Università di Torino – Dipartimento di Matematica

Dottorato in Matematica – Ciclo XXIX

APPRENDERE ATTRAVERSO LA LOGICA DELL'INDAGINE:

attività di gioco-indagine all'interno di ambienti di geometria dinamica per potenziare il ragionamento geometrico degli studenti

Carlotta Soldano

Relatore: Prof. Ferdinando Arzarello

COMPETENZE LOGICO-ARGOMENTATIVE

Scuola primaria

"Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista degli altri."

Scuola secondaria di primo grado

"Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare I concetti di proprietà caratterizzante e di definizione).
Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni."

Scuola secondaria di secondo grado

"Saper sostenere una propria tesi e saper ascoltare e valutare criticamnete le argomentazioni altrui.
Acquisire l'abitudine a ragionare con rigore logico, ad identificare i problemi e a individuare possibili soluzioni. [...]"

“In concentrating their teaching on the so-called rules of inference logic instructors are merely training their students in how to maintain their logical virtue, not how to reason well.”

Hintikka 1999, p.3

“[…] all logical forms (with their characteristic properties) arise within the operation of inquiry and are concerned with control of inquiry so that it may yield warranted assertions.”

Dewey 1938, p.3-4

Obiettivo didattico

Sviluppare un programma educativo che coinvolga gli studenti in **attività di gioco e indagine (INQUIRY)** all'interno di ambienti di geometria dinamica (DGE) al fine di sviluppare le competenze logico-argomentative relativamente all'ambito geometrico.

Obiettivo di ricerca

Sviluppare un programma educativo in grado di colmare il salto **epistemologico** e **didattico** tra i processi argomentativi sviluppati in fase investigativa e i processi dimostrativi.

REVISIONE DELLA LETTERATURA

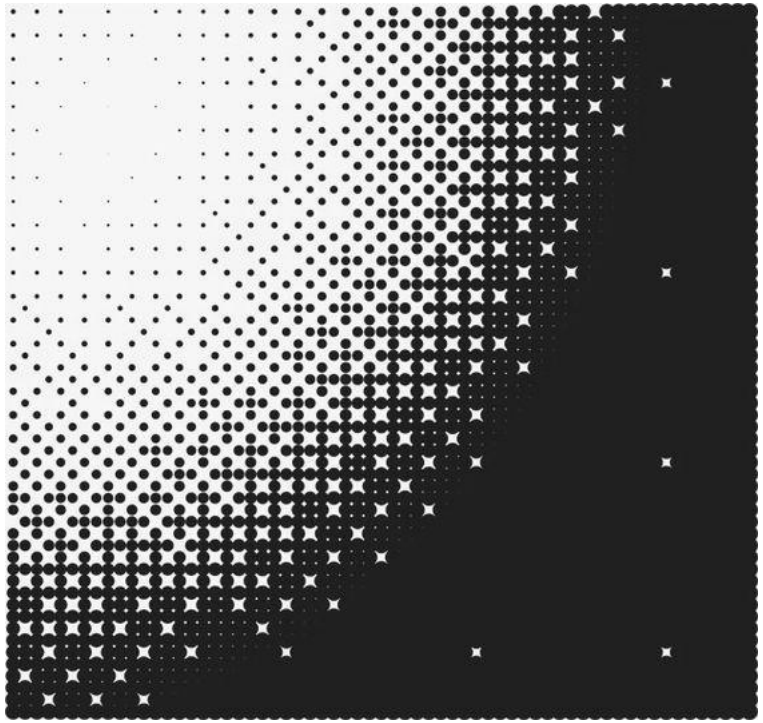
Didatticamente, questa ricerca prende parte al discorso riguardante la relazione tra attività di esplorazione e attività argomentative-dimostrative in matematica

Discontinuità (epistemica)

Fischbein 1982, Balacheff 1987, Duval 1991, Healy and Hoyles 1998, Reiss, Klieme and Heinze 2001, Dvora 2012

Continuità (cognitiva)

Boero Garuti and Mariotti 1996, Pedemonte 2007.



AMBIENTI DI GEOMETRIA DINAMICA

PRATICHE DI TRASCINAMENTO

FERDINANDO ARZARELLO
University of Torino

TRASCINAMENTO DI MANTENIMENTO

ANNA BACCAGLINI - FRANK
University of Pisa

TEORIA DELLA VARIAZIONE

FREDERICK LEUNG
University of Hong Kong

QUADRO TEORICO

LA LOGICA DELL'INDAGINE

Questa logica comprende sia la **logica della scoperta**, che caratterizza il momento esplorativo iniziale verso la formulazione della congettura, sia la **logica della giustificazione**, che caratterizza il successive momento esplorativo verso la refutazione o validazione della congettura formulata.

Hintikka dimostra che la logica dell'indagine è **coerente** con la logica (deduttiva) classica.

SILVER BLAZE

Ispettore: «C'è qualche altro punto su cui ritiene opportuno attirare la mia attenzione?»

Sherlock Holmes: « Sì, sullo strano incidente del cane, quella notte.»

Ispettore: « Ma, quella notte, il cane non ha fatto nulla.»

Sherlock Holmes: « Questo appunto è l'incidente curioso.»

1) C'era un cane che faceva la guardia quando il cavallo è scomparso?

   Sì

2) Il cane ha abbaiato quando il cavallo è stato rubato?

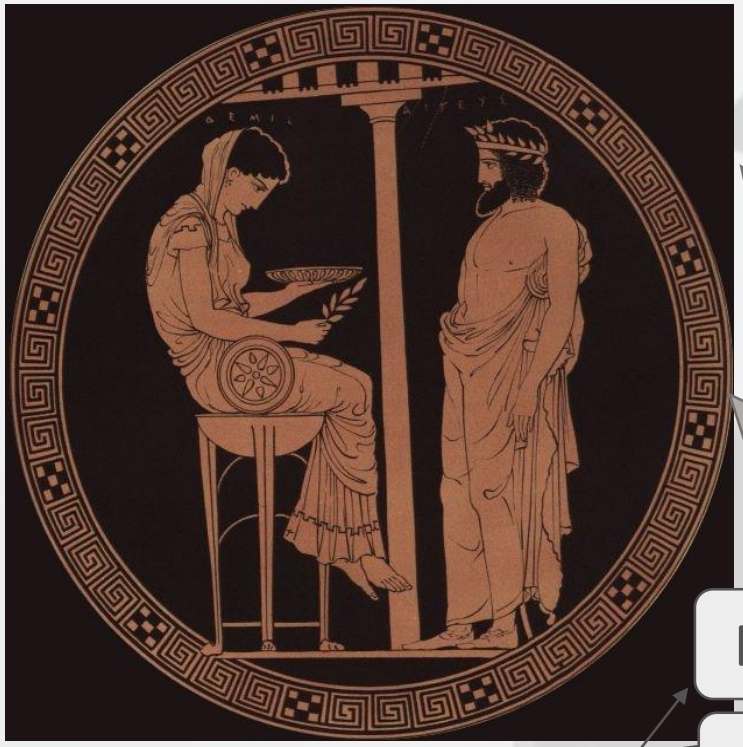
   No, non ha svegliato il garzone che dormiva nel solaio

3) A chi non abbaia un cane addestrato a fare la guardia nel cuore della notte?

   A qualcuno che conosce bene, il suo proprietario, l'allenatore del cavallo.

MODELLO INTERROGATIVO

DOMANDE STRATEGICHE



ORACOLO

1) C'era un cane c
guardia quando il cavallo è scomparso?

   Sì

2) Il cane ha abbaiato quando il cavallo è stato rubato?

   No, non ha svegliato il garzone che dormiva nel solaio

3) A chi non abbaia un cane addestrato a fare la guardia nel cuore della notte?

   A qualcuno che conosce bene, il suo proprietario, l'allenatore del cavallo.

Database computer

Testimoni

Conoscenze tacite

FORMA DEDUTTIVA

Ispettore: «C'è qualche altro punto su cui ritiene opportuno attirare la mia attenzione?»

Sherlock Holmes: « Sì, sullo strano incidente del cane, quella notte.»

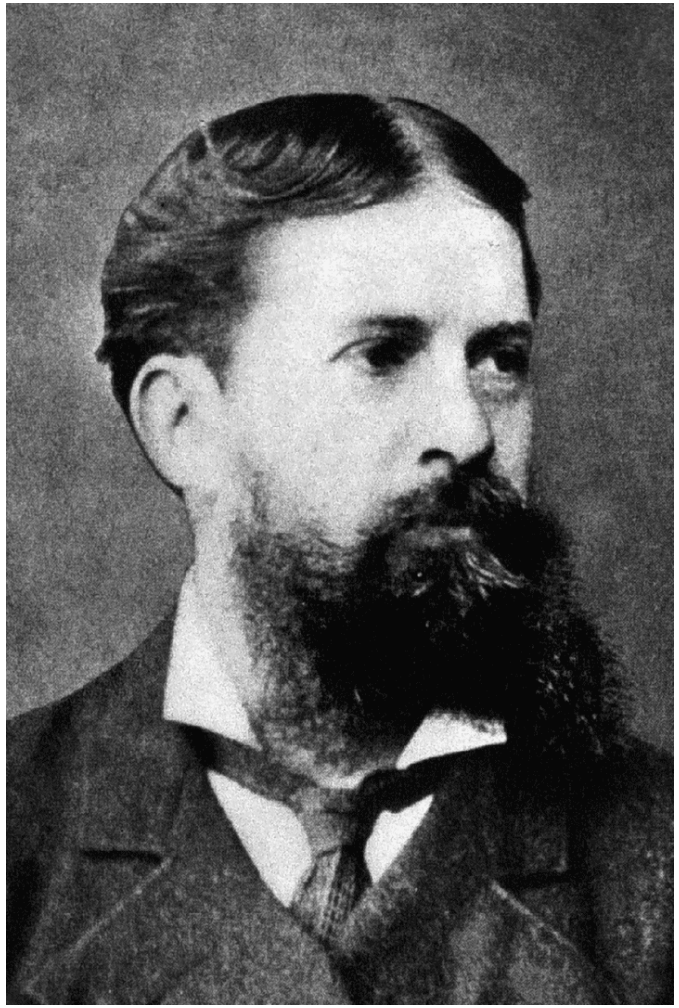
Ispettore: « Ma, quella notte, il cane non ha fatto nulla.»

Sherlock Holmes: « Questo appunto è l'incidente curioso.»

INTRODUZIONE DI UN NUOVO ELEMENTO

- C'era un cane che faceva la guardia nella stalla.
- Il cane non ha abbaiato quando il cavallo è stato rubato.
- Un cane addestrato a fare la guardia non abbaia solo al suo padrone.
- Quindi il ladro è stato il padrone.

ABDUZIONE



Peirce (CP 1.65) introduce il modello di ragionamento abduttivo:
"...abduction looks at facts and looks for a theory to explain them[…]"

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ C \rightarrow A \end{array}}{C}$$

Successivamente rifinisce il modello
"the process of forming an explanatory hypothesis"

Magnani (2001) descrive il ragionamento abduttivo:

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ C \\ ? \rightarrow ? \end{array}}{C \rightarrow A}$$

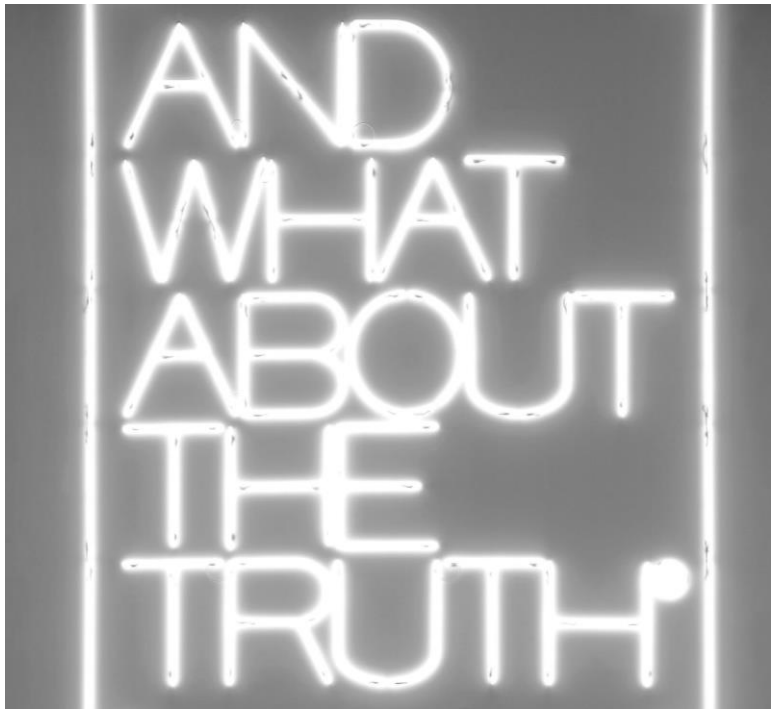
LA SEMANTICA DELLA TEORIA DEI GIOCHI(GTS)

La verità di un'affermazione viene stabilita attraverso un **gioco semantico** (ispirato ai semantic tableaux di Henkin), ossia un gioco tra un **verificatore** e un **falsificatore**.

$$\forall x \quad \exists y \quad S[x, y]$$

Un'affermazione è v
esiste una strategia
verificatore/falsifica
associato ad essa.

Questo processo permette di afferrare la **DIPENDENZA FUNZIONALE** tra x e y



M E T O D O L O G I A

METODOLOGIA DELLA RICERCA

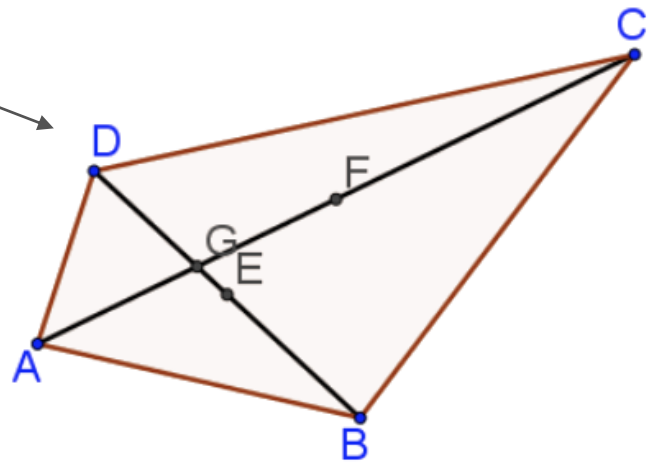
LA NOSTRA IPOTESI

Giochi semantici progettati all’interno di DGE a partire da teoremi di geometria euclidea possono influenzare positivamente i processi di indagine degli studenti

IL GIOCO DEL PARALLELOGRAMMA

VERIFICATORE

FALSIFICATORE

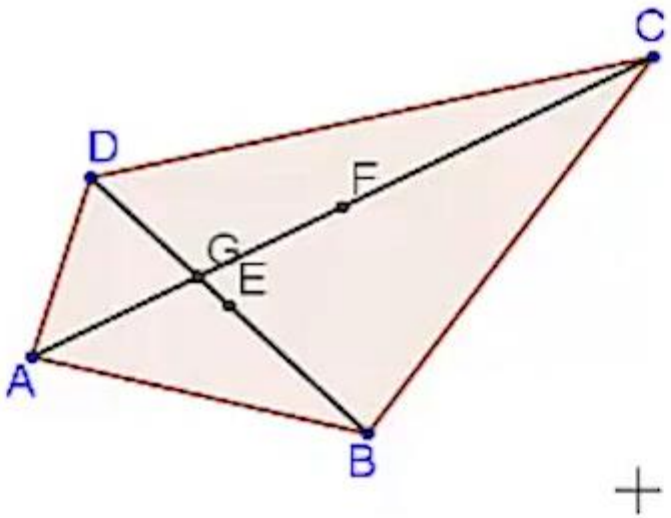


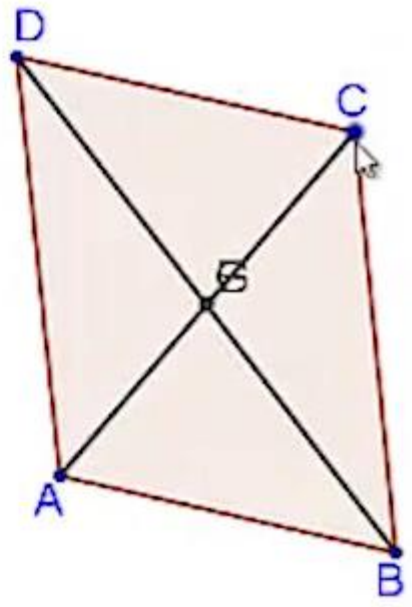
$\forall D \exists C \mid G = E = F$

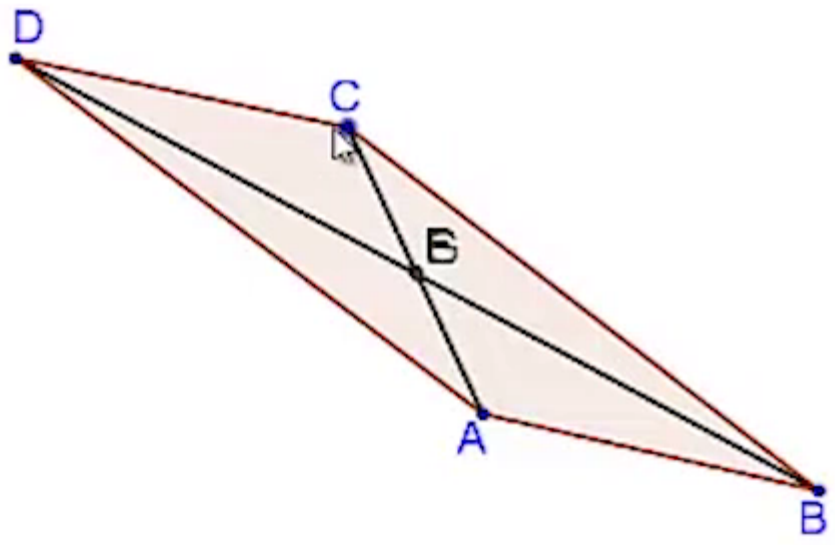
VERIFICATORE far coincidere E, F e G

FALSIFICATORE impedire al verificatore di far coincidere E, F e G

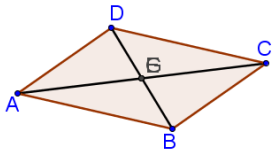
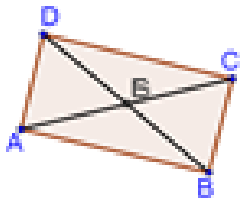
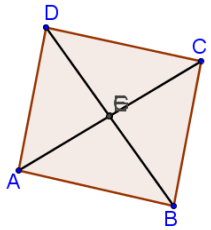
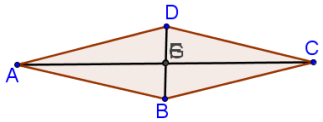
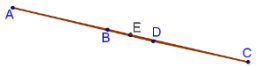
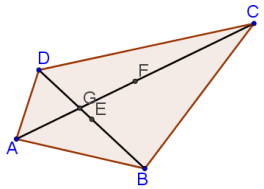
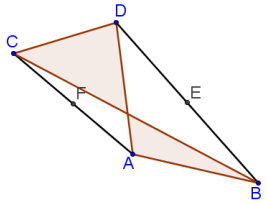
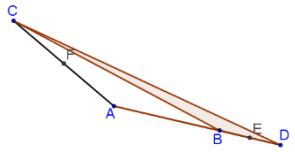
Esistono posizioni del punto D che impediscono al verificatore di raggiungere l'obiettivo?


C
D
F
G
E
A
B


D
C
S
A
B


D
C
E
A
B

SPAZIO DEGLI ESEMPI

	STANDARD	NON STANDARD
VERIFICATORE:		   
FALSIFICATORE:		 

LA SCHEDA-ATTIVITÀ

1. Qual è la natura geometrica dei punti E, F, G?
2. Come deve essere modificato il quadrilatero ABCD affinché il verificatore raggiunga l'obiettivo?
3. Quali affermazioni vere è possibile scoprire attraverso il gioco?

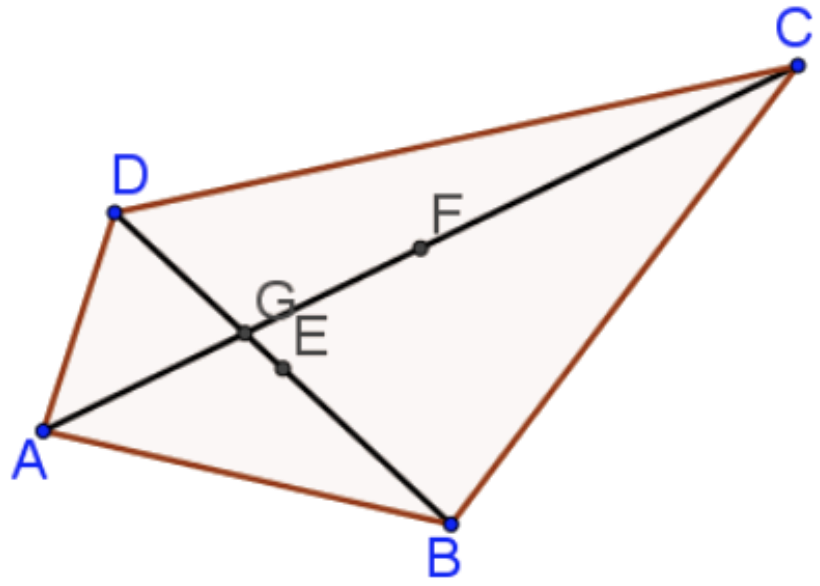
Le affermazioni devono essere del seguente tipo:

- Se **A** allora **B**, $A \rightarrow B$
- **A** se e solo se **B**, $A \leftrightarrow B$
- Se **B** allora **A**, $B \rightarrow A$

A: Le diagonali si tagliano vicendevolmente a metà

B: Il quadrilatero è un rombo/rettangolo/quadrato/parallelogramma/trapezio

LE FASI DELL'ATTIVITÀ



PLAYED-GAME:
studenti opponenti

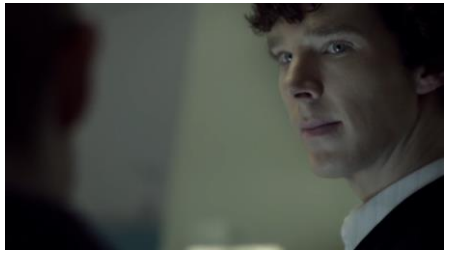
1) Qual è la **natura geometrica** dei punti **E**, **F**, **G**?
2) Come deve essere modificato il **quadrilatero ABCD** affinchè il verificatore raggiungs l'obiettivo?
3) Quali affermazioni vere è possibile scoprire attraverso il gioco?

REFLECTIVE-GAME:
studenti cooperativi

METODOLOGIA DIDATTICA

3 teaching-experiments

Presentazione della logica dell'indagine in classe



Attività gioco-indagine

Gruppi

Tablet/computer

GeoGebra

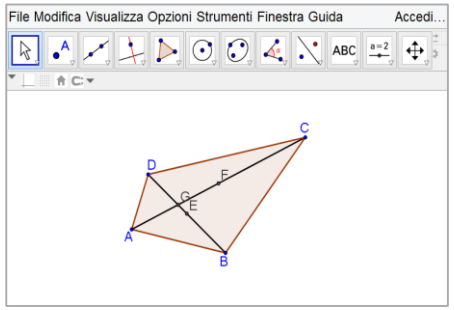
Sistematizzazione della conoscenza matematica

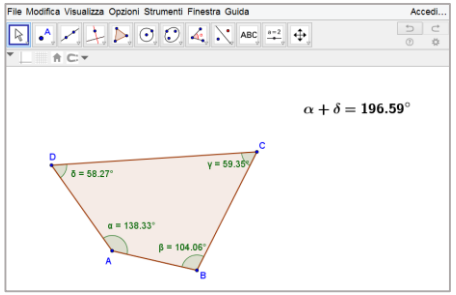
Discussione matematica

GIOCHI SPERIMENTATI

QUADRILATERI

Relazione tra il **tipo di quadrilateri** e il **punto di intersezione delle diagonali**

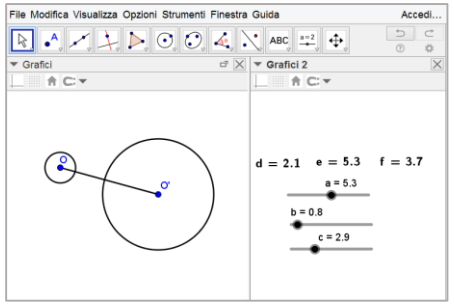


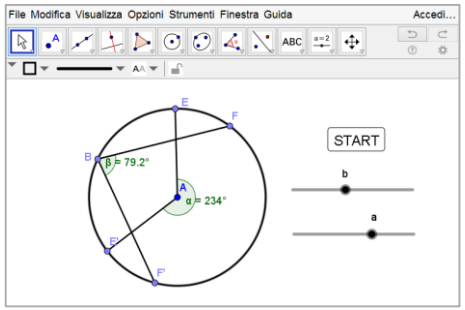


Relazione tra il **tipo di quadrilatero** e la **somma of lower and upper base angles**

CIRCONFERENZE

Relazione tra la **distanza tra I centri** e la **somma/differenza dei raggi**



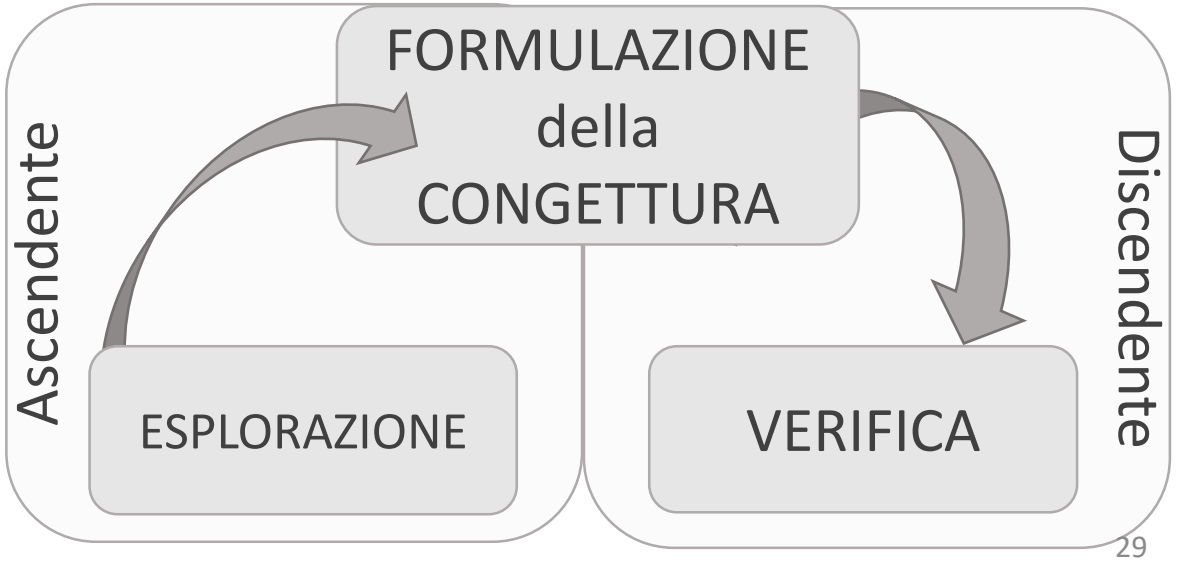


Relazione tra gli **angoli al centro** e gli **angoli alla circonferenza** che insistono sullo **stesso arco**

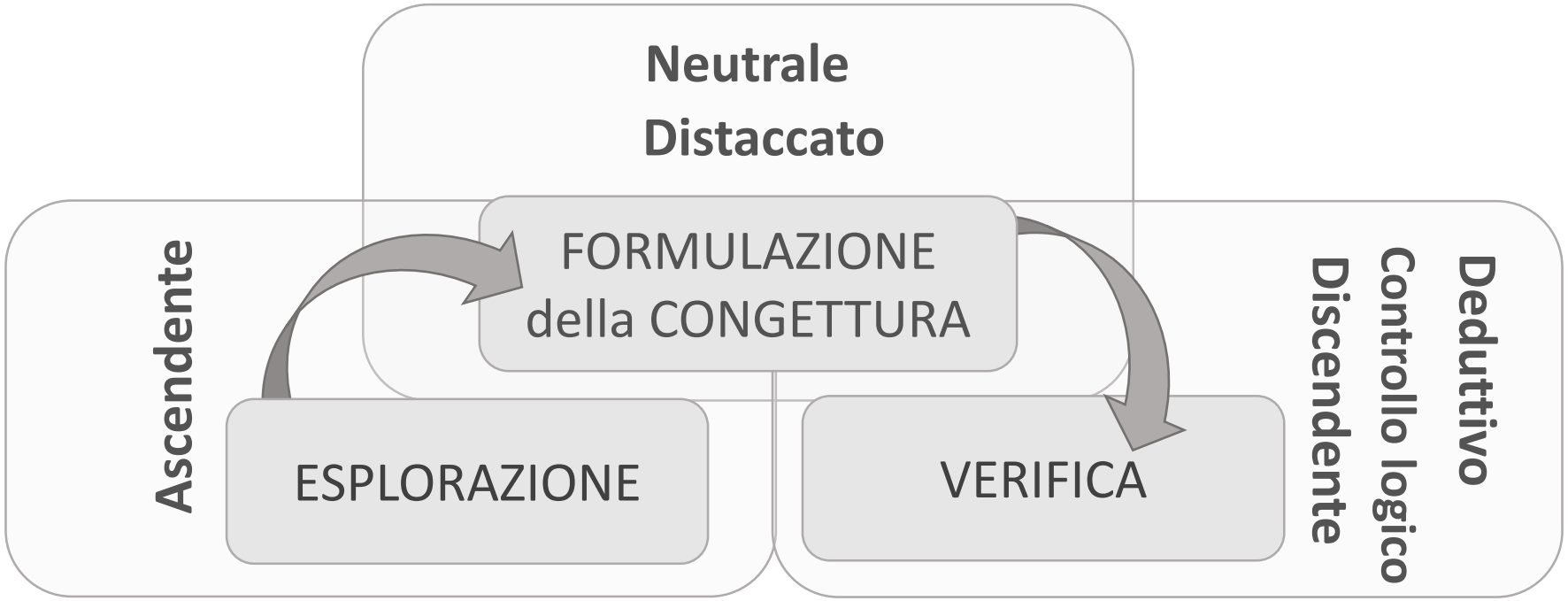
METODOLOGIA DI ANALISI DEI DATI

LENTE TEORICA UTILIZZATA

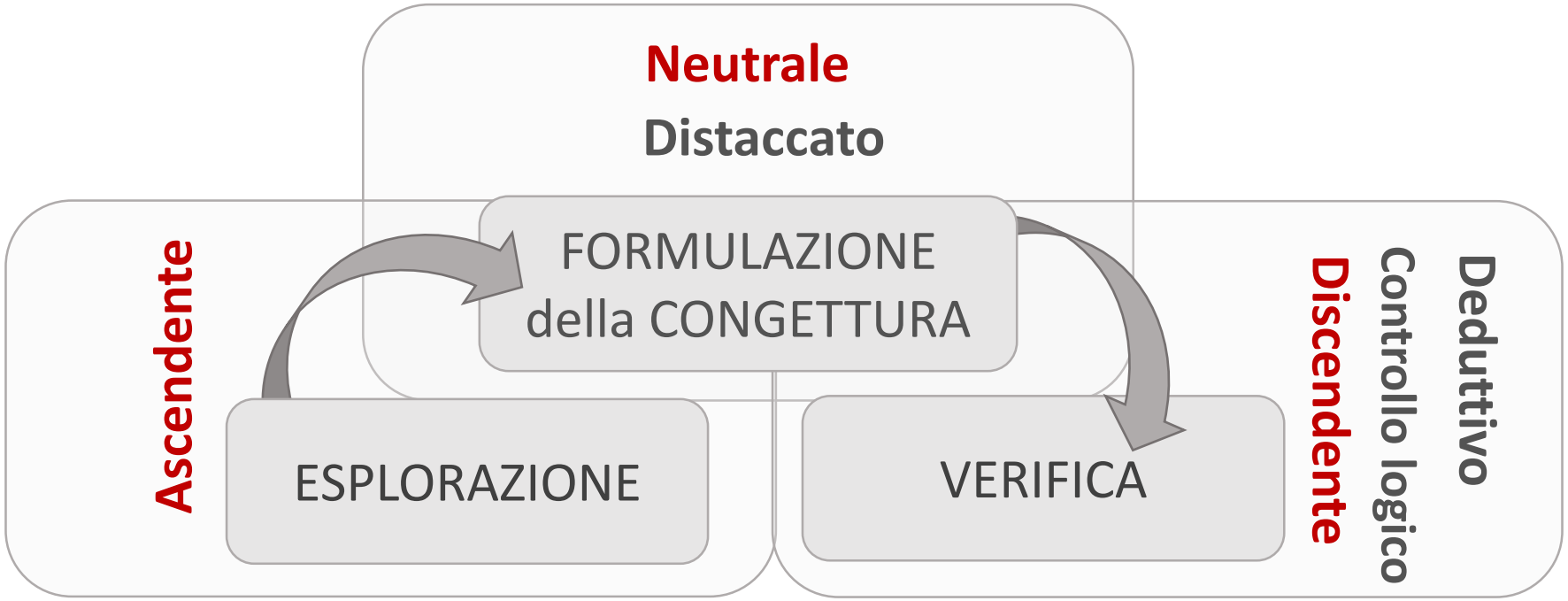
Adattamento del quadro psicologico di Saada-Robert (1989)



LENTE TEORICA DI ANALISI DEI DATI

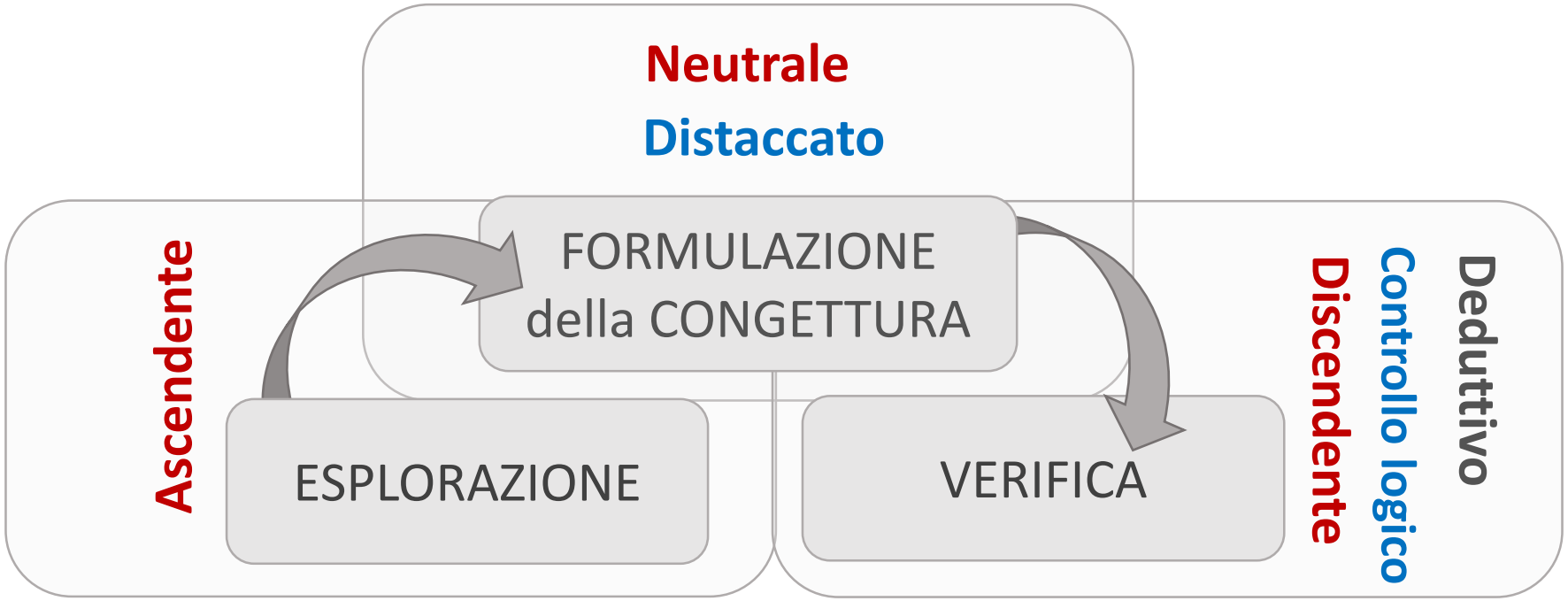


LENTE TEORICA DI ANALISI DEI DATI



- Innescati dal **reflective-game**

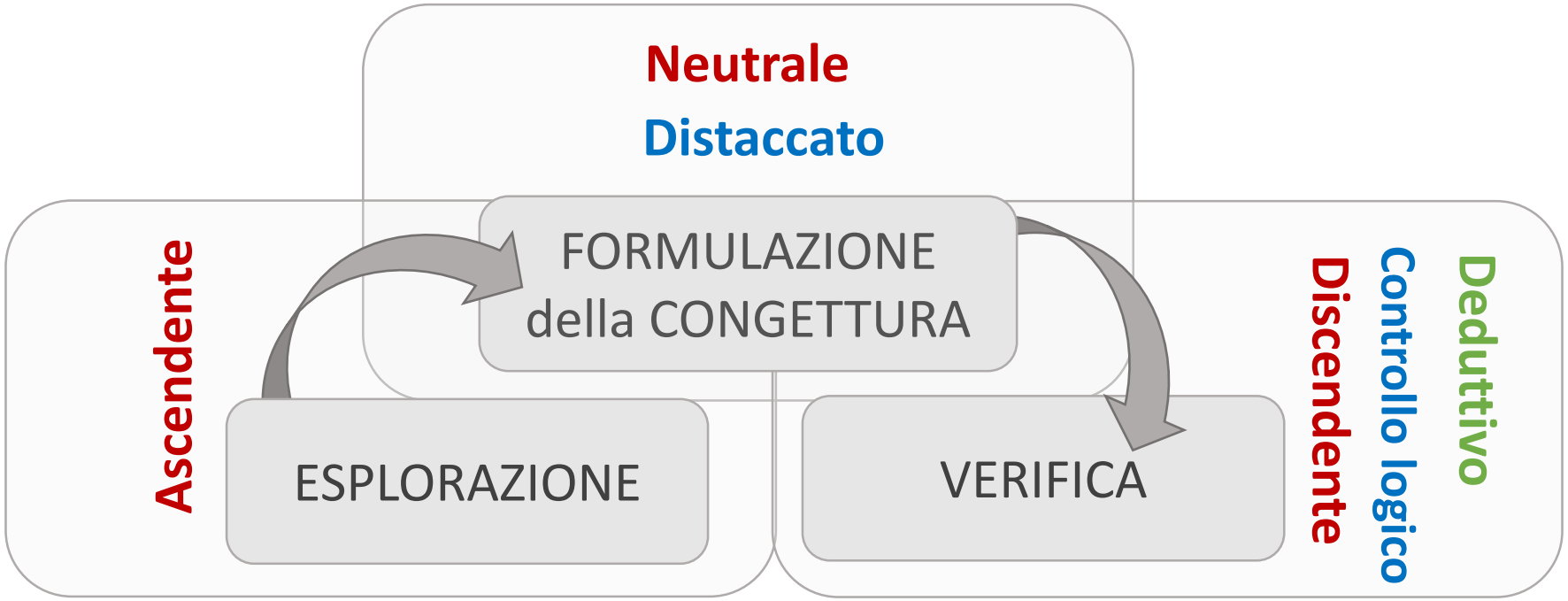
LENTE TEORICA DI ANALISI DEI DATI



Innescati dal **reflective-game**

Innescati dalla rielaborazione mentale del **reflective/played-game**

LENTE TEORICA DI ANALISI DEI DATI



Innescati dal **reflective-game**

Innescati dalla rielaborazione mentale del **reflective/played-game**

Innescato dalle conoscenze di **geometria euclidea**

- Dialogo
- Mosse
- Diagrammi

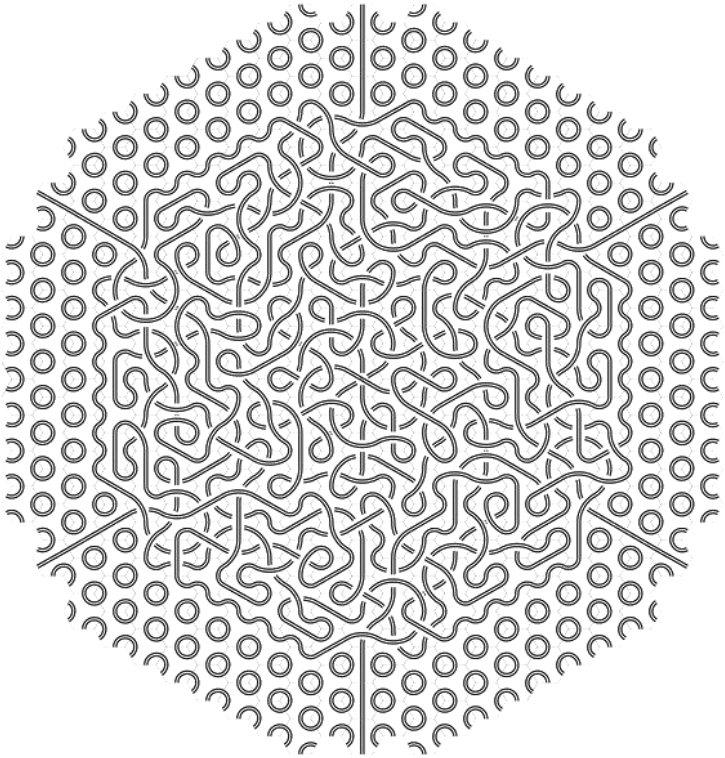
DOMANDE DI RICERCA

DOMANDE DI RICERCA

(RQ-1): Il gioco semantico come cambia l’interazione tra gli studenti e gli ambienti di geometria dinamica?

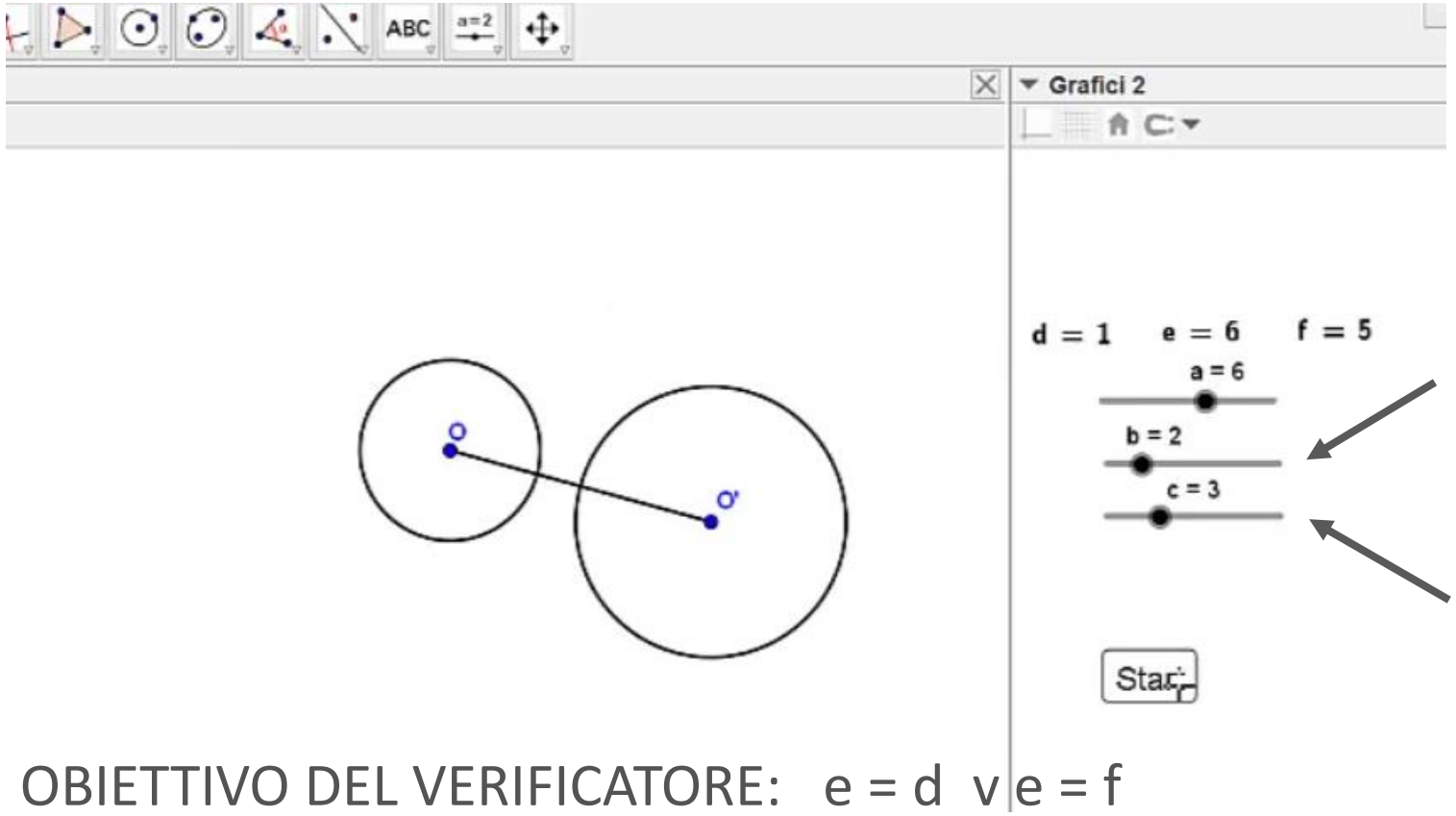
(RQ-2): Il gioco semantico come supporta gli studenti nel discernimento degli invarianti?

(RQ-3): Il gioco semantico come promuove le competenze logico-argomentative degli studenti?



A N A L I S I

GIOCO DELLE CIRCONFERENZE TANGENTI



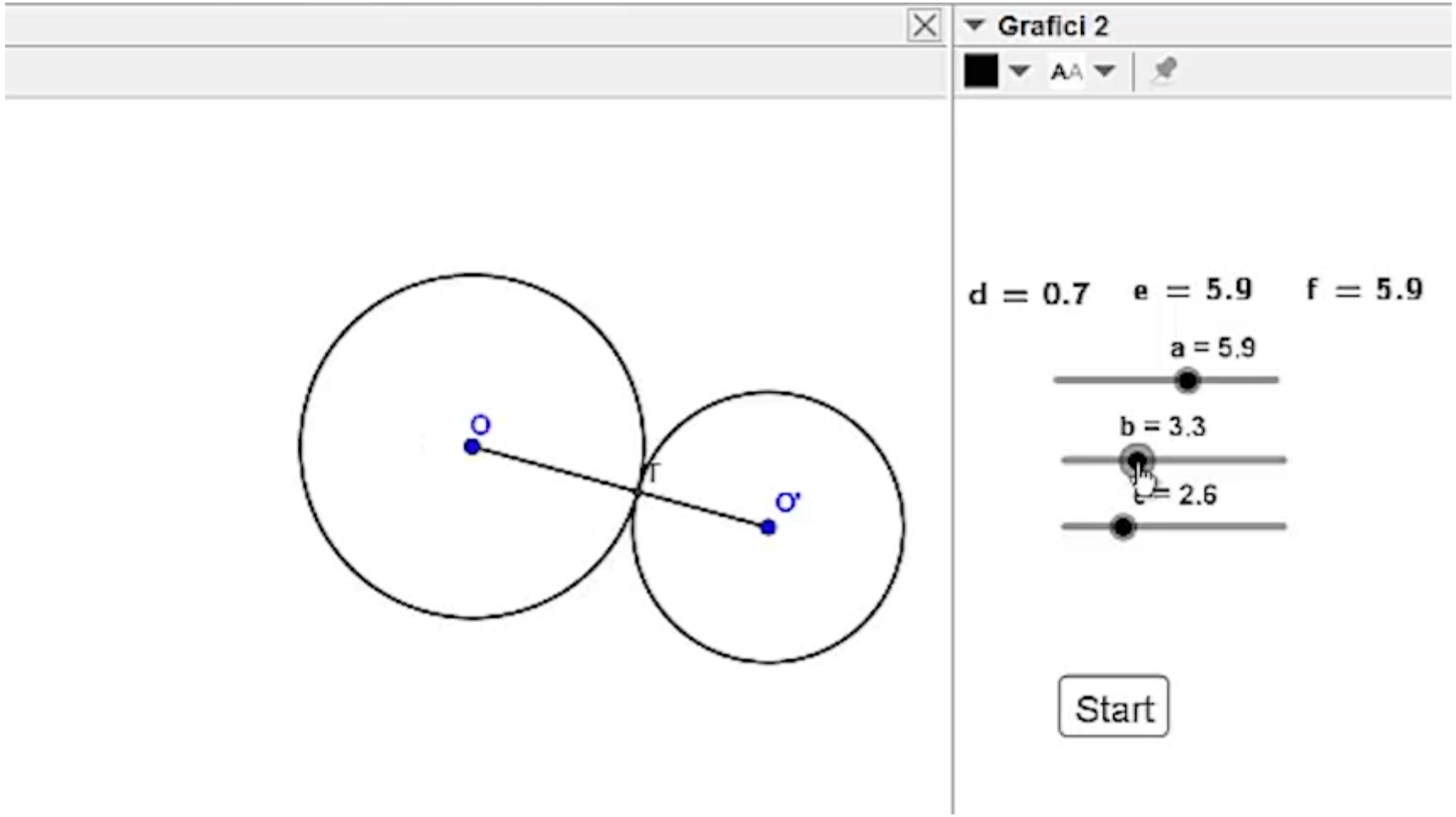
VERIFICATORE

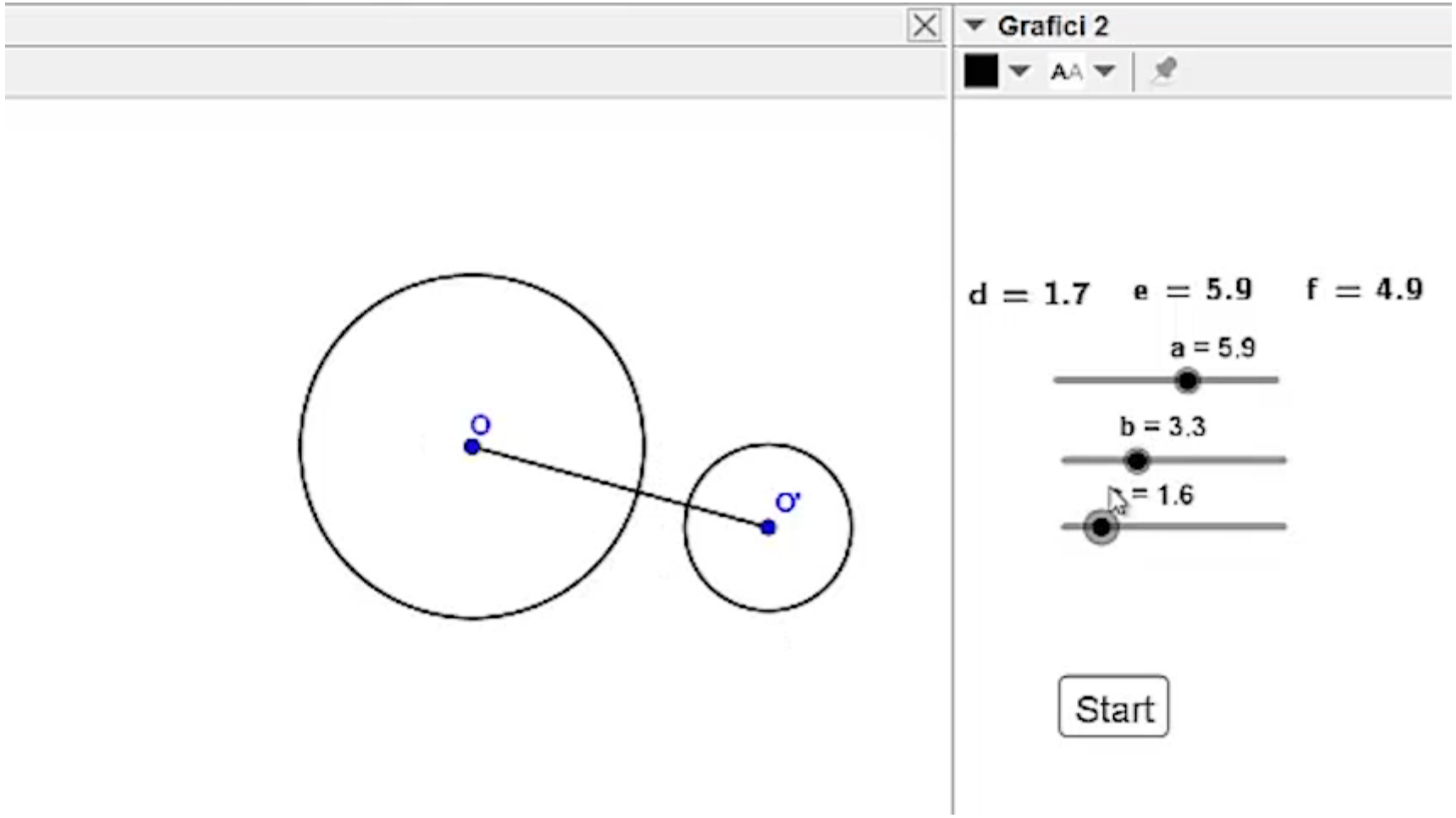
FALSIFICATORE

OBIETTIVO DEL VERIFICATORE: e = d v e = f

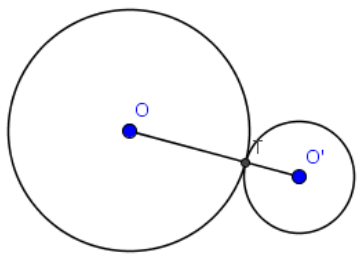
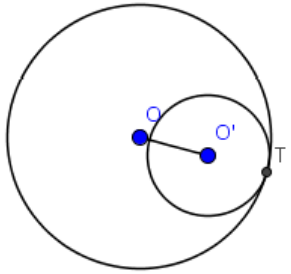
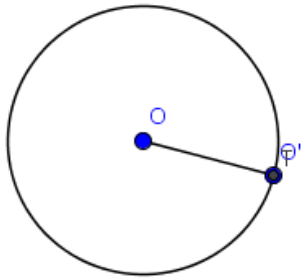
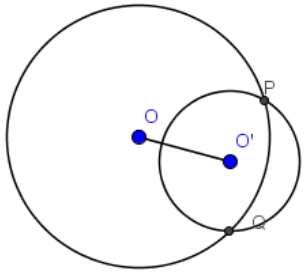
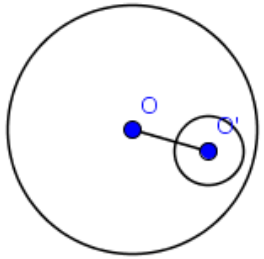
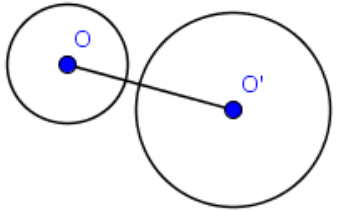
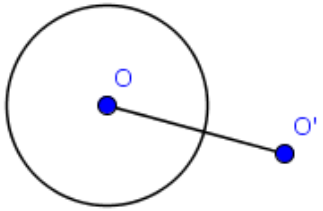
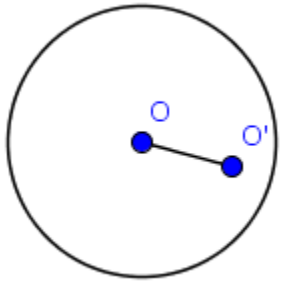
OBIETTIVO DEL FALSIFICATORE: impedire al verificatore di rendere e = d v e = f

Esistono valori di c che impediscono al verificatore di raggiungere l'obiettivo?


Grafici 2
d = 0.7
e = 5.9
f = 5.9
a = 5.9
b = 3.3
c = 2.6
Start
O
T
O'


Grafici 2
d = 1.7
e = 5.9
f = 4.9
a = 5.9
b = 3.3
= 1.6
Start
O
O'

SPAZIO DEGLI ESEMPI

	STANDARD	NON STANDARD
VERIFICATORE	 	
FALSIFICATORE	  	 

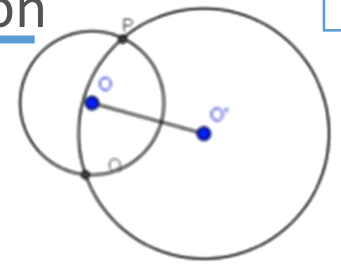
3. Che cosa rappresentano i valori delle variabili **d**, **e** ed **f** nelle due circonferenze?

Ale

Bianca

Giulio

1. **Bianca:** Ascoltami! 7.2 è il raggio della circonferenza con centro O, mentre 1.6 è il raggio della circonferenza con centro O’



D I S T A C C A T A

2. **Giulio:** No

3. **Ale:** Ragazzi posso provarvi che è il raggio?

4. **Giulio:** Perché se alteri la circonferenza con centro in O non cambi il…

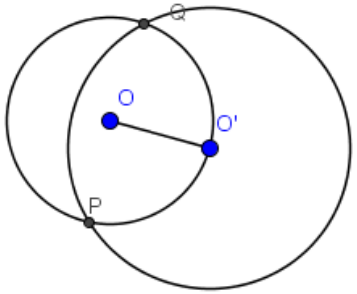
C O N T R O L L O
L O G I C O

5. **Ale:** Posso provarvi che è il raggio? Ti provo che è il raggio! 2.9…

6. **Giulio:** Non è il raggio! Non è il raggio

7. **Ale:** Deve essere perfetto su

D I S C E N D E N T E



8. **Giulio:** Non è il raggio…perché se alteri la circonferenza non puoi alterare il raggio di un'altra… di un altro cerchio! Ma non puoi alterare… se muovi la circonferenza di un cerchio non puoi muovere il raggio dell'altra

9. **Ale:** Se alteri… *(muovendo lo slider c su 0)*

10. **Giulio:** No perché cambiano entrambi i valori! Ne cambi uno se muovi quello [slider c], cambi la lunghezza di un raggio, non puoi cambiare la lunghezza anche dell'altro raggio.

11. **Bianca:** Certo che puoi!!

12. **Giulio:** E no, muovendo un cerchio, anzi no ingrandendo un cerchio

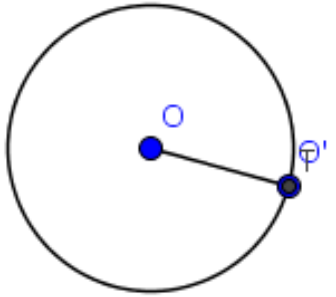
13. **Ale:** Noti? Noti? Vedi? È scomparso il punto T e mettendo questo su 0 vuol dire che è il punto esatto. Noti? È 2.9 2.9 2.9 ragazzi Bum!

CONTROLLO LOGICO

DISCENDENTE

CONTROESEMPIO DINAMICO

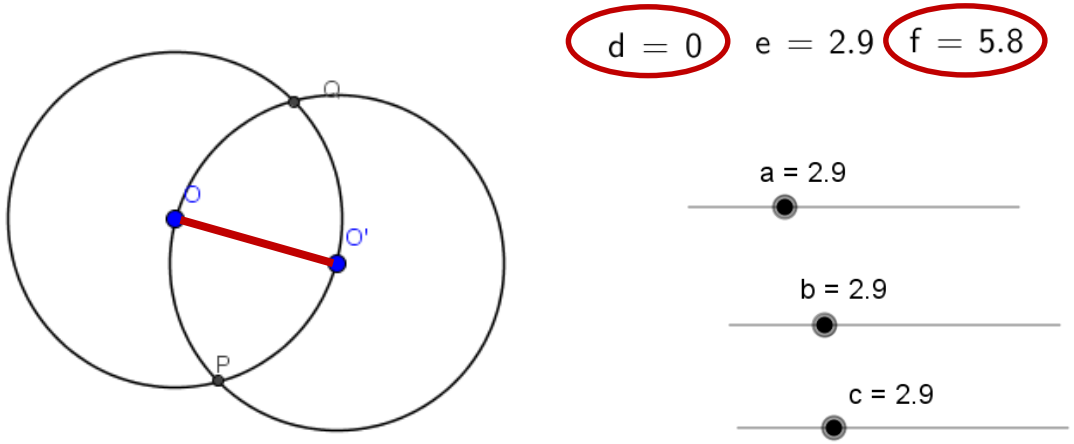
CASO PARTICOLARE



LA CONVERSIONE DI BIANCA

14. **Bianca:** Però ha ragione [Giulio]. Aspetta… se tu metti così, il raggio è la stessa cosa, no? Cioè è uguale sia di qua che di qua in teoria [finestra grafica], però qua non è uguale [finestra numerica]… quindi è un'altra cosa, capisci?

CONTROLLO LOGICO



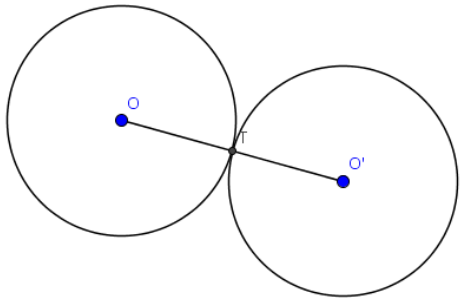
CONTROESEMPIO

15. **Bianca**: Vedi sono due cose diverse [valori di d e f] mentre qui dovrebbero essere uguali in teoria *(referendosi alle circonferenze tangenti esternamente)*

Guarda prova a mettere la circonferenza di O1 sul centro di O *(Ale muove lo slider a)* No no! La circonferenza: questa qua *(indicando la circonferenza)*!

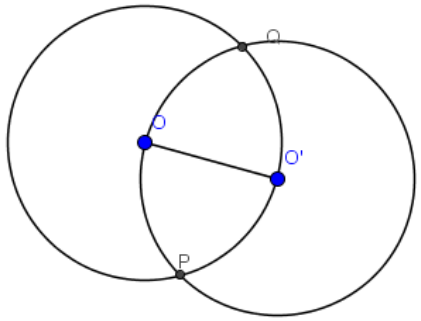
Ok dovrebbero essere più o meno uguali come raggio, perché comunque è la stessa cosa, invece uno è 0 e l'altro è 8.6

Ale riproduce l'esempio che supportava in parte la sua congettura



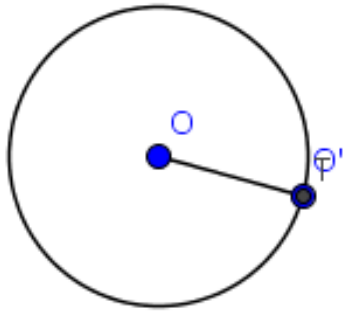
CONTROLLO LOGICO

CONTROESEMPIO



ATTIVARE DISCENDENTE

ATTIVARE CONTROLLO LOGICO



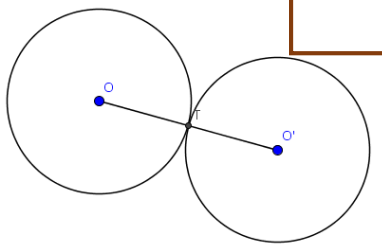
16. **Bianca:** Però come mi spieghi che se io attacco la circonferenza di centro O1 a quella di centro O come mi spieghi che i raggi sono diversi? Dovrebbero essere uguali i raggi! Ecco così vedi uno è 0 e l'altro 4.8…e poi non può essere 0!

17. **Ale:** 0 perché…Capito! Fatemi vedere…. (muovendo lo slider c) d non è il raggio, f lo è!

18. **Bianca:** Che cos'è allora?

19. **Ale:** La differenza tra i raggi di questi due!

20. **Bianca:** Ah giusto!



ATTIVARE IL CONTROLLO LOGICO

DISCENDENTE

NEUTRALE

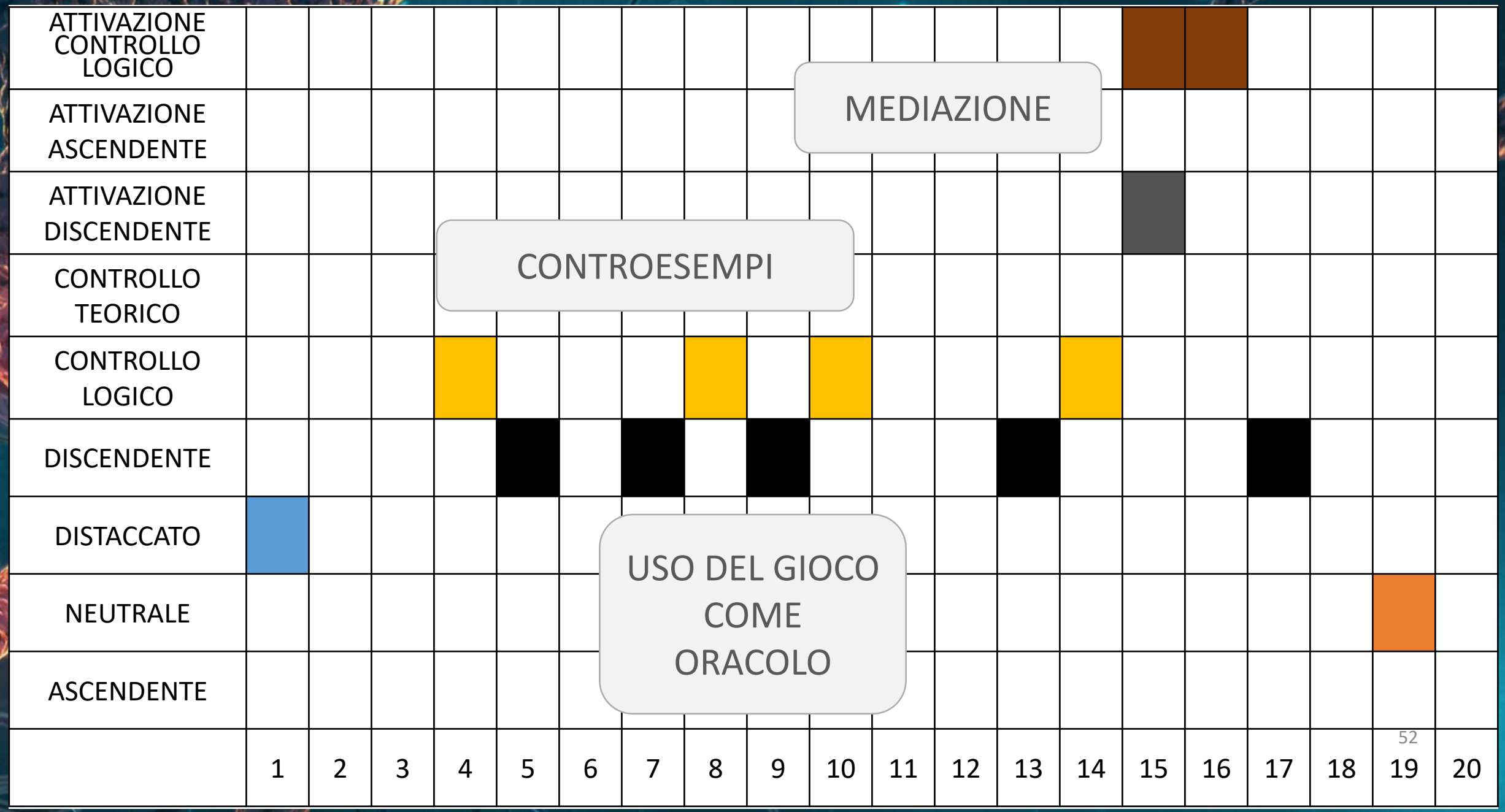
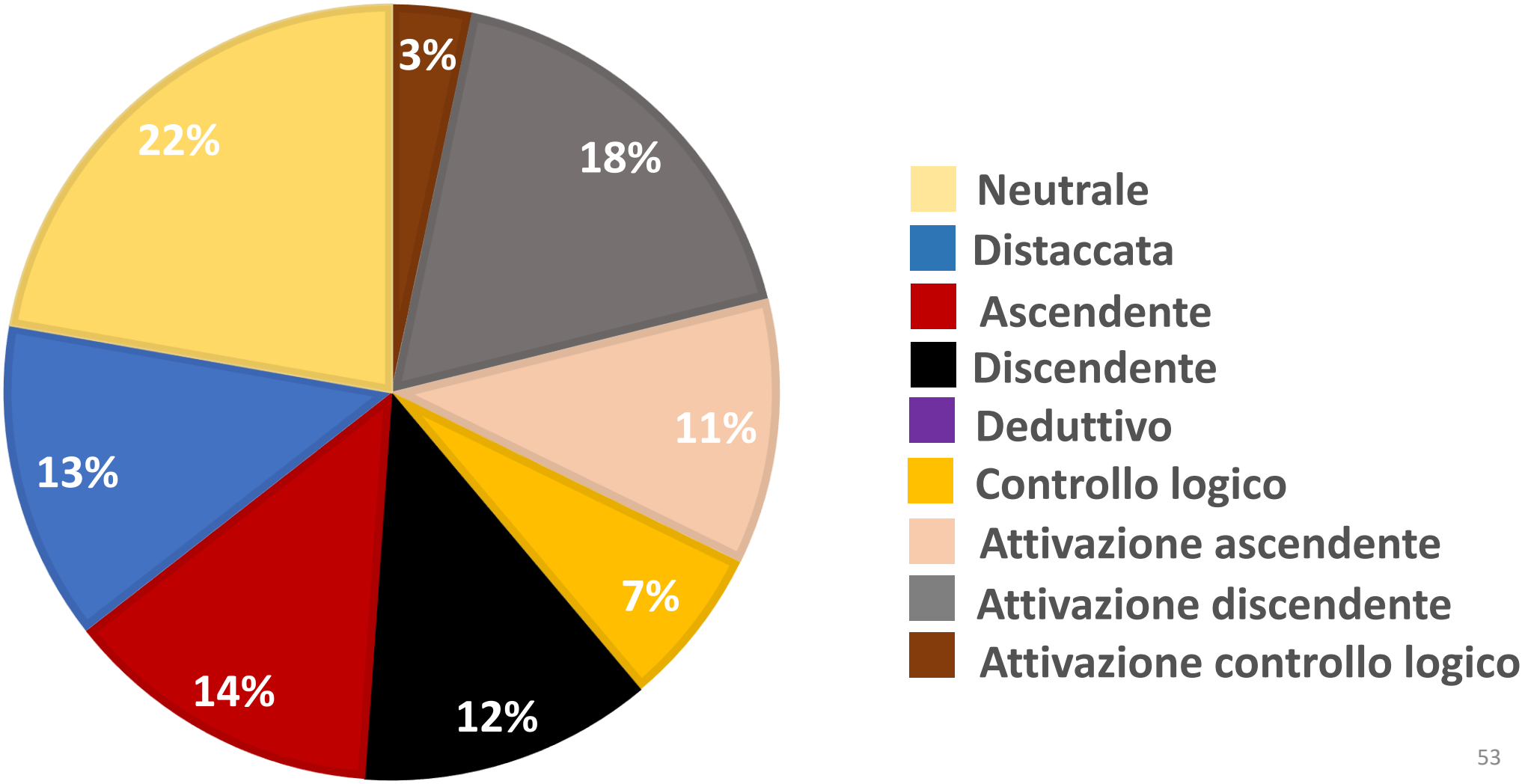

ATTIVAZIONE CONTROLLO LOGICO
ATTIVAZIONE ASCENDENTE
ATTIVAZIONE DISCENDENTE
CONTROLLO TEORICO
CONTROLLO LOGICO
DISCENDENTE
DISTACCATO
NEUTRALE
ASCENDENTE
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
MEDIAZIONE
CONTROESEMPI
USO DEL GIOCO COME ORACOLO

DIAGRAMMA A TORTA DELLE MODALITÀ COGNITIVE



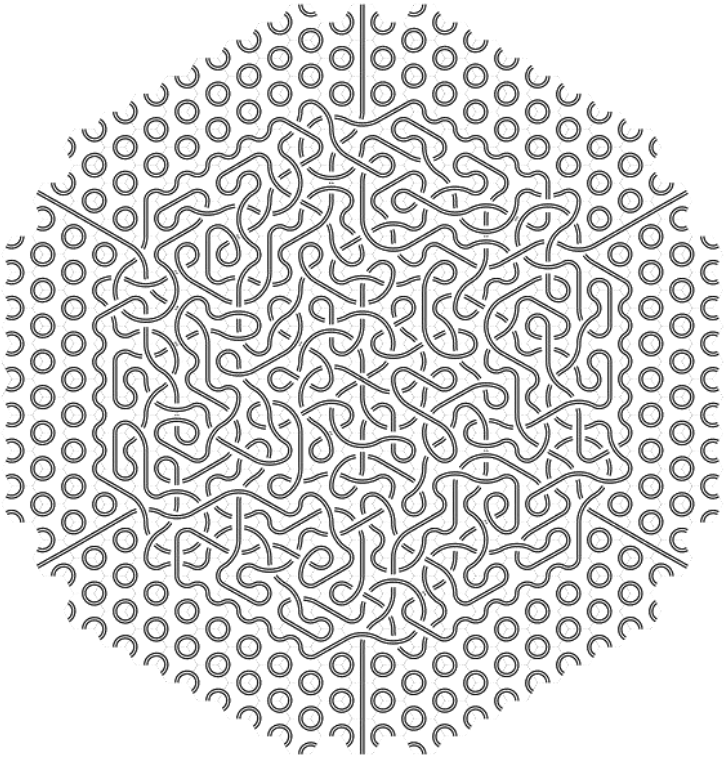
CONCLUSIONI

PRIMA DOMANDA DI RICERCA

(RQ-1): Il gioco semantico come cambia l'**interazione** tra gli studenti e il DGE?

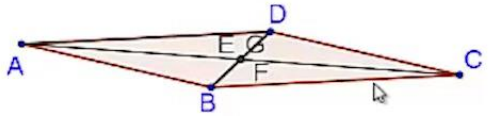
STRUMENTI TEORICI:

1. *Analisi del tipo di costruzione*
2. *Analisi delle pratiche di trascinamento*



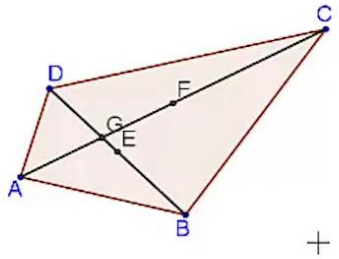
RUOLO DELLA COSTRUZIONE

CONSTRUZIONE ROBUSTA



Tutte le proprietà del parallelogramma restano invariate durante il trascinamento

COSTRUZIONE SOFT



Le proprietà del parallelogramma sono costruite ad occhio attraverso le mosse del verificatore

APPROCCIO FUNZIONALE ALLA GEOMETRIA

Trascinamento guidato

C $\xrightarrow{E = F = G}$ PARALLELOGRAMMA

Se le diagonali di ABCD si dividono scambievolmente a metà
Allora ABCD è un parallelogramma

Trascinamento strategico

C $\xrightarrow{\text{PARALLELOGRAMMA}}$ E = F = G

Se ABCD è un parallelogramma
Allora le diagonali si dividono scambievolmente a metà

APPROCCIO FUNZIONALE ALLA GEOMETRIA

Trascinamento guidato

D $\xrightarrow{E \neq F \neq G}$ NON-PARALLELOGRAMMA

Se le diagonali di ABCD NON si dividono scambievolmente a metà
Allora ABCD NON è un parallelogramma

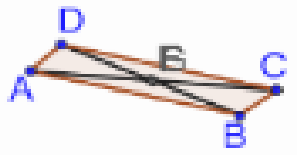
Trascinamento strategico

D $\xrightarrow{\text{NON-PARALLELOGRAMMA}}$ $E \neq F \neq G$

Se ABCD NON è un parallelogramma
Allora le diagonali NON si dividono scambievolmente a metà

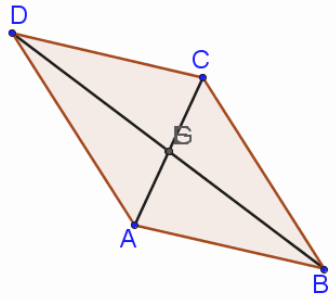
MOSSE DEL VERIFICATORE:

Tempo speso per fare la mossa



22 sec.

Applicazione regole



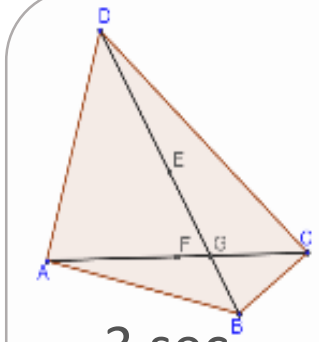
3 sec.

Applicazione strategia

MOSSE DEL FALSIFICATORE:

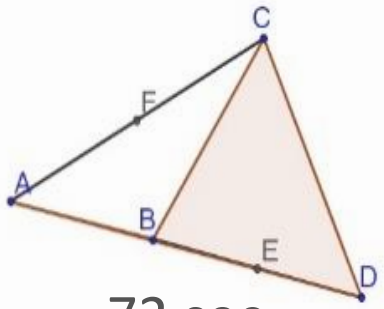
Tempo speso per fare la mossa

Tipo di configurazione



3 sec.

Applicazione regole



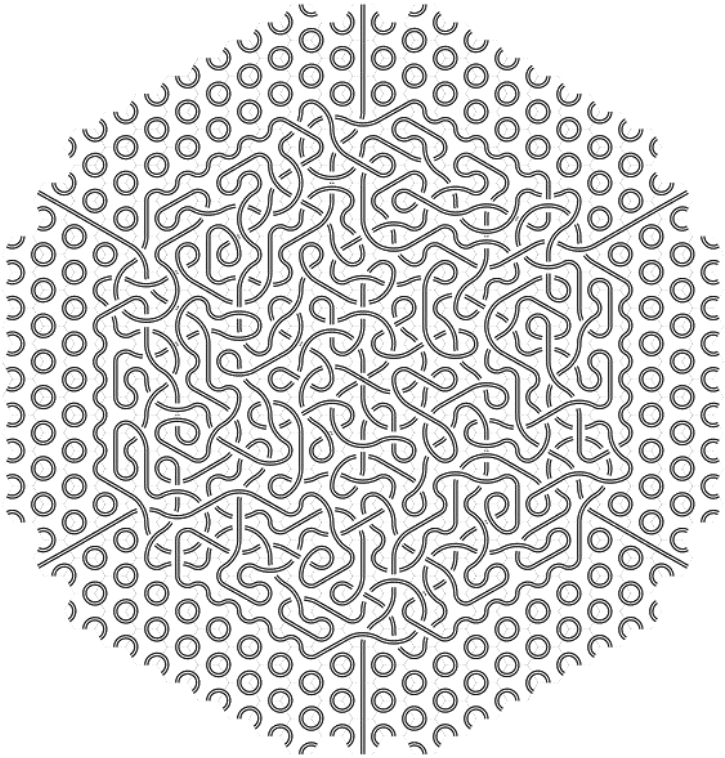
72 sec.

Applicazione strategia

TERZA DOMANDA DI RICERCA

(RQ-3): Il gioco semantico come promuove le **competenze logico-argomentative degli studenti?**

LENTE TEORICA:
Analisi della struttura di ragionamento



RAGIONAMENTO DI TIPO REGRESSIVO

DGE=ORACOLO

Fatti osservati

- $r = OO'$
- $d = 2.9\ e = 2.9$

Fatti noti

$e = OO'$

Ipotesi esplicativa

$d = r$

Fatti osservati

- $r = OO'$
- Solo r cambia mentre variano sia d che f
- $r = r'\ d \neq f$
- $r = r'\ d = 0$

Fatti noti

$e = OO'$

Ipotesi esplicativa

$d = r - r'$

STUDENTI ESPERTI GRAZIE ALL'ESPERIENZA VISSUTA NEL PLAYED-GAME

STUDENTI MEDIATORI NELLA COMUNICAZIONE CON L'ORACOLO

LA LOGICA DEL SÌ E DEL NO

LE PRATICHE DI TRASCINAMENTO DEL VERIFICATORE innescano la **LOGICA DEL Sì**

La verità di un’affermazione emerge attraverso la produzione di **esempi** che la supportano

LE PRATICHE DI TRASCINAMENTO DEL FALSIFICATORE innescano la **LOGICA DEL NO**

La verità un’affermazione emerge dall’impossibilità di produrre un **controesempio**

CONCLUSIONI

Le potenzialità del design delle attività di gioco-indagine per lo sviluppo di competenze logico–argomentative degli studenti è stata mostrata attraverso le nostre considerazione su:

C $\xrightarrow{E = F = G}$ CONFIGURAZIONE PARALLELOGRAMMA

C $\xrightarrow{\text{CONFIGURATIONE PARALLELOGRAMMA}}$ E = F = G

Trascinamento strategico e **guidato**

Logica del no e **logica del sì**

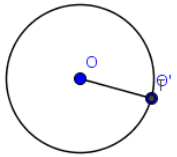
Esempi e **non-esempi**
standard e non-standard

CONCLUSIONI

L’analisi delle modalità cognitive attivate ha reso manifesta la logica di indagine dagli studenti

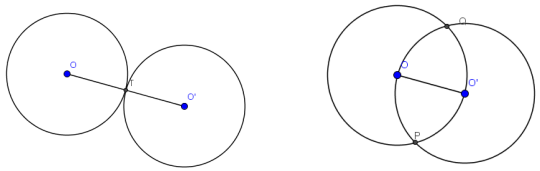
Uso del gioco come oracolo

Mediazione degli studenti nella comunicazione con il DGE



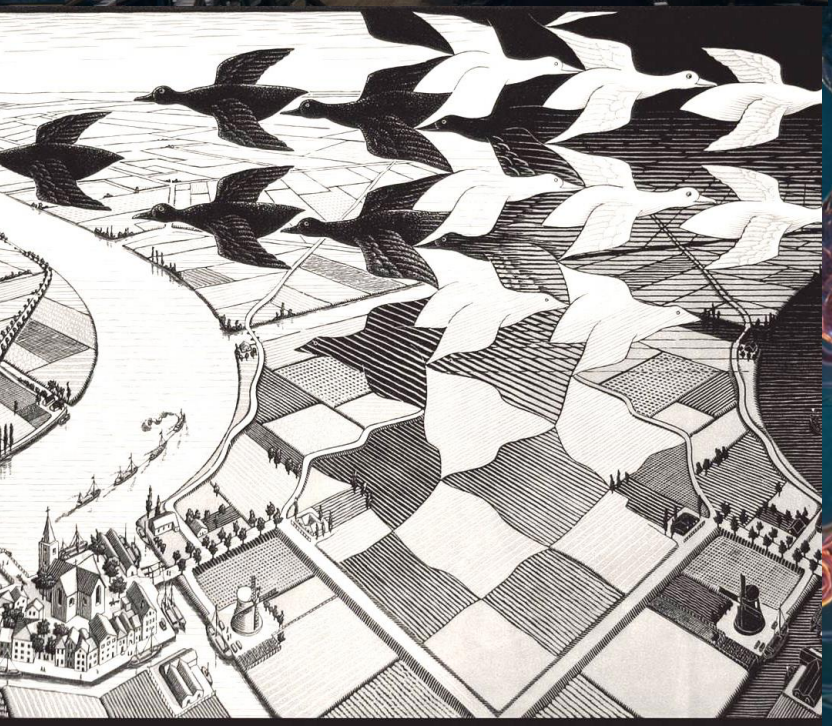
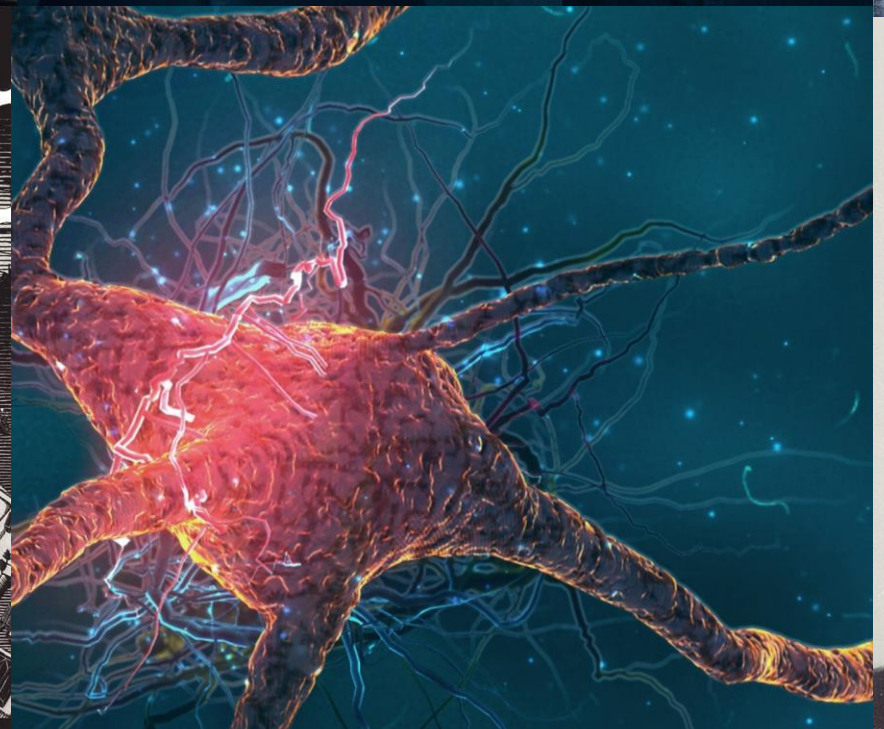
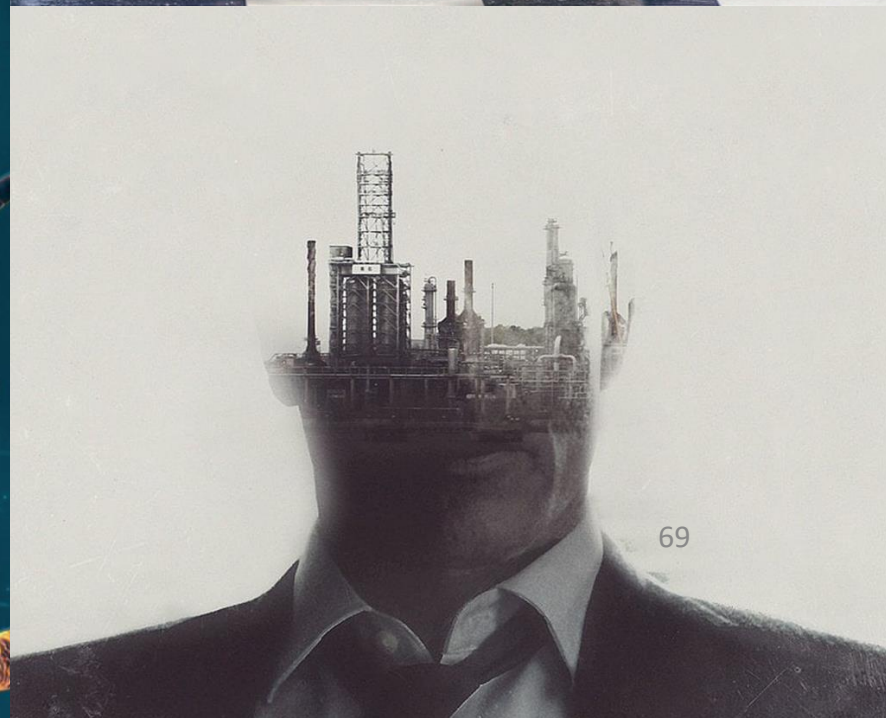
Importanza dell’esperinza del played-game e del reflected-game nell’attivazione del controllo logco

Produzione di controesempi



Coinvolgimento degli studenti

Titolo tesi di dottorato:
Learning with the logic of inquiry: a game-approach within DGE to improve geometric thinking

Per maggiori informazioni scrivere a: carlotta.soldano@gmail.com csoldano@unito.it

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!