello spazio a formare la specifica figura, operazione dopo operazione, azione dopo azione.
La sequenza muove Filippo *a muoversi* e, contemporaneamente, si muove con lui. Il numero di pallini, ogni figura intermedia (le figure 1, 2 e 3), la sua forma, tutti affiorano dalle molte operazioni e dai molti numeri, dei blocchi e dei pallini alla base, che catturano la natura ricorsiva della sequenza. Non c'è il solo numero 22, ci sono anche i molti numeri contenuti in esso e aggrovigliati alla disposizione spaziale, geometrica, colorata, dei pallini, vale a dire il 4, il 6, il numero di blocchi di 4, il numero di blocchi di 6, i numeri intermedi che portano in essere le figure intermedie (diciotto, dodici, e così via) e il numero della posizione alla fine.
Le idee di ricorsione e di posizione, come la relazione diretta tra il numero totale di pallini e il numero specifico della figura, emergono da questo movimento coordinato tra Filippo e la sequenza. Anche il movimento del corpo è di per sè ricorsivo, almeno inizialmente: la stessa operazione (di sottrazione) segue più volte, pur partendo da diversi numeri (Figura 5, Tabella 1a) e i medesimi gesti, con le mani indicatrici e il braccio mosso verticalmente, sono ripetuti più o meno ampi (Figura 6, Tabella 1b). Il movimento, in tutte queste sue manifestazioni, raccoglie la forza della sequenza e la potenzialità del concetto di numero. Il modo in cui Filippo, inoltre, si avvicina alla videocamera (e si allontana da essa, prima di riavvicinarsi) è un accordarsi con il carattere ricorsivo della sequenza, dove la figura 4 contiene in se stessa tutti gli elementi precedenti, a partire dal lato sinistro, dal punto di vista del bambino. Ma questo suo modo di muoversi e di parlare è anche un accordarsi con, un organizzare, il modo in cui i pallini sono attualizzati nello spazio, disponendoli a partire dal gruppo dei 4 pallini (bianchi) e poi nei successivi tre blocchi di 6 pallini (verdi). Il colore nel diagramma iniziale ha in questa prospettiva il potere di rendere visibile la diversità di ruoli del gruppo di 4 e dei blocchi di 6. Anche il farsi (il diventare) più piccolo di Filippo, quando finisce per spostarsi fuori dalla scena, con la sua postura minuta, curva e protesa in avanti, il gesto di indicare e lo sguardo minuziosamente rivolto verso le piccole posizioni nell'aria (Figura 7a-f), è un modo di coordinarsi con i pallini verdi alla base della figura e, potenzialmente, di qualsiasi figura nella sequenza. Il ritmo con cui Filippo sembra contare i pallini a coppie ("uno, due... tre, quattro... cinque, sei") e spostarsi nello spazio, quasi a scatti, cattura questa coordinazione nel/del movimento, il quale pone l'accento sul numero dei gruppi formati da 6 pallini, esattamente

uno in meno del numero della figura. Filippo non conta fino a otto, conta per esaurire le "righe da sei", ignorando i pallini bianchi. Otto erano i pallini alla base della quarta figura, partendo dai quali i bambini avevano attualizzato la divisione per 2 come relazione tra il numero della figura e la lunghezza delle sue righe. Tuttavia, ora, la possibilità di conoscere il numero totale di pallini di una figura *della* sequenza apre nuovi orizzonti di pensiero, che invitano e assieme inducono alla ricerca e alla scoperta di nuove relazioni.

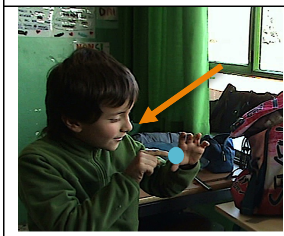
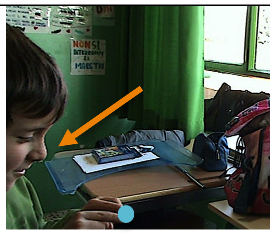
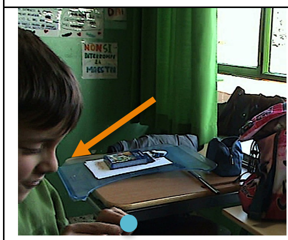
a	b	c
		
è uno,	*due...*	*tre,*
d	e	f
		
quattro...	*cinque,*	*sei...*

Figura 7. Il movimento finale di Filippo: i pallini immaginari nella riga in basso

In questo momento, sono palpabili la soddisfazione e la gioia di Filippo, che mostra sorrisi e sorpresa, aspetti di una dinamica non solo spazio-temporale ma anche emotiva. Filippo risponde in modo creativo al quesito della maestra, trovando risposta al problema inverso rispetto a quello iniziale. In tal modo, rende presente la figura di 22 pallini della sequenza come quella che occupa il quarto posto, introducendo dunque anche la necessità della posizione, la quale ora non è più solo legata al numero di pallini della riga in basso (come appunto durante la fase di lavoro con Lara). È questo anche un modo nuovo di guardare la figura 4, un cambiamento di prospettiva, che si apre alla possibilità di nuove relazioni. Possiamo pensare ai movimenti corporei di Filippo come quelli che danno origine alla creazione di una 'sinfonia' dettata dalla particolare sequenza e dal problema da affrontare. Possiamo inoltre domandarci come sarebbe cambiato il modo di muoversi, di guardare, di parlare di Filippo se la sequenza fosse stata presentata diversamente? Ovvero, se il diagramma iniziale fosse stato un altro? Come avrebbe immaginato Filippo di ottenere la posizione partendo da un dato numero di pallini?

Terminiamo la discussione di questo esempio, con un breve racconto: la sottrazione ripetuta di 6 si trasformerà nella divisione per 6 solo più tardi, quando i bambini saranno coinvolti in una discussione collettiva, nella quale il discorso sarà focalizzato, in modo esplicito per tutta la classe, sull'esistenza di un legame diretto tra il numero totale di pallini e la posizione della figura. In particolare, Filippo e Riccardo, stimolati dalle domande della ricercatrice sulla figura con 16 pallini, finiranno per immaginare di aggiungere due pallini sopra ai quattro bianchi, in modo da visualizzare una qualunque figura come composta da tutti blocchi di 6 pallini. Questo processo immaginativo sarà attualizzato dall'aggiunta dei due pallini immaginari nelle figure iniziali proiettate sulla LIM, poco prima che la divisione per 6 emerga come nuova possibilità di risoluzione del problema della posizione dal nuovo diagramma completato (Figura 8).

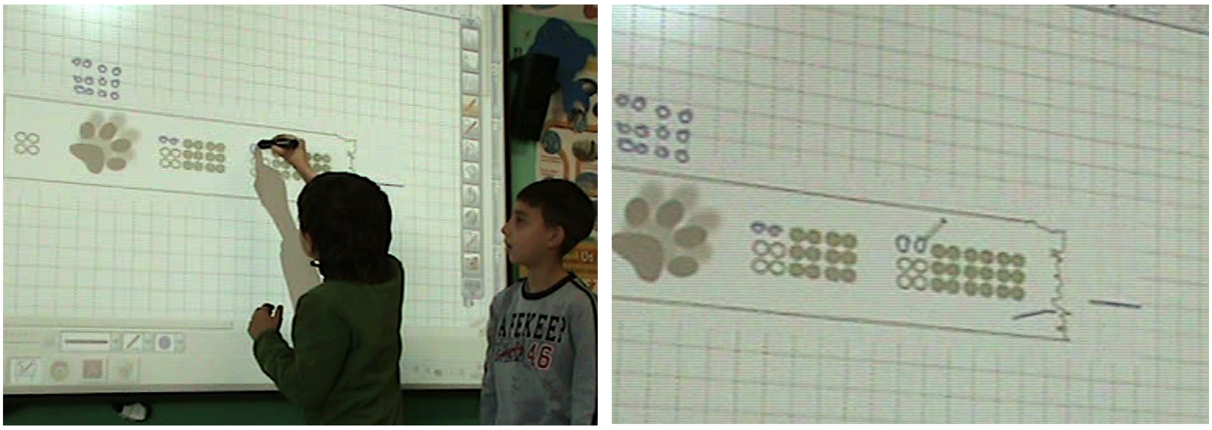


Figura 8. I due pallini immaginari aggiunti nelle figure iniziali della sequenza

3.3 Episodio 2: Numeri pari e numeri dispari con TouchCounts

In everyday life, touching is not usually a static phenomenon, not even in sitting or in a hand resting upon a leg. Touching is commonly a dynamic phenomenon, a matter not only of one's running one's hand along a surface or picking up a book, for example, but of small yet remarkable movements and shifts in position in sitting or standing. Like fingers pressing on keys or scratching a head, everyday touchings are commonly a kinesthetic as well as tactile experience.

Maxine Sheets-Johnstone

3.3.1 Premessa

Il secondo episodio riguarda un'attività che è stata sperimentata in un ultimo anno della scuola dell'infanzia. I bambini della scuola lavorano di norma suddivisi in tre diverse sezioni (gialli, blu e verdi), ciascuna delle quali comprende indistintamente i giovanissimi studenti dai 3 ai 5 anni. I protagonisti della nostra attività sono tutti i cinquenni della scuola, un gruppo eterogeneo che consta in totale di 7 femmine e 18 maschi. L'attività fa parte, anche in questo caso, di un intervento a medio termine, il quale ha coinvolto l'intero gruppo di bambini di 5 anni in esperienze matematiche nel corso di tutto il secondo quadrimestre (da gennaio ad aprile 2016), con l'obiettivo di sviluppare senso del numero lavorando precocemente sull'esplorazione di aspetti diversi: cardinale, ordinale, relazionale, ritmico. Le esperienze sono avvenute nel grande salone della scuola, dove è stato possibile suddividere i bambini e farli lavorare in gruppi più piccoli. L'intervento è stato organizzato in tre fasi principali: la prima centrata sul concetto di numero come quantità e grandezza (aspetto cardinale), la seconda sull'esistenza di un ordine dei numeri (aspetto ordinale) e la terza sull'idea di ritmo per ricercare regolarità (aspetto relazionale). Un ultimo momento è stato costituito da interviste individuali a ogni singolo bambino del gruppo classe.
Brevemente, il percorso è iniziato nella prima fase con un narrativo: la storia del piccolo paese di Colfiorito dove, per una svista del mago Smemorino, che ha sparso dappertutto la polvere smemorina, i bambini della sola scuola del paese si sono dimenticati tutti i numeri. Alcune domande hanno quindi stimolato una discussione sul numero: *Si può vivere in un mondo senza numeri? Che cosa sono i numeri? A che cosa servono? Vedete dei numeri nell'aula?* A seguire, i

bambini hanno lavorato su diverse attività, che hanno permesso loro: di incontrare numeri di tipo diverso, anche interi negativi, frazionari, e così via; di conoscere le cifre che usiamo per contare e per scrivere i numeri; di costruire numeri interi con due cifre; di introdurre il ruolo dello zero e l'idea di infinità dei numeri.
La seconda fase è stata invece incentrata sull'ordine dei numeri e sulla loro relazione con la retta dei numeri, lavorando solo con interi positivi e partendo dall'ordinamento delle dieci cifre. Le attività successive hanno permesso di iniziare a mettere a confronto numeri diversi, piccoli e grandi, e di comprendere che ci sono numeri che precedono e numeri che seguono.
La terza fase, infine, ha introdotto nelle esperienze matematiche dei bambini un'applicazione *multitouch* per iPad, *TouchCounts*, con la quale i bambini hanno lavorato sulla creazione di numeri e, soprattutto, sulla scoperta di regolarità fra numeri, sfruttando gli ambienti offerti dall'applicazione.
L'attività che è nostro oggetto di discussione si colloca proprio nella terza fase e utilizza nello specifico la modalità 'mensola' del mondo *Counting* di *TouchCounts*.

3.3.2 TouchCounts e il mondo Counting

TouchCounts è un'applicazione libera progettata principalmente per il conteggio, ma è anche utilizzata per addizione e sottrazione. Offre due mondi distinti per esplorare il numero: un mondo *Counting* (detto anche *Enumerating*) e un mondo *Adding* (detto anche *Operating*), che forniscono rispettivamente un modello ordinale e un modello cardinale del numero. Nel primo mondo (di nostro interesse qui), ogni volta che un dito tocca lo schermo del tablet produce un disco giallo, etichettato con un numero e, nello stesso tempo, il numero è pronunciato a voce alta. Ogni tocco consecutivo fa apparire un nuovo disco giallo con il numero successivo su di esso, finché lo schermo è azzerato e una nuova sessione può iniziare. Poiché l'applicazione è *multitouch*, risponde al tocco simultaneo di più dita: se, ad esempio, si tocca lo schermo con cinque dita, il disco giallo prodotto contiene il numero 5. Il mondo *Counting* può essere esplorato con o senza la modalità 'gravità' selezionata. In assenza di gravità, i dischi rimangono nella posizione in cui i tocchi li hanno originati (Figura 9a). Al contrario, in presenza della gravità, i dischi cadono, scomparendo dallo schermo. Fa eccezione la situazione in cui sia attiva anche la modalità 'mensola' (possibile solo in presenza di gravità). In questo caso, una linea divide il piano dello schermo in due regioni. La linea funge da mensola, nel senso che toccare sotto di essa fa cadere e scomparire i dischi, mentre toccare sopra permette di adagiare un disco sulla mensola (Figura 9b). In breve, rimangono visibili a schermo solo i numeri in caduta libera che sono fermati dalla mensola.

a b c

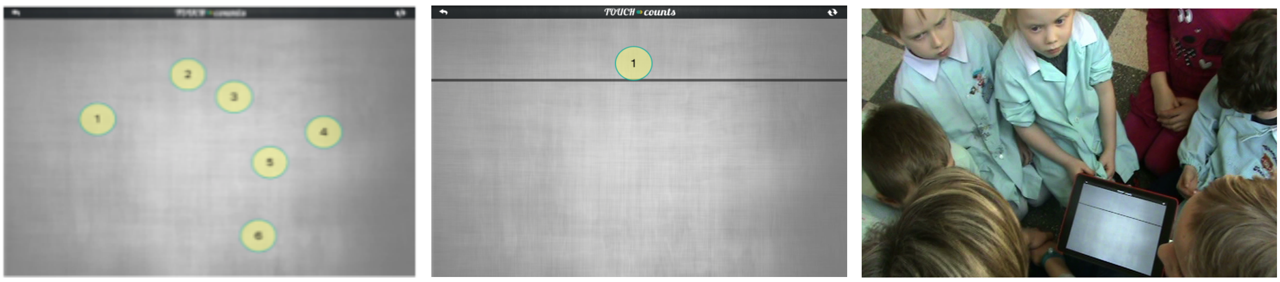


Figura 9. Il mondo *Counting* senza gravità e con la mensola e i bambini attorno all'iPad

Per avere solo il numero 6, diciamo, sulla mensola, si può dunque fare un gesto con cinque dita al di sotto e poi con un dito al di sopra. Le cinque dita possono battere in sincrono (dal momento che *TouchCounts* è sensibile al tocco simultaneo di più dita), oppure con tocchi consecutivi nella regione sotto la mensola, prima di toccare sopra. Volendo ottenere altri

multipli di 6 sulla mensola, la medesima gestualità può essere ripetuta più volte, creando in sequenza (in modo ritmico) 12, 18, e così via. In questa modalità, il mondo *Counting* enfatizza essenzialmente gli aspetti ordinali del numero, sebbene il tocco multiplo implichi anche la cardinalità (nell'esempio proposto, bisogna infatti sapere che 6 viene dopo 5, oltre al fatto di utilizzare 6 dita).
Queste configurazioni potenziali forniscono possibilità per lavorare su sequenze di numeri naturali non consecutivi, che possono favorire e generare occasioni di incontro con il numero come relazione (in linea con la concezione gattegnana). Si tratta di un tipo di lavoro che ha l'obiettivo di sviluppare aspetti relazionali di senso del numero, consentendo di porre specifica attenzione alle relazioni tra simboli e, quindi, al collegare numeri gli uni con gli altri (caratteristica di un approccio ordinale al numero) anziché al collegare numeri con insiemi concreti di oggetti (come avviene, nei primi anni di scuola, negli approcci abituali al numero legati strettamente alla cardinalità).

3.3.3 Primi incontri con la mensola e numeri dispari

Il nostro gruppo di 25 bambini ha lavorato con *TouchCounts* per tre incontri consecutivi. L'attività di nostro interesse riguarda il primo di questi incontri e si svolge nell'arco di circa tre ore, durante la mattina della normale giornata scolastica. I bambini non avevano mai lavorato prima con l'iPad (sebbene alcuni di essi conoscessero i tablet da loro esperienza) né tantomeno con *TouchCounts*. Per gestire al meglio l'attività, la classe è stata divisa in tre gruppi, secondo il colore di appartenza alla propria sezione.
Quanto discutiamo qui coinvolge il gruppo dei verdi, che lavorano con la mensola nel mondo *Counting*. La discussione è condotta dalla ricercatrice, presente in aula accanto a due maestre, e avviene con i sette bambini del gruppo seduti a terra attorno a lei e all'iPad, appoggiato sulle sue gambe (Figura 9c). Il focus è sulle sequenze dei numeri pari e dei numeri dispari e, in particolare, sulle relazioni tra di essi (analogie e differenze, che puntano a favorire una visione relazionale). Per iniziare l'attività con la mensola in *TouchCounts*, la ricercatrice richiama un 'gioco' cui i bambini hanno partecipato durante l'incontro precedente. Nel gioco, dapprima, dieci bambini, indossando un cartoncino rosso con sopra scritta una cifra, si disponevano in ordine lungo una striscia posta sul pavimento (più sotto riferita come "linea"). Quindi, coloro che avessero sentito pronunciare la loro cifra, dovevano saltare sull'altro lato della striscia e sdraiarsi a terra. A turno, il gioco lasciava in piedi-a terra solo (i bambini con) le cifre pari-dispari o solo le cifre dispari-pari (secondo i numeri chiamati) e uno dei bambini 'senza cifra' pronunciava le cifre a terra in sequenza, con l'aiuto della maestra. Il ritmo ripetuto 'bambino in piedi-bambino sdraiato'/'bambino sdraiato-bambino in piedi' generava così una sequenza di numeri (udibile da tutti).
Dopo aver fatto adagiare il gruppo dei verdi attorno a sé, la ricercatrice introduce il nuovo contesto: "Vedete che c'è questa linea (*indica la mensola*)? Io so che l'altra volta avete fatto un gioco cioè vi mettevate un bambino da una parte, un bambino dall'altra parte rispetto alla linea, giusto? Possiamo fare questo gioco anche qui (*indica la mensola più volte*)? Facendo finta di toccare da una parte e dall'altra come se stessimo mettendo un bambino da una parte, un bambino dall'altra (*muove la mano sinistra in aria con un salto sopra e uno sotto la mensola*) di questa linea?". Alla risposta affermativa ed entusiasta dei bambini che, curiosi, richiamano i "salti" dell'attività precedente, la ricercatrice afferma: "Vediamo che cosa succede qua se lo facciamo" e chiede ai bambini di fare attenzione a ciò che accadrà sullo schermo. Inizia così la nuova esperienza dei verdi di toccare lo schermo in modo alternato e ripetitivo sopra/sotto e sotto/sopra la mensola, con la ricercatrice che chiede a Giovanni, il quale siede vicino alla sua destra, di provare.
I bambini sono tutti protesi verso lo schermo dell'iPad. Giovanni, quasi con un po' di timore, comincia con una coppia di tocchi sopra-sotto la mensola (lasciando il numero 1 su di essa e

facendo invece cadere e scomparire il 2) ma subito si ferma, sorpreso. All'invito della ricercatrice: "E poi?", Giovanni, sorridente, tocca nuovamente sopra la mensola, facendo adagiare il numero 3, ma nel gesto di passare sotto inavvertitamente tocca lo schermo con due dita, facendo cadere il 4 e il 5. La voce proveniente dall'iPad pronuncia i cinque numeri uno dietro l'altro e la ricercatrice chiede di prestare attenzione al modo di produrre i tocchi. In questo momento, i bambini sembrano emozionati per l'utilizzo del nuovo strumento e probabilmente il compito sfugge, perciò è richiamata ancora una volta l'attività dei bambini in piedi e bambini sdraiati ("Facciamo finta di schiacciare, come se stessimo mettendo un bambino da una parte e un bambino dall'altra") e Giovanni ricomincia dubbioso con la ricercatrice che lo induce a iniziare da sopra: "Uno, sopra". Quanto avviene a seguire è descritto nel dialogo sotto (durata del video: 01:46,19).
Per non ripeterlo a ogni battuta, anticipiamo il modo particolare in cui Giovanni tocca lo schermo: la sua gestualità è prodotta con l'indice della mano sinistra che batte sullo schermo e il pollice racchiuso, quasi in segno di presa, come se pizzicasse i numeri (Figura 10a). A ogni tocco corrispondono inoltre: un movimento accennato della testa, che sembra dare energia alla creazione di ogni numero e assenso al nome pronunciato dall'iPad; un verso preciso del movimento che genera la sequenza di numeri (da sinistra a destra); una distanza quasi fissa tra due numeri successivi sopra la mensola (Figure 10b-d).

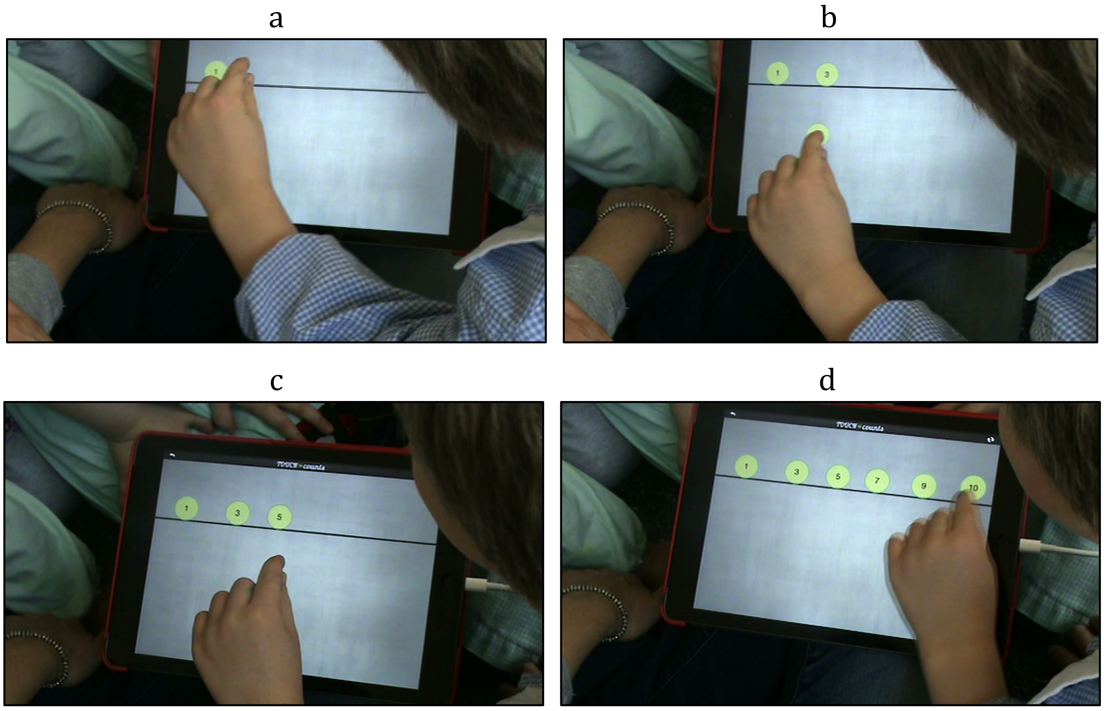


Figura 10. L'incontro di Giovanni con la mensola e i primi numeri dispari su di essa

Legenda: **^** = tocco sopra la mensola; _ = tocco sotto la mensola;
TC = *TouchCounts*; R = ricercatrice; BB = più bambini

[Giovanni **^** con l'indice della mano sinistra e il pollice racchiuso e lascia 1 sulla mensola; Figura 10a]	TC pronuncia: Uno
[Matteo, che siede alla sinistra di R, indica la regione sotto la mensola]	Matteo: *Uno qui*

	R: *E uno... ?*
[Giovanni _ e il 2 cade e scompare]	TC pronuncia: Due
	R: *Sotto. Ok, poi?*
[Giovanni ^ , spostandosi verso destra, e produce 3 sulla mensola; Figura 10b]	TC pronuncia: Tre
	R: *Poi uno sopra*
	R: *Uno sotto*
[Giovanni _ , ^ , _ , ^ , _ , ^ , ^ , spostandosi verso destra, e produce anche 5, 7, 9 e 10 sulla mensola (Figure 10c-d)]	TC pronuncia: Quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci
[R indica 10 verso l'estremo destro della mensola, quindi velocemente indica la regione sotto la mensola]	R: *Perché l'hai messo lì? Non dovevamo metterlo dall'altra parte?*

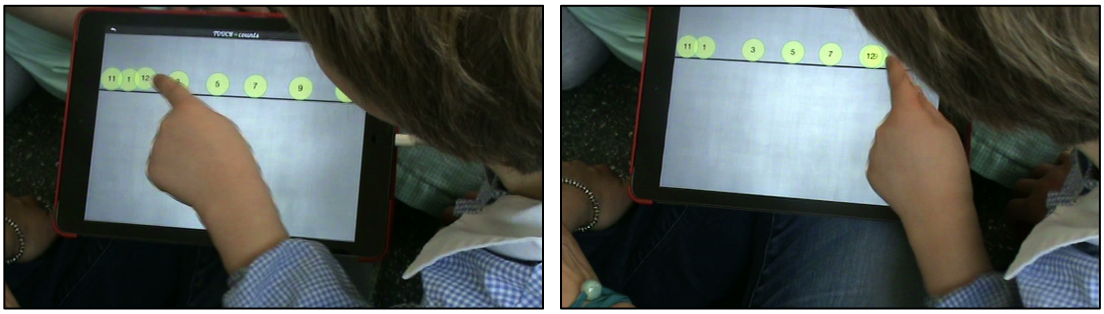


Figura 11. I numeri 11 e 12 generati a sinistra

Dopo 6 secondi di pausa (con tutti i bambini silenti):

[Giovanni accidentalmente ^ verso il lato sinistro dello schermo, sopra la mensola, creando prima il nuovo numero 11 e poi il 12, che sposta verso destra, con il dito mosso nello stesso verso; Figura 11]	Giovanni: *E perché questi qua, perché tutti questi devono stare qua?* Matteo: *Ah sì?*
[R ripulisce lo schermo]	R: *Proviamo di nuovo a farlo bene?*
	BB: *Sì*
[Giovanni indica la regione sotto la mensola]	Giovanni: *Quindi il dieci, solo il dieci deve stare qua sotto?*
	R: *Non lo so, solo il dieci stava lì sotto?*
	Giovanni: *No, tutti*
	R: *Tutti quali?*
	Giovanni: *Tutti i numeri*

[R scorre la regione sopra la mensola]	R: *A me non sembra, ce n'era qualcuno qua sopra*
[Giovanni guarda R quasi ridendo]	Giovanni: *E quali?*
	R: *Ah non lo so*
[Giovanni annuisce]	Giovanni: *L'uno?*

Sarah, che è seduta di fronte alla ricercatrice, osserva lo schermo dal lato opposto, ingrandisce i suoi occhi e si avvicina:

[Sarah indica la regione sopra lungo la mensola e poi con un salto verso destra indica la regione sotto la mensola]	Sarah: *Prima si mettevano qui, e poi si saltava sotto*
	Matteo: *Può fare Sarah? Che Sarah è bravissima!*
	R: *Dai, prova, Sarah!*
[Sarah **^** , _ , **^** , _ , **^** , _ , **^** , _ , **^** , _ , spostandosi verso destra, e produce 1, 3, 5, 7, 9 sulla mensola; Figura 12a]	TC pronuncia: Uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove, dieci
[Sarah si ferma, qualcuno ride]	R: *Possiamo andare avanti?*
[Matteo indica il lato destro lontano dello schermo, oltre il numero 9]	Matteo: *Sì, qua!*
	R: *Dai!*
[Sarah si avvicina ancora, **^** , _ , **^** , _ e produce anche 11 e 13 sul lato destro lontano dello schermo; Figura 12b]	TC pronuncia: Undici, dodici, tredici, quattordici
	R: *Possiamo andare avanti?*
[Giovanni guarda prima lo schermo e poi R]	Giovanni: *E non c'è più spazio*
	Matteo: *Sì!*
[Giovanni indica il lato sinistro dell'iPad sotto l'1]	Giovanni: *Ah, sì!*
	R: *Eh ma, ci importa se non c'è più spazio?*
[Giovanni scorre l'indice della mano sinistra avanti e indietro vicino alla mensola]	Giovanni: *Si possono* [mettere] *ancora tutto qua*
[Matteo scorre con l'indice della mano destra sopra il 3 e l'1]	Matteo: *Qua*

Quando i bambini, Giovanni in primis, iniziano a ri-produrre la coppia di tocchi sopra-sotto la mensola, si tratta per loro di un modo nuovo, inaspettato, di esplorare numeri che hanno già incontrato e 'sentito'. Prima, infatti, pari e dispari erano attualizzati dalla voce dell'insegnante e dal movimento con cui alcuni bambini si sdraiavano per terra e altri restavano in piedi lungo la striscia. In questa nuova attività, le sequenze di pari e di dispari originano dal movimento prodotto 'attorno' alla mensola (sopra/sotto) dai bambini. Sono i loro tocchi ad animare i numeri. I primi dispari emergono dall'intreccio tra la mano di Giovanni, i simboli sempre visibili e adagiati sulla mensola, le regioni in cui è diviso il piano, la voce dell'iPad. I primi pari emergono da questo stesso movimento coordinato, pur rimanendo visibili solo per un attimo prima di scomparire. Di nuovo (come nel gioco con le cifre), è il movimento a prevalere: il movimento delle mani, il movimento della testa, il movimento dei numeri (quelli che restano, quelli che cadono).

a b

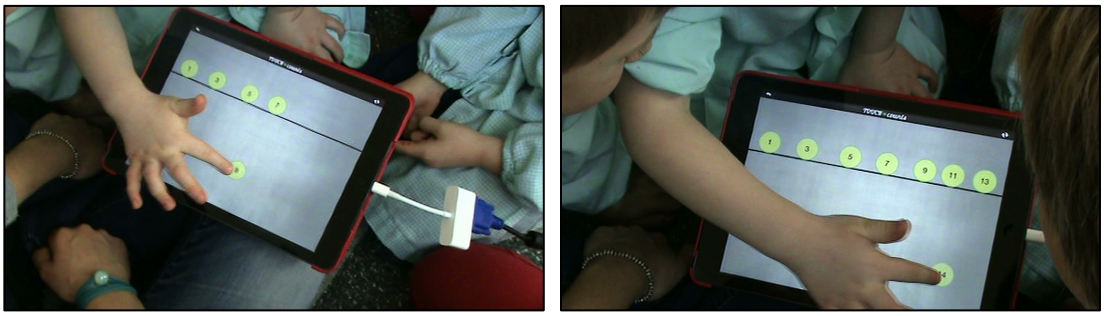


Figura 12. L'incontro di Sarah con la mensola e i primi dispari fino al 13

A dispetto del gesticolare ritmico sopra-sotto, molta attenzione sembra rivolta in questa fase alla consapevolezza di un ordine tra i numeri e alla distanza da mantenere tra due tocchi successivi sopra la mensola (tra due numeri successivi; Figure 10a-d e 12a). Entrambi gli aspetti derivano come vincoli logici dall'esperienza precedente, in cui i bambini per ordinare le dieci cifre si erano disposti con una distanza circa costante gli uni dagli altri. È indicativo il modo lento, cauto, con cui Giovanni, e più tardi Sarah, tocca lo schermo, sebbene i due bambini abbiano un modo leggermente diverso di muoversi: Giovanni tiene pollice e indice racchiusi quasi a voler pizzicare i numeri (Figura 10a-b), Sara invece apre bene la mano e protende il suo dito indice a toccare lo schermo (Figura 12a).
Giovanni perde velocemente la coordinazione del movimento, implicata dalla richiesta di produrre la sequenza di tocchi del tipo sopra-sotto, e fa comparire 10 sulla mensola (Figura 10d) dopo i primi cinque dispari. I numeri che rimangono o quelli che cadono giù sembrano dapprima non attirare troppa attenzione, perché il dito sembra principalmente diretto sullo schermo dal verso in cui la mano si muove e dallo spazio vuoto intermedio lasciato tra due tocchi successivi sulla mensola (notiamo come il tocco sotto la mensola tenda a essere inserito proprio all'altezza di tale spazio intermedio). Questi vincoli limitano la realizzazione di ciò che è possibile sopra la mensola, circoscrivono la configurazione e la creazione della sequenza dei dispari, con la superficie di lavoro che partecipa al movimento coordinato della mano e dei numeri, limitando anche la percezione della libertà di movimento: Giovanni e Sarah, infatti, si fermano entrambi una volta vicini al lato destro dello schermo.
L'incontro con i dispari si apre a nuove possibilità con la presenza inaspettata del numero 10 sulla mensola, che induce la sopresa dei bambini e le domande della ricercatrice: "Perché lo hai messo lì?", "Non dovevamo metterlo dall'altra parte?". Il momento di silenzio che segue nel gruppo genera nuove domande da cui emergono azioni inattese e altre scoperte. Quando Giovanni dubbioso chiede "perché tutti questi devono stare qua", riferendosi ai primi dispari sino al 9, e accidentalmente tocca lo schermo, crea due nuovi numeri, verso il lato sinistro: 11 e 12.
I nuovi numeri emergono quasi involontariamente generando sorpresa, ma attualizzano anche la potenzialità (del concetto) di (numero in) *TouchCounts*. Se finora il poter creare sempre nuovi numeri, il poter continuare a toccare lo schermo e il potersi muovere in verso opposto erano considerati impossibili, per via dell'ordine e della distanza costante, adesso questo non accade più. I bambini scoprono che la mensola differisce dall'idea di linea dei numeri originata dalla striscia nell'attività sull'ordinamento delle cifre. Nell'incontrare il 10,

inoltre, incontrano nuove possibilità, come il fatto di avere numeri a due cifre e di poterli posizionare dovunque sopra la mensola, persino sovrapposti ad altri numeri (Figura 11a-b). A questo punto, la ricercatrice, per riportare l'attenzione alla sequenza dei dispari, cancella la configurazione presente a schermo. Con la domanda di Giovanni "Quindi il dieci, solo il dieci deve stare qua sotto?", che indica un punto nella regione sotto la mensola, verso il lato destro dello schermo, le possibilità si ampliano. La ricercatrice coglie il momento per notare che 10 non è il solo numero a (dover) cadere e chiede se "solo il dieci stava lì sotto", dando risalto anche ai numeri pari, che non rimanevano visibili. Il movimento virtuale tra pari e dispari, potenzialmente generato dalla sequenza di coppie di gesti del tipo 'tocco sopra-tocco sotto', diviene parte dell'attività e del discorso, quando Sarah timidamente interviene richiamando questa stessa coordinazione del gesto: "Prima si mettevano qui, e poi si saltava sotto".
Sarah è incoraggiata (in particolare da Matteo) a creare una nuova sequenza e, battendo sullo schermo in modo lento ma preciso con il dito indice della sua mano destra, produce cinque tocchi verso destra (Figura 12a), fermandosi non appena 10 cade e scompare dallo schermo, nonostante ci sia ancora spazio libero. La nuova sfida sulla (im)possibilità dell'andare avanti fa emergere la possibilità di riempire lo spazio rimasto vuoto, prima con Matteo e poi con Sarah che aggiunge sulla mensola anche il sesto e il settimo numero dispari (Figura 12b). È piuttosto interessante che lo spazio tra un dispari e il successivo diminuisca (9, 11 e 11, 13 sono più vicini tra loro rispetto ad altri numeri consecutivi della sequenza), poiché indice del fatto che i bambini sono oramai concentrati sul problema di poter continuare la sequenza. Anche quando lo spazio a disposizione per i bambini sembra essere esaurito (a destra, "Non c'è più spazio"), il "Sì" di Matteo e il richiamo repentino di Giovanni ai tocchi accidentali (accanto all'intervento della ricercatrice che relativizza l'importanza dello "spazio"), con la proposta di riempire quegli spazi rimasti vuoti ("qua" pronunciato da entrambi), catturano la possibilità di avanzare ancora con i dispari e la attualizzano nel modo di muoversi degli indici dei due bambini, avanti a indietro, che spoglia del tutto il verso del movimento di importanza per attribuirla invece al semplice tocco, nella regione sopra la mensola, che crea un nuovo numero.
L'attenzione si sposta dal verso del movimento al *movimento* in sé, che è anche coordinazione tra i bambini e i numeri dispari (e già i numeri pari) e regolarità del ritmo che li può generare. Questo movimento implica una rottura con i vincoli logici precedenti, aprendo l'attività a nuove realizzazioni (numeri oltre il 10, ad esempio) e a nuove attualizzazioni (numeri sovrapposti, ad esempio).
Ciò che conta in *TouchCounts*, con la mensola, non è la posizione dei numeri ma il ritmo della gestualità, i tocchi e il *modo* in cui essi possono dare origine ai numeri e, soprattutto, a numeri specifici. L'attività a questo punto cambia ancora per mettere in luce prime relazioni tra la sequenza dei numeri rimasti sulla mensola e quella dei numeri che non si vedono più.

3.3.4 Numeri pari e "ne salta sempre uno"

Sfruttando i sette numeri dispari presenti in questo momento sopra la mensola (da 1 a 13), la ricercatrice vuole richiamare l'attenzione dei bambini sul fatto che nel generare quei numeri sopra la mensola hanno creato anche un'altra sequenza, quella dei numeri caduti, numeri pari (ricordiamo che Sarah ha concluso la sua sequenza con tocco al di sotto della mensola, che ha fatto cadere il numero 14). All'osservazione: "Qui non ci sono tutti i numeri fino al tredici", Giovanni ribatte indicando vicino al numero 3: "Guarda, qua dovrebbe esserci il due, invece del tre" e inavvertitamente tocca lo schermo creando il numero 15 sulla mensola.
L'azione inattesa genera stupore tra i bambini e fa focalizzare il discorso sulla necessità di spiegare perché sia comparso il nuovo numero. Giovanni e Sarah condividono che il compagno abbia schiacciato lo schermo accanto al 3, al di sopra della mensola. La domanda successiva, rivolta a Sarah, su dove lei avesse schiacciato prima, l'ultima volta, ha lo scopo di

riprendere il ritmo del tocco sopra-sotto per scoprire la regolarità di quei numeri sulla mensola, così come quella dei numeri caduti. Sarah indica una posizione sopra la mensola, facendo riferimento quasi certamente alla presenza del 13, ma la ricercatrice prima le ricorda che aveva toccato al di sotto della mensola, poi le chiede: "E che numero era andato giù quando avevi schiacciato sotto?".
La domanda riconfigura l'attività con attenzione ai numeri mancanti (non visibili) e alla loro relazione con quelli presenti. Giovanni risponde al posto di Sarah ed elenca tutti i numeri pari dal 2 al 12, immaginando di pizzicarli e di estrarli dalla configurazione con i dispari, nello spazio tra ciascun numero dispari e il suo successivo: "Il due, il quattro, sei, otto, ... dieci, hmm, ... e il dodici" (Figura 13). Ancora una volta, la gestualità di Giovanni è peculiare nel catturare un nuovo movimento coordinato tra il bambino e i numeri dispari, che anima i numeri pari come una nuova possibilità nell'attività.

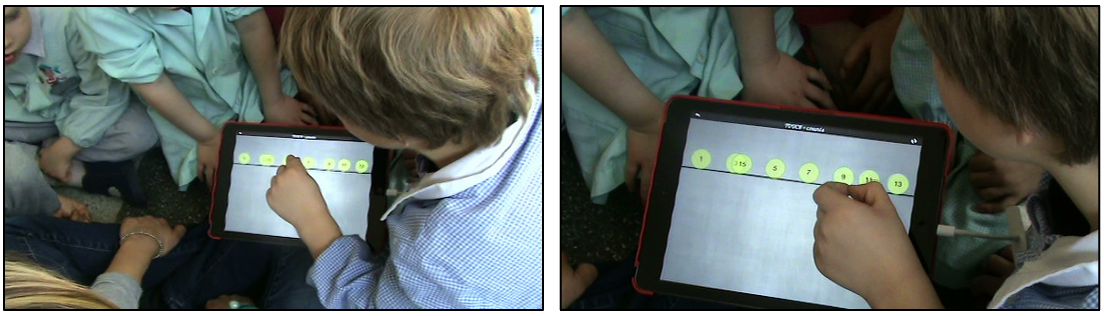


Figura 13. Il movimento di Giovanni che estrae la sequenza dei pari

È questo un momento molto interessante, poiché si tratta della prima volta in cui la sequenza dei pari è attualizzata dalla voce di un bambino anziché da quella dell'iPad. I pari emergono così dal movimento di pollice e indice pizzicati, come i soli che completano gli spazi tra un numero dispari e l'altro. È come se Giovanni li stesse estraendo dagli spazi vuoti, con strappi talvolta decisi nell'alzarsi dalla superficie del tablet. Ecco che l'assenza, la mancanza, diviene nello stesso tempo presenza: inizia a essere percepito anche ciò che non si vede.
L'immaginazione smuove il processo di pensiero e inizia a sostenere l'incontro virtuale con i numeri naturali, che sono esauriti dalle sequenze dei pari e dei dispari. Giovanni si ferma una volta arrivato al 13, che si trova vicino al lato destro dello schermo, nonostante la presenza anche del numero 15. La ricercatrice fa notare che per lei c'era ancora un numero da prendere in considerazione tra quelli che non si vedono e cerca di coinvolgere nel dialogo Gianluca (che siede a fianco di Giovanni), il quale però ricomincia dal 2. Interviene allora di nuovo Giovanni marcando lo spazio accanto al 13: "Bisogna anche fare il quattordici, il quindici, il sedici, il diciassette, il diciotto, il diciannove". Qualcuno dice flebilmente "Il venti".
La ricercatrice fa tesoro del conteggio e lo utilizza per proporre ai bambini una nuova sfida: chiede se, potendo andare sempre avanti come fatto finora, il venti si troverebbe sopra la mensola, tornando a porre enfasi su ciò che caratterizza i numeri sulla mensola. Percependo che il ragionamento sul 20 è complesso per i bambini, tuttavia, trasforma la richiesta in: "Possiamo ottenere sopra quelli che abbiamo visto che andavano giù... invece di quelli che ci sono qua?". Amira, la seconda bambina del gruppo, si mostra reattiva alla domanda e a gran voce risponde di sì.
Da questo momento il ragionamento è centrato sul modo di ottenere i nuovi numeri sopra la mensola. Matteo suggerisce la possibilità di "girare il tablet" (come se i numeri sulla mensola potessero cadere a causa di questa rotazione), ma la ricercatrice spiega che quel movimento non avrebbe alcun effetto sulla configurazione di numeri che appare sulla mensola (per la conseguente rotazione dello schermo dell'iPad). Ai bambini è richiesto di immaginare una

diversa configurazione di numeri da lasciare sulla mensola, seppur questi siano gli stessi che prima erano caduti. La vecchia configurazione è così cancellata per lasciare spazio ad altre possibilità di pensiero e non generare conflitto con la nuova problematica, che è riformulata ancora una volta, esplicitando i numeri che andavano giù: "Possiamo vedere qua sopra, due, quattro, sei... (*indica tre posizioni distinte sulla mensola*)?". Matteo, Giovanni e altri in coro rispondono di sì, e subito arriva una richiesta di spiegazione.
Dopo un po' di confusione tra i bambini, Matteo propone la sua strategia: “Prima schiacciamo sotto [la mensola] e poi sopra” e, su invito della ricercatrice, prova ad attuarla ma, dopo aver toccato sotto la mensola, facendo cadere l’1, non riesce a continuare per l'intromissione di Giovanni, il quale tocca di nuovo sotto la mensola e quindi sopra, facendo cadere 2 e lasciando invece visibile 3. Gli altri bambini esclamano a gran voce "Tre" e tutti si accordano sul fatto che sia necessario riprovare.
La ricercatrice esplicita ancora una volta che il primo numero che vuole vedere sopra è il 2 e invita Sarah, che propone di fare "prima sotto", a fare una prova. Il 2 rimane sopra la mensola con un tocco sotto-sopra e Sarah, stimolata dalle domande: "Poi, se voglio vedere il quattro?", "Posso andare avanti sempre così?", genera i primi tre numeri pari. Il suo modo di muoversi è lento e accurato, con la mano destra a dita aperte e tese per agevolare la ritmicità della gestualità ripetuta tre volte. Giovanni accelera il ritmo ("Poi il sette"), toccando, prima di Sarah, con il dito indice della sua mano sinistra sotto-sopra la mensola (Figura 14a), da cui si origina l'8. Infine, la mano di Sarah riprende il suo posto, scalzando la mano di Giovanni (Figura 14b), e con un ulteriore tocco aggiunge anche il 10.
I bambini sono immersi nell'incontro con i nuovi numeri: è come se Sarah e Giovanni si unissero, coordinati, in una nuova coreografia che attualizza sulla mensola i primi 5 numeri pari.

a b

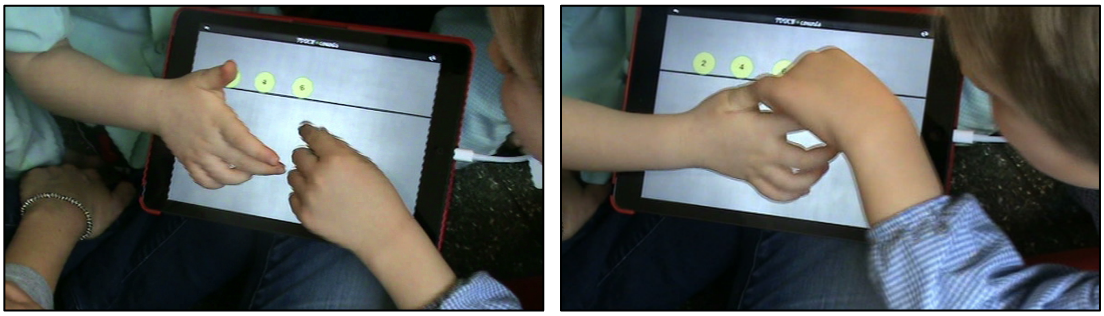


Figura 14. I tocchi di Sarah e Giovanni nella creazione dei primi cinque numeri pari

Toccando per sbaglio lo schermo, Giovanni genera il numero 11 sopra la mensola. Ciò porta a cancellare la configurazione e a produrne una nuova, nella quale la ricercatrice dispone solo i primi tre numeri pari sulla mensola, in modo che siano ben visibili, e chiede: "Come mai vedo solo quei numeri lì?" (Figura 15a). Questa volta è Gianluca a rispondere: "Perché te hai schiacchiato un po' di meno".
Il dialogo si apre così alla possibilità di andare avanti nella sequenza, con i bambini attirati dalla configurazione sulla mensola, e si sviluppa come segue (la legenda introdotta sopra continua a fornire le convenzioni di lettura; qui richiamiamo i simboli: **^** = tocco sopra la mensola; **_** = tocco sotto la mensola, e ricordiamo che a sinistra compaiono movimento del corpo e azioni dei partecipanti, a destra le parti udibili del video, dalla voce dei singoli a quella dell'iPad; durata del video: 03:13,18).

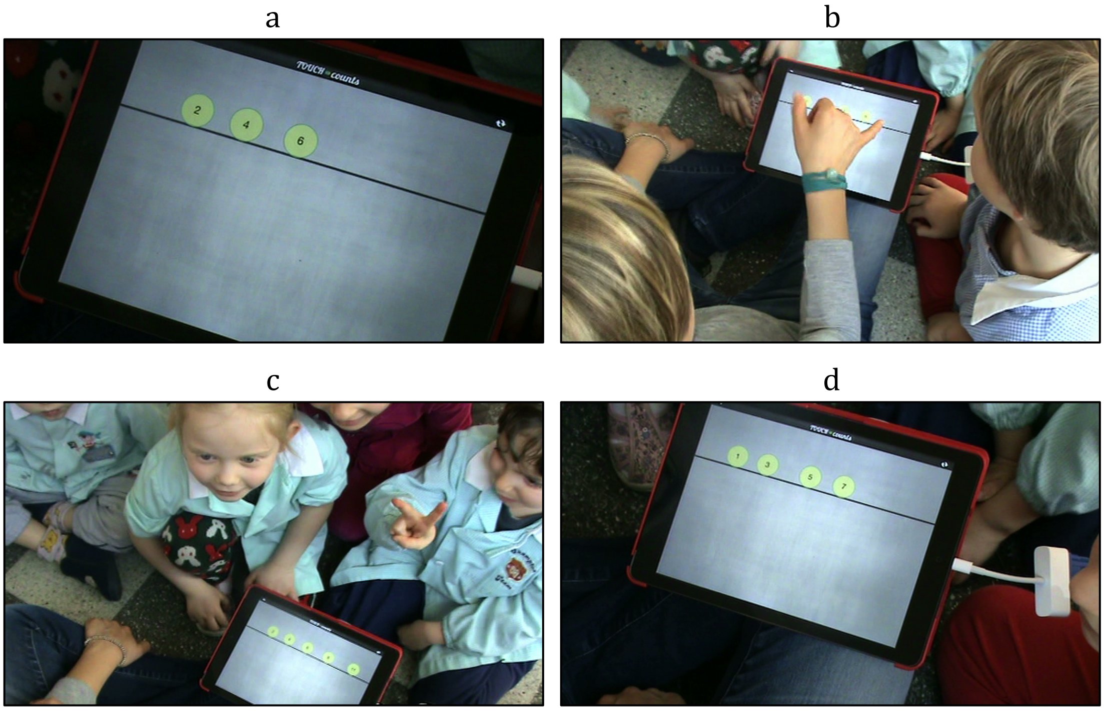


Figura 15. (a-b) Il lavoro con i numeri pari; (c) il gesto di Gianluca; (d) i primi quattro dispari

[I bambini si avvicinano allo schermo, guardano i numeri presenti]	R: *Posso, se faccio la stessa cosa che numero vedrò sopra?*
	Amira: *Un altro*
[R indica lo spazio sopra la mensola dopo il 6 e invita Giovanni, silente, a intervenire]	R: *Dopo questi, un altro, quale? Che dici, Giovanni?*
	Matteo: *Il sette o l'otto*
[R indica lo schermo con enfasi del gesto]	R: *Se faccio la stessa cosa*
	Matteo: *Il sette!*
[con l'indice della mano destra, R scorre avanti e indietro sopra i numeri presenti, poi salta nell'aria da sotto a sopra]	R: *Sopra vedo il sette, se tocco una volta sotto e una sopra?*
	Giovanni: *No, l'otto*
[R annuisce]	R: *L'otto. Lo faccio*
[R _ , ^ , spostandosi verso destra, e crea 8 sulla mensola]	TC pronuncia: Sette, otto
[R guarda Giovanni, poi altri bambini, e scorre i quattro numeri presenti]	R: *Vero. Se lo rifaccio un'altra volta, che altro numero vedrò sopra?*
[Giovanni, con il solito gesto di indice e pollice della mano sinistra pizzicati, subito cambiato nel medesimo gesto con la mano destra, indica per due volte una posizione al di sotto della mensola. Quindi, passa a indicare l'8 e infine lo spazio tra 7 e 8 sulla mensola]	Giovanni: *Perché qua perde, perché qua perde un numero, che è il sette, e poi qua arriva l'otto. E quindi ne salta uno*

[R indica 8 e con un gesto in aria mima una sorta di salto verso di sé]	R: *Ho capito. Possiamo mettere quello che viene dopo l'otto se ne saltiamo un altro?*
	Giovanni: *Sììì*
	R: *Come facciamo?*
[Giovanni indica, con l'indice della mano destra, una posizione sopra la mensola più a destra di 8]	Giovanni: *No, no devi mettere il dieci*
[R indica con il mignolo della mano destra sempre una posizione a destra di 8 e si gira verso Giovanni; Figura 15b]	R: *Eh, devi mettere il dieci. E, per mettere il dieci, cosa mi consigli di fare?*
[Giovanni, con le dita della mano sinistra pizzicate, mima due salti al di sotto della mensola e uno al di sopra]	Giovanni: *Toccare due volte qua e una volta qua*
[R indica la parte centrale dello schermo sotto la mensola, poi sopra]	R: *Due volte qua e una qua?*
[Giovanni ripete il medesimo gesto appena fatto, ma più vicino a sé]	Giovanni: *No, due volte qua e una qua*
	R: *Prova!*
[Giovanni **_** , **_** , **^** , con i tre tocchi in linea l'uno con l'altro, e crea 11 sopra la mensola, mentre 9 e 10 scompaiono]	TC pronuncia: Nove, dieci, undici
	Matteo: *Il dieci è sceso*
	R: *Come mai è venuto l'undici invece del dieci?*
[Sarah, sorridente, risponde e Gianluca, silente, indica 2 nell'aria con due dita aperte verso la ricercatrice; Figura 15c]	Sarah: *Perché ha schiacciato due volte!*
	R: *E invece cosa avrebbe dovuto fare?*
	Giovanni: *Una*
	Sarah: *Una*
	R: *Dove?*
	Gianluca: *Una*
[Giovanni indica un punto al di sotto della mensola e subito uno al di sopra]	Giovanni: *Una qua e una qua*
[R cancella la configurazione a schermo per produrne una nuova. I bambini sorridono e si avvicinano all'iPad]	R: *Ho capito. Allora, rifacciamo, difficilissimo!*
[R **^** (*pausa*) , **_** , **^** , **_** , **^** , e crea i numeri dispari fino a 7 sulla mensola; Figura 15d]	TC: Uno
	Matteo: *Uno*
	TC: Due, tre, quattro, cinque, sei,

	sette
[R scorre avanti e indietro con l'indice della mano destra i quattro numeri presenti a schermo]	R: *Questo, è simile a quello che ho fatto prima?*
	BB: *Sìì*
	R: *Sì, come, o perché?*
[Giovanni con il gesto pizzicato indica 1, poi 3 e si ferma a pensare]	Giovanni: *Perché tu hai fatto uno, due... no, hai fatto, hmm, uno, tre, poi hai fatto...*
	Matteo: *Cinque*
	Giovanni: *Cinque*
[R saltella con l'indice destro sopra i numeri dispari presenti a schermo]	R: *Ma non avevo due, quattro, sei, otto?*
	BB: *Sì*
	R: *Qua, cosa è successo? Come mai vedo solo uno, tre, cinque, sette? Come mai?*
	Giovanni: *Perché hai schiacciato...*
	R: *Quelli che mancano?*
	Giovanni: *Perché hai schiacciato prima due*
	R: *Perché ho schiacciato prima due?*
[Giovanni si muove sopra lo schermo, e prima indica una posizione al di sotto della mensola, poi, con due dita aperte, i quattro numeri sopra la mensola; Figura 16. A questo punto, indica di nuovo una posizione al di sotto della mensola (il brusio presente in aula non permette di sentire in modo chiaro le sue parole)]	Giovanni: *Due, qua, e poi là... e invece noi avevamo schiacciato prima...*
[R saltella con l'indice della mano destra da sopra a sotto la mensola, quindi scorre avanti e indietro sui quattro numeri a schermo]	R: *Ma, se rifaccio la stessa cosa adesso, cioè tocco sotto e poi sopra, che numero vedrò dopo, qua sopra?*

Dopo una pausa di circa 4 secondi, con i bambini che guardano l'iPad:

	Giovanni: *No..., nove*
	R: *Perché?*
[Giovanni con pollice e indice della mano sinistra pizzicati indica una	Giovanni: *Perché ne salta, se ne metti uno qua e uno qua, e quindi*

posizione al di sotto e una al di sopra della mensola, mimando in aria un tocco del tipo sotto-sopra; Figura 17. Quindi, indica nuovamente un punto nella regione sotto]	*deve venire nove, perché ne salta sempre uno*
	R: *Ah, allora fa la stessa cosa che facevamo prima con gli altri numeri?!?*
	Giovanni: *Sì*
[Giovanni pensa silenzioso]	R: *Solo che qua partiamo da uno e di là partivamo da dove? Prima partivamo da quale numero?*
[Sarah alza la testa e indica un 2 in aria con due dita]	Sarah: *Due!*
	R, Giovanni: *Da due*

Figura 16. Giovanni: "Due, qua... e poi là"

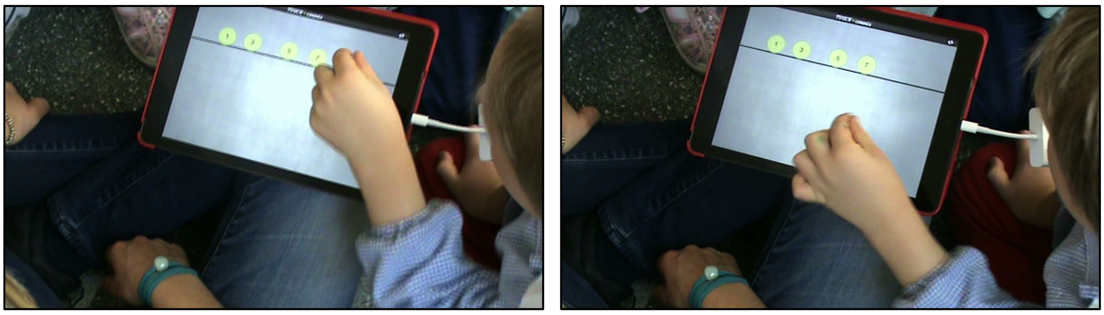


Figura 17. Giovanni: "e uno qua" e "ne salta sempre uno"

In questo dialogo piuttosto lungo, possiamo innanzitutto osservare come l'attività cambi ancora una volta, con la ricercatrice che pone nuove domande da cui possano emergere con sempre maggiore forza relazioni tra numeri pari e numeri dispari. Due sono gli aspetti che sembrano favorire per i bambini nuove possibilità percettive e argomentative sui numeri. Da un lato, c'è un uso più moderato della gestualità sopra/sotto la mensola: la tecnologia appare incidere più nei momenti di congettura e di verifica che non in momenti di esplorazione. Dall'altro lato, ci sono gli interventi contingenti della ricercatrice che, dopo aver introdotto la sequenza dei pari sullo schermo, la anima mediante un continuo movimento tra pari e dispari, e tra dispari e pari, che tende a centrare il ragionamento su aspetti relazionali e mediante cui i pari e i dispari sono costantemente riconfigurati.

La presenza sulla mensola dei primi tre pari rende concreto, non più solo immaginativo, il lavoro su e con essi (Figura 15a). Sebbene i bambini abbiano già incontrato i primi numeri pari, come quelli che potenzialmente avrebbero riempito gli spazi vuoti tra ogni dispari e il suo successivo, ora cambiano il punto di vista e la percezione della loro potenzialità.
La prima sfida posta ai bambini ("che numero vedrò sopra?") focalizza l'attività attorno alla possibilità di andare avanti con la sequenza dei numeri pari e sulla regolarità con cui ciò sia possibile ("Se faccio la stessa cosa", e più avanti: "Se lo rifaccio un'altra volta"). La creazione del numero 8 sulla mensola inizia ad attualizzare il fatto che la sequenza, come dice Giovanni, "perde un numero" (intendendo il sette), o meglio "ne salta uno". Per insistere sulla regolarità, un momento dopo la ricercatrice chiede il numero che se sia possibile "mettere quello che viene dopo l'otto se ne saltiamo un altro", il che sembra creare inizialmente confusione. In effetti, la ricercatrice punta a parlare del successivo numero pari, mentre per i bambini il numero che viene dopo l'8 è il 9. La confusione è resa evidente dalle parole di Giovanni, che ha capito che sulla mensola, dopo l'8, deve apparire il 10: "No, no devi mettere il dieci" (Figura 15b). La nuova domanda, che chiede come fare, induce l'immaginazione dell'inaspettato, nuovo, tocco del tipo due volte sotto-una volta sopra ("due volte qua e una volta qua") da parte di Giovanni e l'utilizzo di *TouchCounts* per creare il nuovo numero sopra la mensola. Matteo e Sarah, così come gli altri bambini, tra cui Gianluca (sempre silente fino a questo momento; Figura 15c), esprimono subito che i due tocchi sotto sono troppi per ottenere il 10, che così "è sceso" lasciando posto all'11, e che sarebbe bastato che il compagno avesse toccato "Una" sola volta sotto. Anche Giovanni si corregge e, nel movimento delle sue dita pizzicate, attualizza il tocco sotto-sopra che gli permette di immaginare 10 sulla mensola al posto di 11. Possiamo evidenziare come i numeri abbiano personalità per i bambini: l'utilizzo dell'articolo determinativo nel pronunciarli è indicativo: non parlano di 7, 8, 10, ma del 7, dell'8, del 10. Vista la configurazione inattesa, la ricercatrice coglie a questo punto il pretesto per ricominciare nuovamente l'attività ma, invece dei pari, presenta a schermo i primi quattro numeri dispari (Figura 15d). Il "difficilissimo!" e la creazione lenta della sequenza anticipano la sorpresa che il cambiamento genera nei bambini. Più che altro, la domanda della ricercatrice adesso introduce in modo esplicito la possibilità di una relazione tra le due sequenze: "è simile a quello che ho fatto prima?". In questo momento, tuttavia, è ancora complesso per i bambini cogliere che il punto di partenza, mantenendo il gesto di toccare da un lato/dall'altro della mensola, è quello che fa la differenza. Ciò che coglie subito l'attenzione dei bambini sono più i numeri che i movimenti (dicono "hai fatto uno, tre, ...", "cinque", non si focalizzano sulla regione/posizione di partenza né sul modo di muoversi della ricercatrice), del resto la visione dei dispari implica il dover tornare a pensare i pari come quei numeri "che mancano". Ma i due tipi di numeri sono intrecciati, l'uno non c'è senza l'altro (i dispari sono le assenze dei pari, i pari le assenze dei dispari) e Giovanni per primo sembra cogliere una diversità rispetto alla situazione precedente in cui vedevano 2, 4, 6, 8 a schermo. Questa diversità è espressa da come Giovanni si muove nella regione sotto la mensola e cattura un nuovo modo di toccare lo schermo, un nuovo modo di aver "schiacciato", che implica che i numeri che si vedono adesso non sono gli stessi che si vedevano prima (Figura 16). La domanda che segue fa emergere la regolarità dei dispari e pone l'accento sul ritmo del tocco sotto-sopra e, potenzialmente, sulla possibilità di avere sempre un numero dispari successivo ("se rifaccio la stessa cosa adesso, cioè tocco sotto e poi sopra, che numero vedrò dopo, qua sopra?"). La domanda è stimolante, poiché i bambini necessitano continuamente di coordinare se stessi con i numeri visibili e quelli non sulla mensola, nell'immaginare i tocchi che li possono generare. È a questo punto che il discorso torna a centrarsi sul movimento, facendo emergere l'essere simili delle due sequenze: "ne salta sempre uno" (Figura 17), e contemporaneamente l'essere diverse, per via del punto di partenza: "Due!", attualizzato da Sarah ancor prima che da Giovanni. Si svela così per i bambini la regolarità del saltare sempre

un numero naturale e l'importanza del considerare la coppia di tocchi sopra-sotto, sotto-sopra nel differenziare pari e dispari. L'attività si snoda attraverso una serie di configurazioni successive, sempre provvisorie, che sono il risultato dell'intreccio tra le mani, i simboli e la mensola. Sopra e sotto la linea di *TouchCounts*, i numeri si muovono, assieme alle dita, in modo coordinato con i bambini e la ricercatrice, i cui interventi generano nuovi punti di vista e incontri virtuali con aspetti ordinali e cardinali del numero, che permettono pian piano la scoperta di nuove relazioni e la realizzazione che ritmo e ordine sono tra loro intrecciati.

Non ci dilunghiamo ulteriormente sull'attività con *TouchCounts* per i bambini della classe, seppur siano emersi passaggi interessanti anche nel lavoro successivo, in cui l'applicazione è stata utilizzata da coppie di bambini di gruppi differenti. In generale, possiamo osservare che per tutti i bambini, le sequenze di pari e di dispari sono emerse dalle relazioni con la ritmicità dei tocchi sopra e sotto la mensola e dalla possibilità di aggiungere sempre nuovi numeri, così consolidando anche l'idea di un'infinità dei numeri.

3.4 Episodio 3: La Corsa al 20 e sue varianti

Appena l'immagine è diventata abbastanza netta nella mia mente, mi metto a svilupparla in una storia, o meglio, sono le immagini stesse che sviluppano le loro potenzialità implicite, il racconto che esse portano dentro di sé. Attorno a ogni immagine ne nascono delle altre, si forma un campo di analogie, di simmetrie, di contrapposizioni.

Italo Calvino

3.4.1 Premessa

L'ultimo esempio che discutiamo in questa relazione concerne un'attività svolta nel periodo tra ottobre e dicembre 2017 in più classi prime di scuola secondaria di secondo grado, come parte di un progetto di liceo matematico. Nello specifico, esaminiamo i dati provenienti da un intervento a medio termine, che rientra nel progetto come percorso di potenziamento. La classe coinvolta consta di 30 studenti del primo anno di liceo scientifico, che hanno scelto di approfondire alcuni argomenti con la loro docente di matematica in ore extracurricolari.
L'attività che prendiamo in considerazione prende il nome di "Lingua matematica" e ha come suoi obiettivi principali: rafforzare capacità di lettura e comprensione di un testo; avviare processi di argomentazione e dimostrazione; introdurre il concetto di teorema in matematica.
La prima fase dell'attività ruota attorno al gioco de 'La corsa a 20' (altrimenti detta 'Gioco del 20') e coinvolge gli studenti in momenti di gioco e di ricerca di strategie per la vittoria ("Qual è la strategia migliore? C'è una strategia "vincente"? Perché?"). La seconda fase impegna gli studenti nella produzione e comprensione di varianti del gioco. Infine, la terza fase prevede la formalizzazione di strategie mediante teoremi. Qui ci focalizziamo sul materiale dei primi quattro giorni, che riguardano la prima fase e, principalmente, la seconda.
Gli studenti lavorano suddivisi in gruppi e il primo giorno si formano cinque gruppi da 4 e due gruppi da 5. Quando si tratta di giocare alla corsa, in ciascun gruppo si sfidano due squadre, ma quando invece si tratta di formulare una strategia vincente e una spiegazione del perché è vincente è richiesta collaborazione con una sola strategia per gruppo, non una per squadra. Affinché tutti gli studenti siano partecipi dell'attività, sono pensati anche momenti di lavoro a coppie, in cui si gioca e si lavora ancora sull'esplicitazione della strategia vincente. Infine, non mancano discussioni collettive in cui le strategie sono messe a confronto e, eventualmente, le strategie sbagliate sono corrette (giorno 1).
Nella seconda fase dell'attività (che interessa già l'ultima parte del primo incontro) si assegna il nuovo compito di pensare a delle varianti del gioco, singole o di gruppo. Nel secondo incontro, i ragazzi giocano con le varianti proposte, mantenendo i gruppi iniziali (ogni gruppo gioca con una variante che non conosce). Una delle varianti più interessanti è quella proposta

da Matteo e riguarda il 'Gioco del 21'. Nella parte finale dell'incontro, il nuovo gioco è presentato a tutta la classe. Gli studenti sono invitati a pensare a una strategia, se esiste, e, volendo, a inviarla via email alla ricercatrice che segue la sperimentazione. Il terzo e il quarto giorno, infine, i gruppi di studenti incontrano la ricercatrice, che chiede loro di giocare a una variante (tra quelle mai viste dai componenti del gruppo).

3.4.2 'La corsa a 20'

Il gioco è presentato alla classe su carta, nella forma seguente (che richiama un gioco da tavolo):

Corsa a 20
(o anche detto Gioco del 20)

Contenuto:
1 tabellone, 1 pedina, 2 matite, 2 blocchetti per appunti.

Preparativi:
I giocatori si dividono in due squadre (anche un giocatore per squadra va bene).
Scegliere la squadra che inizia a giocare per prima con il gioco del pari e dispari o estrazione a sorte.

Scopo del Gioco:
Vince la squadra che arriva per prima sulla casella 20.

Svolgimento del gioco:
La squadra che inizia a giocare posiziona la pedina sul numero 1 o sul numero 2.
Ogni squadra, a turno, sposta la pedina di una o due caselle.

Un diagramma, che rappresenta il "tabellone" del gioco, segue appositamente in una seconda pagina (Figura 18).

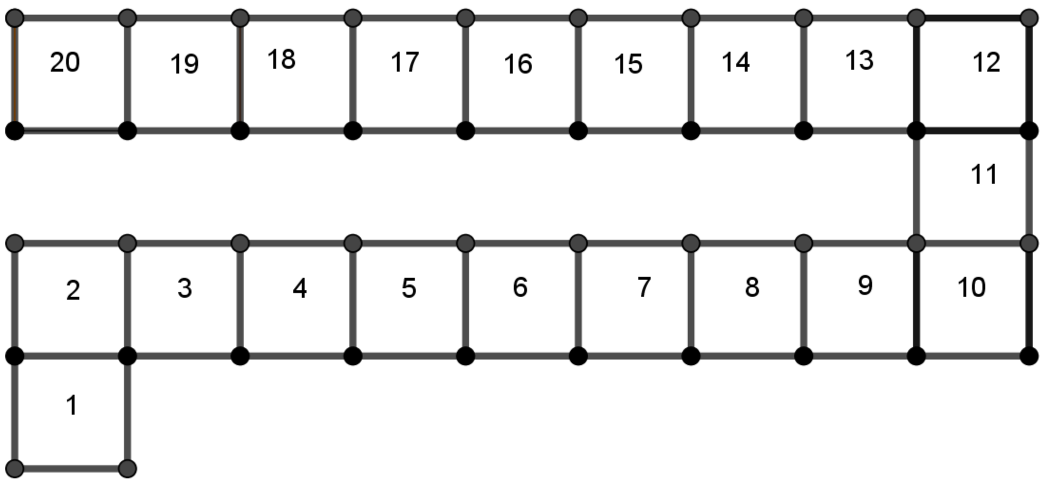


Figura 18. Il tabellone del 'Gioco del 20' fornito agli studenti

Prima di esaminare quanto è accaduto nella sperimentazione, dobbiamo prendere in considerazione la strategia da adottare per vincere la corsa al 20. Vediamo che le regole del

gioco permettono solo due tipi di mosse: avanzamento di 1 casella o avanzamento di 2 caselle (o equivalentemente di 1 o 2 numeri dal precedente).
Possiamo individuare nelle caselle 2, 5, 8, 11, 14, 17 delle "caselle vincenti": infatti, se uno dei giocatori arriva su una di queste caselle e, a ogni mossa successiva, avanza di un numero di caselle diverso dal numero di caselle di cui è avanzato l'avversario, allora arriva sulla casella 20. In pratica, partendo dal presupposto che i giocatori siano esperti (ossia, buoni giocatori), possiamo dire che la strategia vincente esiste unica per il primo giocatore, che inizierà con la prima mossa dalla casella 2 e poi procederà in modo che il risultato della somma di ogni coppia di mosse successive (dell'avversario e sua) sia sempre pari a 3 caselle. Notiamo infine che la matematica del gioco implica le classi di resto, per cui i numeri k che individuano caselle che vincono certamente soddisfano tutti la relazione:

$$k \equiv 20 (mod 3).$$

Vale a dire: k e 20 danno lo stesso resto quando sono divisi per 3, ovvero il resto della divisione di k per 3 è il resto della divisione di 20 per 3 (che è 2); quindi, in conclusione, esiste un numero naturale $h \geq 0$ per cui $k = 3h+2$.
Alla luce di questi assunti, il secondo giocatore può vincere il gioco solo nel remoto caso in cui sbagli il primo. Per lui, dunque, la strategia vincente non esiste, esiste la possibilità di errore dell'avversario. Questo ragionamento esclude le innumerevoli altre possibilità che si possono verificare in situazioni in cui uno qualunque dei due giocatori si distragga, pur trovandosi 'in vantaggio', nel senso appena discusso.

3.4.3 Varianti: 'Il gioco del 21' e 'THE NEW 20 GAME'

Durante lo svolgimento dell'attività, sono parsi piuttosto significativi i momenti in cui gli studenti hanno lavorato sulla ricerca di varianti del gioco e con varianti per loro sconosciute (perché pensate da altri). In particolare, vogliamo porre attenzione ad alcuni dei nuovi giochi proposti dagli studenti, agli eventuali diagrammi che li accompagnano e al modo in cui una variante, cambiando le regole del gioco e stabilendo un nuovo obiettivo, possa favorire processi immaginativi che sostengono le strategie da adottare, in fase di gioco o in fase di creazione del gioco.
La prima variante che discutiamo è quella denominata 'Il gioco del 21' ed è stata proposta da Matteo con le regole e il tabellone seguenti.

Il gioco del 21

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12
13	14	15
16	17	18
19	20	21

Regole
I giocatori devono riuscire a raggiungere la casella 21 spostando la pedina di due o tre caselle.
Materiale:
La tabella delle 21 caselle, una pedina e due giocatori

Nel file dove Matteo inserisce il gioco, ad anticipare il tabellone e le regole, troviamo scritto: "Nel gioco del 21 le caselle vincenti sono rappresentate dalle caselle 6; 11 e 16.
Per poter seguire una strategia sicura e vincente è tuttavia necessario partire per secondi e muoversi di 3 caselle dopo che l'avversario ha scelto di partire dalla casella 3.
Muovendoci dello stesso numero di caselle dell'avversario uno dei due giocatori arriverà comunque su una delle caselle "vincenti". Se però si mantiene lo stesso procedimento per l'intero corso della partita si arriverà in qualsiasi caso sulla casella numero 20, dalla quale per qualsiasi giocatore è impossibile vincere, potendoci muovere solo di 2 o 3 caselle, trovandoci così in una situazione di pareggio."
Matteo sembra non tenere qui in conto il caso in cui l'avversario parta dalla casella 2 anziché dalla 3. Inoltre, non dice che cosa è necessario fare una volta raggiunta la casella 6. Pur non essendo completa la sua spiegazione, fa comunque notare la peculiarità della casella 20 che corrisponderebbe a "una situazione di pareggio". Ecco la novità del gioco, attualizzata dalle parole scritte nero su bianco. Nel corpo dell'email inviata alla ricercatrice, Matteo aggiunge: "L'idea di questo gioco mi è venuta perché ho pensato se si potesse non solo vincere o perdere ma anche di poter pareggiare".
Da queste poche parole, possiamo cogliere l'importanza per Matteo, nel pensare a un nuovo gioco, di immaginare non solo la possibilità di vittoria ma anche quella di un eventuale pareggio tra i due giocatori. Il pensiero sulle strategie è messo in movimento dalla potenzialità del concetto di numero e si apre alle nuove mosse e al nuovo obiettivo (la novità è espressa anche dalla scelta del tabellone associato al gioco, nel quale i numeri sono disposti ordinatamente in righe da 3). Matteo esplicita meglio la strategia da seguire nel gioco, scrivendo (con questa esatta grafica):
"La strategia consiste nel mettere la pedina nella casella del numero diverso da quello che l'avversario ha detto precedentemente per esempio:
l'avversario muove di due caselle e consecutivamente si muove di tre,
e infine arrivato l'avversario nella casella 18 si muove di 3 caselle così arrivando alla casella 21".
Essenzialmente, Matteo vuole dire che per vincere bisogna avanzare di 5 per ogni coppia di mosse successive, così che se "l'avversario muove di due caselle" l'altro giocatore "si muove di tre" e, una volta "arrivato l'avversario nella casella 18", l'altro giocatore "si muove di 3 caselle" e vince. Quindi, ogni volta che l'avversario dice 2, l'altro giocatore, per essere 'vincente' deve dire 3 e, ogni volta che l'avversario dice 3, deve dire 2. Osserviamo che Matteo utilizza nel suo linguaggio il verbo impersonale (si muove) per riferirsi al giocatore vincente, distinguendo il suo comportamento da quello dall'avversario (che nella sua esplicitazione della strategia è il giocatore perdente).
Dal momento che la somma di due mosse successive distinte è 5, le caselle vincenti sono, in questo caso, le caselle 6, 11 e 16, che soddisfano le relazioni:

$$21 \equiv 6(mod5), 21 \equiv 11(mod5), 21 \equiv 16(mod5).$$

Matteo ha dunque ragione, poiché trovandosi su una di queste tre caselle il fatto di avanzare di 5 ogni due mosse permette di cadere proprio sulla casella 21. Tuttavia, Matteo non prende in considerazione nella sua strategia il punto di partenza, che può essere 2 o 3. Il punto di

partenza è, come per la situazione della corsa a 20, determinante. Per il primo giocatore non è, infatti, conveniente scegliere di avanzare di 3 con la prima mossa, poiché al secondo giocatore basterebbe avanzare nuovamente di 3 per cadere sulla prima casella vincente (6). Dunque, se gioco per primo, la cosa da fare per evitare di perdere è avanzare di 2 caselle.
Dopo che la corsa a 21 è stata presentata a tutta la classe, proprio per questa sua peculiarità di introdurre la novità di una strategia per non perdere, altri studenti hanno inviato via email alla ricercatrice delle possibili soluzioni a questa variante. Ricordiamo che queste strategie potevano essere pensate individualmente o in gruppo. Ne elenchiamo a seguire alcune (sempre con la grafica originale), dalle quali emerge in modo evidente come il nuovo gioco abbia portato a una nuova dinamica di pensiero sulla strategia, che non commenteremo ulteriormente.

Flavia Per poter vincere devi raggiungere le caselle 6, 11 , 16. Invece per poter pareggiare devi arrivare alla casella 20.

Giada numeri vincenti: 6-11-16-21 in questo gioco possiamo adottare 2 strategie: la prima strategia è quella vincente: conquistare per primi le caselle 6, 11, 16 e dalla casella 16 in base a come muove l'avversario, si arriva alla casella 21 e si vince. La seconda strategia è quella per pareggiare, quindi non c'è nessun vincitore. Evitando di fare arrivare l'avversario alle caselle vincenti.

Leonardo e Matteo Strategia gioco 21 Per poter vincere bisogna puntare sulle seguenti caselle: 6 – 11 – 16, caselle che chiameremo “**Caselle Vincenti**” queste ti porteranno alla vittoria! Le caselle che bisogna evitare sono: 3 – 4 – 8 – 9 – 13 – 14 – 18 – 19, caselle che chiameremo “**Caselle Perdenti**” queste caselle sono assolutamente da evitare perché il tuo avversario potrebbe posizionarsi sulle caselle vincenti! Un consiglio per vincere è quello di cominciare dalla casella numero 2 onde evitare che l'avversario possa raggiungere la casella numero 6. Se non è più possibile raggiungere le “Caselle Vincenti” una buona strategia è quella di puntare sulle caselle: 7 – 12 – 17, caselle che chiameremo “**Caselle Semi vincenti**”; quest'ultime potranno portarti alla vittoria, ma in alcuni casi porteranno ad un numero maggiore di 21, il che corrisponderebbe a un pareggio, per questo abbiamo deciso di chiamarle “Semi vincenti”.

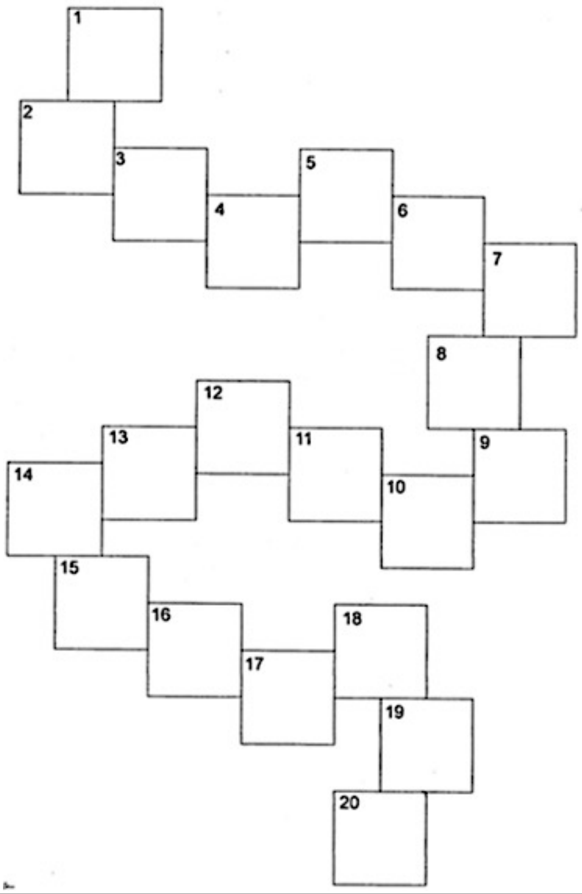
Alessandro, Lorenzo e Raffaele

Secondo noi, per vincere, è necessario iniziare a giocare per secondi e arrivare progressivamente sulle caselle 6, 11, 16 e 21. Questo perché sottraendo a 21 il numero massimo di caselle percorse in due turni, cioè 5, si otterranno i numeri 6, 11 e 16. Nell'elenco delle caselle vincenti non è incluso l'1 perché non è raggiungibile in alcun modo.

Della dinamicità di pensiero su giochi del tipo proposto è quindi, in questo momento, entrata a far parte l'impossibilità di avere la strategia vincente, poiché non è detto che in questo gioco sia sempre possibile avere un vincitore. Se cambiamo prospettiva, possiamo pensare questa impossibilità come generatrice di nuova possibilità: il pareggio, in cui rientrano le caselle "Semi vincenti" introdotte da Leonardo e Matteo.
Le due possibilità, di vittoria e di pareggio, che caratterizzano 'Il gioco del 21' catturano solo in parte il modo in cui gli studenti possono animare il concetto di numero in una tale attività. Un'ulteriore differenziazione è espressa da una seconda variante, piuttosto intrigante, che è stata chiamata 'The New 20 Game'. Si tratta di una versione modificata del gioco di partenza ed è stata pensata da quattro studenti: Ennio, Enrico, Giorgia e Rosario, con le regole e il tabellone mostrati sotto.

THE NEW 20 GAME

I giocatori possono avanzare di 1 o 2 caselle ma una volta a partita possono decidere di non avanzare o di avanzare di 3 caselle.
Vince chi arriva per primo a 20



Questo nuovo gioco del 20 cattura una prospettiva molto diversa dalla precedente rispetto alla produzione della variante. I quattro studenti, infatti, estendono la versione standard del gioco alla nuova possibilità per i due giocatori di decidere di restare fermi piuttosto che di fare un salto di 3 caselle (una sorta di jolly). I giocatori, una volta partiti, "possono" o meno usufruire di questa possibilità, non devono farlo necessariamente (il che trasformerebbe il gioco in un altro, ancora diverso). Hanno però a disposizione una sola volta per poterlo fare. Ecco che la gamma di possibilità dei giocatori nell'adottare una strategia per il gioco si fa più ampia. Vediamo in che modo: decidere di non avanzare equivale a 'portarsi sulla casella dell'avversario', mentre avanzare di 3 caselle permette di trovarsi in una situazione favorevole, ma la mossa può essere annullata dall'altro giocatore (nel caso non abbia ancora utilizzato il jolly). Avendo la possibilità di non muoversi o di saltare di tre caselle, le caselle vincenti cambiano rispetto a quelle del gioco del 20. In questa nuova situazione, può vincere chi inizia e si posiziona sulla casella 1 e sa la strategia per le mosse successive. Conoscere il gioco standard serve nel momento in cui l'avversario utilizza il jolly. Ragioniamo come segue. Supponiamo di essere arrivati sulla casella 16 (=20-(3+1)) e di non aver utilizzato il jolly: possiamo vincere. Ecco le possibilità:

- l'avversario si sposta di 1 casella e va a 17; noi ci spostiamo di 3 e vinciamo;
- l'avversario si sposta di 2 caselle e va a 18; noi ci spostiamo di 2 e vinciamo;
- l'avversario si sposta di 3 caselle e va a 19; noi ci spostiamo di 1 e vinciamo;
- l'avversario non si sposta, noi ci spostiamo sulla casella 17 e vinciamo (qui interviene il gioco tradizionale).

Quindi 16 è una casella vincente (se chi ci arriva non ha ancora sfruttato il jolly).
A seguire, se non abbiamo ancora utilizzato il jolly, la casella vincente precedente è 13, vale a dire: se arriviamo sulla casella 13 con il jolly ancora a nostra disposizione, possiamo vincere. Infatti, ecco le possibilità:

- l'avversario si sposta di 1 casella e va a 14; noi ci spostiamo di 2, andiamo a 16 e vinciamo;
- l'avversario si sposta di 2 caselle e va a 15; noi ci spostiamo di 1, andiamo a 16 e vinciamo;
- l'avversario si sposta di 3 caselle e va a 16; noi ci spostiamo di 1, andiamo a 17 e vinciamo (qui interviene il gioco tradizionale)
- l'avversario non si sposta, noi ci spostiamo sulla casella 14 e vinciamo (qui interviene il gioco tradizionale).

E così via, sono caselle vincenti 10, 7, 4, 1.
Sostanzialmente, dunque, il 'NEW 20 GAME' ridiventa la corsa a 20 nel momento in cui uno dei due giocatori utilizza il jolly. Se invece non si utilizza il jolly, le caselle vincenti sono le stesse del gioco del 20 meno una, riassumendo: 1, 4, 7, 10, 13, 16.
Il 'NEW 20 GAME', con queste possibilità, che sfruttano anche memoria della strategia della corsa a 20, risulta essere una variante in cui la sfida tra i giocatori si fa più avvincente. Anche il diagramma proposto per il tabellone del gioco è inaspettato, con la sua forma particolare, nella quale cogliamo la forza di quel movimento di pensiero che ha la capacità di rendere così dinamico il nuovo gioco.

3.4.4 Giochiamo al 'Gioco del 32'

Concludiamo le nostre riflessioni con un breve estratto di video, nel quale un gruppo di sei studenti gioca a nuove varianti. Gli studenti provengono da due gruppi originariamente formati da quattro componenti, poiché in occasione di quell'incontro (il quarto giorno della sperimentazione) due studenti, uno per gruppo, erano assenti. Nessuno dei sei studenti ha giocato a queste nuove varianti durante il secondo giorno (quando le varianti erano state date da provare nei gruppi). Il gruppo è composto da: Flavia M., Flavia P., Riccardo A., Riccardo L., Gaia e Giulio, e siede attorno a un tavolo nel quale è presente anche la ricercatrice. Matteo, l'inventore del gioco del 21, fa da osservatore. Nello specifico, la variante inizialmente proposta al gruppo è quella del 'Gioco del 32', nel quale: ogni giocatore si può "muovere solo in avanti di 1 o di 3 caselle" e lo scopo è "arrivare per primi al 32". È inoltre esplicitato per i preparativi di "decidere chi sarà il giocatore iniziale e assicurarsi di aver capito le regole del gioco". In questo caso, i giocatori sono rappresentati da due squadre (Figura 19):

- Squadra A: Gaia, Riccardo A., Riccardo L. (sul lato sinistro del tavolo)
- Squadra B: Flavia M., Flavia P., Giulio (sul lato destro del tavolo).

Agli studenti è consegnata la tabella con 32 caselle che è presentata in Figura 20. La ricercatrice introduce il gioco e chiede agli studenti di iniziare a giocare, avendo letto anche la parte sui preparativi. Gli studenti iniziano a confrontarsi e il dialogo che si instaura tra i due gruppi si sviluppa come segue (dove Flavia M. = Fla 1, Flavia P. = Fla 2, Riccardo A. = Richy 1, Riccardo L. = Richy 2; ricercartrice = R).

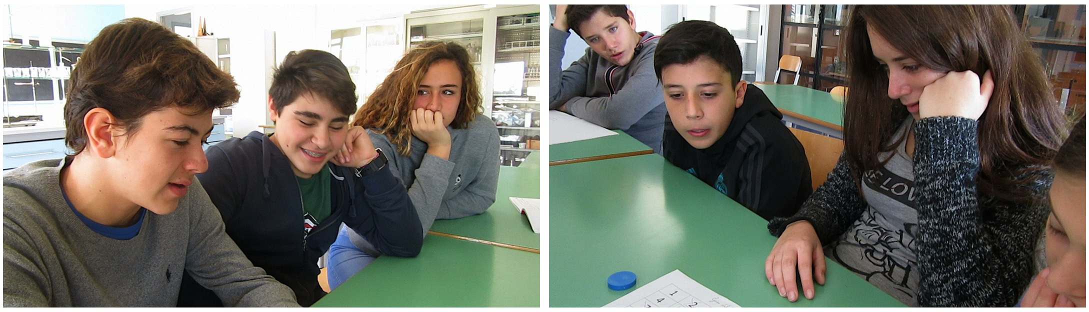


Figura 19. Squadra A, squadra B e Matteo (al fondo)

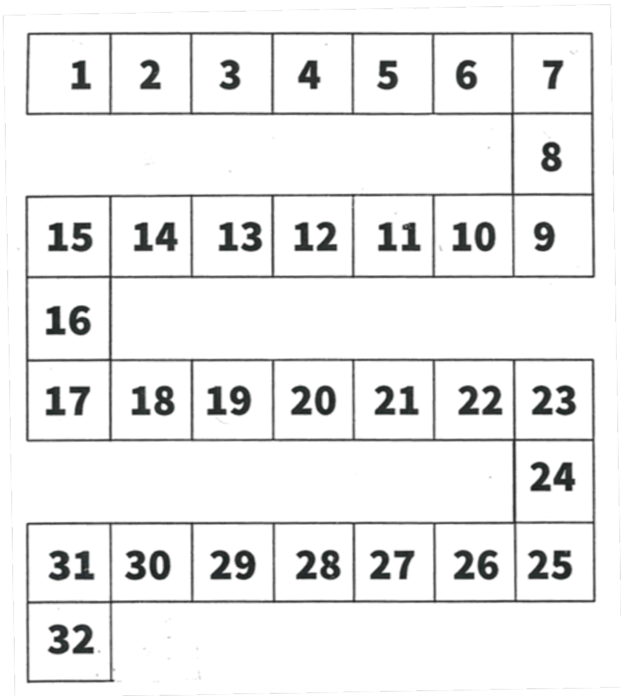


Figura 20. Il tabellone del 'Gioco del 32' fornito agli studenti

Giulio: *Incominciate voi, perché altrimenti perdiamo. Vince chi incomincia dopo, secondo me, perché secondo me la casella vincente è quattro. Se voi vi spostate di uno, noi ci spostiamo di tre e andiamo sul quattro, se voi vi spostate di tre noi ci spostiamo di uno e andiamo sul quattro, e vinciamo lo stesso, secondo me. Ho fatto il calcolo.*

R: *E che calcolo hai fatto?*

Fla 1: *Vince se capiti sulle caselle, sui multipli di quattro*

Giulio: *Infatti*

R: *Perché?*

Fla 1: *Perché uno più tre fa quattro*

Giulio: *Esatto*

R: *Ma c'è un'altra cosa, forse. Vediamo*

Giulio: *L'unica cosa che può succedere è che se noi ci spostiamo di tre, voi vi spostate pure di tre, e basta*

Fla 1: *Aspetta, sh, sh* (solleva lo sguardo in aria, muove gli occhi)*. No, niente. Basta*

Giulio: *Iniziate voi* (passa il foglio e la pedina all'altra squadra)

Gaia: *Ok, dai*

R: *Tanto non è…*

Gli studenti della squadra A ruotano il foglio più verso di loro

Giulio: *Iniziate ora voi*

Gaia: *Allora, noi sul tre* (posiziona la pedina)

Giulio: *E io sul quattro* (posiziona la pedina)

R: *Poi cosa accade?*

Fla 1: *No,no, aspettate. Cominciamo noi* (riprende la pedina)

Giulio: *Ma che…*

Fla 1: *Allora, sentite, noi abbiamo trovato la strategia per arrivare a trentadue, ok?*

Giulio: *E?*

Fla 1: *E vediamo se ce ne sono altre! Cominciamo noi per primi*

Giulio: *Vabbè, sicuro che ce ne sono altre*

Fla 1: *Cominciamo svantaggiati, aspetta* (muove la pedina sulla casella 3)

Gaia: *E allora andiamo sul quattro* (muove la pedina sulla casella 4)

Giulio: *E quindi hanno vinto*

Fla 1: *E allora? E tu che ne sai?*

R: *E arriva fino in fondo, faglielo vedere a Flavia*

Fla 1: *Appunto, voglio trovare qualcosa*

Giulio: *Cinque* (muove la pedina sulla casella 5)

Fla 1: *Aspetta*

Fla 2: *Sì ma, sia che vai sul cinque sia che vai sul sette*

Giulio: *Vanno sempre sull'otto!* (guarda Fla 1)

Fla 2: *Vanno sempre sull'otto* (guarda Fla 1)

Richy 2: *Abbiamo capito che se parti da uno l'avversario dice tre, se parti da tre l'avversario dice uno*

Fla 1: *E, e se fai sette?* (muove la pedina sulla casella 7)

Giulio: *Loro vanno sull'otto* (indica la casella 8)

Fla 2: *E sette, loro ti avanzano di uno*

Giulio: *Quindi, abbiamo già perso*

Fla 1: *Eh, e va bene, e allora?*

Richy 2: *Vinci se l'avversario sbaglia*

Gaia: *Dai, finiamo ormai*

Fla 1: *Dai!*

Fla 2: *Tocca a noi*

Giulio: *Noi andiamo sul nove o sull'undici, non cambia niente*

Fla 2: *E non cambia niente, è la stessa cosa*

Fla 1: *E va bene*

Gaia: *Quindi noi andiamo sul dodici*

Fla 2: *E, e poi noi… avanziamo sempre* (indica la casella 15)*… e voi arrivate sul sedici*

Giulio: (*concomitante a Fla 2*, *accelera il tono della voce*) *Sul sedici... e noi andiamo sul diciassette o sul diciannove, ma tanto voi andate sul venti* (Ricky 2 muove la pedina con due salti sulla casella 20)*; ventuno o ventitrè, tanto loro vanno sul ventiquattro* (Ricky 2 muove la pedina sulla casella 24)

Fla 2: *È la stessa cosa*

Giulio: *Venticinque o ventisette, loro vanno a ventotto* (Giulio sposta la pedina sulla casella 28, Fla 1 segue le mosse con lo sguardo) *e loro...*

Fla 2: *E poi, è la stessa cosa*

Giulio: *E poi vanno a trentadue* (Giulio muove la pedina sulla casella 32, Fla 1 si mostra rassegnata)*. Quindi, è quello che ho detto io. Quindi vince chi...* (osserva la tabella)

Gaia: *È troppo stupido questo gioco*

Richy 1: *Quindi lo chiamo...* (*soffuso*) *il gioco del quattro*

R: *Come lo chiamiamo?*

Richy 1: *Altro che gioco del trentadue, è il gioco del quattro!* (ridono tutti)

La variante del gioco del 32, che la ricercatrice propone al gruppo, è una delle meno aperte a livello di strategia, poiché il numero da raggiungere è multiplo della somma delle due possibili mosse (4=1+3). Tuttavia, il processo di pensiero collettivo che emerge dai movimenti attorno al tabellone di 32 caselle mostra alcuni elementi degni di nota. Vediamo che Giulio percepisce subito che per vincere basta iniziare per secondi ("chi incomincia dopo") e come Fla 1 metta in evidenza le caselle vincenti come quelle che contengono i multipli di 4 ("Perché uno più tre fa quattro"). L'invito della ricercatrice a valutare altri aspetti induce Fla 1 a voler iniziare il gioco per andare alla ricerca di altre strategie ("Vediamo se ce ne sono altre! Cominciamo noi per primi"), pur sapendo di iniziare "svantaggiati" e nonostante Giulio chieda alla squadra A di fare la prima mossa. Il gioco riparte così dall'inizio per muovere la pedina fino alla casella quattro con le prime due mosse e Giulio a concludere che "quindi hanno vinto", intendendo gli avversari. L'insistenza di Fla 1 spinge Giulio a fare la seconda mossa e a portare la pedina sulla casella cinque. L'intervento di Fla 2, a questo punto, rende mobile la situazione con entrambe le configurazioni possibili per la terza mossa ("sia che vai sul cinque sia che vai sul sette") per evidenziare in contemporanea anche ciò che non cambia, cioé il fatto che gli avversari hanno la possibilità di andare "sempre sull'otto". Ecco che allora non ha più importanza quale mossa è fatta per prima, perché gli avversari riescono sempre a finire sul successivo multiplo di 4 facendo la mossa complementare, come Giulio e Fla 2 esplicitano più volte con i loro interventi in sequenza ("non cambia niente", "è la stessa cosa", "sempre"). Da questo punto in poi gli studenti, tutti assieme, giocano immaginando le diverse possibilità di azione e i diversi comportamenti dei giocatori, attualizzando di volta in volta il salto della pedina sulla casella successiva come il risultato di due mosse consecutive. Peculiare è il modo in cui Giulio, da questo momento, accelera il tono della voce con cui fa presenti nel discorso tutte le possibilità ("e noi andiamo sul diciassette o sul diciannove, ma tanto voi andate sul venti", "ventuno o ventitrè, tanto loro vanno sul ventiquattro", "Venticinque o ventisette, loro vanno a ventotto"), rivolgendosi un po' ai compagni avversari, un po' alla compagna di squadra. Ed è così che il gioco del 32 diviene un gioco "stupido", che si potrebbe chiamare "gioco del 4", dal momento che il gioco può finire già con la prima coppia di mosse, qualunque sia la decisione iniziale.

Concludiamo la discussione di questo episodio, raccontando brevemente che cosa è accaduto a questo punto. La ricercatrice, per stimolare gli studenti, delusi dal gioco del 32, chiede loro di far finta che non ci siano le ultime due caselle e di giocare al gioco del 30, mantenendo fisse le possibilità per le mosse (1 o 3 caselle) e chiedendo che cosa cambia rispetto a prima. Gli studenti iniziano a giocare e presto scoprono che in questo caso "si può finire sempre pari". La ricercatrice sollecita ancora l'immaginazione, focalizzando l'attenzione su eventuali caselle migliori di altre. Il pensiero si muove collettivamente, con le dita spostate sul foglio al posto della pedina, verso le caselle vincenti andando a ritroso, partendo dal 30 e iniziando a togliere multipli di 4, per scoprire 2, 6, 10, 14, 18, 22 e 26 come caselle migliori. Dopo alcune battute, alla spiegazione del perché il secondo giocatore possa sempre vincere, rispondono soprattutto Giulio e Fla 2, trovando memoria di altri giochi: "perché comunque, in questo caso è come prima che, se dalle caselle o fai una mossa o fai l’altra, gli altri giocatori fanno l’inversa della tua e si vince, perché si arriva sulle caselle vincenti". Possiamo notare che il ragionamento vale in verità solo dopo la prima coppia di mosse. Al primo 'giro', infatti, la strategia prevede che il secondo giocatore replichi la mossa dell'avversario, cioè si sposti esattamente dello stesso numero di caselle sul tabellone. Così facendo, il secondo giocatore, dopo le prime due mosse, arriva su una casella vincente, sia essa la casella 2, raggiungibile con una coppia di salti di 1, o la casella 6, raggiungibile con una coppia di salti di 3. Solo quando è arrivato in una tra le due caselle vincenti, al secondo giocatore, per vincere, basta fare sempre la mossa "inversa", complementare, rispetto a quella dell'avversario. La dinamicità della variante implica quindi la possibilità di applicare strategie note solo da un certo punto (una certa casella) in poi. Osserviamo infine che le varianti che abbiamo discusso qui sono solo alcune tra innumerevoli che si potrebbero immaginare e creare. I nostri studenti non hanno ad esempio mai pensato di

aumentare il numero di mosse possibili né il numero di giocatori possibili. Queste possibilità aprirebbe il campo a nuovi esperimenti di pensiero e ancora a una maggiore variabilità e dinamicità nella creazione di nuovi giochi.
L'episodio che abbiamo discusso si differenzia rispetto al discorso fatto per gli episodi precedenti (cfr. §§ 3.2. e 3.3), che si è concentrato di più sul comportamento degli studenti con il materiale a loro disposizione. In questo caso, abbiamo cercato di focalizzare l'attenzione sulla forza creativa esercitata in classe dal gioco e dall'attività su di esso. La potenzialità della matematica muove gli studenti a immaginare nuove possibilità che si attualizzano nelle varianti del gioco del 20, per diventare nuove sfide, nuove strategie, nuove immersioni, nuove occasioni di creatività. Le proposte di varianti prodotte dagli studenti, i diagrammi, le regole che li accompagnano assorbono questa natura dinamica dell'attività, per liberarla nelle spiegazioni del perché una strategia è vincente e nella costruzione di una memoria collettiva della classe.

3.5 Epilogo

Gli episodi che abbiamo presentato non pretendono di essere esaustivi, li riteniamo tuttavia esemplificativi del carattere intensivo e generativo del pensiero matematico in contesti di classe, dove spesso la sfera virtuale e dinamica dell'attività matematica, nella quale corpo e movimento appaiono indissolubili, è trascurata più a favore di una visione assiomatica e astratta della disciplina.
Abbiamo provato non solo a prestare attenzione al ruolo del corpo e della percezione, ma anche a catturare il movimento nelle molteplici prospettive da cui lo abbiamo discusso. Nel fare ciò, abbiamo tracciato aspetti temporali e spaziali dell'attività materiale che fanno emergere lo stretto intreccio di corpo e movimento, investigato e catturato in particolare attraverso diagrammi, processi di tipo immaginativo e l'utilizzo di tecnologie. Abbiamo discusso la tensione produttiva tra movimenti e forme e le mutue relazioni tra movimenti e strutture, che riconfigurano costantemente l'attività degli studenti. Le linee della virtualità e della possibilità, come chiavi di lettura di tali tensioni e relazioni, ci hanno aiutato a osservare più profondamente e (di)svelare il lato creativo e animato del fare matematica e quanto esso possa aprire a nuove scoperte e linee di sviluppo.
Speriamo così anche di aver illustrato la potenza creatrice dei processi immaginativi, dei diagrammi e delle tecnologie nel favorire nuove possibilità di pensiero e incontri con la virtualità dei concetti matematici. Ci sembra dunque importante chiudere questa nostra discussione, sottolineando che le nostre argomentazioni ci invitano a:
- riconsiderare l'immaginazione nei processi di pensiero, in particolare, nell'attività matematica, e riconcettualizzarla in termini del suo carattere creativo e generativo;
- investigare (nuove) metodologie di ricerca che permettano di catturare il movimento nella sua essenza, non solo il movimento del corpo ("action research", "design-based research", "ethnography" vs. "diffractive methodology", "ecology-based enactivism", ecc...);
- ripensare la progettazione di compiti e di attività che possano invitare gli studenti a esperimenti di pensiero, dunque a incontri con la potenzialità ;
- riesaminare la dimensione onto-epistemologica della matematica come fonte generatrice anche di esperimenti di ricerca (non solo didattici).

Durante il seminario, discuteremo gli esempi sopra e dei nuovi episodi, che ci permettano di ampliare ancora la nostra prospettiva. Altri episodi coinvolgono, da un lato, anche studenti della scuola secondaria di primo grado e, dall'altro, studenti universitari. Prenderemo, in particolare, in considerazione un'attività già analizzata in passato e tenteremo di osservarla alla luce della prospettiva qui proposta, come un non-esempio, vale a dire esemplificativa di un momento in cui la pratica routinaria e rituale del lavoro matematico sembra impedire agli studenti l'incontro con la dimensione virtuale della matematica. Riteniamo interessante questo tipo di 'esperimento di ricerca' (e di pensiero) perché generatore di riflessioni sulla nostra disciplina (e sul ruolo da essa rivestito) e di eventuali implicazioni delle nostre argomentazioni per la pratica didattica.

Riferimenti bibliografici

Arzarello F. & Bartolini Bussi M.G. (1998). Italian trends in research in mathematical education: A National case study from an International perspective. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. New ICMI Studies Series (vol 4, pp. 243–262). Dordrecht: Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-94-011-5470-3_16

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Numero Especial*, 267–299.

Berthoz, A. (1997/1998). *Le sens du mouvement*. Paris: Odile Jacob. (Trad. It. di E. Dal Pra e A. Rodighiero: *Il senso del movimento*. Milano: McGraw-Hill).

Berthoz, A. (1997/1998). Le Cerveau et l'espace: II — Fondements cognitifs de la géométrie et expérience de l'espace. *Résumés annuels*, pp. 421–487.

Berthoz, A. (2011). *La semplessità*. Torino: Codice edizioni.

Berthoz, A. (2015). *La vicarianza: Il nostro cervello creatore di mondi*. Torino: Codice edizioni.

Burbules, N.C. (2006). Rethinking the virtual. In J. Weiss *et al.* (Eds.), *The International handbook of virtual learning environments* (pp. 37–58). Dordrecht: Springer Netherlands.

Châtelet, G. (1993/2000). *Les enjeux du mobile*. Paris: Seuil. (Engl. Transl. by R. Shore & M. Zagha: *Figuring Space: Philosophy, Mathematics, and Physics*. Dordrecht: Kluwer).

Châtelet, G. (1997). De la victoire de Platon et d'un certain techno- populisme hostile aux mathématiques. *Gazette des Mathématiciens, 74*, 13–17.

Châtelet, G. (1987). L'enchantement du virtuel. *Revue Chimères, 2*, 1- 20.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13. doi: 10.3102/0013189X032001009

Cutler, A. & MacKenzie, I. (2011). Bodies of learning. In L. Guillaume & J. Hughes (Eds.), *Deleuze and the body* (pp. 53–72). Edinburgh: Edinburgh University Press. doi: 10.3366/edinburgh/9780748638642.003.0003

de Freitas, E. (2016). Mathematics Education as a Matter of the Body. In M.A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory* (pp. 1-6). Singapore: Springer Nature Singapore Pte Ltd. doi: 10.1007/978-981-287-532-7_522-1

de Freitas, E. (2017). *Speculative mathematics*. European New Materialist Network, Unesco, Paris (June 2017).

de Freitas, E. & Ferrara, F. (2015). Movement, memory and mathematics: Henri Bergson and the ontology of learning. *Studies in Philosophy and Education, 34*(6), 565–585. doi: 10.1007/s11217-014-9455-y

de Freitas, E. & Ferrara, F. (2016). Matter, movement and memory. In N. Snaza, D. Sonu, S.E. Truman & Z. Zaliwska (Eds.), *Pedagogical matters: New materialisms and curriculum studies*, 43–57. New York: Peter Lang.

de Freitas, E. & Mccarthy, M.J. (2013). (Dis)orientation and spatial sense: Topological thinking in the middle grades. In Ubuz, B., Haser, Ç. & Mariotti, M.A. (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 615–624. Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2012). Diagram, gesture, agency: theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 80*(1-2), 133–152. doi: 10.1007/s10649-011-9364-8
de Freitas, E. & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom*. New York: Cambridge University Press.
de Freitas, E. & Sinclair, N. (2017). Concepts as generative devices. In. E. de Freitas, N. Sinclair & A. Coles (Eds.), *What is a mathematical concept?* (pp. 76–89). New York: Cambridge University Press.
de Freitas, E., Ferrara, F. & Ferrari, G. (2017). The coordinated movement of a learning assemblage: Secondary school students exploring Wiigraphing technology. In E. Faggiano, F. Ferrara & A. Montone (Eds.), *Innovation and Technology Enhancing Mathematics Education* (pp. 59–75). Basel: Springer International Publishing AG. doi: 10.1007/978-3-319-61488-5_4
Edwards, L., Ferrara, F. & Moore-Russo, D. (Eds.) (2014). *Emerging Perspectives on Gesture and Embodiment in Mathematics*. Charlotte: Information Age Publishing.
Ferrara, F. (2014). How multimodality works in mathematical activity: Young children graphing motion. *International Journal of Science and Mathematics Education, 12*(4), 917–939. doi: 10.1007/s10763-013-9438-4
Ferrara, F. & Ferrari, G. (2016). Traversing mathematical places. In C. Csíkos, A. Rausch & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 251-258. Szedeg, Hungary: PME.
Ferrara, F. & Ferrari, G. (2017). Agency and assemblage in pattern generalisation: A materialist approach to learning. *Educational Studies in Mathematics, 94*(1), 21-36. doi: 10.1007/s10649-016-9708-5
Ferrara, F. & Mammana, M.F. (2013). Close your eyes and see… An approach to spatial geometry. In Ubuz, B., Haser, Ç. & Mariotti, M.A. (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 625–634. Ankara, Turkey: Middle East Technical University.
Ferrara, F. & Maschietto, M. (2013a). Are mathematics students thinking as Kepler? Conics and mathematical machines. In Ubuz, B., Haser, Ç. & Mariotti, M.A. (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 635–644. Ankara, Turkey: Middle East Technical University.
Ferrara, F. & Maschietto, M. (2013b). University students at work with mathematical machines to trace conics. In Lindmeier, A.M. & Heinze, A. (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, 305–312. Kiel, Germany: PME.
Ferrara, F. & Mammana, M.F. (2014). Seeing in space is difficult: An approach to 3D geometry through a DGE. In Liljedahl, P., Nicol, C., Oesterle, S. & Allan, D. (Eds.), *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education, 3*, 57–64. Vancouver, Canada: PME.
Ferrara, F. & Ng, O.-L. (2015). A materialist conception of early algebraic thinking. In X. Sun, B. Kaur & J. Novotná (Eds.), *Proceedings of the Twenty-third ICMI Study: Primary Mathematics Study on Whole Numbers*, 550–558.
Ferrara, F. & Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics, 92*(1), 1-19. doi: 10.1007/s10649-015-9674-3
Gallese, V. & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology, 22*(3/4), 455–479. doi: 10.1080/02643290442000310

Hwang, S. & Roth, W.-M. (2011). *Scientific and mathematical bodies: The interface of culture and mind*. Rotterdam: Sense Publishers.
Islami, A. & Longo, G. (2018). Marriages of mathematics and physics: A challenge for biology. Progress in Biophysics and Molecular Biology. (forthcoming) (dal sito dell'autore)
Lagacé, F. (2015). Mathématiques et physique sous l'angle d'Aristote, Archimède et Châtelet. *For the Learning of Mathematics, 35*(1), 21–27.
Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From. How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*. New York: Basic Books.
Longo, G. (2002). Lo spazio, i fondamenti della matematica e la resistibile ascesa della metafora: il cervello è un calcolatore digitale. In M. Bresciani Califano (a cura di), *L'uomo e le macchine* (pp. 1-27). Firenze: Olschki. (dal sito dell'autore)
Longo, G. (2005). The cognitive foundations of mathematics: Human gestures in proofs and mathematical incompleteness of formalisms. In P. Grialou, G. Longo and M. Okada (Eds.), *Images and Reasoning* (pp. 105–134). Tokio: Keio University Press.
Longo, G. (2014). L'infinito matematico "in prospettiva" e l'ombra dei possibili. *Dianoia, 19*, 149–165. doi: 10.1473/dianoia0153
Longo, G. (2015). Conceptual analyses from a Grothendieckian Perspective. *Reflections on Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics* by F. Zalamea, Falmouth and New York: Urbanomic/Sequence Press, 2012. *Speculations* VI, 207–267.
Longo, G. (2016). Le conseguenze della filosofia. In R. Lanfredini e A. Peruzzi (a cura di), *A Plea for Balance in Philosophy* (vol. 2, pp. 17–44). Pisa: Edizioni ETS.
Mammana, M.F., Micale, B. & Pennisi, M. (2012). Analogy and dynamic geometry system used to introduce three-dimensional geometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43*, 818–830. doi: 10.1080/0020739X.2012.662286
McNeill, D. (2005). *Gesture and thought*. Chicago: University of Chicago Press.
Moore, C.L. & Yamamoto, K. (2012). Beyond Words: Movement, observation and analysis. New York: Routledge.
Nemirovsky, R. (2003). Three Conjectures concerning the Relationship between Body Activity and Understanding Mathematics. In: N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zilliox (eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, 103–135.
Nemirovsky, R. & Ferrara, F. (2009). Mathematical Imagination and Embodied Cognition. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 159–174. doi: 10.1007/s10649-008-9150-4
Poincaré, H. (1905). *Science and Hypothesis*. New York: The Science Press.
Radford, L. (2013). Sensuous cognition. In D. Martinovic, V. Freiman, & Z. Karadag (Eds.), *Visual mathematics and cyberlearning* (pp. 141–162). Dordrecht: Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-94-007-2321-4_6
Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 91–95. doi: 10.1007/s10649-008-9172-y
Rizzolatti, G., Fadiga, L., Fogassi, L. & Gallese, V. (1997). The space around us. *Science, 277*, 190–191.
Roth, W.M. (2015). Excess of graphical thinking: Movement, mathematics and flow. *For the Learning of Mathematics, 35*(1), 2–7.
Roth, W.M. (2016). Growing-making mathematics: a dynamic perspective on people, materials, and movement in classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 93*(1), 87–103. doi: 10.1007/s10649-016-9695-6
Rotman, B. (2012). Topology, algebra, diagrams. *Theory, Culture & Society, 29*(4/5), 247–260. doi: 10.1177/0263276412444472

Rotman, B. (2015*).* Mathematical Movement: Gesture. In S. Popat and N. Salazar Sutil (Eds.), *Digital Movement: Essays in Motion Technology and Performance*. London, UK: Palgrave-Macmillan.
Rush, F. (2008). *On architecture*. New York: Routledge.
Seitz, J. A. (2000). The bodily basis of thought. *New Ideas in Psychology, 18*(1), 23–40. doi:10.1016/S0732- 118X(99)00035-5
Sheets-Johnstone, M. (2009). Animation: the fundamental, essential, and properly descriptive concept. *Continental Philosophy Review, 42*(3), 375–400. doi: 10.1007/s11007-009-9109-x
Sheets-Johnstone, M. (2010). Body and movement: Basic Dynamic Principles. In D. Schmicking and S. Gallagher (Eds.), *Handbook of Phenomenology and Cognitive Science*, (pp. 217–234). Dordrecht: Springer Netherlands. doi: 10.1007/978-90-481-2646-0_12
Sheets-Johnstone, M. (2011). *The Primacy of Movement*. (2nd Ed.). Amsterdam: Benjamins.
Sheets-Johnstone, M. (2012). Movement and mirror neurons: A challenging and choice conversation. *Phenomenology and the Cognitive Sciences, 11*(3), 385–401. doi: 10.1007/s11097-011-9243-x
Sinclair, N., de Freitas, E. & Ferrara, F. (2013). Virtual encounters: The murky and furtive world of mathematical inventiveness. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 45*(2), 239–252. doi: 10.1007/s11858-012-0465-3
Steffe, L.P. & Thompson, P.W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A.E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267–307). Hillsdale: Erlbaum.
Stevenson, A. & Lindberg, C.A. (Eds.) (2012). *New Oxford American Dictionary* (3rd ed.). Oxford: Oxford University Press.
Streeck, J. (2013). Interaction and the living body. *Journal of Pragmatics, 46*(1), 69–90. doi: 10.1016/j.pragma.2012.10.010
Stylianides, A.J. & Stylianides, G.J. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: Classroom-based interventions in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 45*(3), 333–341. doi: 10.1007/s11858-013-0501-y
Swinyard, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *Journal of Mathematical Behavior, 30*(2), 93–114. doi: 10.1016/j.jmathb.2011.01.001
Varela, F.J., Thompson, E. & Rosch, E. (1991). *The Embodied Mind. Cognitive Science and Human Experience*. Cambridge: The MIT Press.
Vygotskij, L. (1934/1986). *Thought and language*. Cambridge: The MIT Press.
Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review, 9*(4), 625–636.
Zalamea, F. (2012). *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*. Falmouth and New York: Urbanomic/Sequence Press.