

XXIX SEMINARIO NAZIONALE DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Vent'anni dopo: Pisa 1991 – Rimini 2012

Dalla ricerca in didattica della matematica alla ricerca sulla formazione degli insegnanti

Ferdinando Arzarello (TO)*, Annalisa Cusi (MO2)**, Rossella Garuti (MO1)**, Nicolina Malara (MO2)**, Francesca Martignone (MO1)**, Ornella Robutti (TO)*, Cristina Sabena (TO)*

*Università di Torino, **Università di Modena e Reggio Emilia

L'aspect des objets extérieurs est un mystérieux conducteur, qui correspond aux fibres de la mémoire et va les réveiller quelquefois malgré nous.

Alexandre Dumas, Vingt ans après, cap. 32 (Le bac de l'Oise)

Il mondo esteriore è come collegato da un misterioso filo conduttore alle fibre della memoria e talvolta le risveglia, nostro malgrado.

Alexandre Dumas, Vent'anni dopo, cap. 32 (Il traghetto dell'Oise)

Parte 1

1. Introduzione: obiettivi e struttura del seminario.

I fatti:

2. Il filo della storia: la formazione degli insegnanti in progetti nazionali.

3. Tre esperienze locali sulla formazione di insegnanti in servizio:

- 3.1. Il progetto regionale Laboratori delle Macchine Matematiche per l'Emilia Romagna (MMLab-ER) (MO1);
- 3.2. Percorsi di formazione insegnanti per educare gli studenti all'uso del linguaggio algebrico come strumento di pensiero: verso lo sviluppo di consapevolezze a vari livelli (MO2);
- 3.3. Progetti di formazione per gli insegnanti: il piano nazionale m@t.abel; gli insegnanti-ricercatori della scuola primaria; il progetto regionale Quarini (TO).

Parte 2

Dai fatti alle interpretazioni:

- 4. La trasposizione meta-didattica: componenti interne ed esterne delle pratiche didattiche e relative dinamiche.
- 5. Le tre esperienze (MO1, MO2, TO) alla luce della trasposizione meta-didattica e delle relazioni fra le due componenti (esterna ed interna).

Parte 3

Dalle micro- alle macro-scale di analisi

- 6. Riflessione sulle pratiche reali della classe e sull'evoluzione del ruolo dell'insegnante (insegnante in formazione, insegnante formatore e insegnante ricercatore).
- 7. I ricercatori in didattica della matematica come intellettuali: origini, nascita e sviluppi.

Premessa

Il seminario è frutto di una riflessione comune su recenti ricerche riguardanti le conoscenze necessarie per l'insegnamento della matematica: tipicamente i lavori nel volume edito da P. Sullivan e T. Wood nel 2008, *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development*. In particolare ci ha colpito il lavoro sia empirico sia teorico sviluppato da D. Ball, H. Bass e altri all'Università del Michigan: muovendo dalla nozione di *Pedagogical Content Knowledge* (PCK, Shulman, 1986), il gruppo di ricerca ha definito la cosiddetta *Mathematical Content Knowledge* (MKT), distinguendo al suo interno diverse categorie di conoscenze importanti per l'insegnamento della matematica (Fig. 1). Tali studi hanno avuto ed hanno un grande successo internazionale: ad es. al PME di Thessalonika (2009) non si parlava d'altro.

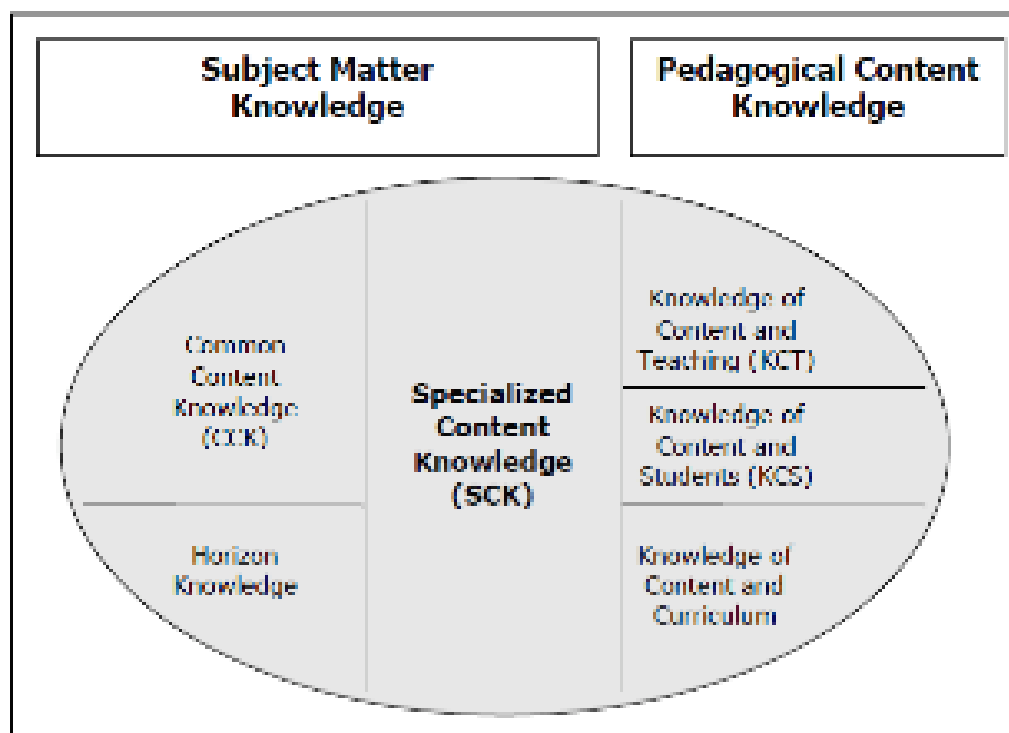


Figura 1 - Domains of Mathematical Knowledge for Teaching¹

L'intento di Ball e colleghi è descritto in questo modo:

"Hence we decide to focus on the "work of teaching". What do the teachers *do* in teaching mathematics and *how* does what they do demand mathematical reasoning, insight, understanding, and skill? Instead of starting with the curriculum, or with standards for students learning, we study teachers' work. We seek unearh the ways in which mathematics is involved in contending with the regular day-to-day, moment-to-moment demands of teaching. Our analysis lay the foundation for *a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching*" (Ball *et al.*, 2008, p. 401).

"Based on our analysis of the mathematical demands of teaching, we hypothesized that Shulman's content knowledge could be subdivided into Common Content knowledge (CCK)

¹ La prima volta in cui esce lo schema è in *Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?* Deborah Loewenberg Ball, Mark Hoover Thames, and Geoffrey Phelps (2008). In *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

and Specialized Content Knowledge (SCK), and his Pedagogical Content Knowledge (PCK) could be divided into Knowledge of Content and Students (KCS) and Knowledge of Content and Teaching (KCT), on the other” (Ball *et al.*, 2008, p. 401).

Calcolare, risolvere correttamente un problema matematico, ecc. rappresenta il primo dominio che gli autori chiamano Common Content Knowledge (CCK) e lo definiscono come la conoscenza matematica utilizzata in ambiti anche diversi dall’insegnamento. Il secondo dominio, Specialized Content Knowledge (SCK), è la conoscenza matematica tipica dell’insegnamento e necessaria agli insegnanti per condurre il loro lavoro. Completa il quadro la Horizon Knowledge che riguarda la comprensione del più ampio insieme di idee matematiche a cui una particolare idea è connessa. E’ il genere di comprensione che dà agli insegnanti la visione estesa di dove essi sono e dove gli allievi stanno andando e li rende consapevoli delle conseguenze di come le idee sono presentate, o degli sviluppi che decisioni prese nel lavoro corrente consentono o impediscono successivamente

In seguito a tale successo, a Torino nell’a.a. 2009-10 Ornella Robutti ha attivato un corso nel dottorato in didattica della matematica, interamente dedicato agli studi sulla formazione degli insegnanti. Diversi fra i relatori di questo seminario² hanno partecipato attivamente a tale corso, tramite seminari o discussioni o lezioni, condividendo come materiali il libro di Sullivan e Wood (2008) e alcuni articoli di ricerca. In tale occasione, si sono posti il problema di discutere e porre a confronto, nonché applicare le categorie elaborate dai colleghi americani alle pratiche sviluppate con gli insegnanti con i quali direttamente o indirettamente entravano o erano entrati in contatto: insegnanti ricercatori; insegnanti in servizio coinvolti in progetti di sperimentazione, oppure in attività di aggiornamento, spesso essendo le due intrecciate tra di loro (in particolare in progetti di ampio respiro, vuoi regionali, vuoi nazionali); futuri insegnanti nei corsi, laboratori e tirocini delle SSIS.

L’impressione provata a una prima analisi del modello di MKT fu solo di parziale soddisfazione. Da un lato, l’elaborazione della MKT offriva una prospettiva utile da cui guardare alle pratiche che si erano sviluppate nelle varie occasioni considerate, dall’altro sembrava che qualche elemento importante sfuggisse all’analisi, anche se non era chiaro di che cosa si trattava.

Decidemmo allora di approfondire gli studi e ci parve che quanto emergeva potesse essere di interesse a tutta la comunità dei ricercatori in didattica della matematica italiani, se non altro come momento di riflessione e discussione comune. Avuta conferma che avremmo tenuto il seminario, abbiamo approfondito la nostra analisi, che non è ancora terminata ma che comunque sottoponiamo ora alla vostra attenzione.

Siccome si tratta di un lavoro di ricerca comune, non esistono autori specifici delle singole parti, salvo le presentazioni delle tre esperienze (MO1, MO2, TO) nel primo giorno. Per sottolineare questa coraltà produttiva non abbiamo esplicitato nomi singoli accanto agli interventi: ci alterneremo infatti tutti quanti nella presentazione.

Introduzione al seminario

1. Continuità con il paradigma introdotto vent’anni fa: la ricerca per l’innovazione

Il primo passo nell’analisi critica delle nostre pratiche didattiche come ricercatori in didattica della matematica (abbreviate in PRARIDID) fu di riprendere il quadro elaborato per il nono Seminario Nazionale in Didattica della Matematica (Pisa, 1991: pubblicato su *L’insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 1992; ulteriormente elaborato per uno studio ICMI svoltosi nel maggio 1994 a Washington DC dal titolo *What is Research in mathematics Education and What are its Results?* Il volume degli atti è: *Mathematics Education as a Research Domain: a Search for Identity*, 1997, edited by J. Kilpatrick & A. Sierpiska contenente l’articolo di F. Arzarello & M.G. Bartolini Bussi, *Italian Trends in Research in Mathematics Education: a National Case Study from*

² Relatori al dottorato: Ferdinando Arzarello, Paolo Boero, Rossella Garuti

an International Perspective (pp. 243-262). Il tema fu anche oggetto di esposizione alla Scuola estiva a Santarem in Portogallo nel 1999).

In quei lavori si analizzava la Ricerca in Didattica della Matematica italiana (RDM) dagli anni '60 ai primi anni '90 secondo quattro componenti principali, indicate con le lettere A, B, C, D (cfr. Tab. I e II).

A: RDM basata sull'organizzazione concettuale della disciplina;

B: RDM per l'organizzazione concreta nella classe;

C: RDM quale osservazione e modellizzazione dei processi di laboratorio;

D: RDM come ricerca per l'innovazione.

Le prime due componenti A, B erano le più vecchie: distinte per comodità concettuale spesso risultavano illustrate nei lavori di una stessa persona (proprio in quanto componenti proprie di una tradizione e non paradigmi espliciti), soprattutto considerando il periodo che va dalla metà degli anni '60 agli anni '80. Nel lavoro si sottolineava che negli anni '80 e '90 esse si erano integrate maggiormente interagendo con una terza componente non autoctona (componente C).

Il risultato consisteva in una forma originale di utilizzo delle tre componenti: si parlava perciò di un quarto filone, che superava le tre componenti, senza negarle, anzi integrandole tra loro (filone D).

Oggetto di studio della RDM in tale filone era l'insegnamento-apprendimento della matematica, sia in specifiche situazioni di classe, sia nell'ambito di una loro espansione al sistema educativo più ampio. Lo studio era perciò finalizzato ai seguenti scopi, in cui l'insegnamento-apprendimento diventava anche obiettivo:

(i) produrre esempi paradigmatici di miglioramento dell'insegnamento matematico (ad es. progetti di rinnovamento curricolare complessivo o parziale);

(ii) studiare le condizioni per una loro concreta realizzazione, ovvero i possibili fattori che li rendono irrealizzabili;

(iii) produrre costrutti teorici innovativi, che siano utili per guidare l'azione degli insegnanti in classe;

(iv) produrre metodologie didattiche innovative, che supportino la comunità educativa nel progettare interventi migliorativi dell'insegnamento della matematica a scuola.

Il primo punto derivava tipicamente dalla componente A; il secondo era collegato allo studio dei processi nelle classi (componenti B e C); mentre gli ultimi due erano un prodotto tipico del filone D, in cui si integravano ed elaboravano aspetti derivati da tutte le componenti A, B, C.

Per dare conto del filone D si sottolineava la dinamicità delle relazioni reciproche che nascevano dalle tre componenti di partenza e non erano frutto di una loro pura giustapposizione. Secondo quello studio, fare RDM significava soprattutto studiare i processi di insegnamento-apprendimento della matematica nella loro complessità come sistemi dinamici, in cui le varie componenti siano usate nell'analisi in modo globale e interfunzionale.

In sintesi, si affermava che l'evoluzione della ricerca didattica in Italia si era sviluppata producendo un terreno di lavoro in cui da una serie di germi primitivi, che ne costituivano la base di partenza, si erano sviluppati problemi e metodi più complessi: da una serie di variabili del primo ordine, atte a descrivere le componenti di base (A, B, C), si era passati a un intreccio più fine di nuove variabili che collegavano le precedenti a un livello superiore (variabili del secondo ordine) nel filone D.

Sia le nostre PRARIDID sia il lavoro di Ball & Bass possono senz'altro essere inquadrati nella componente D. Tuttavia, sia considerando il lavoro dei colleghi americani sia il nostro nella sua complessità attuale, il quadro della "Ricerca per l'innovazione" appare certo corretto ma limitato. Si sente il bisogno di un quadro più ampio, che dia conto di aspetti non considerati o solo sfiorati in quello delle "Ricerche per l'innovazione" e che invece sono rilevanti per lo sviluppo delle nostre PRARIDID negli ultimi anni, in particolare nell'ultimo decennio. Il riferimento specifico è relativo alle esperienze di formazione degli insegnanti (sia iniziale sia in servizio) che ha visto coinvolti molti o quasi tutti i ricercatori in didattica della matematica. Questo ampliamento dell'analisi ci ha portato a riconsiderare anche precedenti aspetti della nostra storia e a ricomporre un quadro più complesso che comprende il precedente in una cornice teorica più ampia e, a nostro giudizio, più

significativa. Per il momento ci limitiamo a suggerire alcuni punti chiave, su cui torneremo dopo avere introdotto sufficienti elementi di realtà oggettuale, che sostengano con la forza dei fatti l'analisi teorica che avizzeremo. Riportiamo, in fondo al capitolo, come “punto di partenza” della nostra analisi, le tabelle relative alle componenti della ricerca didattica italiana, presentate alla scuola estiva portoghese-spagnola-italiana, tenutasi a Santarem nel 1999.

2. Mathematical Knowledge for Teaching.

Per rendere comprensibile il nostro cammino partiremo da un articolo scritto da H. Bass nel 2005 sulla Mathematical Knowledge for Teaching (MKT), che risulta illuminante per il nostro percorso: l'articolo (*Mathematics, Mathematicians, and Mathematics Education*, BAMS, 42,4, pp. 417-430) riprende il suo *Retiring Presidential Address to the American Mathematical Society* (2004), al termine appunto della sua Presidenza della AMS, nonché la conferenza plenaria da lui tenuta a ICME-10 (Copenhagen), mentre era presidente ICMI. Contrapporremo tale articolo, scritto per un pubblico matematico, a quelli scritti prima e dopo da Ball & Bass e da altri sempre sugli stessi argomenti.

Nell'articolo, Bass ha come obiettivo di opporsi al contrasto che secondo molti esiste tra matematici e didattici della matematica (math educators) –tra l'altro, in USA e anche altrove sono divisi in Dipartimenti diversi– e che lui aveva descritto nel modo seguente, nel discorso tenuto nel 1991, in occasione del suo ingresso nel *Mathematical Sciences Education Board* presso la *National Academy of Sciences* degli USA:

“Mathematicians tend to think of educational matters almost exclusively in terms of content; what material should be taught. They thus approach teachers and educators in the guise of experts with the answers in hand, ready to contribute their authoritative advice. They often convey disdain (even if unintended) to the teachers and educators with whom they speak, and inspire defensiveness and resentment in return. One result of this history is that the important conversations that now need to take place between mathematicians and educators are burdened with suspicion and cultural prejudices”.⁽³⁾

Il suo obiettivo nell'articolo in esame è di contrastare tali posizioni simmetricamente estreme ed è così formulato:

“I will argue that the knowledge, practices, and habits of mind of research mathematicians are not only relevant to school mathematics education, but that this mathematical sensibility and perspective is essential for maintaining the mathematical balance and integrity of the educational process in curriculum development, teacher education, assessment, etc.” (p. 418).

Egli illustra le figure di F. Klein e di H. Freudenthal, come matematici che hanno lavorato con le loro grandi competenze matematiche in didattica della matematica (e non certo per ripiego senile):

“Klein and Freudenthal, each in his own way, exemplified how articulation of mathematical sensibility and perspective could influence the mathematics education of young people. And each helped to establish the legitimacy and possible nature of mathematicians' involvement in mathematics education. It is this tradition that I seek to highlight in this lecture”.

Prosegue poi argomentando come un certo numero di matematici americani sia stato fortemente coinvolto nei problemi della didattica anche in anni più recenti (1970-2004) e scrive:

“One observation, based on my brief narrative, is that the tradition exemplified by Felix Klein and Hans Freudenthal continues to thrive. The mathematicians to whom I alluded have devoted significant professional expertise and time to serious problems of school mathematics education.

³ H. Bass. A professional autobiography, *Algebra, K-theory, groups, and education*. New York, 1997 (Contemp. Math., 243, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999), 3-13.

But a second observation is that those contributions, the products of significant research mathematicians, are possible because they have developed a deep knowledge of the problems of pre-college mathematics. They have invested effort to learn about phenomena and environments, people and problems, very far from the everyday world of mathematical research". (p. 423)

Per illustrare come un matematico possa contribuire in modo sostanzioso alle ricerche in didattica della matematica egli presenta le sue ricerche con D. Ball sulla MKT, così definite:

"We use the term "mathematical knowledge for teaching" to represent the mathematical knowledge, skills, habits of mind, and sensibilities that are entailed by the actual work of teaching. And by the "work of teaching" we mean the daily tasks in which teachers engage, and the responsibilities they have, to teach mathematics, both inside and outside the classroom, for example: planning lessons, designing and modifying tasks, communicating with parents about their children's work and progress, introducing concepts, writing and assessing tests, etc. These comprise the specialized tasks in which teachers need to know and use mathematics in a variety of ways.

[...]

Thus, contrary to popular belief, the purely mathematical part of MKT is not a diminutive subset of what mathematicians know. It is something distinct, and, without dedicated attention, it is not something likely to be part of the instruction in content courses for teachers situated in mathematics departments". (p. 429)

E conclude così:

"Let me conclude here by summing up my argument about productive interactions among mathematics, mathematicians, and mathematics education.

- The mathematics profession has a long and honorable tradition of involvement in mathematics education.
- Eminent mathematicians from around the world, and throughout history, have exemplified this tradition.
- Important contemporary mathematicians are continuing, and expanding, this tradition.
- This work can be productively pursued in the spirit of "applied mathematics" by first deeply understanding the domain of application.
- As practitioners of the discipline, research mathematicians can bring valuable mathematical knowledge, perspectives, and resources to the work of mathematics education.
- This is a tradition worthy of continued development and support". (p. 430)

Questo articolo è molto importante per noi: mette in luce una chiave di lettura "esterna" delle ricerche sulla MKT, che emerge solo in modo implicito dagli articoli di Ball & Bass sull'argomento, dove si ha una lettura molto "interna" delle loro PRARIDID⁽⁴⁾. Ora, mentre il nostro quadro di Ricerca per l'Innovazione si adatta molto bene a inquadrare i secondi articoli (lo abbiamo accennato sopra), esso va molto più stretto per analizzare il tipo di questioni messe in luce nel primo. L'articolo, infatti, tratta per così dire di una questione di relazioni tra comunità scientifiche diverse (di cui spesso anche noi discutiamo): un intellettuale che appartiene ad entrambe a pieno titolo (Bass oltre che ricercatore in didattica della matematica è anche un eminente algebrista: si veda la sua biografia in: <http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Bass.html>) si assume il compito di tessere un collegamento culturale rilevante fra le due comunità di intellettuali; e questo fu anche un carattere costante della sua azione quale presidente dell'ICMI verso l'IMU.

Recentemente anche Elena Nardi (Nardi, 2008) in Inghilterra si è occupata della stessa tematica, in

⁴ Useremo provvisoriamente questa terminologia un po' vaga. Nella seconda parte chiariremo in modo più preciso le due categorie.

un suo libro in cui confronta la comunità dei matematici con quella dei didattici della matematica, cercando punti di incontro. Nardi infatti studia dall'interno la comunità dei matematici nel mondo universitario e dei ricercatori in didattica della matematica, cercando occasioni di incontro e intreccio proficuo. Per esempio, da un questionario posto ai professori di matematica sull'utilità che può avere la ricerca in didattica della matematica, traiamo le seguenti risposte:

BENEFITS I - Benefits from using mathematics education research

The value of educational research II: articulating problems

M: ... my background drives my preference towards the experimental method but my emphasis is clearly on identifying sources of difficulty, helping students overcome difficulty, boosting confidence, achieving learning.

The value of educational research III: content-specific 'teacher training'

M: ... there is a need to translate those into specific recommendations for mathematics... [UK university training courses for new lecturers] are often bogged down to epitomizing the worst aspects of professional education by being content-less... the difference between the specific, the meaningful and the vague is a big one! And I am not saying that talking across various disciplines cannot be illuminating...

BENEFITS II - Benefits from engaging with mathematics education research.

The value of engagement with educational research I: the potent experience of participation in a collaborative study

M: ... there are things I will teach differently. There are things I understand better of mathematics students. I appreciate the questioning aspects of the discussion and I realise how one should be liaising with the other lecturers and discussing what things we are doing that confuse them.

Openness, diversity, written feedback, spoken word, communication.

Il messaggio di Nardi tutto sommato è positivo: da una maggiore collaborazione, che nasce proprio dentro le Università, si possono raccogliere benefici sia per i matematici, che diventano più sensibili nei confronti della didattica, come si vede dalle precedenti risposte, sia per gli studiosi di didattica della matematica, che (pensiamo soprattutto alla realtà italiana) possono conquistare uno status di maggiore visibilità ed essere meno isolati nei Dipartimenti di Matematica.

Questa componente così importante per interpretare le nostre PRARIDID è di fatto implicita nel quadro ABCD, ma anche in quasi tutti i quadri teorici più usati al di qua e al di là dell'Atlantico. Si preferisce cioè un discorso prettamente "interno" (ossia riferito a componenti quali A, B, C, D o altre come quelle che compongono la MKT negli articoli di Ball & Bass), mentre la componente "esterna" (come quella discussa nell'articolo di Bass) è generalmente lasciata da parte.

Riflettendo su di essa, ci siamo resi conto che anche le nostre analisi avevano lo stesso difetto. Per dare un'idea della connotazione specifica che la riflessione condotta su queste linee assume per le nostre PRARIDID, esemplificheremo su di un esempio, che parte dalle MKT ma approda ben presto ai nostri lidi della ricerca didattica.

3. Un esempio di MKT (Mathematics Knowledge for Teaching)

Utilizzeremo per questo l'introduzione scritta da P. Sullivan al volume *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (Knowledge for teaching mathematics, pp. 1-12), che emblematicamente e sinteticamente centra con un bell'esempio il significato della MKT perlomeno dal punto di vista interno, come del resto fanno Ball e Bass nei loro articoli rivolti ai didattici (ovviamente ci si può riferire all'ampia bibliografia sulla MKT⁵ per approfondire questo

⁵ Ball, D. L., Charalambous, Y. C., Thames, M., Lewis, J. M. (2009). Teacher knowledge and teaching: viewing a complex relationship from three perspective. In Tzekaki, M. et al. (a cura di). *Proceedings on 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educations*, vol. 1, Thessaloniki, Greece, 121-125.

aspetto).

L'idea di fondo della MKT, la cui definizione abbiamo visto prima nell'articolo di Bass, è presentata in questo modo da Sullivan:

"To illustrate the complexity and challenge of identifying the expected knowledge for teaching mathematics, three perspectives on the knowledge needed for teaching are described in the context of a particular mathematics question that I, with Doug Clarke (see Chapter 6, this handbook, this volume) and Barbara Clarke (see Chapter 10, this Handbook, volume 3), asked of several teachers. As a part of a survey we gave to teachers, one question invited teachers to respond to a prompt that sought insights into the extent to which they could describe the content of a particular mathematics question or idea, and the ways that they might convert the question to a lesson".

The following is a description of an idea that might be used as the basis of a lesson

Which is bigger $\frac{2}{3}$ or $\frac{201}{301}$?

La discussione con gli insegnanti evidenzia almeno tre punti di vista da cui si può rispondere alla domanda: la conoscenza matematica, quella specifica per l'insegnamento della matematica e la conoscenza pedagogica. Esse sono tutte necessarie a chi insegna e coinvolgono anche le credenze degli insegnanti. I tre punti di vista corrispondono abbastanza bene alle tre componenti A, B, C della ricerca in didattica della matematica che abbiamo descritto, per cui la competenza richiesta agli insegnanti, che deve essere costituita da un'integrazione delle tre, è qualcosa classificabile come parte della componente D. Muoviamo quindi, a quanto pare, in un contesto familiare. La cosa è confermata tanto più in quanto troviamo esempi simili, per non dire identici, proposti in importanti libri di testo italiani come quelli della Castelnuevo e di Prodi, in cui le varie componenti emergono in modo più o meno esplicito.

Per esempio nel volume di E. Castelnuevo, *La via della Matematica* NUMERI, La Nuova Italia (1965), troviamo questi esercizi:

Es. N 60 pag 414

Per confrontare $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ si può ragionare così:

$$\frac{2}{3} < 1 \text{ di } \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{4} < 1 \text{ di } \frac{1}{4}$$

$$\text{Essendo } \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$$

Ball, D. L., Thames, M. H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? In *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Ball, D. L., Bass, H. (2003). Toward practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In Davis, B., Simmt, E. (a cura di). *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* Edmonton, AB: CMESG/GCEDM, 3-14.

Risulta che $\frac{3}{4}$ è più vicina all'unità di quanto non sia $\frac{2}{3}$. E' dunque $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$. Con un ragionamento di questo tipo si confrontino le frazioni $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{6}$

Es 61 pag 414

Confrontare $\frac{5}{8}$ e $\frac{2}{5}$

Attenzione, non perdetevi tempo! Osservate che $\frac{5}{8} > \frac{1}{2}$ mentre $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$...dunque

ES.62 pag 414

Basandosi sulle osservazioni fatte nell'esercizio precedente confrontare

$\frac{3}{5}$ e $\frac{1}{8}$
 $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{15}$

es.76 pag 416

Aumentando di 1 il numeratore e il denominatore di una frazione, cambia il valore della frazione? Fare un esempio.

Es.77 pag 416

Aumentando di 1 il numeratore di una frazione, di quanto varia la frazione? E diminuendo di 1 il denominatore? Fare un esempio.

La componente A appare esplicitamente a livello di testo e le componenti B, C, D rimangono implicite anche se potrebbero essere suggerite all'insegnante attento dalla sequenza di esercizi proposta. Si tratta per così dire di MKT solo parzialmente esplicitata (certamente chiara nella testa della Castelnovo).

G. Lolli nelle sue lezioni sulla dimostrazione discute perché si può capire che $\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} < \frac{1}{1000000}$ senza fare calcoli. Siamo in piena componente A (l'insegnante potrà eventualmente sviluppare le sue considerazioni sulla MKT su sua iniziativa). Esempi simili troviamo anche nelle domande dell'INVALSI, si veda ad esempio la Tabella 3.

Prova nazionale III media esame 2008-2009		
Domanda	Commento	Oggetti di valutazione, processi, compito
D10 In una scuola con 300 allievi, 45 tifano per la squadra del Borgorosso. Quale delle seguenti affermazioni è vera? A. Un ragazzo su 6 è tifoso del Borgorosso. B. I tifosi del Borgorosso sono il 25% degli allievi.	Lo studente deve saper collegare rappresentazioni diverse nell'ambito Numeri: linguaggio naturale (un ragazzo su 6...), percentuali e frazioni. È stata risolta correttamente dal 73,4% degli studenti, ma entrambe le opzioni A e B hanno avuto percentuali di risposta intorno al 10%.	OGGETTI DI VALUTAZIONE: Rapporti, percentuali e proporzioni. PROCESSI COGNITIVI: Conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (<i>verbale, scritta, simbolica, grafica, ...</i>). COMPITI:

C. I tifosi del Borghorosso sono il 15% degli allievi. D. Un quinto degli allievi è tifoso del Borghorosso.	<i>Dalle Indicazioni per il curricolo 2007: utilizzare numeri decimali, frazioni e percentuali per descrivere situazioni quotidiane.</i>	Conoscere la frazione come rapporto e come quoziente di numeri interi. Saper passare da una frazione ad una percentuale o al numero decimale e viceversa.
V elementare 2010-2011		
D14. $\frac{2}{7}$ e $\frac{7}{2}$ indicano lo stesso numero? A. Sì. Perché le cifre sono le stesse B. Sì, perché $7 \times 2 = 2 \times 7$ C. No, perché $\frac{7}{2}$ è maggiore di un intero e $\frac{2}{7}$ no D. No, perché non sono numeri ma frazioni	Risposta corretta C Lo studente deve confrontare due frazioni e scegliere l'argomentazione corretta. Nel distrattore D l'affermazione (NO) è corretta, ma la motivazione non lo è. Rispondono correttamente il 56,6% degli studenti; il 20% sceglie l'opzione B e il 17,4% sceglie l'opzione D	AMBITO PREVALENTE Numeri COMPITO Individuare una risposta corretta sulla base della motivazione OGGETTO DI VALUTAZIONE Frazioni equivalenti PROCESSO PREVALENTE Acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...)

Tabella 1.1. Esempi da prove INVALSI

Qui la componente D è più presente: i processi degli allievi sono esplicitamente considerati e trattandosi di prove Invalsi si pensa che un insegnante sia particolarmente attento a questi commenti. Ora, la struttura con cui le prove sono presentate ci ricorda immediatamente la struttura di altri prodotti didattici, frutto delle PRARIDID della comunità dei ricercatori italiani nell'ultimo decennio, in particolare *La Matematica per il cittadino* e il progetto *m@t.abel*⁶, con l'ovvia influenza di altre ricerche, come le prove del progetto OCSE-PISA.

Tuttavia le clausole (i)-(iv) caratterizzanti la componente D (vedi sopra), in particolare la clausola (i) "produrre esempi paradigmatici di miglioramento dell'insegnamento matematico (ad es. progetti di rinnovamento curricolare complessivo o parziale)", sono riduttivi rispetto sia alle proposte del curriculum e degli esempi dell'UMI-SIS, sia al progetto *m@t.abel*, sia alle proposte Invalsi. Succede qualcosa di analogo a quanto rilevato per l'articolo di Bass: l'analisi è carente. Là era il discorso degli intellettuali delle due comunità a confronto; qui è più il rapporto con le istituzioni. Infatti in tutti i progetti citati la componente istituzionale è fortemente presente: nel primo caso si ha un progetto sviluppato nell'ambito del Protocollo d'intesa UMI (poi anche SIS) MPI/MIUR; nel secondo caso si tratta di un progetto ministeriale, che coinvolge migliaia di insegnanti; nel terzo si ha una procedura ufficiale di valutazione che coinvolge tutte le scuole italiane. La componente istituzionale è essenziale per valutare appieno i progetti di cui si tratta e il significato delle proposte/prove contenute nei vari progetti assume un significato per l'insegnante che dipende anche dal suo situarsi all'interno di un discorso istituzionale. Riflettendo sulle nostre PRARIDID ci siamo così resi conto di quanto forte sia divenuto il loro intrecciarsi con questa "componente istituzionale". Il significato di quella che oltre oceano chiamano la MKT e noi "Ricerca per l'innovazione" ne risulta profondamente mutato. I tre gruppi di ricerca hanno maturato questa

⁶ <http://umi.dm.unibo.it/old/italiano/Matematica2001/matematica2001.html>,
http://risorsedocentipon.indire.it/offerta_formativa/f/index.php?action=home&area_t=f&id_ambiente=7

consapevolezza e hanno sentito il bisogno di darsi degli strumenti di lettura opportuni per entrare dentro a questi nuovi aspetti delle PRARIDID.

Approfondendoli, ci si è accorti come questi due aspetti dell'approccio "esterno" ci portano a considerare due nuove componenti:

- (a) **le istituzioni** (locali, nazionali) e il rapporto delle nostre PRARIDID con queste;
- (b) il definirsi della comunità dei ricercatori in didattica della matematica come gruppo di **intellettuali** che interagisce con le istituzioni.

Queste due componenti non sono presenti da oggi, ma l'analisi che faremo evidenzierà un'evoluzione di queste componenti esterne, profondamente intrecciata con quelle interne, descritte nel precedente quadro della Ricerca per l'Innovazione. Ne risulterà un panorama più complesso, che comprende certamente il vecchio quadro, nonché i vari elementi propri della MKT (Fig. 1), che chiameremo *Ricerca didattica di innovazione nelle istituzioni*.

Questo vi racconteremo nel seminario. Partiremo dalla presentazione di una doppia serie di "fatti" su cui baseremo la nostra analisi:

1) Descriveremo sinteticamente la *sequenza cronologica* di vari progetti e interventi nazionali sulla formazione degli insegnanti di matematica, concentrandoci in particolare sulla tipologia di prodotti che ne sono risultati (articoli di ricerca, materiali didattici, ecc.).

b) Descriveremo in modo sintetico *tre esempi* presi dalle nostre PRARIDID di questi ultimi anni: MO1, MO2, TO che riguardano in modi diversi la formazione di insegnanti in servizio. Vedremo anche come le nostre PRARIDID integrate in questo quadro siano evolute verso quelle che abbiamo chiamato *le pratiche e le riflessioni teoriche riguardanti la formazione degli insegnanti* (PRARIFOR).

Descriveremo i due tipi di "fatti", sottolineando sia le loro componenti "interne" sia quelle "esterne". Successivamente passeremo ad una loro interpretazione, elaborando in modo opportuno le due componenti nuove sopra accennate (rapporto con le istituzioni e ruolo come intellettuali). Ne risulteranno alcuni costrutti teorici forse interessanti di per sé, ma certamente utili ad analizzare le nostre PRARIDID entro un quadro teorico più ampio, che integri le nuove componenti emerse con quelle del vecchio quadro della Ricerca per l'Innovazione. Naturalmente si tratta di una prima lettura di queste nuove componenti. Come scriveva Dumas, vent'anni dopo abbiamo scoperto un filo conduttore che collega molti fatti: erano nelle fibre della nostra memoria ma non avevamo ancora realizzato questi collegamenti, finché questi non sono stati risvegliati dalle riflessioni originate dal dottorato di Torino.

Il seminario di quest'anno ha quindi una sua peculiarità, sottolineata dal titolo: non presenta tanto risultati di ricerche, ma si presenta come una riflessione sulle nostre ricerche (perlomeno su quelle di alcuni di noi) secondo quelle pratiche di *reflective practitioners* suggerite da Schön (1983), cioè di professionisti esperti che non sono soltanto immersi nelle proprie pratiche, ma anche pienamente consapevoli di ciò che fanno e quindi producono un complesso di riflessioni sulle loro PRARIDID. Per questo motivo, siamo coinvolti a riflettere su variabili del primo e del secondo ordine, esterne e interne.

A nostro parere si tratta di una riflessione molto importante e quindi auspichiamo non solo di suscitare un vivace dibattito, ma anche di avere utili punti per il proseguimento di questa ricerca comune che abbiamo avviato.

LE COMPONENTI DELLA RICERCA DIDATTICA ITALIANA

	<u>Componenti del I ordine</u>			<u>Filone del II ordine</u>
<u>COMPONENTE</u>	<u>A</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>D</u>
	LA DIDATTICA BASATA SUI CONCETTI	INNOVAZIONE IN CLASSE	OSSERVAZIONE DI PROCESSI IN 'LABORATORIO'	RICERCA PER L' INNOVAZIONE
CHE COSA Oggetto	L'insegnamento della <u>Mat.</u> in situazioni "generiche"	L'insegnamento della <u>Mat.</u> in situazioni "specifiche"	L'insegnamento della <u>Mat.</u> in situazioni "specifiche"	L'insegnamento- <u>apprendimento</u> della Matematica
PERCHE'?	Produrre idee <u>per</u> migliorare l'insegnamento della Matematica	Produrre <u>miglioramenti</u> per l'insegnamento della Matematica	Produrre strumenti <u>per</u> migliorare l'insegnamento- <u>apprendimento</u> della Matematica	Produrre <u>miglioramenti</u> per l'insegnamento della Matematica e <u>strumenti</u> <u>per</u> migliorare l' <u>ins-appr</u> della Matematica
Obiettivi	L'attività è spiegata / progettata <u>in</u> termini di concetti	L'attività è spiegata / progettata <u>in</u> termini di <u>esempi</u> paradigmatici	L'attività è spiegata / progettata <u>in</u> termini di <u>difficoltà</u> <u>cognitive</u> o schemi di interazione	L'attività è spiegata / progettata <u>in</u> termini di concetti difficoltà <u>cognitive</u> o schemi di interazione <u>studiati</u> in casi paradigmatici

Tabella 3.2. Variabili del primo ordine (Santarem, 1999)- continua-

COME scelte	Determinate da esigenze culturali	Determinate da esigenze pratiche	Determinate da esigenze di ricerca	Determinate da esigenze culturali, pratiche, di ricerca
Problemi specifici	Prodotti dell'insegnamento matematico (performances & attitudini)	Innovazione nella classe (processi a breve & lungo termine)	Modelli di insegnamento- apprendimento (processi a breve & medio termine)	Innovazione nella classe & prodotti dell' insegn. Mat. (performances & attitudini) & Modelli di insegnamento- apprendimento (processi a breve & lungo termine)
Localizzazione della ricerca	Al proprio tavolo	Vita quotidiana nella classe	Esperimenti opportunamente montati	Al proprio tavolo & Esperimenti opportunamente montati (esperimenti di insegnamento) nella classe
Metodologie	Pragmatiche	Ricerca-Azione pragmatica, e sperimentale	Induzione sperimentale Osservazione distaccata	Sperimentali Osservazione partecipante
Influenza sul sistema educativo	Curriculum inteso	Curriculum migliorato	Curriculum raggiunto	Relazioni tra il Curriculum inteso, migliorato e raggiunto
basata su	formazione insegnanti	espansione graduale	ulteriore tecnologia	espansione graduale & formazione insegnanti
RISULTATI	Libri di testo; griglie per analizzare testi; syllabus	Progetti per l'innovazione curriculare	Modelli di insegnam.- apprendim. (tassonomie, gerarchie, schemi di interazione)	Progetti per l'innovazione curriculare & Modelli di insegnam.- apprendim.
CONTROLLO	Nella Matematica	Forti connotazioni sociali	Paradigma delle scienze cognitive s	Kit di strumenti (validità locale)
Cornice teorica	Scarsa attenzione alla psicologia	Scarsa attenzione al controllo teorico	Scarsa attenzione ai contenuti matematici	Complementarità

Tabella 3.2. Variabili del primo ordine (Santarem, 1999)- fine-

VARIABILI DEL SECONDO ORDINE



T E M I	1. COSTRUZIONE SOCIALE DEL SAPERE	2. CONTESTI REALI	3. TEORIA E TEOREMI	4. STORIA ED EPISTEM.
1.	Discussione <u>matematica</u>	Mediazione Semiotica (I gesti)	Discussione Argomentazione Dimostrazione	Lettura Interpretazione di fonti storiche (voci-eco)
2.		Campi di Esperienza	Unità Cognitiva	
3.		Dragging	Teoremi	Analisi/Sintesi



Tabella 3.3. Variabili del secondo ordine (Santarem, 1999)

2. I FATTI: Il filo della storia sulla formazione degli insegnanti in progetti nazionali

Anni	Progetto e/o intervento	Osservazioni rispetto alla formazione insegnanti	Prodotti
1970-2000	NRD-CNR	Insegnante-ricercatore e ricercatori: Gruppi di Ricerca in Didattica della Matematica.	Articoli su riviste nazionali e internazionali. Partecipazione a convegni. Incontri annuali, Internuclei, fino al 1999 circa.
1985-1993	PNI	Piano Nazionale Informatica (secondaria); Protocollo d'intesa UMI-MIUR; docenti formatori e formazione a tutti i docenti di matematica delle superiori.	Materiale cartaceo e digitale distribuito ai docenti partecipanti. Libri scolastici.
1985-1987	PPA	Piano Provinciale di Aggiornamento per i docenti di scuola elementare (post programmi 1985) organizzato dalle Università dopo l'introduzione dei moduli. Ricercatore come esperto disciplinare.	Materiale cartaceo e digitale distribuito ai docenti partecipanti. Libri scolastici.
1994-1999	Corsi di Viareggio	Corsi di aggiornamento per docenti selezionati per titoli, di tutti i livelli scolari, a livello residenziale di una o due settimane (Viareggio e Lugo). Nati dopo il protocollo d'intesa siglato da UMI e MIUR. Sono tematici e coinvolgono come formatori docenti universitari di matematica e didattica della matematica. Coinvolgono anche le tecnologie.	Quaderni della Direzione Classica. Sono monografie ciascuna dedicata a un corso, stampata a spese del MIUR e distribuita alle scuole.
1999-2008	SISS	Formazione iniziale dei docenti della scuola media e superiore. In molti casi i responsabili dei NRD sono direttamente coinvolti e il legame con gli insegnanti ricercatori si è esplicitato con il ruolo del supervisore al tirocinio. La figura dell'insegnante accogliente è essenziale per lo svolgimento del tirocinio.	Materiali cartacei e digitali distribuiti agli specializzandi. Pubblicazioni su web. Articoli su riviste per docenti. Le tesine sono occasioni per approfondimenti di ricerca.
1999-oggi	SFP	Formazione iniziale dei docenti della scuola elementare. Il tirocinio è il momento di raccordo tra la formazione e l'esperienza in classe. Spesso insegnanti-ricercatori sono coinvolti come supervisori al tirocinio. La figura dell'insegnante accogliente è essenziale per lo svolgimento del tirocinio.	Materiali cartacei e digitali distribuiti agli specializzandi. Pubblicazioni su web. Articoli su riviste per docenti. Le tesine sono occasioni per approfondimenti di ricerca.

2001	Progetto SeT (Scienza e tecnologia)	Progetto finanziato da MIUR (C.M. 131/2000) che coinvolse i ricercatori, gli insegnanti dei nuclei di ricerca e le scuole con insegnanti sperimentatori. I docenti coinvolti come esperti di buone pratiche e i ricercatori come responsabili scientifici. Sito INDIRE http://www.bdp.it/set/area1_esperienzesuole/cm131/5.htm ⁷	Sito web navigabile su sito Indire. Progetti dedicati alla matematica: che hanno coinvolto i NRD (NA, MO, GE, PI, PV, ecc)
2002-2003	Progetto Collaborativo di Ricerca	Progetto finanziato dal MIUR che ha coinvolto le Università e docenti della scuola secondaria e primaria selezionati con prove selettive (Progetto Dutto)	CD di ogni Università con i materiali delle sperimentazioni e Convegno finale con presentazioni di tutti i progetti.
2001-2005	Matematica per il cittadino 2001-2003	Convenzione CIIM e MIUR , raccoglie esempi di attività didattiche e gli esiti della ricerca in didattica della matematica. I docenti della Commissione CIIM e gli autori vengono da: NRD, PNI, PPA.	Volumi ⁸ <i>Matematica 2001</i> (scuola elementare e media), <i>Matematica 2003</i> (primi 4 anni scuola superiore), <i>Matematica 2004</i> (ultimo anno scuola superiore).
2004-oggi	Progetto Lauree Scientifiche (PLS)	Frutto di un protocollo d'intesa tra MIUR, Università e Confindustria . Mira a innalzare l'apprendimento e l'insegnamento delle discipline scientifiche. Coinvolge tutto il territorio italiano creando una stretta sinergia tra Università, scuole e imprese. Coinvolge gli insegnanti in un duplice modo: come docenti in attività di formazione e come docenti in attività di insegnamento. Si crea un dialogo proficuo tra ambiti scientifici diversi, analogo a quello del Master in Didattica delle Scienze.	Siti web, seminari, attività, pubblicazioni divulgative sia per la formazione docenti, sia per gli studenti.
2006-2008	Master in Didattica delle Scienze	Gestito da otto università italiane e coordinato da G. Luzzatto, il Master aveva la finalità di dare una formazione specifica ai docenti in servizio. Nello specifico: costruire, sperimentare e validare un modello di formazione universitaria avanzata di insegnanti sull'insegnamento di Matematica e Scienze nella scuola primaria e nel primo ciclo della scuola secondaria. Si crea un dialogo proficuo tra ambiti scientifici diversi, analogo a quello del Progetto Lauree Scientifiche.	Sito web con pubblicazione dei materiali usati dai docenti nei corsi, tesine e tesi finale degli studenti.

⁷ Purtroppo, e senza nessuna spiegazione, i materiali dei progetti SeT sono stati eliminati dal sito ufficiale dell'INDIRE. Qualche progetto è possibile reperirlo in qualche sito locale delle Università che hanno partecipato al progetto (ad esempio sul sito DIDMAT dell'università di Genova http://didmat.dima.unige.it/set_linguaggi/index.html e http://didmat.dima.unige.it/set_modelli/index.html).

⁸ Reperibili in formato pdf al sito <http://umi.dm.unibo.it/old/index.html>

2006-oggi	M@t.abel e M@t.abel-PON (rivolto alle 4 regioni PON)	Piano nazionale di formazione per la diffusione di <i>Matematica per il cittadino</i>. Strettamente connesso ai cambiamenti nelle Indicazioni Nazionali del I e II ciclo. Gestito da MIUR-INDIRE. I docenti coinvolti nella formazione sono chiamati ad una partecipazione attiva attraverso la stesura di diari di bordo e incontri on-line in sincrono con i tutor m@t.abel spesso cresciuti nei NRD o col PNI. I ricercatori svolgono il ruolo di responsabili scientifici. Da ottobre 2011 tutti i materiali sono pubblici a disposizione delle scuole. http://risorsedocentipon.indire.it/offerta_formativa/f/index.php?action=home&area_t=f&id_ambiente=7	Piattaforma su Breeze gestita dall'INDIRE con attività tratte per lo più dai volumi <i>Matematica per il cittadino</i> e rielaborate con vari suggerimenti. Documento di spiegazione delle attività con nodi concettuali e competenze. Versione navigabile e versione testuale a disposizione sul sito dell'INDIRE.
2008-oggi	Prove INVALSI (SNV-PN) ⁹	Il Quadro di Riferimento¹⁰ deve molto a <i>Matematica per il cittadino</i> (vedi la distinzione fra processi e contenuti). Realizzato da INVALSI su mandato del MIUR¹¹. Tra gli autori delle prove di matematica una parte consistente viene dai NRD, PNI e M@t.abel. Le prove INVALSI non sono direttamente coinvolte nella formazione, ma hanno un'influenza sulla diffusione di elementi della ricerca didattica fra gli insegnanti di tutta Italia. http://www.invalsi.it/invalsi/index.php	Sito web con prove, griglie di correzione, guide alla lettura delle prove, Quaderni di approfondimento¹² e collegamenti col sito OCSE-PISA. Rapporto sui risultati del campione italiano stratificato su base regionale.
2009-oggi	PQM PON PQM Centro e Nord	Il Progetto PQM (Progetto Qualità e Merito) è un progetto del MIUR gestito da INDIRE. Si pone l'obiettivo di diffondere la cultura della valutazione (Italiano e Matematica) ed è rivolto alle scuole secondarie di I grado. Il comitato scientifico è formato da ricercatori universitari e docenti esperti e in ogni realtà territoriale si sono selezionati insegnanti formatori tutor e insegnanti sperimentatori. Sono previste attività di formazione in presenza e su piattaforma. http://risorsedocentipon.indire.it/offerta_formativa/e/index.php?action=home&area_t=e&id_ambiente	Sito web con materiale e attività didattiche. Sono previste all'inizio e alla fine del percorso prove di verifica specifiche predisposte da INVALSI

⁹ SNV: Servizio di Valutazione Nazionale effettua la rilevazione degli apprendimenti in lettura e matematica nelle classi II e V primaria, I secondaria di I grado e II secondaria di II grado). PN: prova nazionale di lettura e matematica all'esame di stato di fine primo ciclo.

¹⁰ Quadro di riferimento di matematica per le prove INVALSI
http://www.invalsi.it/snv2012/documenti/QDR/QdR_Matematica.pdf

¹¹ Direttiva MIUR del 3-10-2011 <http://www.invalsi.it/snv2012/index.php?action=normativa>

¹² Il primo quaderno è quello relativo ad una riflessione sui punti deboli e i punti forti dell'insegnamento della matematica che emerge dalla rilevazione 2011 dei risultati nella classe II scuola secondaria di II grado (a cura di M. Impedovo, A. Orlandoni e D. Paola) <http://www.invalsi.it/snv2012/index.php?action=quadernisnv>

Come si situano questi elementi nell'intreccio Ricerca e Formazione?

- I **Nuclei di Ricerca Didattica** (NRD) sono organizzati all'interno delle Università, vedono la partecipazione di docenti della scuola e professori universitari, che collaborano con le modalità di ricerca per l'innovazione; furono costituiti grazie all'iniziativa di G. Prodi con il CNR. Hanno prodotto molti progetti di ricerca didattica, libri, convegni, ricercatori (molti nostri attuali ricercatori strutturati variamente nell'Università nacquero come assegnisti presso questi Nuclei). Sono durati almeno vent'anni: moltissimi dei materiali prodotti in quegli ambiti sono poi confluiti in *Matematica per il Cittadino* (UMI-CIIM), che ha visto fra i suoi autori molti insegnanti e ricercatori provenienti da quei gruppi.
- Il **Piano Nazionale per l'Informatica** (PNI) è caratterizzato da un approccio all'informatica, in indirizzi non specialistici, mirato *“a creare nella scuola un clima culturale volto a percepire dal punto di vista informatico problematiche vecchie e nuove”* e quindi inserito all'interno della matematica e della fisica. Come diceva Prodi: *“Vi sono profonde ragioni di carattere culturale che legano l'informatica ai capitoli più tradizionali della matematica: sono rami che escono da uno stesso tronco”*. Per tale ragione, furono formati tutti i docenti di matematica e di fisica, prima del biennio, poi del triennio, infine delle scuole italiane all'estero, nel giro di pochi anni. Per riuscire nell'impresa, il Ministero reclutò dei formatori, prima tra docenti scelti ad hoc tra coloro che si occupavano già da anni autonomamente di informatica, poi tramite prove selettive per esame. Tali docenti, una volta selezionati, furono distaccati dalla scuola, formati a loro volta con 120 ore in presenza e alcune settimane a distanza (tramite libri e materiali da leggere, compiti da fare), quindi raggruppati in equipe di tre-quattro e inviati nelle scuole polo distribuite sul territorio nazionale. Si trattò di un'operazione istituzionale, a partire dall'introduzione dei nuovi programmi sperimentali (1985 del biennio, 1991 del triennio). Il collegamento con la ricerca si ebbe nella formazione dei formatori. Docenti universitari, esperti di tecnologie e ispettori vennero coinvolti in questa formazione. I docenti formati erano distaccati dalla scuola per tre settimane non consecutive. Dopo la frequentazione ai corsi, tali docenti potevano richiedere l'attivazione della sperimentazione nelle loro sedi (attraverso l'approvazione fatta dal collegio docenti e inviata al Ministero). Durante la sperimentazione, a livello regionale gli IRRSAE organizzavano corsi di supporto alla sperimentazione. Il PNI ha influenzato profondamente il modo di affrontare la matematica con le tecnologie e molti formatori hanno avuto modo di partecipare al dibattito, alla ricerca, a nuove sperimentazioni ecc. Molti di loro non hanno più abbandonato la formazione dei docenti, confluendo nelle SISS, fondando associazioni di insegnanti (ADT, DIFIMA, Istituto di GeoGebra, la Casa degli Insegnanti, ...).
- Il **Piano Provinciale di Aggiornamento** (PPA) per i docenti di scuola primaria fu gestito dal Ministero, a partire dall'introduzione dei nuovi programmi della scuola elementare del 1985. Si trattò di una formazione in presenza con distacco dei docenti, raggruppati a livello provinciale, che coinvolse vari docenti universitari e insegnanti dei Nuclei nella produzione dei materiali per l'aggiornamento.
- I **corsi di Viareggio** furono organizzati dal MIUR, ma il coinvolgimento dei ricercatori fu maggiore rispetto al PNI e PPA, in quanto fu siglato il protocollo d'intesa tra UMI e Ministero. Quindi i ricercatori entrarono nella gestione della formazione dei docenti in servizio, che furono selezionati ogni anno sulla base dei loro titoli. Si trattava di corsi residenziali in cui una trentina di docenti partecipava ad attività di vario tipo, dalla lezione frontale ad esercitazioni, dall'uso

delle tecnologie ad attività di gruppo. I materiali utilizzati in quella sede per la formazione pubblicati sui Quaderni della Direzione Classica e distribuiti alle scuole. A differenza di PNI e PPA coinvolsero direttamente solo docenti selezionati.

- **La formazione iniziale dei docenti della scuola media e superiore (SISS)** nasce nel 1998 a seguito della normativa per la formazione emessa nel 1990¹³. Si tratta quindi di un'operazione istituzionale, questa volta gestita dalle Università. La difficoltà si percepisce subito e consiste nel coordinamento dell'iniziativa a livello nazionale. La formazione dei futuri docenti coinvolge laureati che accedono alle Scuole di Specializzazione per prova selettiva a esame di titoli, scritto e orale, con punteggio e graduatoria finale. Gli specializzandi sono formati nella disciplina (per es. matematica, matematica e fisica o matematica e scienze per le medie), nelle scienze dell'educazione, e svolgono attività di tirocinio nelle scuole. Entrano in contatto con diverse figure di riferimento: il docente universitario responsabile della formazione e con cui fanno l'esame, il supervisore di tirocinio che li segue nel percorso biennale, nella sperimentazione in classe e nella stesura della tesina e con l'insegnante accogliente nella classe dove sperimentano. L'articolazione della formazione è estremamente complessa e le difficoltà di rapporti si percepiscono soprattutto nel dialogo tra docenti dell'area disciplinare e quelli dell'area delle scienze dell'educazione.
- La formazione iniziale dei docenti di **Scienze della Formazione Primaria**¹⁴ è analoga a quella delle SISS. Per la prima volta, nel nostro Paese è richiesto un titolo di studio universitario per accedere ai ruoli della scuola primaria. Diversi fra i ricercatori dei NRD si ritrovano incardinati nei corsi di SFP.
- **Il progetto SeT** (Scienza e Tecnologia) fu gestito dall'Indire, su incarico del MIUR, che finanziò i quindici progetti risultati vincitori sulle centinaia di progetti presentati. L'obiettivo era la diffusione di materiali per la scuola. Si trattò quindi di un progetto nato all'interno delle istituzioni ma che coinvolgeva direttamente l'Università (il responsabile scientifico del progetto doveva essere un ricercatore universitario). Molti tra i ricercatori e insegnanti dei NRD parteciparono al progetto SeT. I materiali pubblicati erano frutto di sperimentazioni e studi di ricerca, resi fruibili per la disseminazione fra le scuole e gli insegnanti. Il sito creato ad hoc dall'Indire presentava i materiali in forma navigabile, come le più moderne piattaforme oggi a disposizione dei docenti.
- Il progetto **Collaborativo di Ricerca** (progetto Dutto) è un'iniziativa nata all'interno del MIUR, che ha finanziato le Università che a loro volta hanno coinvolto i docenti della scuola (elementare, media e superiore, tramite procedura selettiva) nella produzione e sperimentazione di materiali per l'aggiornamento dei docenti. La finalità generale del Progetto era quella di legare i processi linguistici a quelli dell'apprendimento della matematica, e ciascuna sede ha svolto ricerche specifiche su questo tema. Obiettivo del Progetto era coinvolgere i docenti della scuola in attività di progettazione, sperimentazione e ricerca di attività matematiche. Punto debole del progetto è stato quello della disseminazione dei risultati, che non hanno avuto ampia diffusione, nonostante la pubblicazione su CD e il Convegno finale a Bellaria (RM) nel 2003.
- Il piano curricolare presentato dall'UMI come **Matematica per il cittadino** nasce all'interno della ricerca, perché si tratta di un'iniziativa dell'UMI (nel frattempo anche la SIS – Società

¹³ [Legge 19 novembre 1990 n. 341](#)

¹⁴ D.P.R. 31 luglio 1996, n. 471 http://www.edscuola.it/archivio/norme/decreti/dpr471_96.html

Italiana di Statistica – si era aggiunta al protocollo d'intesa con il Ministero, come emanazione diretta dei NRD). Si tratta di un passaggio cruciale rispetto alle iniziative precedenti, in quanto si pensa in modo curricolare e non attraverso singole attività. In seguito al dibattito internazionale sulla riforma della scuola, un po' guidato anche dalla pubblicazione del curriculum americano NCTM Standard 2000, in tutti i Paesi del mondo si parla di curricula moderni, del nuovo millennio. In diversi seminari della durata di una settimana vengono coinvolti molti fra gli insegnanti dei NRD per la preparazione delle attività didattiche da inserire in un volume che dovrà essere diffuso nelle scuole. Vengono realizzati *Matematica per il cittadino 2001* (per il primo ciclo di istruzione), *Matematica per il cittadino 2003* (per la secondaria di II grado, fino al quarto anno) e *Matematica per il cittadino 2004* (dedicato all'ultimo anno della scuola secondaria di II). Questi materiali saranno utili per il dibattito nella commissione creata dalla CIIM che si occupa di fornire una proposta curricolare al Ministero. In tutte le versioni della riforma del primo ciclo, fino a quelle Moratti, Fioroni¹⁵ e Gelmini¹⁶ (per il II ciclo), la proposta UMI-CIIM influenza il curriculum ministeriale.

- Il **Progetto Lauree Scientifiche** (PLS), frutto della collaborazione del Ministero dell'Università e dell'Istruzione, della Conferenza Nazionale dei Presidi di Scienze e Tecnologie e di Confindustria è nato nel 2004 con la motivazione iniziale di incrementare il numero di iscritti ai corsi di laurea in Chimica, Fisica, Matematica e Scienza dei materiali. A tal fine si è concentrato nel quadriennio 2005-2008 su tre obiettivi principali: migliorare la conoscenza e la percezione delle discipline scientifiche nella Scuola secondaria di secondo grado, offrendo agli studenti degli ultimi tre anni di partecipare ad attività di laboratorio curricolari ed extra curricolari stimolanti e coinvolgenti; avviare un processo di crescita professionale dei docenti di materie scientifiche in servizio nella Scuola secondaria a partire dal lavoro congiunto tra Scuola e Università per la progettazione, realizzazione, documentazione e valutazione dei laboratori sopra indicati; favorire l'allineamento e l'ottimizzazione dei percorsi formativi dalla Scuola all'Università e nell'Università per il mondo del lavoro, potenziando ed incentivando attività di stages e tirocinio presso Università, Enti di ricerca pubblici e privati, Imprese impegnate in ricerca e Sviluppo. Le attività che si sono svolte tra il 2005 e il 2008 hanno coinvolto circa 3.000 Scuole e 4.000 docenti della scuola secondaria, nonché circa 1.800 docenti universitari. Per ottenere questo risultato, si è consolidata nel tempo una efficace rete di relazioni fra soggetti e rappresentanti istituzionali: a livello nazionale (MIUR, Confindustria, Conferenza Nazionale dei Presidi delle Facoltà di Scienze e Tecnologie); a livello regionale (USR, Atenei e Associazioni di imprese); a livello territoriale (istituti scolastici, docenti della Scuola e dell'Università, istituti di ricerca, imprese). Il Piano è proseguito con due successive edizioni, ed è tuttora in corso, grazie a nuovi finanziamenti.
- Il **Master in Didattica delle Scienze** è un'iniziativa nata all'interno dell'Università, con lo scopo di elevare la professionalità dei docenti delle scuole primarie e secondarie di primo grado, ed è stato organizzato con corsi e laboratori suddivisi in tre tipologie di saperi: disciplinare, sui processi di apprendimento, didattico. L'obiettivo del Master è sviluppare, negli insegnanti che lo frequentano, attitudini e competenze riguardanti la progettazione, la gestione e la verifica di percorsi curricolari efficaci ed efficienti, in collaborazione fra colleghi (anche di aree disciplinari diverse) e fra scuole, e l'analisi del loro esito nelle classi, in stretta interazione con

¹⁵ http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/indicazioni_nazionali.pdf

¹⁶ INDICAZIONI Nazionali per i nuovi Licei

http://nuovilicei.indire.it/content/index.php?action=lettura_paginata&id_m=7782&id_cnt=10497

gruppi di ricerca e imparando ad accedere in prima persona ai risultati della ricerca didattica e ad utilizzarli anche in funzione di sperimentazioni debitamente controllate.

- [m@t.abel](#) e [m@t.abel PON](#) (rivolto alle quattro regioni del Sud -Obiettivo Convergenza- Sicilia, Campania, Calabria e Puglia) sono piani di formazione nazionale strettamente legati ai materiali di *Matematica per il cittadino*. Vedono la partecipazione dei docenti formatori e autori da una parte, in formazione dall'altra. Si avvalgono di una formazione blended (in presenza e a distanza), in cui la figura del tutor è chiave per la guida e la formazione di comunità di pratica. Da ottobre 2001 i materiali e le attività del progetto sono pubblici e a disposizione di tutte le scuole del paese come strumenti di formazione degli insegnanti¹⁷.
- **Rilevazioni INVALSI.** Dall'a.s. 2007-2008 l'INVALSI, su mandato del MIUR, ha predisposto la rilevazione degli apprendimenti in lettura e matematica. Nel 2010-2011 la rilevazione ha riguardato la II e V primaria, la I classe secondaria di I grado e la II classe secondaria di II grado (SNV) e la Prova Nazionale (PN) all'esame di stato conclusivo del primo ciclo di istruzione. La rilevazione coinvolge tutte le scuole del paese ed è censuaria (tutti gli alunni delle classi di riferimento). Ogni anno esce il rapporto nazionale sul campione italiano (stratificato su base regionale e per macroaree¹⁸). All'inizio dell'anno scolastico successivo, alle scuole vengono inviati (in forma riservata) i risultati che potranno quindi essere utilizzati per una analisi interna e un confronto con la regione di riferimento e il paese. Il Quadro di Riferimento per la matematica descrive *quale* matematica valuta la prova INVALSI e *come* la valuta. Il quadro si basa sulle Indicazioni Curricolari (che a loro volta molto devono ai curricoli UMI, *Matematica per il cittadino*), sulle pratiche didattiche più diffuse, e sui risultati delle ricerche internazionali (prevalentemente TIMSS e PISA). Gli autori delle prove sono insegnanti esperti e una parte consistente proviene dai NRD, PNI e [m@t.abel](#). Oltre alle prove rilasciate ogni anno, sul sito dell'INVALSI, si trovano le griglie di correzione, le guide alla lettura (con osservazioni di tipo didattico utili agli insegnanti per una riflessione sui processi di soluzione messi in atto dagli studenti) e Quaderni di approfondimento. Pur non coinvolgendo direttamente i docenti in attività di formazione esse stanno per certi versi indirizzando le pratiche degli insegnanti e in molte scuole si sono creati gruppi di docenti che analizzano i fascicoli dei propri studenti e fanno un'analisi didattica dei risultati e degli errori più frequenti.
Per le regioni dell'Obiettivo Convergenza dal 2009 è stato predisposto un piano di formazione informazione sulle rilevazioni nazionali (INVALSI) e internazionali (TIMSS e PISA) gestito dal MIUR e dall'INVALSI che ha coinvolto e coinvolge tutt'ora tutte le scuole di queste quattro regioni¹⁹.
- **Progetto Qualità e Merito (PQM) PON** (regioni Obiettivo Convergenza in modo diffuso) Centro e Nord (in misura minore). Il progetto del MIUR nasce per diffondere una cultura della valutazione. E' rivolto a docenti di matematica e italiano della scuola secondaria di I grado. la struttura è simile a quella del progetto [m@t.abel](#) con la presenza di tutor senior e insegnanti in formazione attraverso una formazione blended (su piattaforma e in presenza). La caratteristica principale è rappresentata dalla seguente sequenza di azioni: analisi dei risultati delle prove INVALSI, predisposizione di un piano di miglioramento con attività didattiche preparate dal

¹⁷ Materiali sul sito INDIRE

http://risorsedocentipon.indire.it/offerta_formativa/f/index.php?action=home&area_t=f&id_ambiente=7

¹⁸ Le macroaree italiane sono cinque: Nord-Ovest (Piemonte, Lombardia, Liguria e Valle d'Aosta), Nord-Est (Veneto, Friuli Venezia Giulia, Trentino Alto Adige, e Emilia-Romagna), Centro (Toscana, Lazio, Umbria e Marche), Sud (Abruzzo, Molise, Campania e Puglia), Sud e Isole (Basilicata, Calabria, Sicilia e Sardegna)

¹⁹ http://www.indire.it/piano_informazione_miur_invalsi/

comitato scientifico, verifica finale con prove predisposte appositamente da INVALSI e riconducibili al QdR INVALSI. Gli incontri di formazione sono scanditi periodicamente e hanno lo scopo di discutere delle attività scelte. Del comitato scientifico fanno parte ricercatori (alcuni provenienti dai NRD) e insegnanti esperti.

3.1 Il progetto regionale Laboratori delle Macchine Matematiche per l'Emilia-Romagna (MMLab-ER)

Rossella Garuti & Francesca Martignone
Università di Modena e Reggio Emilia

1. Attività e ricerche del Laboratorio delle Macchine Matematiche dell'Università di Modena e Reggio Emilia (MMLab)

Il Laboratorio delle Macchine Matematiche dell'Università di Modena e Reggio Emilia (MMLab²⁰) è un centro di ricerca sull'insegnamento e l'apprendimento della matematica con l'uso di strumenti, che opera anche come aula didattica per attività laboratoriali rivolte a studenti di ogni ordine e grado.

Il gruppo di ricerca del MMLab è formato da ricercatori, insegnanti-ricercatori legati all'Università di Modena e Reggio Emilia e dall'Associazione delle Macchine Matematiche²¹. Le attività del MMLab si inseriscono nel quadro della cosiddetta *Design Based Research*²² (DBE) nel settore educativo (Pellerey, 2005). La DBE, tenendo conto della realtà del contesto, mira a migliorare le pratiche didattiche attraverso l'analisi, la progettazione, lo sviluppo, la realizzazione di progetti innovativi e a lungo termine, basati sulla collaborazione tra ricercatori e insegnanti. Gli studi del gruppo di ricerca del MMLab riguardano principalmente le attività laboratoriali con le macchine matematiche²³ e si sono sviluppati all'interno delle *Ricerche per l'Innovazione* (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998): queste attività sono infatti state progettate tenendo conto degli aspetti storico-epistemologici, didattici e cognitivi coinvolti e delle relazioni di secondo ordine tra questi aspetti. Molti esempi di attività didattiche e progetti realizzati dal gruppo di ricerca del MMLab sono documentati nel libro "Macchine Matematiche: dalla storia alla scuola" (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006) e in articoli di ricerca pubblicati su riviste nazionali ed internazionali e su atti di convegni²⁴. Le ricerche del MMLab hanno generato l'ipotesi che le attività laboratoriali con le macchine matematiche, attraverso specifiche consegne focalizzate sulla costruzione di definizioni o sullo sviluppo processi di congettura e dimostrazione, siano un ambiente favorevole per l'insegnamento e apprendimento della matematica.

²⁰ www.mmlab.unimore.it

²¹ www.macchinematematiche.org

²² Informazioni sul gruppo di lavoro, sui suoi componenti e i consulenti, sulle attività e sui motivi ispiratori si possono trovare sul sito: www.designbasedresearch.org.

²³ Le macchine matematiche sono ricostruzioni di strumenti appartenenti alla fenomenologia storica della matematica. Esse si possono classificare in: *macchine per l'aritmetica*, come semplici calcolatrici meccaniche e abaci, e *macchine per la geometria*, come compassi, pantografi per le trasformazioni geometriche del piano, conicografi etc.

²⁴ Per una bibliografia completa vedere <http://www.mmlab.unimore.it/site/home/pubblicazioni.html>

Le motivazioni addotte per inserire questo campo di esperienza non consueto sono molto varie e spaziano tra gli aspetti affettivi (creare una migliore immagine della matematica e un miglior rapporto con essa), culturali (mostrare le relazioni tra la matematica e altri aspetti della cultura prodotta dall'uomo nella storia), innovativi (stimolare la creatività degli studenti) didattici (introdurre strumenti di valutazione significativi) e cognitivi (studiare processi di costruzione di significati e produzione di ragionamenti tipici dell'attività matematica). (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006; p. 91).

Uno dei risultati più importanti generati dalle ricerche del gruppo del MMLab è stato l'elaborazione del quadro teorico della *mediazione semiotica* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008). Questo quadro, che si pone esplicitamente nella tradizione Vygotskiana, ha come oggetto di studio le relazioni tra i contenuti matematici, il ruolo dell'insegnante, l'utilizzo di artefatti e l'attività laboratoriale svolta dagli studenti²⁵.

Parallelamente alle attività legate alla *Ricerca per l'Innovazione*, il gruppo di ricerca del MMLab ha anche sviluppato programmi per la formazione degli insegnanti. Le principali attività sono state sintetizzate da Bartolini Bussi nella seguente tabella.

Alcuni eventi istituzionali	anno	Infanzia	Primaria	Secondaria	Elaborazione quadro teorico
	1978				
PROGR. S. MEDIA	1979		FORMAZ. IN SERVIZIO		
	1980				
	1981		Quattro corsi poliennali		
	1982				
	1983			PROGETTI NELLA SCUOLA	
	1984	FORMAZ. IN SERVIZIO	Pubblicazione di Quaderni e Rapporti Tecnici	FORMAZ. IN SERVIZIO	
PROGR. S ELEM	1985			AUTOGESTITA	
Piano naz. aggiorn	1986	Corsi annuali			
1° internuclei SE	1987				
Formaz formatori	1988	Scuole infanzia Comune di Modena	Corsi aggiorn.	Pubblicazione di Quaderni	
	1989				
	1990	Corsi aggiorn.			
ORIENTAMENTI	1991			Avvio MOSTRE con CATALOGHI	
	1992			VISITE in laboratorio per le scuole	ATTIVITÀ DI RICERCA condotta da ricercatori
	1993		PROGETTI NELLA SCUOLA		
	1994				
	1995			Corsi aggiorn	Insegnanti-ricercatori, assegnisti, borsisti
	1996				
	1997		Corsi aggiorn.		
FORMAZ.INIZIALE	1998				

²⁵ Per approfondimenti vedere Seminario Nazionale del 2010 - <http://www.seminariodidama.unito.it/mat10.php>

INFANZIA e PRIMARIA	1999		PROGETTI SET		laureandi, dottorandi...					
	2000									
Matematica2001	2001									
	2002									
Matematica2003	2003									
A Reggio Emilia	2004									
FAC SCI FORM	2005									
	2006	Corsi aggiorn.	A Modena: Apertura MMLAB & Costituzione Associazione Corsi aggiorn.	ESTENSIONE A FORMAZ. INSEGN.						
IND. NAZ. 1CICLO	2007									
	2008				FORMAZ. IN SERVIZIO Comune di Modena Corsi aggiorn.	A RE: ARTEFATTI FATTIADARTE	A MO: MEMO PROBLEMI	FORMAZ. IN SERVIZIO Progetto regionale MMLAB – ER Anche fuori regione	Quadro della mediazione semiotica	
	2009									
IND. NAZ. 2CICLO	2010								Seminario nazionale 2010	
	2011					FORMAZ. IN SERVIZIO Progetto PERCONTARE			FORM in SERV	
	2012									
	2013									
	2014									

Tabella 1: Attività e programmi per la formazione di insegnanti seguiti dal MMLab
<http://www.mmlab.unimore.it/site/home/formazione-insegnanti.html>

In questo contributo sarà analizzato il progetto regionale “Laboratori delle Macchine Matematiche per l’Emilia Romagna”²⁶ (MMLab-ER) che ha dato l’opportunità di affrontare le seguenti problematiche: come si potevano condividere con gruppi numerosi di insegnanti e quindi diffondere nella scuola le ricerche sulle attività laboratoriali con le macchine matematiche? In particolare, come si potevano adattare, ampliare e integrare gli strumenti teorici elaborati nel quadro della *Ricerca per l’Innovazione* alla formazione degli insegnanti?

2. Il Progetto “Laboratori delle Macchine Matematiche per l’Emilia Romagna”

2.1. Cosa è il Progetto “Laboratori delle Macchine Matematiche per l’Emilia Romagna”

Il Progetto “Laboratori delle Macchine Matematiche per l’Emilia Romagna” (MMLab-ER) è un’esperienza nata dall’incontro tra Istituzioni regionali, Università, Scuola e Territorio: nello specifico dalla collaborazione tra Regione Emilia Romagna, Province, USR E-R, ANSAS EX IRRE, Università di Modena e Reggio Emilia, Centri di Documentazione Educativa e Scuole della regione Emilia Romagna. Questo Progetto si presenta come un esempio di buona collaborazione e comunicazione tra Istituzioni, Università, Scuola e Territorio²⁷ e quindi si sviluppa in un tessuto inter-reattivo e inter-retroattivo di voci diverse (Bartolini Bussi & Martignone, submitted).

²⁶ <http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna.html>

²⁷ *The triangle policy-practice-research: should build as much as possible on both mutual trust and critical (self)-reflection*” (Krainer, 2011, p. 48)

Il Progetto è stato finanziato nel biennio 2008/10 dalla Regione Emilia Romagna come Azione 1 del progetto “Scienze e Tecnologie per l’Emilia Romagna”²⁸ e nel 2012 proseguirà cofinanziato dalle Province²⁹. Il coordinamento scientifico del Progetto è affidato al Laboratorio delle Macchine Matematiche dell’Università di Modena e Reggio Emilia (nella prima fase i coordinatori scientifici sono stati Maria G. Bartolini Bussi e Michela Maschietto e nella seconda fase sarà Maria G. Bartolini Bussi). Rossella Garuti e Francesca Martignone sono state responsabili della preparazione del materiale, coordinatori del programma di formazione e docenti formatori.

Il Progetto MMLab-ER si propone di rispondere alle indicazioni e raccomandazioni internazionali (Inquiry Based Science Education - Rocard et al., 2007), e anche nazionali (Curriculi UMI- Matematica per il Cittadino³⁰, Indicazioni per il curricolo per la scuola dell’infanzia e per il primo ciclo d’istruzione, 2007³¹), sull’introduzione nella didattica della matematica di un approccio laboratoriale. L’idea di laboratorio seguita dal Progetto è ben espressa in questo estratto:

“L’ambiente del Laboratorio di Matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. La costruzione di significati, nel Laboratorio di Matematica, è strettamente legata, da una parte, all’uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall’altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l’esercizio di tali attività” (Matematica 2003).

Nei primi due anni del Progetto sono stati coinvolti circa cento insegnanti appartenenti a sessantacinque istituti scolastici: più del 60% appartenenti al secondo ciclo, il 18% a licei, e il rimanente a istituti tecnici e professionali. La formazione di gruppi di insegnanti in servizio di scuola primaria e secondaria esperti in didattica laboratoriale e nell’uso delle macchine matematiche è uno dei risultati principali di questa prima fase del Progetto. Gli insegnanti hanno, e stanno continuando a svolgere, sperimentazioni nelle loro classi seguendo le linee guida elaborate nei corsi del programma di formazione.

La documentazione del primo biennio del Progetto è raccolta nel libro “Scienze e tecnologie in Emilia Romagna” (Azione 1, (a cura di) Martignone, 2010) e in una sezione dedicata del sito del Laboratorio delle Macchine Matematiche di Modena³²: in particolare sono disponibili on-line, i materiali usati nei corsi di formazione, il libro finale del progetto, alcuni video e i report scritti dagli insegnanti per presentare e discutere le esperienze che hanno svolto con le loro classi.

2.2. Obiettivi e fasi del progetto MMLab-ER

La progettazione delle attività del MMLab-ER si è basata sul quadro teorico della *mediazione semiotica* e sull’idea di laboratorio di matematica proposta nei Curriculi UMI (Martignone & Bartolini, 2010) con l’assunzione che le attività laboratoriali possano diventare, attraverso specifiche consegne e l’utilizzo di macchine matematiche, un ambiente favorevole per l’insegnamento e apprendimento della matematica. Come dettagliato nei paragrafi precedenti, l’obiettivo del progetto MMLab-ER è diffondere su scala regionale metodologie che favoriscano l’insegnamento-apprendimento della matematica secondo le

²⁸ http://www.scuolaer.it/notizie/regione_scuola/fare_sistema_regione_emilia_romagna.aspx

²⁹ Nel biennio 2008/10 è stata costituita di una rete di laboratori di matematica nelle province di Bologna, Modena, Piacenza, Ravenna e Rimini e nell’anno 2012 è prevista l’estensione della rete alle province di Ferrara, Parma e Reggio Emilia.

³⁰ I documenti citati sono scaricabili dal sito: http://umi.dm.unibo.it/area_download--37.html

³¹ http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/indicazioni_nazionali.pdf

³² <http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna.html>

indicazioni nazionali ed internazionali, utilizzando i risultati delle ricerche e le esperienze maturate dal gruppo del MMLab.

Le principali fasi del Progetto sono: l'allestimento di laboratori di matematica attrezzati nelle province della regione Emilia Romagna; lo sviluppo di un programma di formazione per insegnanti in servizio; e lo sviluppo di sperimentazioni nelle classi ad opera degli insegnanti formati (Fig.1).



Figura 1: le Fasi del Progetto MMLab-ER

Nella prima fase del Progetto sono allestiti i Laboratori delle macchine matematiche presso centri di documentazione educativa e/o nelle scuole. Questi spazi sono attrezzati con macchine matematiche (80 esemplari in copie multiple tra macchine geometriche e aritmetiche), tavoli, seggiole, lavagne e altri materiali didattici per permettere lo svolgimento di sessioni di laboratorio con insegnanti e studenti. Le macchine geometriche del Progetto sono state costruite dall'Associazione delle Macchine Matematiche seguendo le indicazioni riportate in testi storici appartenenti a diverse epoche, dall'antichità classica al XX secolo (Zanoli & Martignone, 2010).

I docenti dei corsi di formazione e i tutor delle sperimentazioni sono selezionati tra i ricercatori e collaboratori del MMLab che hanno condiviso riferimenti teorici, obiettivi e materiali degli incontri (presentazioni Power Point, schede di lavoro per gli insegnanti, linee guida per i precorsi didattici, etc), offrendo così nelle diverse province un programma di formazione omogeneo.

Gli insegnanti coinvolti nel Progetto sono scelti attraverso un bando di selezione rivolto principalmente a docenti di matematica della scuola secondaria di primo e secondo grado, in quanto il Comitato tecnico-scientifico ha identificato in questo segmento di scuola uno snodo fondamentale legato, in particolare, all'introduzione del Nuovo Obbligo Formativo. La formazione ha quindi coinvolto principalmente insegnanti di scuola secondaria di primo e secondo grado, anche se alcune sedi hanno accolto le richieste di insegnanti di scuola primaria interessati alla tematica e al confronto con la scuola secondaria.

<i>Provincia</i>	<i>Ist. comprensivi, scuole primarie e secondarie di I gr.</i>	<i>Licei e istituti magistrali</i>	<i>Istituti tecnici, professionali, IIS, ISIS</i>	<i>Totale</i>
Bologna	12	2	1	15
Modena	8	2	2	12
Piacenza	5	4	2	11
Ravenna	8	2	2	12
Rimini	8	2	5	15
<i>Totale</i>	<i>41</i>	<i>12</i>	<i>12</i>	<i>65</i>

Tabella 2: Dati sulle sperimentazioni e studenti coinvolti per provincia nel biennio 2008/10

Durante il corso di formazione i docenti dei diversi ordini di scuola condividono gli stessi contenuti e metodologie in un'ottica di continuità verticale. Gli incontri del programma di formazione si presentano quindi come un'occasione per favorire il confronto e la discussione tra docenti di diversi ordini di scuola che possono condividere idee, linee guida dei percorsi didattici e riflessioni sul ruolo dell'insegnante e sui diversi aspetti culturali e di contenuto che possono emergere dalle esperienze laboratoriali con le macchine matematiche. Gli insegnanti hanno studiato oggetti creati nella storia per studiare matematica e per risolvere problemi focalizzando l'attenzione sulle potenzialità che specifiche attività con questi oggetti possono offrire per lo sviluppo del pensiero teorico: in particolare per lo sviluppo dei processi che vanno dalla genesi delle congetture alla costruzione delle dimostrazioni. Congetturare e dimostrare in matematica è infatti riconosciuto in tutto il mondo come una sfida educativa importante in quanto aspetto caratterizzante della cultura e dell'educazione matematica. Questo aspetto è ben presente sia nelle Indicazioni per il Curricolo 2007, sia nel Nuovo Obbligo di Istruzione. Lo sviluppo di tali processi però è considerato da molti insegnanti come una delle principali difficoltà che gli studenti incontrano, come emerge anche dalle indagini comparative internazionali e nazionali (TIMMS, PISA, INVALSI). Al fine di creare un'attenzione e una consapevolezza su questo tema, durante il programma di formazione è dato ampio spazio a riflessioni sui processi esplorativi ed argomentativi propri e altrui, discutendo le differenti possibili strategie e/o processi argomentativi che potrebbero emergere in classe e mettendo in luce la ricchezza che il confronto di strategie diverse può apportare alla attività didattica in classe facendone così uno strumento didattico. È importante sottolineare che il corso di formazione non prevede la preparazione di attività didattiche strutturate, (Unità didattiche o UDA³³) perché l'obiettivo è lavorare con gruppi di professionisti riflessivi al fine di sviluppare conoscenze e competenze relative agli aspetti epistemologici cognitivi e didattici legati alle attività laboratoriali con le macchine matematiche. Attraverso il Progetto si sono create *comunità di indagine* (Jaworski, 2006) che riflettono, discutono e sperimentano nelle classi una didattica laboratoriale con le macchine matematiche.

2.3. Ricerche di riferimento del Progetto MMLab-ER

Il background del Progetto consiste nelle ricerche condotte dal gruppo del MMLab sulle attività laboratoriali che si avvalgono dell'uso di strumenti: in particolare gli studi legati alla mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) e gli studi sui processi cognitivi che si sviluppano durante l'esplorazione delle macchine matematiche (Martignone & Antonini, 2009, Antonini & Martignone, 2011).

Il *quadro della mediazione semiotica* (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) è studiato dagli insegnanti coinvolti nel Progetto come strumento descrittivo e interpretativo delle attività laboratoriali di classe (Fig. 2).

³³ Unità Didattiche di Apprendimento (D. Lgvo 59/2004)

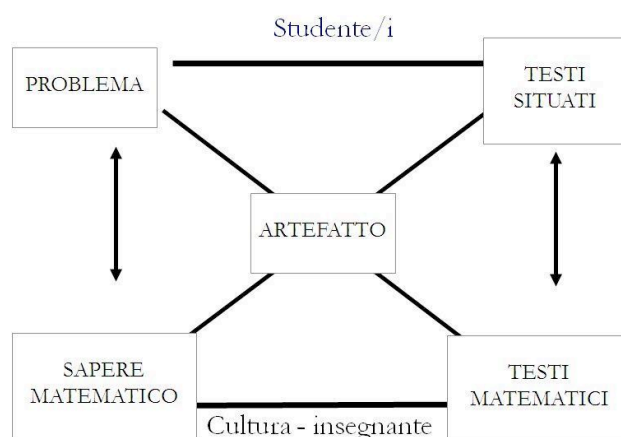


Figura 2: La mediazione semiotica

In alto si colloca lo spazio dei riceventi (gli studenti) che sono sollecitati a risolvere un compito con l'uso di un artefatto (una macchina matematica). Il compito è stato progettato dall'insegnante in relazione ad un certo significato matematico (vertice in basso a sinistra). Il vertice in alto a destra allude alle produzioni degli studenti (gesti, parole, testi scritti, disegni, ecc.) che consentono all'osservatore/insegnante di ipotizzare gli schemi d'uso messi in opera. Sugli schemi d'uso, che prevedono l'azione diretta degli studenti sulla macchina e sono riconoscibili dalle tracce osservate, l'insegnante fonda la costruzione dei significati matematici. [...] ... il lato destro dello schema allude al complesso processo di articolazione di uno o più cicli didattici che consentono la trasformazione e il collegamento dei testi prodotti dagli studenti e fortemente contestualizzati in testi matematici, coerenti con i significati da costruire. (Bartolini Bussi, 2010, p. 53)

Questo quadro è anche utilizzato dai responsabili della formazione come strumento per la progettazione delle attività con gli insegnanti: le attività laboratoriali con gli insegnanti infatti, analogamente a quelle con gli studenti, intervallano lavori a piccoli gruppi e discussioni collettive orchestrate dal docente che però nel corso di formazione ha il compito, non di mediare contenuti matematici, ma di esplicitare ed esaminare con gli insegnanti il ruolo degli strumenti, della metodologia laboratoriale e gli aspetti cognitivi coinvolti.

Tratto distintivo del programma di formazione del MMLab-ER è la scelta di svolgere gli incontri seguendo la stessa metodologia laboratoriale oggetto di studio da parte degli insegnanti durante il corso. Questa scelta tiene conto della ricerca internazionale nel settore della teacher education (ad esempio le ricerche presentate negli ultimi anni nei *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* in parte sintetizzati in Llinares & Krainer, 2008) perché si fonda sull'ipotesi che l'apprendimento degli insegnanti può essere stimolato da esperienze in cui gli insegnanti affrontano situazioni "simili" a quelle in cui si trovano i loro studenti in cui però specifiche consegne favoriscano il confronto e la riflessione tra gli insegnanti come professionisti (Watson & Sullivan, 2008).

Un nodo cruciale affrontato nella progettazione e sviluppo del programma di formazione è la questione su quali siano le conoscenze necessarie per un efficace insegnamento della matematica. È sicuramente fondamentale che gli insegnanti conoscano i contenuti matematici che insegnano, ma è evidente che questo non è sufficiente. C'è molto di più come sottolineato già da Shulman (1986): ad esempio trovare modi per descrivere, analizzare, interpretare, comunicare e mediare aspetti che vanno oltre la conoscenza della disciplina. Shulman mette in luce l'importanza di identificare e valorizzare la "conoscenza tipica dell'insegnante" sostenendo una compenetrazione tra conoscenza legate ai contenuti e

conoscenze pedagogiche e definendo all'interno delle conoscenze legate alla disciplina la *Pedagogical content knowledge* (PCK): "...the particular form of content knowledge that embodies the aspects of content most germane to its teachability". Tale conoscenza, secondo Shulman, caratterizza professionalmente gli insegnanti. Dalla metà degli anni '80 l'idea di PCK (*Pedagogical Content Knowledge*) è stata ampiamente usata per inquadrare e descrivere ricerche ed esperienze nella formazione degli insegnanti in molti campi, inclusi quelli relativi alla matematica. Un'ampia descrizione di queste ricerche, con particolare riferimento al campo della formazione degli insegnanti di matematica, si trova nell'articolo di A. Graeber & D. Tirosh (2008) nel *The International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Wood (Ed., 2008).

Le attività del progetto MMLab-ER hanno come focus i processi che si possono sviluppare attraverso specifiche consegne nell'esplorazione delle macchine matematiche e gli aspetti culturali³⁴ coinvolti. Per questo nel programma di formazione si è tenuto conto delle riflessioni di Boero & Guala (2008) sul ruolo dell'*Analisi Culturale dei Contenuti da insegnare* (ACC). Questa analisi tiene insieme e sviluppa le relazioni tra gli elementi provenienti dall'epistemologia della matematica, le conoscenze riguardanti la storia della matematica e la didattica della matematica³⁵.

*We would like to stress the importance of developing teachers' mathematical knowledge while at the same time integrating their content knowledge and calling into question **their ways of thinking about mathematics**. In order to attain this aim, we think that relevant tools can be derived from **epistemology of mathematics and history of mathematics**, in order to frame and substantiate the CAC component of teacher preparation. **Psychology of learning and mathematics education** can provide further tools in order to benefit from the CAC component and relate its contributions to educational choices.* (Boero & Guala, 2008; p. 227).

L'*Analisi Culturale dei Contenuti* aggiunge alla conoscenza professionale, generalmente intesa come conoscenza della disciplina e conoscenza pedagogica del contenuto (Pedagogical Content Knowledge, Shulman, 1986), la comprensione di come la matematica può essere organizzata in modi diversi secondo necessità diverse e circostanze sociali e storiche, e di come essa partecipi alla cultura umana in interazione con altri domini culturali (l'economia, la fisica, le scienze, la filosofia, ecc.). L'analisi culturale dei contenuti non fa quindi parte delle *Pedagogical Content Knowledge*³⁶. Boero e Guala (2008) descrivono e analizzano diversi casi relativi ad aspetti cruciali e delicati dell'insegnamento della matematica: in particolare il rapporto fra produzione di congetture e dimostrazione perché "*It is one of the characterizing features of mathematical culture*" (Boero & Guala, 2008, p. 231)³⁷. Seguendo queste riflessioni, nel programma di formazione del MMLab-ER si è

³⁴ Coerentemente con l'ottica Vygotskiana che fonda il quadro teorico del progetto, intendiamo come cultura "non come un deposito di idee e di testi già pronti, ma il meccanismo vivo della coscienza collettiva" (Lotman, 1980)

³⁵ È evidente come questa l'attenzione agli aspetti epistemologici didattici, cognitivi, e alle relazioni di secondo ordine tra questi, presente nella ACC ha le sue radici nella *Ricerca per l'Innovazione* (Arzarello & Barolini Bussi, 1998).

³⁶ "Connections between PCK and some aspects of CAC may be established only when dealing with different ways of representing a given topic or the relationships between students' conceptions and the social and historical roots of mathematical knowledge. As we have seen, according to the original definition of PCK by Shulman, PCK concerns knowledge of the content that is directly related to its teaching (ways of illustrating, exemplifying, explaining it), and students' content-related "conceptions and pre-conceptions". Neither mathematics as a culture (its possible organizations and their evolution across history), nor the dynamic relationships between mathematics and other cultures (two key aspects of CAC) are considered." Boero & Guala (2008)

³⁷ Conjecturing and proving in mathematics is recognized today as a major source of educational challenges all over the world because it is one of the characterizing features of mathematical culture. It is also a source of difficulty for students in high school and university mathematics courses. (Boero & Guala, 2008, p. 231)

sempre tenuto conto dell'importanza di far analizzare agli insegnanti attività in cui sia richiesto di congetturare, argomentare e dimostrare e mettere in luce la distinzione fondamentale fra processi (come esplorare, congetturare e argomentare) e prodotti (come le dimostrazioni).

3. Il programma di formazione del progetto MMLab-ER

Il progetto MMLab-ER può essere analizzato da punti di vista diversi (rapporto con le istituzioni, formazione insegnanti, sperimentazioni nelle classi, etc.) in questo intervento si focalizza l'attenzione sulla formazione degli insegnanti.

Gli obiettivi del programma di formazione sono:

- Studiare oggetti provenienti dalla fenomenologia della storia della matematica, le macchine matematiche, **per scoprire la matematica in esse incorporata e le loro potenzialità didattiche**;
- Immergere gli insegnanti in attività il cui focus sia sviluppare aspetti fondamentali del pensiero matematico come **il problem posing e solving, lo sviluppo dei processi legati alla genesi di congetture, alla produzione di argomentazioni e alla costruzione di dimostrazioni**;
- **Creare gruppi di insegnanti**, esperti nella metodologia laboratoriale e nell'utilizzo didattico delle macchine matematiche, che possano diventare *comunità di indagine*.

Il corso di formazione insegnanti prevede sette incontri in presenza (28/21 ore) divisi in circa tre mesi per ciascuna delle province coinvolte, mantenendo successivamente un contatto continuo attraverso lo scambio di mail, incontri di discussione sulle sperimentazioni e l'utilizzo di piattaforme Moodle per la condivisione di materiali e per lo sviluppo di forum (Garuti & Martignone, 2010; Maschietto, 2010).

3.1. Metodologia del programma di formazione

Durante il programma di formazione, dopo l'introduzione dei riferimenti alla letteratura e degli strumenti teorici relativi al quadro di riferimento del Progetto, sono sempre stati condivisi con gli insegnanti i focus delle attività, mettendo in luce gli aspetti cognitivi (attenzione ai processi), didattici (potenzialità della metodologia laboratoriale) e storico-epistemologici (le macchine matematiche come oggetti usati nella storia che incorporano leggi matematiche e il ruolo della dimostrazione nella cultura matematica). Le prime attività laboratoriali svolte durante il corso coinvolgono una macchina ben conosciuta da tutti gli insegnanti: il compasso (Martignone 2011 a, b). Negli incontri successivi gli insegnanti scoprono ed esplorano macchine a loro sconosciute come i pantografi per le trasformazioni geometriche del piano, le pascaline e alcuni conicografi (Garuti, 2011a, Martignone, in press). Coerentemente con il quadro teorico di riferimento e con le ipotesi di ricerca che fondano il Progetto (vedere par. 2.3), durante le attività laboratoriali del corso di formazione sono analizzate con gli insegnanti le potenzialità delle macchine come ambiente favorevole per lo sviluppo di processi di genesi di congettura e costruzione di dimostrazioni attraverso la proposta di specifiche consegne.

Nella tabella 3 sono sintetizzate le attività svolte in relazione alla macchine utilizzate dettagliando alcune consegne proposte agli insegnanti.

Macchine matematiche	Attività matematiche	Consegne per l'insegnante <i>Task for teacher</i>³⁸
Compasso	In Geometria Euclidea: • Costruire figure geometriche piane con riga e compasso • Dimostrare	<i>Costruite con riga e compasso un triangolo isoscele; presentate ai colleghi la vostra costruzione esplicitando i ragionamenti seguiti e lo sviluppo della costruzione argomentando le scelte fatte; trovate analogie e differenze tra le diverse costruzioni cercando di capirne le motivazioni</i>
Pantografi per le trasformazioni geometriche del piano ³⁹ Tracciatori di curve piane	In Geometria Euclidea e in Geometria Analitica: • Congetturare, argomentare e dimostrare • Problem posing and solving	<i>Esplorate e analizzate la macchina: Come è fatta la macchina? Cosa fa? perché lo fa? Confrontate le diverse dimostrazioni emerse. Cosa succederebbe se ... ?</i>
Pascalina	In Aritmetica: • Calcolo • Problem posing e solving	<i>Esplorate e analizzate la macchina: Come è fatta la macchina? Cosa fa? perché lo fa? Come avete utilizzato la Pascalina (nella costruzione dei numeri e nelle operazioni tra questi)? Quali caratteristiche della macchina avete sfruttato? In che modo? Quali conoscenze matematiche avete messo in gioco?</i>

Tabella 3: Macchine matematiche, attività matematiche e *task for teachers*

Nei primi incontri del programma di formazione sono state svolte e analizzate con gli insegnanti differenti costruzioni di figure geometriche mettendo in luce l'importanza delle costruzioni con riga e compasso nella storia della matematica e nell'insegnamento-apprendimento di questa. Il compasso, infatti, seppur molto usato a scopi pratici, non è spesso analizzato nei suoi aspetti teorici e nel suo ruolo fondante nella cultura della matematica. Gli insegnanti hanno affrontato la consegna individualmente e, successivamente, si sono confrontati in piccolo gruppo e collettivamente. Le *task for teachers* e la metodologia laboratoriale vogliono favorire la verbalizzazione dei processi risolutivi e delle argomentazioni relative alle costruzioni geometriche proposte. Durante le discussioni collettive emergono le diverse risoluzioni che sono analizzate e confrontate.

Nelle attività con i pantografi, i curvigrati e la pascalina, gli insegnanti lavorano in piccoli gruppi. A ciascun gruppo è dato un esemplare di macchina che non conoscono e di cui non è stato spiegato lo scopo per cui è stata costruita. I punti di attenzione sia nelle attività di piccolo gruppo, sia nelle discussioni collettive orchestrate dal docente formatore, sono quindi sulle caratteristiche fisiche e sugli schemi d'utilizzo; sulla produzione di congetture, argomentazioni e la costruzione di dimostrazioni (Antonini & Martignone, 2011);

³⁸ "We use "classroom tasks" to refer to questions, situations and instructions that teachers might use when teaching students and "task for teachers" to include the mathematical prompts many of which may be classroom tasks, that are used as part of teacher learning" (Watson & Sullivan (2008), p. 109)

³⁹ I pantografi sono meccanismi che stabiliscono una corrispondenza locale tra i punti di due regioni piane limitate collegandole fisicamente attraverso sistemi articolati e che incorporano le proprietà che caratterizzano la trasformazione geometrica del piano

sull'interazione tra pari e con esperti e l'importanza della verbalizzazione, del confronto e della discussione nelle attività laboratoriali con le macchine matematiche (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009, Martignone, in stampa). Come risulta evidente dalla lettura della tabella 3, l'esplorazione di tutte le macchine è guidata da una sorta di *script* costituito da una sequenza di *domande chiave* (Come è fatta la macchina? Cosa fa? Perché lo fa? Cosa succederebbe se ...?) che strutturano lo sviluppo dei processi di esplorazione, di produzione di ipotesi argomentate e di costruzione di dimostrazioni sul funzionamento della macchina e su come questa incorpori le proprietà matematiche caratterizzanti la legge implementata. Gli obiettivi di queste *task for teachers* sono: far conoscere agli insegnanti la macchina analizzando le sue componenti in quanto artefatto (Rabardel, 1995), gli schemi d'utilizzo e la matematica in essa incorporata (Martignone & Antonini, 2009); condividere con gli insegnanti lo studio e l'attenzione verso i processi di esplorazione, argomentazione e dimostrazione. Durante le discussioni finali sono anche condivisi con gli insegnanti i riferimenti storici riguardanti le macchine, le informazioni sul loro ruolo negli studi dei matematici che le hanno utilizzate e nelle attività legate al disegno e alla meccanica⁴⁰.

Il cuore del programma di formazione è costituito dalle attività di esplorazione dei pantografi per le trasformazioni geometriche del piano di cui analizzeremo un'attività specifica: l'esplorazione e analisi del Pantografo di Scheiner.

3.2. Esempi di attività svolte durante il programma di formazione: esplorazione e analisi del Pantografo di Scheiner

Le macchine geometriche utilizzate nel Progetto sono ricostruzioni di oggetti storici descritti in diversi tipi di documenti: come testi matematici (ad esempio scritti di Cavalieri, Van Schooten, Newton...) e trattati tecnici dall'epoca della Antica Grecia fino all'800⁴¹. In particolare sono oggetto di studio ricostruzioni di macchine rinascimentali.

“I biellismi e i sistemi articolati più antichi risalgono all'epoca alessandrina e alla cultura araba; nel '600, con l'opera di Cartesio, acquistano importanza teorica centrale, durevole e vasta; nell'800 infine, quando si forma e diventa fondamentale la teoria delle trasformazioni geometriche, conoscono nuova fortuna.” (M. Pergola et al., 2002; p.324).

A titolo di esempio descriveremo l'attività legata all'esplorazione del pantografo di Scheiner⁴². Questo pantografo è un artefatto usato, nella storia e tutt'oggi, per disegnare figure omotetiche.

⁴⁰ “In ogni epoca si può documentare un rapporto stretto tra geometria e meccanica: anche nei periodi (è il caso ad esempio della Grecia antica) in cui la struttura dello spazio culturale implica una separazione forte tra modelli teorici e attività pratiche. Lo studio di questo rapporto (sul quale i materiali esposti vogliono attirare l'attenzione) è importante sia per l'attività didattica che per la ricerca storica: migliora la comprensione di numerosi concetti, del modo in cui si sono formati, e induce a prendere in esame quella più generale rete di connessioni che svela, nel tempo, la co-appartenenza di scienza e tecnica, il loro fondamento comune”. Dall'Introduzione al “Theatrum Machinarum” (http://www.museo.unimo.it/theatrum/macchine/_00the.htm)

⁴¹ Per approfondimenti: sito dell'Associazione delle macchine matematiche <http://www.macchinematematiche.org/>

⁴² Il trattato “Pantographice seu ars delineandi” scritto da padre Scheiner (gesuita), astronomo tedesco (noto anche per i suoi rapporti con Galilei), ha avuto numerose traduzioni italiane. (Citiamo quella di G. Troili, Bologna 1653). Nell'introduzione, Scheiner racconta la vicenda che lo portò a scoprire il suo prospettografo. “Nel 1603 a Dillingen “un pittore eccellente” (si tratta di Pierre Gregoire – Petrus Gregorius– autore di “Syntaxeon artis mirabilis, Leyda 1575) si vantava con Scheiner di aver inventato uno strumento per disegnare, ma rifiutava in modo irritante di divulgarne i segreti. Provocatoriamente, Gregorius diceva di “non credere che una tale cosa potesse perfino essere immaginata; infatti, quella non era una invenzione umana, quanto una ispirazione divina, che egli riteneva essergli stata portata e rivelata non tramite gli sforzi umani, ma da qualche genio celeste”. Quanto avrebbe rivelato all'astronomo era che il suo strumento si basava sull'uso di compassi con un centro fisso. Scheiner si mise all'opera per conto proprio, e dopo un periodo di intensi tentativi produsse uno strumento di grande ingegnosità e di vasta utilizzazione, per copiare, ingrandire e ridurre i disegni, per rappresentare gli oggetti in prospettiva e per la produzione di composizioni anamorfiche” (Cfr.

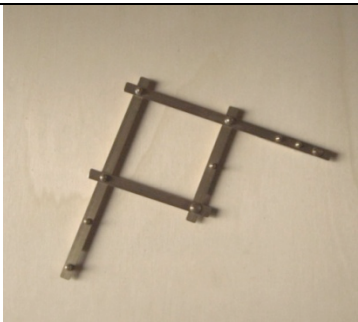
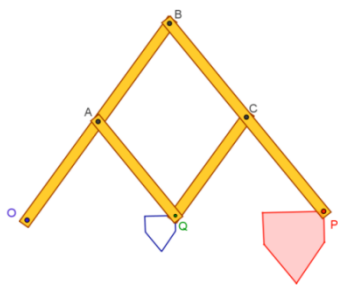
	
Foto del pantografo di Scheinere del progetto MMLab-ER	Immagine costruita con software di geometria dinamica
Il pantografo è costituito da quattro aste rigide incernierate nei punti A, B, C e Q scelti in modo da formare un parallelogramma (in questo caso un rombo). Il punto O è fissato al piano su cui il meccanismo si muove. Il punto P, sull'asta BC, è scelto in modo tale che risulti: $BP/BC=OB/OA=k$ (in questo caso $k=2$). Per come sono incernierate le aste, i punti O, Q e P rimangono allineati durante la deformazione del sistema e risulta sempre $OP=kOQ$ (visto che i triangoli OBP e OAQ sono simili). Quindi Q e P (detti tracciatori) si corrispondono in una omotetia di centro O. Considerando P come corrispondente di Q avremo il rapporto di omotetia $k=OP/OQ>1$. Se, invece, si considera Q corrispondente di P, avremo come rapporto di omotetia $1/k=OQ/OP<1$.	

Tabella 4: Pantografo di Scheiner

Analizziamo in dettaglio focus e obiettivi di ciascuna *domanda chiave* nel caso del pantografo di Scheiner.

Come è fatta la macchina?

Gli insegnanti analizzano l'artefatto: la struttura e il movimento del sistema articolato confrontano la lunghezza delle aste, studiano come sono incernierate al piano, tra di loro, etc. In questa prima fase si intrecciano aspetti legati alla struttura fisica della macchina e aspetti legati alla modellizzazione geometrica del sistema articolato: infatti gli insegnanti dicono “*Si forma un parallelogramma*”, “*Se immaginiamo di unire il punto fisso, e i tracciatori si possono vedere due triangoli isosceli congruenti*”. Le parti del sistema articolato diventano figure della geometria (e viceversa) che si possono manipolare e deformare. Gli insegnanti esplorano anche i movimenti della macchina identificando le zone raggiungibili e le relazioni tra le varie componenti.

Che cosa fa?

La domanda spinge verso lo sviluppo degli schemi d'utilizzo della macchina e verso l'analisi dei suoi prodotti. Questa attività porta alla generazione di congetture sulla trasformazione geometrica implementata dal pantografo: “*se muovo uno dei tracciatori, l'altro si muove del doppio*”, “*abbiamo disegnato un triangolo e con la macchina ne abbiamo tracciato uno simile*” “*fa ingrandimenti/ rimpicciolisce*”. In questa fase si discutono le proprietà delle figure che la trasformazione lascia invariate o cambia.

Perché lo fa? (costruire una dimostrazione)

In questa ultima fase si producono le argomentazioni a supporto delle congetture generate nella fase precedente. Queste argomentazioni si basano sugli elementi emersi dall'esplorazione dello strumento e possono avere radici nello studio delle caratteristiche

fisiche del sistema articolato o nelle analisi dei prodotti della macchina: “*i tracciatori si mantengono sempre alla stessa distanza dal punto fisso*” oppure “*le figure sono ingrandite e il rapporto è 1:2*”. Nella costruzione della dimostrazione gli insegnanti utilizzano questi argomenti e nella discussione collettiva vengono messe in luce le relazioni di continuità e rottura che si possono verificare durante questo processo⁴³. Le diverse dimostrazioni costruite dagli insegnanti sono confrontate e discusse collettivamente (esempi di dimostrazioni svolte dagli insegnanti si trovano in Garuti & Martignone, 2010).

Cosa succederebbe se...?

Alla fine dell'esplorazione del pantografo viene data un'ulteriore consegna che vuole promuovere lo sviluppo e la successive discussioni di soluzioni di attività di problem posing e solving (Watson & Sullivan, 2008). Agli insegnanti è richiesto di immaginare come si potrebbe modificare la macchina per avere rapporti di omotetia diversi: ad esempio il rapporto 1:3 o un rapporto negativo (Tab. 5).

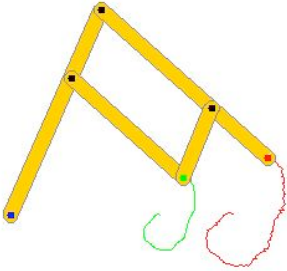
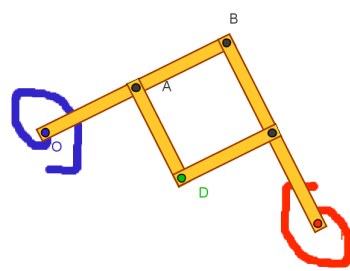
	
Omotetia di rapporto 1:3	Omotetia di rapporto negativo (simm. centrale)

Tabella 5: Variazioni del pantografo (<http://www.macchinematematiche.org/>)

Per svolgere questo compito gli insegnanti devono aver compreso in che modo la macchina riesce ad incorporare le proprietà caratterizzanti la trasformazione (invarianza del rapporti di proporzionalità tra le distanze dei punti trasformati con il centro di omotetia e allineamento di questi punti) e immaginare come modificare la macchina mantenendo queste e variando i parametri relativi al rapporto di omotetia. Le ipotesi di modifica della macchina sono poi state esplorate dagli insegnanti utilizzando software di geometria dinamica (ad esempio Cabri e GeoGebra) o costruendo altre macchine con materiali poveri (aste di plastica e/o materiali di recupero). Introducendo infine un sistema di riferimento cartesiano sono facilmente ricavabili le equazioni delle funzioni implementate dalle macchine trovando le relazioni tra le ascisse e le ordinate dei punti tracciatori messi in relazione.

I contenuti matematici proposti durante il corso di formazione non sono certo nuovi per gli insegnanti (trasformazioni geometriche del piano, costruzioni con riga e compasso, coniche, etc), ma sono affrontati in un modo ‘nuovo’ attraverso attività di laboratorio con le macchine matematiche. Tutto questo guidato da consegne che favoriscono la genesi del pensiero condizionale e lo sviluppo del problem posing e solving. Concludendo possiamo quindi dire che gli insegnanti sperimentano come, con un’opportuna metodologia e con specifiche consegne, le macchine matematiche possano diventare facilitatori per lo sviluppo di attività focalizzate: sull’analisi e sul confronto di strategie risolutive; sull’esplicitazione, la condivisione e la riflessione sui processi risolutivi; sugli aspetti storici legati alle macchine matematiche; su attività fondamentali nell’insegnamento-apprendimento della matematica come la produzione di congetture, argomentazioni e la costruzione di dimostrazioni in ambito geometrico.

⁴³ In diversi casi si sono osservati e discussi elementi di unità cognitiva (Garuti, et al. , 1996; Garuti, 2003) fra il processo di produzione di congetture e la costruzione della relativa dimostrazione .

3.3. Sperimentazioni nelle classi e riflessioni dei docenti

Tutti gli insegnanti coinvolti nel Progetto sono stati seguiti da tutor e formatori nella progettazione delle sperimentazioni (tabella 6) secondo la convenzione stabilita nel Progetto.

<i>Provincia</i>	<i>Numero di sperimentazioni</i>	<i>Numero studenti coinvolti</i>
Bologna	20	500
Modena	18	450
Piacenza*	18	760
Ravenna	16	450
Rimini	7	175
<i>Totale</i>	<i>79</i>	<i>2.335</i>

** Nel biennio, comprensive anche di visite ai laboratori ed eventi.*

Tabella 6 –Sperimentazioni e studenti coinvolti (2008/10) (Toma, p.14 in Martignone (ed), 2010)

La documentazione delle sperimentazioni si distingue in materiale condiviso solo tra gli insegnanti del Progetto e materiale pubblico. Appartengono alla prima tipologia le griglie di progettazione delle sperimentazioni prodotte dagli insegnanti e discusse durante il corso e i diari di bordo delle attività svolte in classe⁴⁴. Questi materiali sono stati condivisi e analizzati in parte durante gli incontri, in parte a distanza attraverso lo scambio di e-mail fra insegnanti, tutor e formatori e l'utilizzo di piattaforme Moodle. Alla seconda categoria, ossia al materiale pubblico, appartengono i materiali i video, le fotografie e i trentacinque report finali scritti dagli insegnanti (singolarmente o in gruppo) in cui sono presentate e analizzate le sperimentazioni del biennio 2008/10⁴⁵. La documentazione pubblica è raccolta nel sito del MMLab nella sezione dedicata ai risultati del Progetto⁴⁶. Alcuni docenti più motivati hanno anche prodotto articoli sulla loro esperienza pubblicati su libri e riviste nazionali o presentati a convegni (Concu, 2010 a, b; Banchelli, in stampa; Banchelli & Martignone, 2011; Ferrari, 2011, etc.)⁴⁷. Dalla documentazione delle sperimentazioni viene messo in luce un aspetto importante: la rielaborazione da parte degli insegnanti delle attività svolte durante la formazione in relazione alla classe di riferimento e agli obiettivi che si prefiggevano. In generale i docenti hanno trasformato le *tasks for teachers* presentate nella formazione in *classroom tasks*, mantenendo gli aspetti caratteristici relativi all'esplorazione della macchina matematica in esame e gli elementi fondamentali delle attività matematiche in gioco (congetturare, argomentare, dimostrare, porsi e risolvere problemi), ovviamente adattandoli alle loro realtà scolastiche. Si possono osservare alcuni elementi comuni a tutte le sperimentazioni e che rappresentano un risultato importante del Progetto MMLab-ER: l'attenzione ai processi di produzione di congetture argomentate fino alla costruzione di dimostrazioni; l'attenzione alla verbalizzazione scritta e orale delle costruzioni geometriche delle congetture prodotte; l'utilizzo di uno schema esplorativo comune a tutte le macchine (*Come è fatta? Cosa fa? Perché? Cosa succederebbe se...?*)⁴⁸; la rielaborazione di situazioni problematiche proposte nel corso di formazione. In particolare la domanda *Cosa succederebbe se...?* ha stimolato la creatività dei docenti, che hanno proposto diverse variazioni della macchina in esame. Nel caso del pantografo di Scheiner: *Cosa succederebbe se scambiassimo il punto fisso con un puntatore? Cosa succederebbe se il triangolo grande non fosse isoscele? Come ottenere ugualmente un'omotetia?* Un docente del corso ha presentato un disegno di un pantografo 'sbagliato' nel senso che la struttura della 'nuova' macchina manteneva alcune caratteristiche del pantografo di Scheiner, ma veniva a mancare

⁴⁴ Allegato 1: estratti dal diario di Bordo di Buonuono et al. 2010

⁴⁵ Allegato 2: un esempio di report finale (Silvegini, 2010)

⁴⁶ <http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna/risultati-del-progetto.html>

⁴⁷ Allegati 3-4: estratti dagli articoli di Concu (2011) e Banchelli & Martignone (in press).

⁴⁸ In genere nelle classi di scuola secondaria di II grado le domande sono state poste direttamente senza ulteriori guide, mentre nelle classi con studenti più giovani le domande sono state accompagnate da una serie di ulteriori domande aventi lo scopo di guidare l'esplorazione.

l'allineamento dei punti trasformati con il punto fisso. È stata posta la domanda: *perché questo pantografo non funziona?* (Fig. 4). Attraverso questa domanda l'insegnante voleva far esplicitare agli studenti (Istituto Professionale, classe seconda) le condizioni necessarie per definire la trasformazione geometrica prodotta dalla macchina.

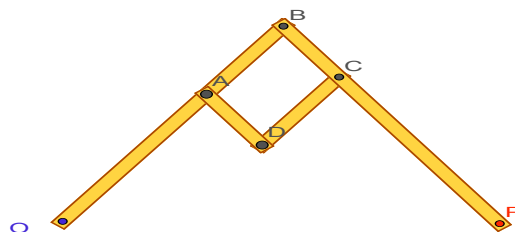


Figura 4 – Il pantografo “sbagliato”

Un aspetto ripetutamente osservato nelle attività degli studenti è stato l'interiorizzazione delle fasi esplorative di una macchina matematica. A questo proposito si riporta un estratto da una sperimentazione in una classe I di scuola secondaria di I grado seguita da R. Garuti (Garuti, 2011a). Agli studenti, dopo l'esplorazione di alcuni pantografi guidata attraverso le *domande chiave*, viene dato un esemplare del pantografo di Scheiner con la consegna di esplorarlo e di scrivere una relazione sulla macchina matematica in esame. Si può osservare come lo script di esplorazione (Come è fatta la macchina? Cosa fa? Perché lo fa?) sia seguito dagli studenti che autonomamente ne ripercorrono le fasi (anche se non tutte trattate in modo esaustivo).

Il pantografo di Scheiner ha una struttura piuttosto complessa. Rispetto agli altri pantografi analizzati negli ultimi giorni, questo presenta alcune differenze: non ha la guida, ha un solo punto imprigionato e 5 liberi, le 4 aste sono congruenti a due a due.

Sulla macchina abbiamo posizionato due fogli di carta con del nastro adesivo in modo da ricoprire tutto il piano sul quale dobbiamo disegnare. Abbiamo tracciato una lettera. Dopo aver riportato la figura con il tracciatore abbiamo notato che la lettera era il doppio di quella iniziale, poi abbiamo invertito il tracciatore con il puntatore e accadeva la cosa contraria, cioè disegnando una lettera ne abbiamo ottenuta un'altra dimezzata. Abbiamo poi unito i punti della lettera iniziale al punto imprigionato della macchina (centro) e abbiamo formato una specie di raggio. Questa trasformazione si chiama omotetia [viene chiesto il termine all'insegnante]. L'omotetia avviene perché la misura di un'asta minore viene riportata due volte sull'asta maggiore che ha tutti i punti liberi. La macchina ingrandisce per via della sua struttura: infatti quando noi puntiamo una figura l'asta minore riporta la misura dimezzata. Se volessimo riportare il triplo non dovremmo fare altro che sostituire al quadrato centrale il parallelogramma come illustrato nel disegno (Fig.3). (Giulia, Claudia, Flavia, Federica B., Alessandra).

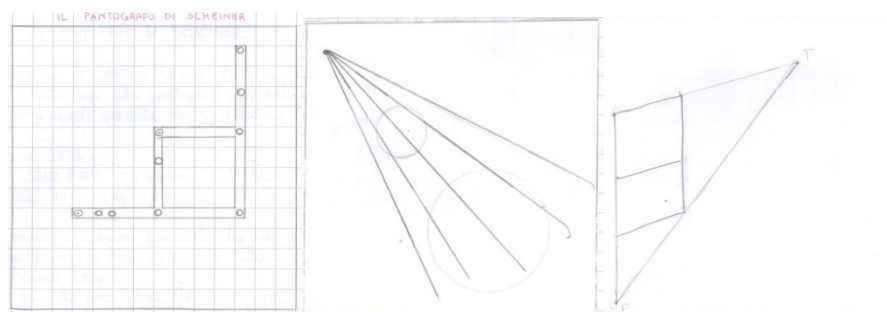


Figura 3 – Il pantografo di Scheiner descritto dagli studenti

In questo gruppo l'esplorazione dell'artefatto è completa e il passaggio dall'artefatto allo strumento è esplicito. Interessante è il tentativo di argomentazione che prende in esame il rapporto fra le aste, ma non coglie l'allineamento, nonostante l'aver connesso i punti delle figure trasformate con quelli della figura originale.

Dalle riflessioni riportate dai docenti nei loro diari di bordo e nei report finali delle sperimentazioni⁴⁹ emergono l'attenzione e la consapevolezza maturata verso i diversi momenti di interazione avvenuti in classe: processi messi in atto dagli studenti, attività di collaborazione e condivisione, discussioni collettive orchestrate dall'insegnante. Riportiamo brevemente alcune riflessioni scritte dagli insegnanti di diversi gradi scolari e di diverse tipologie di scuola (dalla scuola secondaria di primo grado, a licei ed istituti professionali).

“Lo spirito di gruppo e la collaborazione tra gli alunni sono stati rafforzati e anche gli alunni più deboli hanno avuto l'occasione di partecipare attivamente al lavoro condiviso da tutta la classe” (Buonuomo - Postal – Ferretti; scuola secondaria di I grado)

*[...] Anche la verifica ha avuto connotati diversi dalle verifiche tradizionali: ha prevalso il dialogo tra insegnante e studenti ed è stato possibile, da parte mia, **valutare i ragazzi durante i momenti di dialogo fra loro**. Questi ultimi avvenivano sia spontaneamente durante il laboratorio, ma anche dopo la compilazione delle varie schede, **stimolando il confronto su quanto scritto ...**”* (Concu; scuola secondari di I grado).

Questi commenti mettono in evidenza alcuni elementi importanti che gli insegnanti hanno riscontrato nello svolgere attività laboratoriali nelle loro classi: la collaborazione nelle attività di gruppo, la potenzialità didattica della verbalizzazione (sia orale, sia scritta) non solo usata per comunicare, ma soprattutto per confrontarsi e per riflettere. È interessante per noi vedere come gli insegnanti abbiano interiorizzato le idee fondanti il corso di formazione: l'attenzione verso i processi e gli aspetti culturali, come si vede dai seguenti commenti.

*“È stato interessante osservare i ragazzi all'opera **non solo per la qualità degli elaborati finali prodotti, ma anche per l'opportunità di poterli ascoltare nel momento in cui le loro idee venivano alla luce, esposte e concretizzate**”* (Banchelli; I liceo scientifico)

*“E' importante anche sottolineare, che la lezione di geometria in laboratorio non richiede più tempo rispetto all'insegnamento classico, anzi, lo riduce, poiché suggerimenti, **osservazioni e congetture fanno parte di una scoperta e di una crescita culturale di ognuno, nel rispetto dei propri modi e tempi di apprendimento**”* (Silvegni; I IPSIA, Istituto Professionale)

Dagli estratti risulta evidente che l'elaborazione di strategie risolutive, la genesi di congetture e la produzione di argomentazioni, sono processi osservati e analizzati dagli insegnanti come un'opportunità preziosa per capire i propri studenti, per aiutarli nell'apprendimento con la convinzione che lo sviluppo di tali attività sia parte integrante della loro formazione matematica.

3.4. Sintesi dei risultati del Progetto

I risultati principali del Progetto riguardano le ricadute nella scuola (e in generale, sul territorio) e la ricerca. Appartengono alla prima categoria: la creazione in Emilia-Romagna di **una rete di laboratori** e di una **rete di gruppi di insegnanti** formati sulla metodologia laboratoriale che si avvale dell'uso delle macchine matematiche; la produzione di **attività**

⁴⁹Tutti i report scritti dagli insegnanti si trovano sul sito della macchine matematiche nella sezione dedicata la Progetto regionale MMLab-ER: <http://www.mmlab.unimore.it/on-line/Home/ProgettoRegionaleEmiliaRomagna/RisultatidelProgetto/Reportdellesperimentazioni.html>

innovative nelle classi che hanno diffuso nella scuola **nuove metodologie didattiche**. Le Istituzioni regionali, in collaborazione con l'Università, hanno organizzato eventi e predisposto siti web affinché la **documentazione** di tutte queste attività fosse pubblicata e condivisa non solo tra gli insegnanti coinvolti nel Progetto, ma con tutti gli utenti interessati. In questo modo il Progetto è diventato un esempio dotato di una documentazione utilizzabile anche per **nuovi progetti** sviluppati sia nelle singole scuole dai docenti (ad esempio i progetti condotti da S. Banchelli e M.G. Silvegini, rispettivamente nella provincia di Bologna e di Rimini), sia a livello provinciale in altre regioni (progetto Mate-Macchine coordinato da N. Nolli nella provincia di Cremona). Questi nuovi progetti, arricchiti dalle esperienze maturate dagli insegnanti, hanno sviluppato ulteriormente le attività del nostro Progetto.

Dal punto di vista della ricerca, come è già stato sottolineato più volte in questo contributo, il Progetto è stato un'occasione preziosa per: **verificare di ipotesi di ricerca** elaborate dal gruppo di ricerca del MMLab; seguire sperimentazioni nelle classi; diffondere i risultati della ricerca nella scuola attraverso programmi di formazione di insegnanti in servizio. La progettazione e sviluppo del programma di formazione ha portato alla creazione di uno specifico quadro teorico di riferimento sulla formazione degli insegnanti in cui sono stati **adattati e integrati** prodotti delle ricerche nate all'interno della *Ricerca per l'Innovazione* alla formazione insegnanti e sono state tessute insieme ricerche provenienti da studi nazionali ed internazionali in questo ambito. Il Progetto ha inoltre generato ulteriori studi in cui si stanno esaminando le caratteristiche del programma di formazione del MMLab-ER in un panorama internazionale (Garuti & Martignone, under construction, Bartolini & Martignone, submitted).

Un ulteriore risultato del Progetto riguarda lo sviluppo delle relazioni dinamiche tra ricerca, insegnanti e scuole della regione Emilia Romagna: non solo i ricercatori hanno partecipato allo sviluppo delle attività nelle classi e alla diffusione e promozione di queste sul territorio, ma soprattutto sono stati creati solidi legami con gruppi di insegnanti che sono diventati *stakeholders in research* (Krainer, 2001).

4. Discussione

Partendo dagli studi condotti da Shulman (Shulman, 1986, 1987), e dagli studi di Boero & Guala (2008) nel Progetto MMLab-ER ci siamo confrontate con altri studi centrati sulla specificità delle conoscenze necessarie per l'insegnamento: in particolare con gli studi di Ball e colleghi (Ball et al., 2008; Bass, 2005) che, utilizzando le categorie di *knowledge* coniate da Shulman, hanno elaborato un costrutto in cui modellizzano le conoscenze che un insegnante di matematica dovrebbe possedere. Ball e colleghi hanno cercato di identificare, attraverso degli esempi tratti dalla pratica dell'insegnamento, quella che definiscono sinteticamente come la *Specialized Content Knowledge* (SCK) ossia "*the mathematical knowledge and skill unique to teaching*" (Ball et al, 2008, pag. 400). Questa è un insieme di conoscenze e abilità (*skill*) che non si riducono solo alla conoscenza della disciplina e neanche alla sola conoscenza pedagogica. Il modello di Ball & Bass (Ball & al. 2008) è rappresentato dal seguente diagramma (fig. 5).

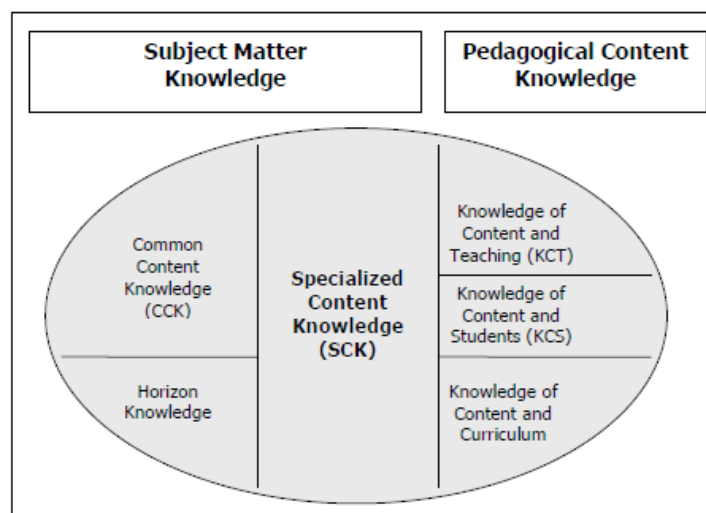


Fig. 5 *Mathematics Knowledge for Teaching* (Ball et al. 2008)

Sul lato destro del diagramma (Fig.5) abbiamo la *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) che è articolata in conoscenza dei contenuti e dell'insegnamento (*Knowledge of Content and Teaching*, KCT), relativa alle azioni dell'insegnante che hanno lo scopo di favorire la costruzione di significati matematici da parte degli studenti, come ad esempio scegliere appropriate rappresentazioni; in conoscenza dei contenuti e degli studenti (*Knowledge of Content and Students*, KCS), relativa alle ipotesi sui comportamenti degli studenti in un certo compito assegnato, come ad esempio aver presente quali sono gli errori più comuni che gli studenti fanno nell'applicazione di un certo algoritmo; infine abbiamo la conoscenza dei contenuti del curriculum (*Knowledge of Content and Curriculum*), che può servire all'insegnante per considerare il curriculum in termini di idee matematiche chiave.

Sul lato sinistro del diagramma (Fig.5) abbiamo la conoscenza della matematica come disciplina (*Subject Matter Knowledge*, SMK) nella quale si distingue la conoscenza matematica comune (*Common Content Knowledge*, CKK) che è la conoscenza matematica non specifica dell'insegnante, l'orizzonte della conoscenza (*Horizon Knowledge*) che rappresenta la consapevolezza di come i contenuti matematici sono correlati fra loro all'interno della matematica e la conoscenza specialistica dell'insegnante (*Specialised Content Knowledge*, SCK) che ci pare l'elemento di novità del modello, definita dagli autori come "[...] *teaching may require a specilized form of pure subject matter knowledge, "pure" because it is not mixed with knowledge of students or pedagogy and is thus distinct from the pedagogical content knowledge identify by Shulman and his colleagues, "specilized" because it is not needed or used in setting other than mathematics teaching. [...] For instance, deciding whether a method or procedure would work in general require mathematical knowledge and skill, not knowledge of students or teaching. It is a form of mathematical problem solving used in the work of teaching*" (Ball et al., 2008, p.396).

Questo è un punto cruciale, a nostro avviso, per chi si occupa di formazione degli insegnanti. Nei nostri studi ci siamo quindi chieste se le esperienze svolte dagli insegnanti durante il corso di formazione del MMLab-ER potessero essere considerate mezzi per sviluppare aspetti particolari della SCK e di come questa conoscenza specialistica interagisse con la PCK. Usando quindi la definizione data da Ball e colleghi di SCK (*Specialized Content Knowledge*), potremmo dire che *l'Analisi Culturale dei Contenuti* (Boero & Guala, 2008), che è stata la nostra scelta di fondo nella formazione degli insegnanti del Progetto, può portare a sviluppare conoscenze e abilità (*skill*) identificabili come una SCK? Ossia identificabili come una conoscenza specialistica dell'insegnante di matematica legata alla ACC?

Questo tipo di conoscenza, acquisibile attraverso una formazione che si basi sulla *Analisi Culturale dei Contenuti* (ACC), si potrebbe definire come: **SCKc** (*Specialized Content Knowledge* a valenza culturale) (Garuti & Martignone, 2010). Un insegnante ha (o può acquisire) una **SCKc** se nella sua professione di insegnante sa come fare e conosce le potenzialità di un'analisi che tenga conto degli aspetti culturali (attenzione e analisi di aspetti storico-epistemologici e cognitivi) legati a specifici contenuti matematici⁵⁰.

Tutto questo naturalmente è in stretta relazione con la PCK e quindi nelle attività di formazione tutti questi aspetti devono essere affrontati in modo organico e dialettico. Ad esempio dovrebbe essere esplicitato con gli insegnanti come un incremento della loro **SCKc** può fornire elementi fondamentali per la comprensione dei processi messi in atto dagli studenti, nella scelta degli argomenti, delle metodologie e delle consegne per il lavoro in classe. Questi elementi di relazione dialettica che non sono espliciti nel lavoro di Ball e colleghi, sono per noi particolarmente importanti perché esprimono la modalità attraverso la quale si realizza la connessione fra una conoscenza specialistica dell'insegnante, con tutta la sua valenza culturale, e le scelte che opera all'interno della sua classe unitamente all'analisi dei processi messi in atto dagli allievi.

Per quello che è stata la nostra esperienza nel progetto MMLab-ER, il modello di Ball e colleghi ci ha aiutato a focalizzare l'attenzione su un aspetto, ma si è rivelato non del tutto adeguato a descriverlo. In altre parole abbiamo sentito il bisogno di curvarlo alla nostra realtà introducendo una specificità (l'*Analisi Culturale dei Contenuti*) e le sue relazioni con la PCK, come si evince dalla figura riportata di seguito (Fig.6).

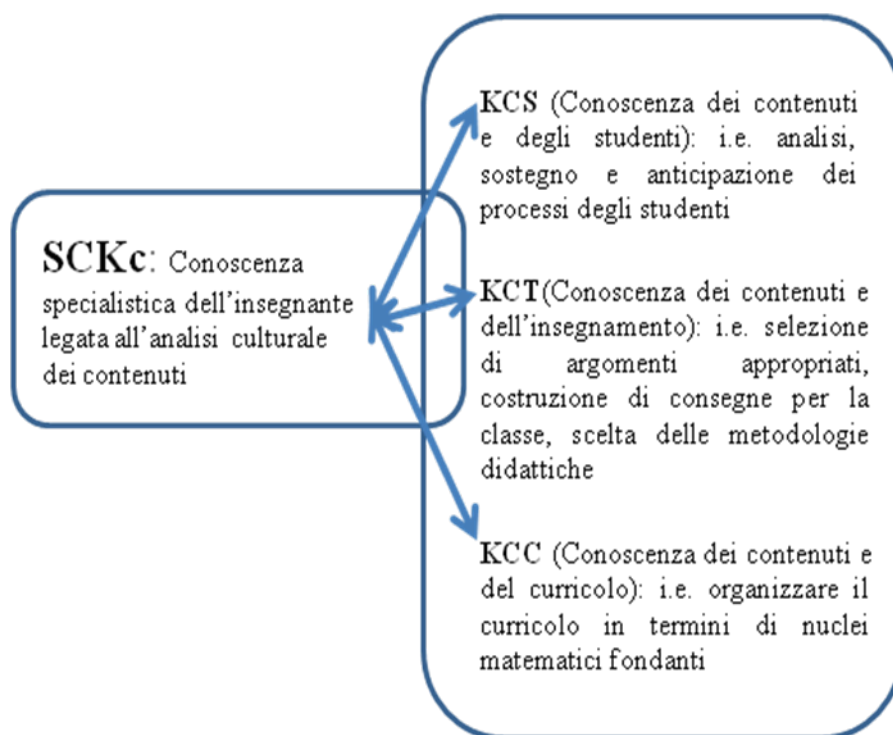


Figura 6 – *SCKc e le relazioni con PCK* (Garuti & Martignone, 2010)

⁵⁰ Come sottolineato in precedenza, l'attenzione agli aspetti epistemologici e cognitivi ha le sue radici nella Ricerca Didattica per l'Innovazione, che, nel progetto MMLab-ER è stata sviluppata nella formazione degli insegnanti.

ALLEGATI relativi al Cap.3.1

(MO1)

Gli allegati presentati in questa sezione sono tratti da diari di bordo, report finali e articoli scritti dagli insegnanti. La scelta di questi estratti è funzionale a esemplificare i diversi modi con cui gli insegnanti del progetto MMLab-ER hanno documentato, riflettuto e divulgato le esperienze condotte nelle loro classi. L'ordine di presentazione vuole in qualche modo mettere in luce l'evoluzione della documentazione da strumento per la condivisione e studio all'interno della comunità di indagine (diario di bordo) a mezzo per una divulgazione dei risultati all'esterno dando anche ampio spazio alle riflessioni (report finali e articoli per riviste e per atti di convegni).

Allegato 1: estratto dal diario di bordo di Buonuomo, Ferretti & Postal condiviso sulla piattaforma Moodle <http://dolly.laboratoriomatematica.unimore.it/> .

Allegato 2: report finale di M.G. Silvegini pubblicato sul libro del progetto (Martignone (ed.), 2010) e sul sito del MMLab (<http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna/risultati-del-progetto/report-delle-sperimentazioni.html>)

Allegato 3: estratto dall'articolo di Concu, M. (2011). Pantografi per alcune trasformazioni geometriche del piano: simmetria assiale, omotetia e stiramento. Parte 1: Simmetria assiale. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, settembre 2011

Allegato 4: estratto dall'articolo di Banchelli, S. & Martignone, F. (in press). Esplorare, congetturare e argomentare: Attività di laboratorio con le macchine matematiche. *Atti del II convegno nazionale di Education 2.0*, Firenze.

Allegato 1: estratti di un diario di bordo

Diario di Bordo del gruppo di docenti: Buonuomo, Ferretti & Postal.

Scuola secondaria di secondo grado di Casalecchio di Reno (BO).

Percorso: “La riscoperta della riga e del compasso nelle costruzioni geometriche: prime costruzioni geometriche” (classi I B –D-E).

“Attività 1 – Il compasso: una macchina matematica.

Gli insegnanti hanno introdotto l'attività da svolgere chiedendo agli alunni di descrivere gli strumenti riga e compasso evidenziandone le caratteristiche essenziali per spiegare le costruzioni geometriche che si possono ottenere. Gli alunni sono apparsi perplessi nell'apprendere che non avrebbero potuto utilizzare le unità di misura riportate sulla riga in uso e che avrebbero dovuto considerarla come una semplice stecca per tracciare dei segmenti. Gli insegnanti hanno spiegato le motivazioni della scelta con una narrazione storica delle prime fasi dello sviluppo della geometria, evidenziando in particolare l'importanza di Euclide per la sistematizzazione delle conoscenze che oggi costituiscono la geometria euclidea.

Le prime definizioni di riga e compasso date dagli allievi sono piuttosto generiche e si limitano a dare informazioni su come sono fatti gli strumenti e su come si maneggiano durante l'uso.

Qualcuno propone una descrizione delle figure geometriche prodotte dal compasso, utilizzando però termini sbagliati e confondendo cerchi e circonferenze. Minori difficoltà si sono incontrate nella definizione delle costruzioni geometriche prodotte dalla riga.

Per sollecitare la riflessione dei gruppi sulle macchine matematiche utilizzate i docenti hanno proposto agli allievi una scheda in cui si chiedeva inizialmente di disegnare il compasso e poi di rispondere ad alcune domande che avevano lo scopo di far emergere le conoscenze degli allievi sull'uso e sulle proprietà del compasso e delle curve prodotte.

Dopo aver realizzato i disegni (Fig 1.1), i gruppi sono stati invitati a riferire alla classe i risultati del loro lavoro.

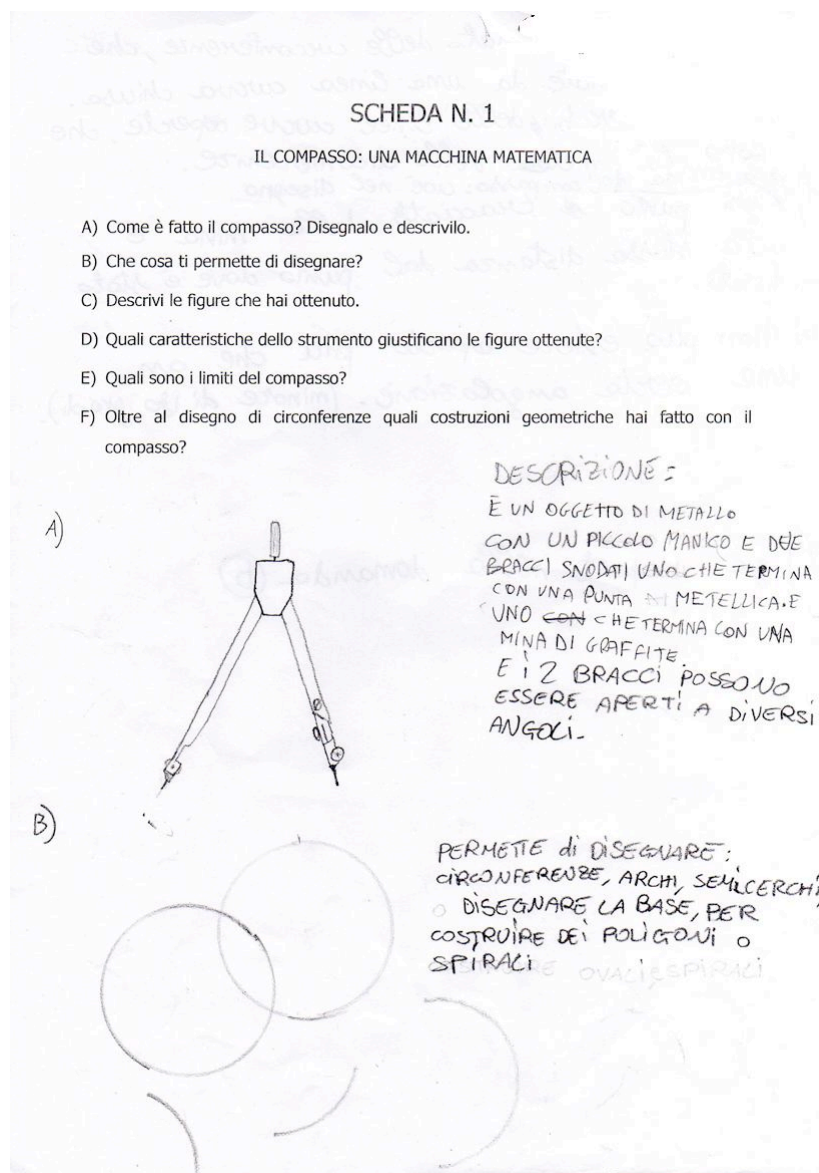


Fig 1.1: un esempio di protocollo

Questa fase ha permesso di far emergere e chiarire i dubbi e le misconcezioni degli alunni, in particolare sulla circonferenza e sul cerchio, e di evidenziare l'importanza di un linguaggio corretto per poter rispondere con precisione alle domande contenute nella scheda.

Alla fine dell'attività gli alunni condividono una descrizione del compasso e delle caratteristiche delle circonferenze prodotte, dei limiti di utilizzo dello strumento e delle costruzioni geometriche più complesse realizzabili utilizzando riga e compasso.

Testo condiviso – “Il compasso è costituito da due aste di uguale lunghezza. Alla base di un'asta c'è un ago (puntatore) per fissare il compasso su una superficie, mentre l'altra asta termina con una punta di grafite (tracciatore). Le due aste sono collegate nella parte superiore da un meccanismo a ruote dentate che permette di aprire e chiudere il compasso e di mantenere costante l'apertura durante la rotazione del tracciatore. Con il compasso disegno circonferenze, linee chiuse semplici, costituite da punti equidistanti dal punto interno, individuato dal puntatore. Questo punto è chiamato centro”.

[...]

Attività 5 – Rette parallele

La consegna era di disegnare una retta r e costruire una retta parallela a r , passante per un punto P , non appartenente ad r . In generale i gruppi hanno scelto un punto a caso su r e, con apertura pari alla distanza da questo punto al punto P , hanno riportato una serie di circonferenze, i cui punti di intersezione, tra cui il punto P , appartengono alla retta parallela ad r , passante per P (fig. 5). La spiegazione di questo procedimento, basata sul riconoscimento delle proprietà dei triangoli isosceli non è stata immediata ed ha richiesto una discussione guidata dall'insegnante che ha fatto riferimento alle conoscenze acquisite fino a quel momento dagli allievi, senza ricorrere a conoscenze pregresse sui quadrilateri parallelogrammi o trapezi di cui non tutti gli alunni erano in possesso.

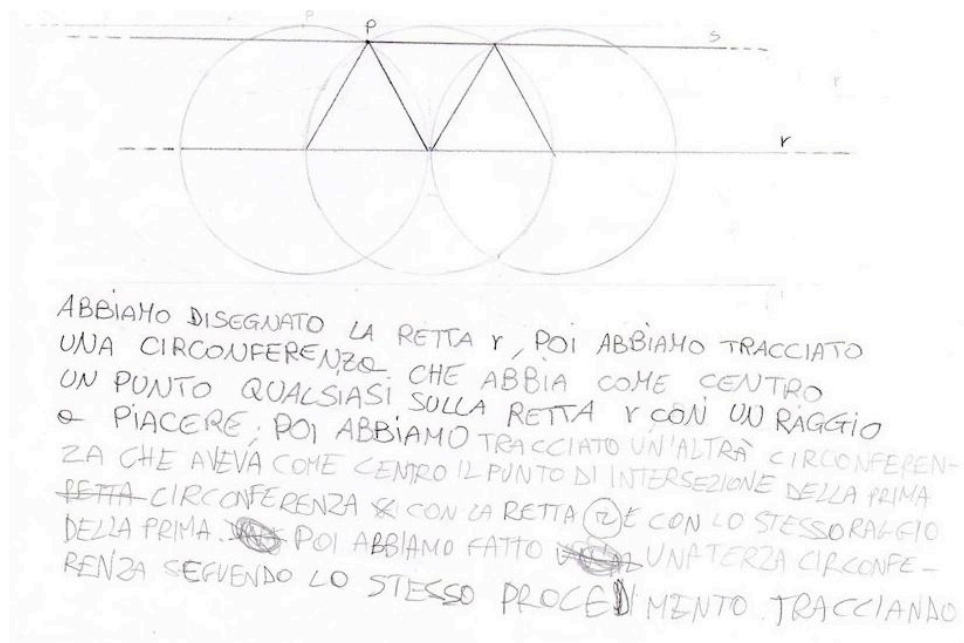


Fig 5

Allegato 2: Report finale

LABORATORIO DELLE MACCHINE MATEMATICHE: L'ELLISSE

Maria Giovanna Silvegna

I.P.S.I.A. "L. B. Alberti"

<i>Classe coinvolta</i>
CLASSE II D biennio meccanico termico
<i>Tipo di macchine utilizzato</i>
Ellissografo a filo teso, antiparallelogramma articolato
<i>Presentazione</i>
Il laboratorio è stato ideato per rendere lo studio della matematica più interessante rispetto al tradizionale metodo di lavoro basato su spiegazione, studio ed esercizio. L'esperienza si è svolta nella classe II D indirizzo meccanico termico dell' I.P.S.I.A. "L. B. Alberti" di Rimini, e rientra in un progetto di laboratorio di geometria che prevede l'utilizzo delle Macchine Matematiche. L'attività laboratoriale si adatta perfettamente ad un contesto "annoiato" da formule ed esercizi ripetitivi, da teoremi e da ragionamenti logici, ma non "naturali", spesso incomprensibili e causa di tanti insuccessi. Nel progetto sperimentato sono state valorizzate le abilità sia non cognitive (percettive, manuali, creative, comunicative), sia cognitive (legate alla formulazione di congetture, alla scoperta, all'elaborazione di strategie e alla verifica di ipotesi).
<i>Obiettivi</i>
La finalità principale consiste nel creare un clima favorevole all'apprendimento e all'acquisizione delle competenze disciplinari attraverso: il recupero della motivazione allo studio, dell'interesse alla partecipazione, allo sviluppo della creatività del singolo rendendo ciascun alunno protagonista ed artefice del proprio sapere. Il laboratorio di matematica crea delle situazioni favorevoli per il loro raggiungimento.
<i>Pre-requisiti</i>
Criteri di congruenza dei triangoli. Concetto di distanza di un punto da una retta. Equidistanza. Parallelismo e perpendicolarità. Parallelogrammi. Concetto di luogo geometrico.
<i>Durata</i>
L'attività si è svolta in due parti per un totale di 10 ore, così suddivise: ellissografo a filo teso: 3 ore di laboratorio per lo studio della macchina e 2 ore di discussione matematica; antiparallelogramma articolato: 3 ore di laboratorio per lo studio della macchina e 2 ore di discussione matematica; Eurowheel di Mirabilandia: prospettografo e profilo della ruota.
<i>Materiale</i>
Matite, penne, gomme per cancellare, righello, compasso, fogli bianchi; nastro adesivo per fissare i fogli alle macchine
<i>Metodologia</i>
Gli alunni sono stati suddivisi in piccoli gruppi di quattro studenti ciascuno per le attività di laboratorio : all'interno di ciascun gruppo ogni studente aveva un ruolo ben preciso e coordinato. Chi doveva disegnare, chi doveva prendere misure, chi doveva trascrivere i dati e controllare la loro validità, chi doveva scrivere una relazione condivisa da tutti i componenti del gruppo. La fase di discussione matematica, invece ha coinvolto ciascun alunno in modo individuale: ad ognuno veniva richiesto di esporre l'attività svolta, di presentare i metodi di indagine per lo studio della macchina e di

esprimere le proprie conclusioni e osservazioni sull'attività svolta. Le diverse osservazioni hanno favorito momenti di confronto e di approfondimento. Il viaggio di istruzione ha permesso di toccare con mano ciò che si era studiato in laboratorio

Descrizione dell'attività

Al fine di svolgere l'attività sono stati utilizzati i seguenti strumenti didattici :

- 1) scheda di analisi dell'ellissografo a filo teso
- 2) scheda di analisi dell'antiparallelogramma articolato
- 3) discussione matematica
- 4) viaggio di istruzione a Matelandia presso il parco di Mirabilandia

Strumento didattico n. 1 : ELLISSOGRAFO A FILO TESO

Guida all'esperienza di laboratorio

Inizialmente a ciascun gruppo è stato dato il seguente materiale : pantografo per simmetria; fogli di carta bianchi (senza righe né quadretti); matite; gomma per cancellare; righello; compasso; scotch (per fissare i fogli alla macchina); mine di matita.

Fase n. 1 : Osservazione libera della macchina

Sono stati messi di fronte all'artefatto senza alcun suggerimento. *Che cosa è?*

(libertà assoluta di esprimere le proprie idee)

Fase 2 : Prepariamo la macchina

Fissaggio dei fogli sul piano di lavoro della macchina.

Fase 3 : Descrizione : come è fatta la macchina ?

1. Da quali elementi è composta la macchina
2. Nella macchina ci sono elementi fissi. Quali ?
3. Usando la matita come mezzo per tenere teso il filo, entro quali limiti puoi disegnare?
4. Quanti sono i gradi di libertà del sistema ?

Fase 4 : Esplorazione della macchina come strumento : cosa fa ?

1. Il filo teso dalla matita e i chiodini individuano figure geometriche, quali?
2. Le figure geometriche che hai ottenuto hanno una caratteristica comune che non varia. Quale?
3. Osserva i triangoli che ottieni spostando la matita in diverse posizioni. Prendi le misure dei lati di ciascun triangolo. Cosa osservi?
4. I triangoli individuati hanno delle caratteristiche comuni?
5. Ora tieni fissa la matita tenendo sempre il filo teso. La posizioni in diversi punti e prendi le misure delle sue distanze dai chiodini : Cosa osservi ?

Fase 5 : Proprietà matematiche della macchina : Perché lo fa ?

1. Questa macchina disegna punti che hanno la stessa proprietà geometrica. Quale?
2. Tale proprietà individua un luogo geometrico?
3. Perché?
4. Se sì, quale definizione di luogo puoi dare?
5. Tenendo il filo teso con l'aiuto di una matita prova a vedere che traccia lascia sul foglio la mina della matita. Riporta qui il disegno.

Fase 6 : modifichiamo la macchina : cosa succede se...?

1. Se i due chiodini vengono avvicinati fino a sovrapporsi ottieni un'altra macchina. Prova a

descriverla utilizzando lo schema: come è fatta? che cosa fa ? perché lo fa?

2 I chiodini possono essere allontanati fino a quale distanza?

3 Ottieni un'altra macchina. Che cosa ti permette di fare? Prova a descriverla seguendo lo schema: come è fatta ? che cosa fa ? Perché lo fa?

4 La figura che viene tracciata dalla matita che si sposta sul foglio lascia una traccia particolare. Che forma ha?

Strumento didattico n. 2 : ANTIPARALLELOGRAMMA ARTICOLATO

Guida all'esperienza di laboratorio

Inizialmente a ciascun gruppo è stato dato il seguente materiale : pantografo per simmetria; fogli di carta bianchi (senza righe né quadretti); matite; gomma per cancellare; righello; compasso; scotch (per fissare i fogli alla macchina); mine di matita.

Fase n. 1 : Osservazione libera della macchina

Sono stati messi di fronte all'artefatto senza alcun suggerimento. Che cosa è?

(libertà assoluta di esprimere le proprie idee)

Fase 2 : Prepariamo la macchina

Fissaggio dei fogli sul piano di lavoro della macchina

Fase 3 : Descrizione : come è fatta la macchina ?

Fase 4 : Esplorazione della macchina come strumento : cosa fa ?

Fase 5 : Proprietà della trasformazione intrinseca alla macchina : Perché lo fa ?

LA DISCUSSIONE MATEMATICA

Al termine delle attività in laboratorio, tornati in classe si ricrea ancora una situazione dinamica; si insedia una "tavola rotonda" con alunni e insegnante seduti intorno: "...essa, sire, è a forma di cerchio e come il cerchio è perfetto, , e poiché norma di perfezione è l'uguaglianza, ecco che nella tavola rotonda non ci saranno posti d'onore e la perfezione sarà uguale in tutti" (da I Cavalieri della Tavola Rotonda di M: Milani)

Si dà inizio alla discussione di ciò che si è fatto, ripetendo l'esperienza e traendo i concetti fondamentali dei contenuti disciplinari studiati. L'insegnante in questa fase funge da direttore d'orchestra e cerca, intervenendo il meno possibile, di soffermare l'attenzione su punti cruciali dal punto di vista dei contenuti.

EUROWHEEL

Al termine dell'attività di laboratorio con le macchine matematiche e la discussione di ciò che si aveva studiato, è stato effettuato un viaggio di istruzione a Mirabilandia, con il proposito di poter riconoscere l'ellisse anche fuori dal libro di geometria. *Dal profilo della ruota panoramica tracciata con il prospettografo di Durer alla scoperta dell'ellisse: che tipo di ovale descrivo attraverso il prospettografo ? Per essere un'ellisse quali proprietà deve avere ? Ha proprietà simmetriche? Esiste un centro di simmetria? Ciascun punto dell' "ovale" gode della stessa proprietà geometrica ? Si tratta di un'ellisse? Allora dove sono i fuochi?* Tale esame avviene attraverso un'attività strettamente manuale, sul foglio di carta che ritrae il profilo della ruota

Riflessioni conclusive dell'insegnante

La classe aveva già sperimentato l'utilizzo di artefatti per lo studio della geometria., in particolare durante il primo anno si erano svolte diverse attività con riga e compasso per costruire e giustificare le costruzioni geometriche.

Procedere con queste scelte didattiche di laboratorio e di sperimentazione ha permesso il raggiungimento degli obiettivi sia disciplinari che trasversali. Tali attività sono anche molto utili per il recupero delle lacune di base,

l'apprendimento "consapevole" conoscenza-competenza attraverso gli assi culturali.

Una geometria così impostata, inoltre permette un diretto contatto con la realtà e le attività di uso quotidiano, che spesso non vengono interpretate in termini matematici. E' importante anche sottolineare, che la lezione di geometria in laboratorio non richiede più tempo rispetto all'insegnamento classico, anzi, lo riduce, poiché suggerimenti, osservazioni e congetture fanno parte di una scoperta e di una crescita culturale di ognuno, nel rispetto dei propri modi e tempi di apprendimento

Divulgazione dell'esperienza :

Il progetto è stato presentato al Collegio dei Docenti dell' istituto scolastico dove ha suscitato particolare interesse nei colleghi delle materie scientifiche e tecnologiche. Affinché tale esperienza possa coinvolgere tutte le classi dell'Istituto, all'inizio dell'anno scolastico 2010/11, la professoressa terrà un corso di aggiornamento rivolto ai docenti dell'area tecnico-scientifica sul Laboratorio delle Macchine Matematiche, ubicato nella sede del Centro Pedagogico della Provincia di Rimini. Il progetto inoltre, è stato presentato dagli studenti della classe durante l' "Open Day" dell' I.P.S.I.A. ai genitori e agli studenti nuovi iscritti. Un filmato sulla sperimentazione si trova sul sito della scuola <http://www.albertirimini.it> .

All'interno della programmazione annuale di Matematica verrà inserito dal prossimo anno scolastico il laboratorio di geometria come strumento per l'apprendimento dei contenuti disciplinari e come metodo di indagine sul mondo reale che ci circonda: riconoscere la geometria negli oggetti e negli strumenti che usiamo e vediamo quotidianamente.

Allegato 3: estratto dalla prima parte dell'articolo di M. Concu (2011)

“Il desiderio di rendere l'apprendimento sempre più motivante per gli studenti mi ha spinto a organizzare un'attività di laboratorio con i pantografi. Gli argomenti non sono stati introdotti attraverso la lezione frontale, ma solo dopo l'utilizzo delle macchine e la comprensione dei parametri che caratterizzano le varie trasformazioni. Con l'uso di macchine matematiche si chiede agli alunni di riconoscere il tipo di trasformazione che essa determina e risalire, dalle caratteristiche geometriche della macchina, ai parametri che caratterizzano la trasformazione stessa. La metodologia eseguita in tutta la sperimentazione si fonda sulla seguente idea: “L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti” (Curricoli UMI – Matematica 2003).”

Prima macchina utilizzata: il pantografo per la simmetria assiale

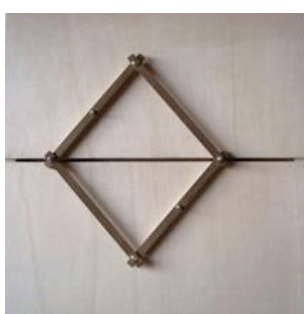


Fig. 1: Fotografia

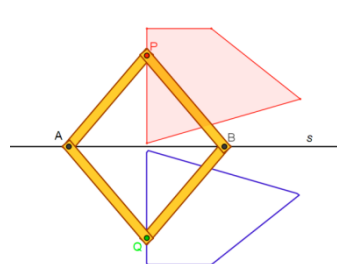


Fig. 2: Immagine di una animazione virtuale

Il pantografo è formato da un rombo articolato AQBP i cui vertici A e B sono vincolati a muoversi su una scanalatura s mentre gli altri due vertici, P e Q, hanno due gradi di libertà.

La macchina realizza una corrispondenza fra due regioni limitate di piano che giacciono su semipiani opposti rispetto a s. Per le proprietà del rombo e per come questo è incernierato al piano (una delle diagonali giace sulla scanalatura s), i punti P e Q si corrispondono in una simmetria assiale (in cui l'asse è la scanalatura s). Quando P percorre una traiettoria assegnata, Q descrive la traiettoria simmetrica, come mostrato nella Fig. 2⁵¹.

Descrizione dell'attività

Il laboratorio sul pantografo per la simmetria assiale si è svolto in 3 lezioni da due ore ciascuna in una classe I di 26 alunni. La scelta è caduta su questa classe poiché ha mostrato interesse per la materia, partecipando attivamente alle lezioni e per la presenza di alunni dislessici, i quali potevano trarre benefici dal laboratorio e dal lavoro di gruppo.

Nella 1° lezione ho suddiviso la classe in piccoli gruppi, il più omogenei possibile e, ad ogni gruppo, ho consegnato una scheda (Scheda 1), con le seguenti consegne:

Scheda 1. COM'E' FATTA LA MACCHINA

DESCRIZIONE E ANALISI DELLA MACCHINA

- Esplora la macchina muovendo tutti i suoi componenti e disegna le parti da cui è composta (quante aste ci sono? Come si muovono?).*

⁵¹ Scheda illustrativa tratta da “Scienze e tecnologie in Emilia Romagna: Un nuovo approccio per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica nella Regione Emilia-Romagna”. Laboratori delle macchine matematiche per l'Emilia Romagna (MMLab-ER) - Azione 1, p.57, Tecnodid

- b. *Assegna le lettere ai vertici della figura e misura i diversi componenti della macchina (per le aste misurare da perno a perno).*
- c. *Descrivi la macchina:*
 - *come sono i vertici (liberi, fissi, legati tra loro...)*
 - *quali figure geometriche riconosci? Perché?*
 - *Spiega le caratteristiche delle figure geometriche che hai individuato nella macchina (lati, angoli...).*

Ho quindi lasciato i ragazzi liberi di manipolare, osservare, esplorare e disegnare.

Lo scopo di questa prima attività non era solo rafforzare e approfondire il concetto di simmetria assiale, ma di introdurre un approccio laboratoriale. Inoltre, durante l'esplorazione della macchina sono emerse difficoltà e misconcezioni legate alle proprietà delle figure geometriche (il rombo è diverso da un quadrato) che sono state affrontate e chiarite nella discussione collettiva.

Nella 2° lezione abbiamo discusso su ciò che i ragazzi avevano prodotto riguardo alla scheda 1: in particolare sul fatto che individuassero nel pantografo un rombo o un quadrato, come se le due figure non avessero nulla in comune. Analizzando le caratteristiche delle due figure piane, siamo arrivati alla conclusione che il quadrato non è altro che un particolare rombo.

[...]

Scheda 4. COSA SUCCEDEREBBE SE...?

E' possibile sostituire al rombo articolato una figura geometrica diversa che realizzi la stessa trasformazione? Motiva la risposta.

I ragazzi dovevano capire se era possibile sostituire al rombo articolato una figura che realizzasse la stessa trasformazione. In classe diversi gruppi avevano capito dell'importanza, per la simmetria assiale, della perpendicolarità delle diagonali.

Nella 3° lezione abbiamo fatto un breve riassunto e conseguente discussione sul biellismo per la simmetria assiale, in particolare sulla scheda 4 che dovevano compilare a casa: nessuno è riuscito a capire che il deltoide può dare una simmetria assiale, se posto in modo tale da avere la stessa distanza dalla scanalatura. Probabilmente avrei dovuto disegnare io il deltoide nelle 2 posizioni possibili e far scegliere a loro una delle due. Le risposte date dai ragazzi si suddividono equamente in 2 gruppi: alcuni sostengono che non è possibile sostituire nessuna figura al rombo articolato, gli altri rispondono che è possibile, solo sostituendo al rombo articolato un quadrato. Questo probabilmente perché l'attenzione dei ragazzi, nelle discussioni svolte precedentemente, si era focalizzata sulle figure geometriche che componevano il sistema articolato e non sulle proprietà della trasformazione.

“No, non è possibile sostituire al rombo articolato una figura geometrica diversa che realizzi la stessa trasformazione. Questo perché, per compiere la trasformazione, la figura geometrica utilizzata deve avere le diagonali perpendicolari, caratteristica presente nel rombo, nel quadrato e nel deltoide. Inoltre la figura geometrica utilizzata deve avere i lati congruenti, perciò si può scartare il deltoide. Utilizzando il quadrato (una figura geometrica regolare), e quindi deformandolo per disegnare, esso diventerebbe un rombo.”

“Dal rombo articolato posso ottenere un quadrato: infatti mediante l'utilizzo del pantografo, vedo che mantenendo fissi i due punti A e B, estremi di una diagonale e, variabili gli altri punti C e D con la condizione che i quattro lati devono essere uguali. Ottengo come figura particolare il quadrato. Osservo anche se costruisco le semicirconferenze di diametro AB, ottengo dei triangoli rettangoli ma quello che ha i cateti uguali è la metà di un quadrato e quindi la figura ottenuta è un quadrato.”

Allegato 4: estratto dall'articolo di Banchelli & Martignone (in press)

“Un esempio di attività didattica

Nel I° quadrimestre dell'a.s. 2010-2011, in una classe II del Liceo scientifico Visitandine Malpighi di Castel San Pietro Terme – Bologna (docente Simone Banchelli), sono state svolte delle attività laboratoriali con i pantografi per le trasformazioni geometriche del piano: in particolare sono stati studiati i pantografi per la simmetria assiale (fig. 1-2), la simmetria centrale e la traslazione. Gli studenti hanno esaminato queste macchine in piccolo gruppo seguendo specifiche consegne progettate dall'insegnante. L'insegnante ha poi orchestrato discussioni collettive per favorire la condivisione e il confronto tra gli studenti di tutta la classe. Le trasformazioni geometriche del piano erano già state studiate in classe per via sintetica, quindi l'obiettivo di questo percorso non è stato introdurre le leggi matematiche incorporate nei pantografi, ma piuttosto di utilizzare le conoscenze acquisite e di sviluppare quelle fondamentali attività matematiche legate alla genesi di congetture, alla produzione di argomentazioni e alla costruzione di dimostrazioni.

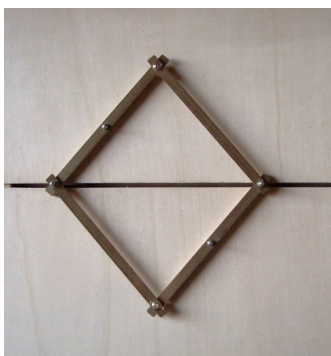


Fig. 1: Fotografia

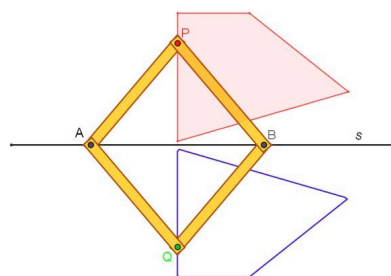


Fig. 2: Immagine di una animazione virtuale

In questo pantografo un rombo articolato ha due vertici opposti (A e B) vincolati a cursori che scorrono entro una scanalatura rettilinea s . La posizione di P determina univocamente quella di Q (e viceversa). Dalla semplice geometria del sistema meccanico si ricava subito che: 1) la retta PQ è perpendicolare a s ; 2) i punti P e Q sono equidistanti da s . Perciò P e Q si corrispondono nella simmetria assiale ortogonale di asse s .

Gli studenti, guidati dalle schede preparate dal docente, hanno risposto alle seguenti domande chiave: “Come è fatta la macchina? Cosa fa? Perché lo fa?”. Partendo quindi da un'esplorazione e una manipolazione concreta di oggetti che incorporano delle leggi matematiche, gli studenti hanno vissuto l'esperienza di produrre congetture, di sviluppare argomentazioni e validare le proprie ipotesi usando gli strumenti teorici della matematica (fig. 3).

Proprietà della macchina in relazione alla trasformazione realizzata (perché lo fa)

Dimostrare perché la macchina realizza la trasformazione individuata, utilizzando i teoremi della geometria euclidea studiati.

La macchina realizza la simmetria assiale perché gli assi formano un rombo. Una trasformazione geometrica è una simmetria assiale se la retta su cui si trovano un punto e il suo corrispondente è perpendicolare alla retta data e se la distanza tra il punto dato e l'intersezione delle rette perpendicolari è uguale a quella tra il corrispondente del punto e l'intersezione delle rette.

Perché le diagonali del rombo sono perpendicolari viene soddisfatta la prima premessa, mentre la seconda premessa viene soddisfatta dal fatto che le diagonali del rombo si tagliano a metà.

Fig. 3: Si riporta uno stralcio dal protocollo di Riccardo che dimostra perché il pantografo realizza una simmetria assiale. Notiamo che lo studente argomenta correttamente usando il linguaggio verbale.

Per l'insegnante affrontare lo studio delle trasformazioni geometriche attraverso una didattica laboratoriale che utilizza le macchine matematiche, ha significato continuare un percorso iniziato l'anno precedente e testare nuovamente i punti di forza di questo tipo di attività, in particolare:

- la scoperta da parte degli studenti di oggetti matematici provenienti dalla storia;
- lo studio delle proprietà matematiche incorporate nelle macchine oggetto di riflessioni significative sia durante l'attività di gruppo, sia durante le discussioni collettive;
- lo stimolo alla comprensione "del perché la macchina fa qualcosa" facendo scaturire in maniera più naturale la produzione di congetture e l'esigenza di costruire una corretta dimostrazione;
- l'esplorazione di una dimensione dinamica della geometria che può ulteriormente essere indagata attraverso oramai diffusi programmi di geometria (Cabri Géomètre, GeoGebra) in cui queste macchine possono essere simulate;
- la generazione di situazioni di problem posing e solving che favoriscono la produzione di soluzioni diverse e la generazione del pensiero ipotetico: ad esempio chiedendo cosa succederebbe se...?."

3.2 Percorsi di formazione insegnanti per educare gli studenti all'uso

del linguaggio algebrico come strumento di pensiero:

verso lo sviluppo di consapevolezze a vari livelli (MO2)

0. Introduzione: un approccio innovativo alla didattica dell'algebra come strumento di pensiero

La ricerca che qui esponiamo si inserisce all'interno di un progetto di innovazione dell'insegnamento dell'algebra nella scuola superiore, avente tra gli obiettivi prioritari quello di favorire la conquista o il recupero dei significati sottesi al linguaggio algebrico e di valorizzarne l'uso in attività dimostrative. La ricerca internazionale ha infatti ampiamente documentato che persino studenti che si rivelano abili nel gestire gli aspetti sintattici del linguaggio algebrico possiedono molto spesso una visione opaca o distorta circa i significati insiti nelle attività di tipo algebrico. La nostra ricerca si è sviluppata con l'intento di superare questo gap e di promuovere negli studenti la conquista di una diversa e più appropriata visione dell'algebra oltre che buone competenze nell'uso autonomo del linguaggio algebrico.

Il progetto si colloca nell'ampio quadro del 'Progetto ArAl' e ne costituisce una naturale espansione. Ricordiamo che il 'Progetto ArAl', nasce alla fine dagli anni '90, sulla base di studi precedenti svolti a livello di scuola media (Malara 1999, Malara e Iaderosa 1999) e si rivolge alla scuola dell'obbligo, dalla scuola dell'infanzia alla secondaria di primo grado. Esso propone una rivisitazione dell'insegnamento dell'aritmetica in chiave relazionale e pre-algebrica ed un approccio all'early algebra di tipo linguistico-costruttivo (Malara e Navarra, 2003). Esso si fonda sull'ipotesi che l'apprendimento del linguaggio algebrico possa svilupparsi in analogia con le modalità d'apprendimento delle lingue naturali e che i necessari schemi mentali vadano costruiti sin dall'inizio portando gli allievi ad affrontare esperienze pre-algebriche via via più raffinate in modo che - attraverso una costante riflessione sui significati dei segni introdotti e dei processi attivati - essi possano sviluppare il pensiero algebrico progressivamente, in un fitto intreccio con l'aritmetica.

Il progetto ArAl inoltre si propone come *sistema di formazione integrata* attuando con/per gli insegnanti, oltre che la progettazione e sperimentazione di piani didattici innovativi, anche attività di studio e riflessione congiunta sui processi di classe attivati (Cusi, Malara e Navarra, 2010).

Il percorso didattico per la scuola superiore, punto di partenza della ricerca di cui qui ci occuperemo, è stato concepito in sintonia con il modello di didattica dell'algebra come strumento di pensiero (Arzarello *et Al.* (1994, 2001) ed è mirato a condurre gradualmente gli studenti a muoversi con agilità attraverso quello che Bell (1996) definisce il *ciclo algebrico essenziale*: rappresentare - manipolare - interpretare. Esso si sviluppa a partire da attività di traduzione da linguaggio verbale ad algebrico, per poi concentrare l'attenzione sull'interpretazione di scritture simboliche, sull'analisi di enunciati riguardanti proprietà numeriche, sull'esplorazione di situazioni per la formulazione di congetture e la costruzione delle relative dimostrazioni, fino all'analisi ed alla costruzione di dimostrazioni di teoremi assegnati (in allegato 1 sono presentati alcuni esempi). Lo scopo di questo percorso è dunque quello di guidare gli allievi ad un uso consapevole del linguaggio algebrico per sviluppare ragionamenti, in modo da promuovere una diversa e più profonda visione dell'algebra,

associata a quello che Arcavi (1994, 2005) definisce lo sviluppo di un *symbol sense*.

In sintonia col paradigma italiano della ricerca per l'innovazione, la nostra è nata come ricerca per la pratica e si è contraddistinta per una evoluzione delle riflessioni teoriche sviluppatesi in una costante interazione con gli aspetti pratico-sperimentali, cosa che ha prodotto un progressivo affinamento delle ipotesi e degli obiettivi della ricerca ed un arricchimento dei costrutti teorici di riferimento per l'analisi dei protocolli raccolti. Pur mantenendo come oggetto centrale della ricerca quello dei processi di insegnamento-apprendimento, il focus dell'analisi si è spostato dalla variabile studenti, alla variabile insegnanti, alle interazioni tra queste variabili ed alle interazioni di esse con il contenuto matematico oggetto di studio.

La ricerca è complessa e quanto qui esporremo documenta alcuni stati di questa evoluzione, che trattano rispettivamente: (1) l'individuazione dell'intreccio di competenze necessarie per produrre dimostrazioni via linguaggio algebrico e lo studio dei comportamenti rilevati negli studenti; (2) il quadro teorico di riferimento per lo studio dei processi di insegnamento-apprendimento e l'individuazione di un modello costituito da caratteri che delineano un profilo di insegnante che guida i suoi allievi in modo efficace; (3) la ricaduta della nostra ricerca sul versante della formazione insegnanti con la messa a punto di 'lenti teoriche' per analizzare il ruolo del docente nei processi di classe; (4) una riflessione sui risultati e sulla fruibilità dei metodi e strumenti concepiti nella formazione *at large*.

1. Quadro teorico e risultati sul versante delle competenze che intervengono nello sviluppo di processi di pensiero via linguaggio algebrico

Per motivi di spazio ci limitiamo a presentare in maniera sintetica i risultati della parte di ricerca riguardante l'analisi dell'interrelazione tra gli studenti ed il particolare contenuto matematico, che si è sviluppata a partire dalla necessità di evidenziare quali competenze sia necessario che gli allievi arrivino a sviluppare al termine del percorso affinché possano riuscire ad affrontare con successo attività dimostrative via linguaggio algebrico e ad acquisire una nuova consapevolezza circa il ruolo che tale linguaggio può svolgere come strumento di pensiero. Affrontare questa domanda di ricerca ha reso necessaria un'analisi di come il linguaggio algebrico interviene nello sviluppo dei processi di pensiero. In relazione a questo abbiamo individuato alcuni costrutti teorici ai quali riferirci, in particolare, per analizzare i protocolli degli studenti coinvolti nelle nostre sperimentazioni⁵², abbiamo fatto riferimento ai lavori di Arzarello, Bazzini e Chiappini (1994, 2001), di Boero (2001) e di Duval (1995, 2006): i primi hanno messo in luce l'importanza di attivare frames concettuali e di saper passare da un frame ad un altro per riuscire ad interpretare le scritture algebriche che via, via si costruiscono; il secondo ha focalizzato l'attenzione sul concetto di anticipazione e sul ruolo che essa svolge nella produzione di pensiero attraverso processi di trasformazione; il terzo ha individuato nel coordinamento tra diversi registri di rappresentazione un aspetto chiave nell'apprendimento in matematica in generale.

Il lavoro di ricerca ci ha consentito di mostrare che una condizione necessaria per un appropriato sviluppo di dimostrazioni via linguaggio algebrico è una corretta applicazione e combinazione delle seguenti tre componenti chiave: (1) l'attivazione ed il coordinamento tra frames concettuali; (2) la messa in atto di pensieri anticipatori; (3) il coordinamento tra registro verbale ed algebrico. L'analisi dei protocolli degli studenti ci ha permesso inoltre di evidenziare il ruolo giocato dalle tre componenti considerate e le mutue relazioni tra esse e di delineare alcune categorie di produzioni-prototipo, distinte a seconda dei blocchi rilevati e delle diverse modalità di attivazione delle componenti chiave (Cusi 2009a). L'individuazione delle

⁵² Il lavoro di classe si è articolato in momenti di discussione collettiva, momenti di lavoro a piccoli gruppi e prove individuali. I protocolli cui qui ci riferiamo riguardano gli elaborati scritti degli studenti e le trascrizioni delle audio-registrazioni delle discussioni condotte dagli studenti durante le attività di lavoro a piccoli gruppi.

mutue relazioni tra le tre componenti chiave e dei principali aspetti che si sono rivelati cause dell'insuccesso di alcuni gruppi di studenti ha inoltre permesso di mettere in luce l'importanza degli aspetti interpretativi e del legame che intercorre tra blocchi interpretativi ed attivazione di pensieri anticipatori. Le principali problematiche emerse sono legate: (1) alla mancata interiorizzazione dei frame attivati e all'incapacità di coordinare diversi frame concettuali (rivelatesi come le prime cause alla base non solo della messa in atto di erronee conversioni, ma anche di blocchi nell'interpretazione delle scritture prodotte); (2) ad un affidamento cieco alla formalizzazione algebrica che, in assenza della capacità di interpretare criticamente i risultati ottenuti, conduce, talvolta, a scegliere di modificare le congetture prodotte; (3) alla mancanza del supporto fornito dal controllo semantico e della messa in atto di pensieri anticipatori (l'assenza di pensieri anticipatori porta ad una mancata attivazione di un idoneo frame concettuale, cosa che, a sua volta, può generare insuccessi nell'interpretazione delle espressioni prodotte o blocchi nei trattamenti da operare); (4) alla rigidità generata dal predominio di pensieri anticipatori erronei o parziali, che inibisce le capacità di riflettere in maniera critica sui risultati ottenuti.

Le riflessioni condotte a partire da questa analisi ci hanno permesso di mettere in luce l'importanza degli aspetti meta, che, già a questo livello, incidono nettamente: (a) sia nei protocolli più poveri (la mancanza di consapevolezza del ruolo che la formalizzazione algebrica svolge nei processi dimostrativi impedisce ad alcuni gruppi di studenti di costruire effettive dimostrazioni delle congetture che vengono prodotte); (b) sia in protocolli più ricchi (una non completa consapevolezza dei significati sottesi ad un approccio algebrico ai problemi dimostrativi e dell'importanza di ricercare, anche quando non strettamente necessario in relazione agli obiettivi prefissati, il significato che le espressioni algebriche veicolano, limita l'efficacia dell'approccio adottato).

2. Lo studio dei processi di insegnamento-apprendimento ed il ruolo fondamentale del docente: il nostro quadro teorico ed i principali risultati della nostra ricerca

Questi risultati hanno reso evidente la correlazione tra le competenze attivate negli studenti e aspetti meta (controllo da parte dello studente di: obiettivi da raggiungere, formalizzazioni associate agli obiettivi, interpretazioni delle trasformazioni ai fini dell'obiettivo da raggiungere, effetti di conversioni sintattiche, controllo dei cambiamenti di frame possibili, potere ed economicità del pensiero anticipatorio, ...) e ci hanno motivato a spostare ancora di più l'attenzione sull'analisi del ruolo svolto dal docente durante le attività del percorso didattico concentrandoci in particolare sulle interrelazioni tra insegnante e studenti nei processi di modellizzazione algebrica e di problem solving dimostrativo e sugli effetti che il lavoro del docente produce in termini di competenze e consapevolezze sviluppate dagli allievi. Un'ulteriore nostra ipotesi di ricerca riguarda la stretta correlazione tra ruolo e azione dell'insegnante nella classe e valorizzazione delle potenzialità didattiche del percorso progettato. A nostro avviso il modo di porsi dell'insegnante nell'affrontare le attività e gli spazi da lui dati alla riflessione sono fondamentali per condurre gli studenti a riconsiderare gli effetti del lavoro svolto in modo da favorire in loro l'acquisizione di symbol sense, oltre che la piena consapevolezza dei particolari significati sottesi all'uso del linguaggio algebrico in queste attività.

Il quadro teorico in cui abbiamo scelto di collocarci per l'analisi dei processi di insegnamento-apprendimento è composito e nasce dalla coniugazione di tre componenti che vanno intese sullo stesso piano. La prima componente è Vygotskyana; l'idea di Vygotsky alla quale ci siamo ispirati è quella secondo la quale l'imitazione delle azioni dell'adulto, da parte del bambino, giochi un ruolo chiave nello sviluppo mentale di quest'ultimo. Secondo Vygotsky (1978), infatti, ciò che un individuo può fare grazie all'assistenza di altri individui può essere considerato maggiormente indicativo di un suo sviluppo mentale, rispetto a ciò che egli può

fare da solo. Per meglio chiarire questa idea, l'autore introduce il concetto di zona di sviluppo prossimale (ZPD), che rappresenta la distanza tra il livello di sviluppo attuale (che si riferisce a ciò che l'individuo è in grado di fare quando lavora da solo ai problemi) ed il livello di sviluppo potenziale (che si riferisce a ciò che l'individuo può fare quando si trova ad affrontare un problema sotto la guida di un 'esperto', come ad esempio quando deve completare ragionamenti iniziati da altri o risolvere un problema dopo averlo visto fare dall'insegnante). La ZPD, poiché definisce non quelle funzioni che si sono già completamente sviluppate nell'individuo, bensì quelle che non sono ancora sufficientemente mature, caratterizza lo sviluppo che ancora deve realizzarsi. Secondo l'autore un apprendimento orientato verso livelli di sviluppo già raggiunti dall'allievo risulta inefficace dal punto di vista del suo complessivo sviluppo poiché, anziché mirare a condurlo al livello successivo, lo fa restare indietro in questo processo. L'unico apprendimento "buono" è dunque quello che anticipa lo sviluppo. La seconda idea proposta da Vygotsky (1978) e da noi adottata riguarda perciò l'importanza di un'istruzione mirata ad estendere le ZPD dell'allievo in modo da stimolarlo ad attivare processi interni di apprendimento, operati attraverso l'interazione con l'adulto o con compagni più bravi, che si concretizzano nel raggiungimento di un più elevato livello di sviluppo.

In quest'ottica il ruolo svolto dall'insegnante è dunque fondamentale. Questo ruolo è stato ed è oggetto di svariate ricerche soprattutto in riferimento alle attività collettive di classe. Da un punto di vista degli aspetti sociali dell'interazione, ad esempio, è stato messo in luce come il docente debba saper creare un buon contesto di interazione, ponendosi come autentico partecipante, stimolando e regolando i processi argomentativi (Schwarz *et Al.* 2004) e focalizzando l'attenzione degli studenti sulla necessità di controllare la significatività degli interventi altrui per proporre eventuali critiche o suggerimenti (Wood 1999). Dal punto di vista del contenuto matematico da affrontare, il docente ha la responsabilità di dover dirigerne lo sviluppo, "filtrando" le idee degli studenti in modo da focalizzare l'attenzione verso quegli aspetti che ritiene più rilevanti e significativi (Sherin 2002). E' responsabile della qualità della discussione poiché, attraverso le sue reazioni agli interventi degli studenti, valuta implicitamente le soluzioni da loro proposte (Yackel e Cobb 1996), conducendoli ad acquisire la consapevolezza di quali siano le forme più sofisticate di ragionamento (Anghileri 2006). Varie ricerche hanno messo in luce le metodologie e i comportamenti che un insegnante dovrebbe attuare per riuscire a gestire e sviluppare in maniera flessibile e dinamica i momenti di interazione (su questo punto, rinviamo ad Anghileri (2006) e Leikin e Dinur (2007) per brevità).

Nel caso della dimostrazione matematica, il ruolo che l'insegnante svolge durante le discussioni matematiche diventa ancor più complesso e delicato. Balacheff (1991) osserva come talvolta l'interazione possa risultare quasi un ostacolo all'apprendimento dei processi dimostrativi poiché favorisce lo sviluppo di quegli "argumentative behaviours" che contrastano l'acquisizione della consapevolezza della specificità della dimostrazione matematica e del ruolo della deduzione logica. Più di recente, Martin *et Al.* (2005) hanno messo in luce la necessità di focalizzare l'attenzione sul ruolo che l'insegnante svolge nello sviluppo dell'apprendimento della dimostrazione matematica, evidenziando l'impatto che le sue scelte ed azioni hanno sia sulla comprensione individuale che su quella collettiva. Sottolineano inoltre che l'insegnante ha il compito di favorire l'inserimento degli studenti nel processo di negoziazione della congettura e di costruzione collettiva della dimostrazione, insegnando loro come lo sviluppo del discorso matematico debba rispettare regole precise. Ancora Blanton *et Al.* (2003), in uno studio svolto con studenti universitari, hanno esplorato la valenza di diverse pratiche di scaffolding nello sviluppo dei processi dimostrativi, ponendo l'accento sull'importanza dei processi di negoziazione e mettendo in luce la valenza degli "atti metacognitivi" nelle discussioni collettive.

Questi aspetti riguardano, a maggior ragione, l'ambito della costruzione di dimostrazioni via linguaggio algebrico poiché essa richiede agli studenti di mettere in campo competenze che possono essere conquistate soltanto quando essi sono immersi in contesti, come quelli auspicati da Schoenfeld (1992), all'interno dei quali il sense-making matematico sia praticato e sviluppato.

Un altro aspetto molto importante che l'insegnamento a nostro parere non può dunque tralasciare è quello della realizzazione di una effettiva consapevolezza del senso delle azioni che vengono realizzate in classe. Per questo motivo la seconda componente del nostro quadro è rappresentata dal lavoro di Leont'ev (1977), altra nostra fondamentale fonte di ispirazione. Lo studioso ha messo in luce le interrelazioni tra attività che si realizzano in un contesto sociale e sviluppo del senso dell'apprendimento che tali attività hanno l'obiettivo di promuovere. Leont'ev denuncia la frequente mancata coincidenza tra contenuto apparente del materiale didattico proposto all'allievo e contenuto effettivo da lui percepito. Se l'attività compiuta dall'allievo e quella che lo rende consapevole di ciò che deve assimilare non sono collegate, il materiale didattico risulta inutile e, talvolta, anche deviante. Non basta che l'allievo assimili il significato di un certo oggetto, teorico o pratico che sia, ma deve imparare a fare un adeguato riferimento a ciò che studia: in queste condizioni, le conoscenze acquisite diventano realmente vive per lui e sono in grado di determinare, a loro volta, il suo rapporto con il mondo: *"L'apprendimento, le conoscenze assimilate, educano ... Ma perché le conoscenze educano è necessario che si educi il rapporto con le conoscenze. In questo risiede la consapevolezza dello studio"* (p. 281, 1977).

Mentre le idee di Vygotsky e Leont'ev, sulla centralità dell'interazione sia nei processi di apprendimento che in quelli di costituzione dei significati associati alle attività che conducono ad esso, hanno costituito uno stimolo fondamentale per gettare le basi di una progettazione della metodologia di lavoro con le classi, l'importanza, messa in luce dal lavoro di Vygotsky, del ruolo svolto dall'adulto nell'accompagnare il bambino nel passaggio da uno sviluppo potenziale ad uno sviluppo attuale ci ha condotto a definire una prima idea di azione del docente, che ha trovato terreno di coltura nelle ricerche che hanno condotto all'idea di *cognitive apprenticeship*, la nostra terza componente. Tale idea è stata introdotta da Collins, Brown e Newman (1989), i quali propongono un modello di istruzione che si rifà all'idea di apprendistato ed incorpora contemporaneamente elementi dell'istruzione tradizionale. Gli autori hanno messo in luce come alcuni aspetti chiave dell'apprendistato delle professioni pratiche possano essere trasposti nell'ambito dell'insegnamento di discipline come il problem solving, la reading comprehension o la composizione scritta. In particolare, focalizzano la loro attenzione su una delle differenze che intercorrono tra i modelli tradizionali di istruzione ed i metodi dell'apprendistato, ovvero il fatto che, a differenza degli studenti che ricevono un insegnamento trasmissivo, gli apprendisti possono "vedere" i processi di lavoro nel momento stesso in cui avvengono. Mentre le attività fisiche, tangibili oggetto dell'apprendistato delle professioni pratiche, sono osservabili, la pratica del problem solving o dell'analisi testuale o della composizione scritta non è necessariamente osservabile poiché i processi di pensiero sono per gran parte invisibili sia agli studenti che allo stesso insegnante. Il modello del *cognitive apprenticeship* si pone invece l'obiettivo di *rendere il pensiero visibile*.

L'idea del *cognitive apprenticeship* si è tradotta in un quadro di riferimento che mira a fungere da supporto nella progettazione di contesti di apprendimento, caratterizzandone le quattro dimensioni tipiche: content, method, sequencing e sociology (che potremmo tradurre in contenuto, metodo, sequenzialità ed aspetti sociali). A ciascuna dimensione gli autori associano un insieme di caratteristiche significative nel costruire e valutare contesti di apprendimento. Concentriamo qui l'attenzione sulle due dimensioni che fungono da

principale riferimento per il nostro lavoro di analisi dei processi di insegnamento-apprendimento: il METHOD e la SOCIOLOGY.

La dimensione del METHOD, riguarda i metodi di insegnamento, che, secondo gli autori, andrebbero progettati con l'obiettivo di dare agli studenti l'opportunità di osservare, scoprire o inventare le strategie degli esperti nel contesto stesso in cui vengono attivate. Collins, Brown e Newman suddividono i metodi di insegnamento necessari per il raggiungimento di questi obiettivi in tre gruppi. Il primo gruppo è costituito dai tre metodi che rappresentano il cuore del cognitive apprenticeship e riflettono, con i dovuti adattamenti, gli aspetti chiave dell'apprendistato delle professioni pratiche. Essi sono mirati ad aiutare gli studenti ad acquisire solide abilità attraverso processi di osservazione e pratica guidata: il *modeling*, il *coaching* e lo *scaffolding*. Il **modeling** richiede che un esperto esegua un compito esternalizzando i processi e le attività interne, ovvero l'euristica ed i processi di controllo da lui attivati, in modo che gli studenti possano osservarlo e costruire così un modello concettuale dei processi richiesti per portare a termine quel compito. Il **coaching** consiste nell'osservazione, da parte dell'esperto, degli studenti mentre conducono un'attività, per fornire loro stimoli, supporti, feedback ed eventualmente anche nuovi compiti mirati a far migliorare le loro performance. Lo **scaffolding** si riferisce ai supporti che l'insegnante fornisce per aiutare lo studente a portare un'attività a compimento (spesso è lo stesso docente che esegue parti dell'attività che lo studente non riesce a gestire), ma anche alla rimozione graduale degli stessi in modo che gli allievi possano arrivare a completare autonomamente il compito. Gli autori introducono il termine **fading** per oggettivare questo secondo aspetto dello scaffolding e per evidenziarne la significatività e delicatezza.

Il secondo gruppo è costituito da quelle metodologie (*articulation* e *reflection*) progettate con l'obiettivo di aiutare gli studenti sia a focalizzare le loro osservazioni sugli approcci esperti al problem-solving, sia ad imparare a controllare in maniera consapevole le proprie strategie. **Articulation** significa saper condurre gli studenti ad articolare le loro conoscenze, i loro modi di ragionare ed i loro processi di problem solving. Alla categoria **reflection** appartengono quei metodi che permettono agli allievi di mettere a confronto i loro processi di problem-solving con quelli di un esperto o di un altro studente fino ad arrivare a confrontarli con un modello cognitivo interno della pratica esperta.

Il terzo ed ultimo gruppo è costituito da un solo elemento, l'*exploration*, che è mirato ad incoraggiare lo sviluppo dell'autonomia, da parte degli studenti, non solo nel condurre processi di problem-solving con un approccio esperto, ma anche nel definire e formulare nuovi problemi da risolvere. Secondo gli autori l'*exploration* è il culmine naturale del processo di fading dei supporti.

Un'altra fondamentale dimensione è la SOCIOLOGY. Essa riguarda gli aspetti sociali dei contesti di apprendimento. Nel cognitive apprenticeship, l'apprendista è circondato da altri apprendisti e da maestri, tutti coinvolti, anche se a diversi livelli, nella stessa attività e tutti desiderosi di contribuire ad essa in modo diretto e con l'obiettivo di sviluppare rapidamente un approccio autonomo all'attività stessa. In questo modo, gli apprendisti imparano a sviluppare abilità nel contesto stesso in cui queste vengono applicate nella risoluzione di problemi reali, *all'interno di una cultura definita dalla pratica degli esperti*. Gli autori sottolineano che alcuni aspetti dell'organizzazione sociale dell'apprendistato, incoraggiando lo sviluppo di consapevolezze sulla natura sia delle pratiche esperte che dello stesso apprendimento, risultano particolarmente significativi nell'aiutare gli apprendisti ad acquisire fiducia in se stessi, motivazioni all'apprendimento ed una modalità efficace di affrontare i problemi che incontrano mentre apprendono. Tra gli elementi determinanti nell'influenzare gli aspetti sociologici dell'apprendimento, viene introdotta l'idea di *community of practice*, che si

riferisce alla creazione di un contesto di apprendimento nel quale i partecipanti sono coinvolti in prima persona nell'applicare competenze tipiche dell'esperto e costruiscono un'immagine della pratica esperta come quella che serve per risolvere problemi in un dominio di apprendimento.

Il cognitive apprenticeship, sottolineano gli autori, rappresenta un paradigma educativo al quale riferirsi quando un insegnante ha bisogno di introdurre i propri studenti a pratiche complesse, e non è un modello di insegnamento che fornisce ai docenti una formula preconfezionata da applicare a qualsiasi contesto di istruzione. Spetta all'insegnante identificare le modalità attraverso le quali il cognitive apprenticeship può rivelarsi efficace nel suo particolare dominio di insegnamento. Noi riteniamo che tale paradigma teorico possa essere anche un idoneo riferimento nello studio (di progettazione-attuazione ed analisi) dei processi di insegnamento-apprendimento finalizzati a favorire un uso efficace del linguaggio algebrico come strumento di pensiero. I giochi di interazione tra piano sintattico, piano interpretativo, e piano di anticipazione, che si attivano in modo automatico per un esperto, devono infatti essere esplicitati e resi visibili al novizio perché quest'ultimo possa acquisirli e comprenderne il significato. L'ipotesi alla base della nostra ricerca è che gli *atteggiamenti* ed i *comportamenti* dell'insegnante vengano acquisiti dagli studenti nella interazione di classe attraverso un processo di cognitive apprenticeship che consente loro la progressiva costruzione delle competenze e delle consapevolezze necessarie per poter affrontare, in maniera proficua, le dimostrazioni via linguaggio algebrico. La nostra scelta di focalizzare l'attenzione sulle dimensioni di method e sociology del cognitive apprenticeship è in sintonia con il framework Vygotskyano all'interno del quale abbiamo scelto di collocare ed analizzare i processi di insegnamento-apprendimento ed il ruolo svolto dall'insegnante in classe. Come suggerito da Vygotsky, la realizzazione di uno sviluppo mentale attraverso processi di apprendimento avviene secondo modalità che si diversificano al variare della disciplina di riferimento. Riteniamo che tali modalità debbano differenziarsi anche a seconda dei particolari argomenti che vengono trattati. L'idea di un insegnante che attivi negli allievi processi di "imitazione"⁵³ per l'assimilazione di opportune strategie idonee ad affrontare efficacemente attività di problem solving è risultata una fonte di ispirazione che ci ha condotto a focalizzare l'attenzione su uno dei possibili ruoli che l'insegnante può svolgere in classe e che diventa particolarmente significativo proprio durante attività come quelle che sono al centro della nostra ricerca: quello di *modello*. Attraverso l'uso di questo termine intendiamo riferirci alle principali categorie che delineano la dimensione del method che caratterizza il cognitive apprenticeship: il modeling, visto come via attraverso la quale favorire un'esternalizzazione dei processi di pensiero e l'elaborazione di modelli concettuali di approccio ai problemi dimostrativi via linguaggio algebrico; il coaching, lo scaffolding ed il fading, intese come azioni di supporto agli studenti nel momento in cui si trovano a dover sviluppare, assieme agli altri studenti della classe, ragionamenti via linguaggio algebrico; articulation e reflection, intese come metodologie attraverso le quali favorire una reale comprensione delle strategie attivate ed un uso consapevole ed autonomo delle stesse. L'ottica dell'agire per "rendere il pensiero visibile" è dunque quella in cui necessariamente deve porsi un docente che voglia far sì che gli allievi imparino a focalizzare la propria attenzione non soltanto sugli aspetti sintattici, ma anche su strategie adottate e riflessioni meta sulle azioni, appropriandosi delle prime e sviluppando, grazie alle seconde, una reale consapevolezza del senso delle attività svolte. Riferirci alla dimensione della *sociology* ci consente di sottolineare il ruolo chiave del contesto di socialità all'interno del quale si

⁵³ Per rendere più esplicito il senso di questo termine, riportiamo le parole di Vygotsky: "*Children can imitate a variety of actions that go well beyond the limits of their own capabilities. Using imitation, children are capable of doing much more in collective activity or under the guidance of adults.*" (p. 88, 1978)

realizzano tutte le attività, che fa sì che gli allievi sviluppino competenze e consapevolezza agendo all'interno di una cultura definita dalla pratica degli esperti.

L'idea di insegnante come modello è in sintonia con l'interpretazione che Mason (2008) propone del ruolo svolto dal docente di matematica durante le attività di classe: l' "essere matematico" con i propri allievi e di fronte ad essi. Facendo riferimento al lavoro di Vygotsky, in un quadro dunque di insegnamento della matematica come attività sociale, l'autore descrive lo sviluppo mentale come il diventare capaci di fare scelte consapevoli ed esplicite. Ai fini della realizzazione di uno sviluppo mentale reale, una problematica chiave da non sottovalutare risiede nella disparità netta, che molto spesso si realizza, tra quanto il docente è convinto di comunicare all'allievo e quanto quest'ultimo realmente comprenda. Questa disparità dipende dalla varietà di *structures of attention* (Mason 2008) attivabili di fronte ad un problema da affrontare, che fa sì che docente ed allievi possano focalizzare l'attenzione su aspetti completamente diversi dell'oggetto da studiare o sugli stessi aspetti ma in modo diverso. Un insegnante conscio di questa problematica deve perciò cercare, attraverso processi di scaffolding e di graduale fading, di servirsi di stimoli ripetitivi, per poi proporre stimoli meno diretti e meta-domande mirate a far sì che gli allievi, in un primo momento stupiti di fronte a questi stimoli, possano gradualmente diventare consapevoli delle azioni che stanno conducendo in classe in modo che le stesse, da azioni svolte "in sé", vengano ad assumere il ruolo di azioni "per sé". Questo processo favorisce infatti l'internalizzazione degli stimoli da parte degli studenti, che potranno servirsi degli stessi, anche quando essi non vengono esplicitamente richiamati dal docente, per affrontare determinate situazioni.

Insegnare efficacemente è dunque saper "educare alla consapevolezza". Mason (1998) distingue tra: (1) awareness-in-action, che viene definita come "il potere di costruire ed agire sul piano materiale"; (2) awareness-in-discipline, ovvero la consapevolezza della awareness-in-action, che è descritta come una forma di *shift of attention* e si realizza quando impliciti teoremi in atto (Vergnaud 1981, citato da Mason 1998) diventano espliciti, consentendo l'articolazione e l'esplicitazione della awareness-in-action; (3) awareness-in-counsel, che rappresenta l'auto-consapevolezza richiesta agli educatori affinché essi possano essere realmente sensibili a ciò di cui chi apprende ha bisogno affinché quest'ultimo possa costruire una propria awareness-in-action ed in-discipline.

Mason osserva che ogni argomento matematico si basa su "azioni chiave" che gli studenti possono attivare attraverso una serie di istruzioni. E' il controllo di queste azioni che realizza lo sviluppo di una awareness-in-action. Poiché apprendere è trasformare il proprio livello di consapevolezza, diventare un esperto richiede di sviluppare una awareness-in-discipline, esplicitando l'awareness-in-action già acquisita. Compito dei docenti è dunque quello di rendere gli allievi consapevoli dei concetti, delle tecniche, delle strategie euristiche, delle modalità di pensiero che consentono loro di dar senso alla matematica, attraverso la progettazione di specifiche attività ed interventi. Insegnare significa dunque condurre gli allievi attraverso forme "disciplinate" di pensiero e di percezione, ovvero favorire lo sviluppo e la costituzione di una esplicita consapevolezza della propria awareness-in-action (Mason, 1998). E' solo attraverso questo processo che i teoremi in atto attivati dagli studenti possono giungere loro alla mente anche in situazioni diverse da quelle che li hanno visti comparire in precedenza e attraverso nuove modalità. Questo richiede che i docenti non siano solo semplici esperti, ma che siano pienamente consapevoli della propria awareness-in-discipline: "*becoming aware not simply of the fact of different ways of intervening, but of the fact of subtle sensitivities which guide or determine choices between types and timings of interventions, is what is involved in becoming an effective teacher, a 'real teacher'*" (Mason, 1998).

E' fondamentale sottolineare che il quadro di riferimento che abbiamo scelto è fortemente connesso al particolare contenuto matematico affrontato nella ricerca. Le riflessioni che ci hanno portato a delinearlo ci consentono di focalizzare l'attenzione sul ruolo chiave degli atteggiamenti e delle azioni dell'insegnante nel portare gli studenti ad attuare comportamenti efficaci ed a favorire così un'effettiva costruzione delle competenze necessarie nello sviluppo di processi di pensiero via linguaggio algebrico. In quest'ottica abbiamo scelto di indicare con l'espressione "*docente che si pone come modello di comportamenti ed atteggiamenti consapevoli ed efficaci*" un docente che agisca con l'obiettivo di "rendere il pensiero visibile", ponendosi come regista del lavoro nel cognitive apprenticeship, e che sia, nello stesso tempo, consapevole dell'incidenza delle proprie azioni nel favorire nei propri studenti il fondamentale sviluppo di una consapevolezza della propria awareness-in-action.

Gli atteggiamenti ed i comportamenti attivati dai diversi insegnanti che hanno partecipato al nostro progetto sono stati studiati attraverso un'analisi delle discussioni collettive da loro condotte con l'obiettivo di evidenziare *atteggiamenti e comportamenti* che caratterizzano l'approccio di un docente che favorisce la costruzione delle competenze chiave per uno sviluppo efficace del ragionamento via linguaggio algebrico e gli *effetti sugli studenti* dei diversi approcci adottati dagli insegnanti, sia dal punto di vista delle nuove *consapevolezze* manifestate, che da quello delle *competenze* raggiunte. L'interpretazione, nell'ottica precedentemente introdotta, dei ruoli assunti da un insegnante che si pone come "modello di comportamenti ed atteggiamenti consapevoli ed efficaci" richiede, in particolare, di evidenziare specifiche azioni strettamente connesse al contenuto in gioco.

L'analisi del ruolo chiave svolto dai docenti che hanno partecipato alle sperimentazioni da noi condotte (esempi di analisi sono presentati in Cusi 2009b e in Cusi e Malara 2009) ed il confronto tra i diversi approcci adottati dai docenti ci ha consentito di mettere in luce in maniera più evidente come scelte inopportune possono condurre ad una mancata acquisizione di competenze e consapevolezze da parte degli studenti e delineare, in contrapposizione, i caratteri di un docente che si pone come "modello di comportamenti ed atteggiamenti consapevoli ed efficaci" (in seguito M-CA_{CE}). Un tale docente: (a) si pone come "*soggetto che indaga*", stimolando un atteggiamento di ricerca nei confronti del problema in esame, e come *elemento costituente* del gruppo classe nel lavoro di ricerca che viene attivato; (b) si pone come *guida operativa/strategica*, mediante un *atteggiamento di condivisione* (anziché di trasmissione) delle strategie adottate e delle conoscenze da attivare localmente; (c) cerca di *stimolare e provocare la costruzione delle competenze* chiave nella produzione di pensiero via linguaggio algebrico (saper tradurre, anticipare, manipolare, interpretare), ponendosi come "*attivatore*" di *processi interpretativi* ed "*attivatore*" di *pensieri anticipatori*.

Questi ruoli che l'insegnante dovrebbe cercare di assumere, e che ben possono situarsi all'interno delle categorie del modeling e del coaching, richiedono che egli/ella si ponga, di fronte al problema oggetto d'esame, non come "semplice esperto" che propone un efficace approccio risolutivo, ma come *learner* che affronta il problema con l'obiettivo di "rendere visibili" i pensieri nascosti esplicitando obiettivi, senso delle strategie attivate, interpretazione dei risultati via, via raggiunti.

Altri caratteri di questa tipologia di docente sono i seguenti: (d) si pone come guida al controllo dei significati delle scritture a cui si perviene, sia sul piano sintattico che semantico, con l'obiettivo di realizzare un *armonico equilibrio* tra i due aspetti; (e) si pone come *guida riflessiva* nell'individuazione di modelli operativi/strategici efficaci durante le attività di classe (suo compito è anche quello di esplicitare e stimolare riflessioni sugli approcci efficaci adottati dagli studenti della classe affinché questi approcci vengano individuati come modelli ai quali ispirarsi); (f) si pone, con l'obiettivo di stimolare e provocare *atteggiamenti di tipo*

meta, come “attivatore” di atteggiamenti riflessivi ed “attivatore” di atti metacognitivi, con particolare riferimento al controllo del senso globale dei processi.

Tali caratteri, che a nostro parere meglio si collocano nelle categorie dell’articulation e della reflection, riguardano invece un ruolo diverso assunto dal docente, che da semplice “learner”, eventualmente più esperto, diventa referente per la classe nel chiarire aspetti salienti a vari livelli, facendo anche riferimento a conoscenze precedentemente sviluppate, e, in un’ottica alla Leont’ev e alla Mason, nel favorire lo sviluppo di una reale consapevolezza del senso delle attività condotte e dei processi stessi di apprendimento.

L’analisi delle trascrizioni delle discussioni condotte dagli studenti nei momenti di lavoro a piccoli gruppi, effettuata in parallelo all’analisi delle discussioni di classe condotte dai rispettivi docenti, ci ha permesso di evidenziare le principali relazioni tra approccio adottato da un docente che sa porsi come M-CA_{CE} ed approccio adottato da gruppi di suoi allievi durante le attività immediatamente successive a quelle collettive (Cusi 2009c). Abbiamo in particolare messo in luce come i protocolli di discussione degli studenti, ricchi sia dal punto di vista delle competenze evidenziate che da quello delle consapevolezze messe in luce, evidenzino che questi ultimi abbiano identificato l’approccio adottato dal docente come il modello al quale riferirsi nell’affrontare la costruzione di ragionamento via linguaggio algebrico. Essi, infatti, non si accontentano di un approccio puramente verbale ai problemi dimostrativi, sentono continuamente l’esigenza di esplicitare ogni ragionamento fatto mediante la formalizzazione algebrica e mostrano di aver identificato nel linguaggio algebrico il principale strumento attraverso il quale condurre i propri ragionamenti.

3. Il nostro lavoro nell’ambito della formazione insegnanti: il ruolo centrale dei processi di riflessione critica

Quanto messo in luce nel precedente paragrafo mette in evidenza che, affinché un docente sappia porsi come M-CA_{CE}, egli deve essere pienamente consapevole del senso del processo che gli è richiesto di attuare e di controllare nel suo sviluppo. La necessità scaturita da questa riflessione ha condotto alla scelta di permettere a ciascuno degli insegnanti sperimentatori di appropriarsi del senso del percorso attraverso uno studio individuale ed una riflessione congiunta con il ricercatore circa gli obiettivi delle proposte per ogni fase del percorso e le potenziali difficoltà degli studenti, ma soprattutto delle modalità ‘fini’ di lavoro da attuare nello sviluppo in classe di ciascuna di esse. Il confronto tra i diversi approcci adottati dai docenti sperimentatori ci ha permesso di mettere in luce, in particolare, un modo di porsi dell’insegnante contrapposto a quello di docente che si pone come M-CA_{CE}, che ha prodotto l’effetto di stimolare una sorta di approccio pseudo-strutturale all’uso del linguaggio algebrico nello sviluppo di processi di pensiero (Cusi 2009b). Il lavoro di studio e riflessione condotto assieme ai docenti sperimentatori, che ha preceduto l’implementazione del percorso didattico, acutizza forse la problematicità dell’approccio adottato da questo particolare docente. L’inefficacia delle dinamiche che la sua tipologia di intervento realizza nella classe può essere spiegata ipotizzando la presenza di un gap tra desiderio di collaborare a questo progetto di ricerca e beliefs profondi, che gli hanno impedito di porsi in maniera efficace durante le attività di classe. Riferendoci nuovamente al framework di Mason relativo ai diversi livelli di awareness, potremmo spiegare tali problematiche in termini di un mancato passaggio, da parte del docente che non sa porsi come M-CA_{CE}, da una awareness-in-discipline ad una awareness-in-counsel, che gli consentirebbe di indirizzare efficacemente l’attenzione dei suoi studenti durante le attività affrontate in classe per far sì che, attraverso un supporto di scaffolding e fading, essi possano in futuro affrontare consapevolmente simili compiti in modo autonomo.

Mason (2008) si serve del framework dei livelli di awareness anche nel descrivere le dinamiche sottese ai processi di sviluppo professionale dei docenti. Allo stesso modo in cui insegnare significa essere consapevoli di ciò di cui gli studenti ancora non sono realmente consapevoli e cercare vie attraverso le quali favorire questo sviluppo di consapevolezza, essere un efficace *teacher educator* richiede di essere consapevoli di ciò di cui ancora gli insegnanti non sono consapevoli e favorire in loro rilevanti shifts of attention, indirizzando la loro attenzione verso costrutti, teorie e pratiche che possano guidare le loro future scelte. Condurre un insegnante attraverso un processo di formazione che possa renderlo un “buon insegnante” (Mason 1998) richiede di fargli acquisire consapevolezza non solo sulle differenti modalità di interventi che si possono attivare in classe, ma anche sulle *subtle sensitivities* che guidano la sua azione consentendogli di scegliere le modalità di intervento che possono rivelarsi più efficaci. Una strada da percorrere per favorire lo sviluppo di queste *subtle sensitivities* è quella di attuare nella formazione insegnanti processi di riflessione critica per lo sviluppo di consapevolezza a vari livelli.

La ricerca ha più volte sottolineato la necessità, da parte degli insegnanti, di sviluppare una riflessione critica sulla propria pratica per costruire una adeguata professionalità (i primi studi a riguardo sono documentati in: Mason 1990, 1994a, 1994b, 1998; Jaworski 1998, 2003, 2004; Lerman 2001; Shoenfeld 1998; Da Ponte 2004). Mason (2002) sostiene che un insegnante che voglia imparare ad agire in modo diverso in classe, come ogni altro professionista, deve focalizzare l'attenzione su ciò che sa fare e sui comportamenti che può modificare, in modo da sviluppare consapevolezza che possano guidare le azioni future. Tale attività di riflessione non si deve ridurre ad una semplice narrazione o ad un mero processo di annotazione come scrivere un diario o prendere appunti sui momenti salienti di una lezione. Ciò che ogni insegnante deve cercare di sviluppare è invece una conoscenza attiva, pratica, che permette di reagire a stimoli in modo creativo anziché attraverso comportamenti “meccanici”, ovvero di saper agire al momento. Per esprimere questo concetto Mason e Spence (1999) si servono del termine *knowing-to act in the moment*, utilizzando il gerundio *knowing* per indicare un processo continuo e non statico. La capacità o meno di *knowing-to act* è influenzata dalle visioni personali che gli individui hanno della propria conoscenza. La *discipline of noticing* (Mason 2002), mirata a favorire negli insegnanti lo sviluppo di una consapevolezza dell'azione, della disciplina, del progetto educativo, fa sì che il docente sia sensibilizzato ad individuare situazioni nelle quali è possibile realizzare azioni alternative per poi modificare le proprie pratiche scegliendo consapevolmente di agire in modo differente in altre simili situazioni. Questo discorso si ricollega all'idea di insegnante come improvvisatore nella classe, suggerito da Bartolini Bussi (1998), che paragona il ruolo svolto dal docente in classe a quello di un attore nella commedia dell'arte, sottolineando come l'improvvisazione non sia frutto della casualità ma una vera e propria scienza, costituita da un repertorio di strategie incorporate, alle quali attingere appena se ne intravede l'opportunità.

La valenza della riflessione critica degli insegnanti sulla pratica e soprattutto delle pratiche di condivisione di tali riflessioni tra insegnanti ed ancor più tra ricercatori ed insegnanti è sottolineata anche da Jaworski (1998, 2003, 2004, 2006), che sostiene l'importanza della *pratica riflessiva*, mirata ad esplicitare i diversi approcci e processi di insegnamento in modo che possano diventare oggetti di “critical scrutiny”. L'autrice propone, in particolare, l'idea di riflessione sviluppata da Kemmis (1985), che la presenta in relazione al concetto di azione: la riflessione è “action-oriented”, sociale e politica; il suo prodotto è la prassi, la più eloquente e significativa forma di azione umana.

Secondo Jaworski (2004) adottare un approccio di *inquiry* allo studio dei processi di insegnamento favorisce lo sviluppo della ricerca come vero e proprio modo di essere,

specialmente se praticato all'interno di una comunità nella quale i diversi membri collaborano, in quanto *learners*, per lo sviluppo della propria pratica. Collocandosi in una visione della conoscenza e dell'apprendimento di tipo costruttivista, Jaworski sostiene che attraverso un approccio di inquiry gli insegnanti hanno la possibilità di sviluppare una comprensione dei processi di insegnamento di tipo concettuale, relazionale e basata su principi. L'autrice sostiene inoltre la necessità di collocarsi in una prospettiva Vygotskyana ai processi di insegnamento-apprendimento, focalizzando l'attenzione sui cambiamenti generati dalle interazioni interpersonali ed enfatizzando l'idea di comunità poiché è attraverso questo concetto che diventa possibile razionalizzare la nozione di inquiry. Il concetto di *community of inquiry* viene utilizzato sia da Schoenfeld (1996) che da Wells (1999), che osservano che il lavoro all'interno di tali comunità è caratterizzato da un continuo processo di critica delle prospettive individuali che favorisce una più chiara comprensione dei concetti. Wells, in particolare, definisce *inquiry* il "desiderio di scoprire, fare domande, cercare di capire collaborando con altri nel tentativo di produrre risposte".

In una *community of inquiry* il *novice practitioner* è condotto attraverso processi di osservazione, pratica, analisi della pratica e ricerca nella pratica (Schoenfeld 1996). Jaworski (2006) osserva che si tratta di un modello dialettico in quanto concettualizzabile come processo individuale e sociale: è un processo sociale nel senso che ogni partecipante è membro di una comunità che è caratterizzata da specifiche pratiche e dinamiche che si modificano nel momento in cui la ricerca si sviluppa; contemporaneamente è un processo individuale poiché ciascun individuo è incoraggiato a guardare criticamente la propria pratica ed a modificarla attraverso il proprio apprendimento-nella-pratica (*learning in practice*). L'autrice (2003) evidenzia in particolare quelle che a suo parere sono le principali differenze che intercorrono tra le *communities of inquiry* e le *communities of practice* teorizzate da Lave and Wenger's (1991): mentre in una *community of practice* la conoscenza è nella pratica, il passaggio ad una *community of inquiry* si realizza quando i diversi partecipanti concorrono, individualmente o in gruppo, ad uno sviluppo riflessivo della pratica che a sua volta si riflette in uno sviluppo della comunità stessa. Le *communities of inquiry* sono dunque *developing communities*. I partecipanti alle *communities of inquiry* crescono all'interno delle comunità e contribuiscono ad una continua ricostituzione delle comunità stesse attraverso la riflessione critica: la ricerca si sviluppa come una delle norme della pratica all'interno della comunità e l'identità individuale si sviluppa attraverso la riflessione critica. L'autrice sostiene che questa combinazione è particolarmente rilevante per lo sviluppo della professionalità degli insegnanti perché consente loro di fare ricerca sulla propria pratica di insegnamento e, di conseguenza, di sviluppare un'*intelligenza critica* attraverso l'esplicitazione delle ricerche condotte individualmente ed in gruppo, che si concretizza in una crescente consapevolezza dei diversi aspetti da affrontare durante i processi di insegnamento. La riflessione su e per l'azione di un insegnante, che guarda criticamente a quello che è accaduto nella pratica e che progetta attività future, lo porta ad una crescente consapevolezza di questioni e ad una teorizzazione di fatti in modo che nel momento di scegliere e di decidere in classe egli è capace di assumere nel vivo della azione decisioni 'colte' (frutto di educazione, ragionate, motivate). Questa tipologia di lavoro è molto diversa da quella che si realizza nelle comunità di insegnanti di una stessa scuola coinvolti nella pratica dell'insegnamento, che Jaworski (2003) presenta come esempi di *community of practice*. La ricercatrice sottolinea, infatti, che queste comunità sono caratterizzate dal perpetuarsi di processi pre-esistenti, indipendentemente dal fatto che essi siano o meno efficaci in termini di apprendimento degli studenti. Il passaggio ad una reale *community of inquiry* richiede invece che l'obiettivo da perseguire sia un modello di insegnamento concepito come "apprendere come favorire l'apprendimento" (*learning-to-develop-learning*) attraverso una *critical inquiry*.

Il modello da noi attuato per la formazione degli insegnanti è in sintonia con tutte queste posizioni. La nostra ipotesi è infatti che l'osservazione e lo studio critico-riflessivo di processi di classe di tipo socio-costruttivo, attuato sia individualmente che all'interno di gruppi di ricerca, sia condizione necessaria perché l'insegnante acquisisca consapevolezza del nuovo ruolo che deve svolgere nella classe, delle dinamiche che si sviluppano nella costruzione matematica collettiva e delle variabili che intervengono (Malara 2003). Per supportare gli insegnanti ed andare incontro ai loro bisogni, abbiamo affidato a gruppi di insegnanti coinvolti su una stessa sperimentazione, in un'ottica di costituzione di *communities of inquiry*, un mentore-ricercatore, con il quale oltre a momenti di lavoro *de visu* intessono un costante rapporto dialogico via mail. Periodicamente, presso le scuole o all'università, vengono organizzate sessioni di lavoro dei piccoli gruppi con il mentore ed il ricercatore responsabile, ma anche sessioni collettive che riuniscono tutti i ricercatori e gli insegnanti sperimentatori.

Il nostro obiettivo è quello di portare gli insegnanti coinvolti ad: a) acquisire una crescente capacità di interpretare la complessità dei processi di classe attraverso l'analisi delle *micro-situazioni* che li compongono, di riflettere sulla efficacia del proprio ruolo ed acquisire consapevolezza sugli effetti delle proprie *micro-decisioni*; b) avere un maggiore e più fine controllo sui comportamenti e sugli stili comunicativi da loro adottati; c) osservare, nella prosecuzione dell'attività di classe, l'influenza dello studio critico-riflessivo via via svolto sui comportamenti e sull'apprendimento degli allievi. Questi obiettivi compongono il più generale obiettivo di provocare nei docenti degli *shifts of attention* che favoriscano lo sviluppo di consapevolezze circa le "sensitivities" che guidano le loro scelte e determinano o meno una efficace azione di classe (*awareness-in-counsel*).

Per realizzare questo obiettivo, coinvolgiamo gli insegnanti in una articolata attività di analisi critica delle trascrizioni dei processi di classe e di riflessione su di essi, mirata ad evidenziare le interrelazioni tra conoscenze costruite dagli studenti e comportamenti dell'insegnante nel guidare gli studenti in tali costruzioni. Tale analisi si sviluppa attraverso la costituzione di quelli che noi chiamiamo '*Trascrizioni multicommentate*' (MT, da *multicommented transcripts*). Questa metodologia si è costituita nel corso degli ultimi dieci anni a partire dal progetto collaborativo di ricerca Miur-Università (2002-2003) noto come Progetto Dutto (Malara *et Al.*, 2004) ed è stata oggetto di riflessione e teorizzazione grazie alla partecipazione al Progetto Europeo PDTR, che ci ha consentito di sottolinearne la valenza come strumento per la formazione insegnanti *at large*, anche in considerazione della molteplicità di aspetti dell'azione insegnante che vengono evidenziati (Malara 2008, Malara e Navarra 2011). Il suo consolidamento nella pratica è avvenuto in seno alla rete ArAl, alla quale concorrono sia insegnanti esperti sul versante del rapporto con la ricerca e l'osservazione di sé, sia insegnanti novizi in relazione a queste tematiche. Le MT si realizzano sulla base del trasferimento in versione testuale digitale delle audioregistrazioni di lezioni su temi concordati in precedenza con i ricercatori. Sono effettuate dagli insegnanti sperimentatori che le inviano, accompagnandole con commenti e riflessioni, ai mentori-ricercatori, i quali le commentano a loro volta e le rinviando quindi agli autori, ad altri docenti impegnati in attività analoghe e talvolta ad altri ricercatori. Spesso gli autori stessi reintervengono nel ciclo commentando i commenti o inserendone dei nuovi. Quello che caratterizza questa metodologia è la coralità di rete, per i fitti scambi via mail che determinano la costituzione degli MT, e la fertilità delle riflessioni che emergono dai vari commenti espressi. Gli MT divengono strumenti di lavoro importanti in quanto forniscono un quadro complessivo dell'azione didattica dell'insegnante e permettono di verificare la coerenza fra prassi didattica e riferimento alla teoria (matematica e dell'educazione matematica) in gioco. Forniscono sia all'insegnante che ai ricercatori elementi per potenziare l'efficacia degli interventi nei rispettivi ambiti, e consentono la rilevazione della cultura e degli atteggiamenti degli insegnanti. Permettono al docente,

attraverso i commenti, di sviluppare competenze e consapevolezza, e quindi di migliorare la qualità complessiva della sua azione didattica. Favoriscono, attraverso il loro invio agli altri componenti del gruppo e le periodiche riflessioni *de visu* sui brani più significativi, la condivisione dei saperi in gioco e l'individuazione di importanti elementi distintivi del proprio lavoro, riflettendo sulla loro efficacia o sui loro limiti, attraverso il confronto tra la propria realizzazione di un certo passo del percorso di insegnamento con quella di altri colleghi (in allegato 5 un esempio di MT).

L'analisi dei numerosi commenti presenti nei diari multi commentati ci ha consentito di individuare quattro diverse tipologie di atteggiamenti degli insegnanti, focalizzando l'attenzione sul loro modo di porsi durante le attività di classe e sulla loro capacità di riflettere su di essa a posteriori (Cusi, Malara e Navarra 2010). Alla prima categoria, quella degli $M_A M_C$, appartengono insegnanti che sanno dirigere in modo efficace le attività di classe e che, nella riflessione a posteriori, sanno mantenere una distanza rispetto allo svolgimento degli avvenimenti proponendo corrette riflessioni di tipo teorico o pratico, sia in relazione ad errori - rigidità, interpretazioni sbagliate - che ad interventi proficui. Alla seconda categoria, $M_A \neg M_C$, appartengono insegnanti che gestiscono l'attività favorendo la riflessione sui processi, la coerenza nel perseguimento dell'obiettivo, lo scambio tra pari, ma propongono riflessioni a posteriori che denotano difficoltà nell'individuazione dei momenti più significativi delle attività e nell'analisi di tali comportamenti in riferimento ad aspetti teorici. La terza categoria, quella $\neg M_A M_C$, riguarda insegnanti che non riescono a condurre l'attività in modo produttivo ma sono in grado di cogliere la debolezza della propria conduzione e propongono commenti che evidenziano tale consapevolezza. L'ultima categoria, $\neg M_A \neg M_C$, riguarda insegnanti che appiattiscono la classe su attività poco stimolanti guidando gli alunni verso l'acquisizione fondamentalmente acritica dei contenuti ed, in fase di analisi delle trascrizioni, si riferiscono ad aspetti marginali e propongono puntualizzazioni superficiali. In termini generali, il tipo $M_A M_C$ rappresenta un modello al quale tendere attraverso il processo formativo. Le principali difficoltà connesse a questa modalità di lavoro riguardano la scarsa abitudine, da parte degli insegnanti, ad un confronto che preveda la possibilità di dialogare sui loro comportamenti.

Il fatto che il lavoro di ricerca esposto nel precedente paragrafo abbia messo in luce dinamiche inefficaci realizzate da un docente che aveva precedentemente condotto assieme a noi un lavoro di riflessione sul senso delle attività da proporre nelle sue classi testimonia la necessità, già evidenziata da nostre precedenti ricerche (Malara e Tortora 2009, Malara e Navarra 2011), di provocare nei docenti - soprattutto quelli novizi alle pratiche di riflessione - degli shifts of attention nella riflessione sulla propria azione: da un focus sul prodotto dell'azione di classe (gli esiti del lavoro in termini di competenze sviluppate dagli alunni), ad un focus sul processo (non solo quindi su quanto appreso dagli allievi ma anche e specialmente sull'interrelazione tra atteggiamenti e comportamenti del docente ed atteggiamenti e comportamenti degli studenti). Per questo motivo, con l'obiettivo di favorire questo shift of attention, abbiamo deciso di ripianificare la metodologia di lavoro con i docenti coinvolti in percorsi di formazione, partendo dall'ipotesi che lo sviluppo di una awareness-in-discipline circa gli effetti di una azione di classe mirata, nell'ottica di insegnante come $M-CA_{CE}$, possa realizzarsi se le usuali attività di riflessione sulla propria pratica vengono attuate in riferimento a specifici indicatori per l'osservazione, che consentono di analizzare ed interpretare le azioni di classe attraverso precise lenti teoriche. Questo rafforza ancor più la nostra ipotesi di coinvolgere gli insegnanti nello studio di risultati di ricerca in educazione matematica utili alla pratica perché divengano di esplicito riferimento culturale e diano spessore alle loro professionalità sia sul versante didattico-disciplinare che su quello metodologico. Questa evoluzione nella nostra metodologia di lavoro con i docenti, frutto dell'acquisita consapevolezza da parte nostra della necessità di provocare in loro uno shift of

attention, è in linea con il modello della ricerca per l'innovazione. Descrivere lo sviluppo di teoria e pratica in termini di un processo dialettico (Malara e Zan 2002, 2008) consente infatti di sottolineare l'importanza del ruolo dell'interazione tra ricercatori ed insegnanti: da un lato i risultati teorici prodotti dai ricercatori sono supportati dalla pratica dei docenti ed hanno la possibilità di evolvere attraverso di essa; dall'altro, dare agli insegnanti l'opportunità di sperimentare cosa significhi servirsi di risultati teorici per interpretare ed innovare la pratica consente sia di promuovere nei docenti lo sviluppo di maggiori consapevolezze a vari livelli (consapevolezza circa le proprie azioni e consapevolezza circa gli effetti di uno studio teorico al fine di migliorare la propria pratica), sia di consolidare il loro sviluppo professionale.

Gli attuali percorsi di formazione che stiamo attivando sono perciò caratterizzati da una costante dialettica tra aspetti teorici sull'azione di classe ed implementazione didattica: alle usuali attività precedentemente descritte abbiamo perciò affiancato momenti di studio teorico mirati a fornire ai docenti strumenti teorici e metodologici per imparare ad interpretare mediante nuove lenti le loro azioni in classe. Tali attività, ***preliminari a quelle di riflessione critica congiunta***, sono caratterizzate da un *momento di studio/riflessione* (articolato in una fase di studio teorico ed in una fase di analisi delle pratiche altrui) ed un *momento di azione/riflessione* (articolato in una fase di progettazione/azione ed in una fase di riflessione sulla propria pratica). Il momento di *studio/riflessione* è suddiviso in due fasi: (1) *studio teorico* di articoli di ricerca; e (2) attività di analisi di estratti di discussioni di classe, tratti da precedenti sperimentazioni da noi condotte, mirati a mettere in luce come l'uso dei costrutti teorici precedentemente introdotti consente di evidenziare aspetti di problematicità o efficacia correlati alle azioni dell'insegnante (in seguito indicheremo questa fase di lavoro come ***analisi delle pratiche altrui***).

Lo studio teorico costitutivo della fase (1) è a tre livelli: il senso della disciplina, lo studio dei processi che intervengono, la modellizzazione dell'azione dell'insegnante. Il framework introdotto riguarda sia la visione di didattica dell'algebra che ha portato alla progettazione del percorso didattico di avvio alla dimostrazione via linguaggio algebrico, sia il framework che consente di esplicitare le dinamiche che si attivano nella costruzione di ragionamento via linguaggio algebrico (Arzarello, Boero, Duval), sia, infine, il framework che noi abbiamo sviluppato per analizzare il ruolo svolto dal docente durante questa tipologia di attività (docente come M-CA_{CE}).

Durante le attività di ***analisi delle pratiche altrui*** (punto 2), si è richiesto ai docenti di analizzare estratti di discussioni collettive riguardanti la costruzione di dimostrazioni via linguaggio algebrico, focalizzando l'attenzione sull'approccio adottato dal docente e sugli interventi degli allievi della classe, cercando di evidenziare, attraverso gli indicatori enucleati: (a) i momenti nei quali l'insegnante assume il ruolo di docente che si pone come M-CA_{CE}; (b) gli interventi dell'insegnante che si rivelano meno efficaci (ovvero i momenti in cui l'approccio adottato si discosta da quello caratterizzante un docente che si pone come M-CA_{CE}); (c) gli effetti (positivi e/o negativi) del lavoro dell'insegnante sugli alunni, in termini di competenze e consapevolezze messe in luce durante la discussione collettiva (in allegato 2 presentiamo una scheda di lavoro sulla quale i docenti si sono misurati).

Successivamente gli insegnanti sono stati coinvolti in due ulteriori fasi di lavoro: (3) progettazione di attività da proporre nelle classi pianificando la metodologia di lavoro sulla base dei costrutti teorici introdotti (***fase di progettazione/azione*** supportata dai costrutti teorici introdotti) e (4) analisi delle stesse proponendo, oltre alle usuali riflessioni di tipo fenomenologico generate a partire da una osservazione libera delle attività di classe, nuove riflessioni prodotte da una osservazione dei processi sotto specifiche lenti teoriche (***fase di analisi della propria pratica***).

Nella *fase di progettazione/azione* (3), in particolare, si chiede ai docenti di lavorare su alcuni problemi dimostrativi relativi ad una attività centrale del nostro percorso. I problemi proposti richiedono di osservare regolarità e costruire congetture a partire da esplorazioni numeriche e di provare a dimostrare le congetture prodotte. Poiché i diversi aspetti che caratterizzano un uso del linguaggio algebrico come supporto nella costruzione di ragionamenti risultano essenziali nel riuscire a sviluppare un approccio algebrico alle dimostrazioni, si tratta di attività che forniscono un'occasione per fare acquisire agli studenti meta-consapevolezze circa l'uso del linguaggio algebrico e che perciò richiedono che il docente sappia porsi come M-CA_{CE}.

Questa è l'articolazione del lavoro di sperimentazione che ai docenti è stato richiesto di realizzare nelle fasi (3) e (4) del percorso di formazione (in allegato 3 una scheda di lavoro sulla quale si sono misurati i docenti):

(3a) *Prima dell'azione nelle classi:*

- Analisi a priori dei problemi da proporre alle classi, mettendo in evidenza in particolare quali congetture possono essere prodotte dagli allievi e le principali difficoltà che loro possono incontrare, in particolare nella fase dimostrativa;
- Pianificazione della metodologia da attivare nelle classi con l'obiettivo di porsi come M-CA_{CE} di fronte ai problemi dimostrativi;

(3b) *Attività nelle classi:* abbiamo suggerito ai docenti un approccio al lavoro nelle classi che ricalca quello adottato durante i nostri progetti di ricerca (è quindi articolato in momenti di lavoro a piccoli gruppi, seguiti da discussioni collettive per confrontare i risultati dei singoli gruppi e riflettere sulle attività proposte).

(4) *Analisi a posteriori delle trascrizioni delle discussioni condotte nelle classi:* si è richiesto esplicitamente di svolgere un'analisi in sintonia con quella prodotta durante i laboratori di *analisi delle pratiche altrui*, cercando di evidenziare: i momenti nei quali l'insegnante assume il ruolo di *docente che si pone come M-CA_{CE}*; gli interventi dell'insegnante che si rivelano meno efficaci (ovvero i momenti in cui il suo approccio si discosta da quello caratterizzante un *docente che si pone come M-CA_{CE}*); gli effetti (positivi e/o negativi) di questo lavoro sugli alunni, in termini di competenze e consapevolezze messe in luce durante la discussione collettiva.

Riteniamo che il *cognitive apprenticeship* possa anche rappresentare un buon modello per interpretare la nostra metodologia di lavoro con i docenti, la quale con il perfezionamento della fase preliminare di studio e riflessione secondo le modalità sopra descritte, è ora delineabile nella sua struttura: (1) studio teorico; (2) analisi delle pratiche altrui; (3) progettazione ed azione nelle classi; (4) analisi della propria pratica; (5) riflessione critica congiunta attraverso gli MT.

La fase (1), poiché caratterizzata dallo studio di articoli in cui i costrutti teorici sono utilizzati per interpretare i processi di insegnamento-apprendimento che si realizzano nelle classi e da discussioni in cui il ricercatore presenta analisi di estratti di discussioni di classe facendo esplicito riferimento ai costrutti teorici studiati, può infatti essere interpretata in termini di *modeling*. La fase (2), in cui i docenti si servono dei costrutti teorici per analizzare processi di classe nei quali non sono i protagonisti ed attivano un primo confronto con il mentore ricevendo feedback circa la correttezza delle interpretazioni proposte, può essere interpretata in termini di *coaching*. Le fasi (3) e (4) possono invece essere interpretate in termini di *scaffolding*. Infatti, la richiesta di pianificare la propria metodologia sulle basi degli studi

teorici affrontati e di analizzare, attraverso opportune lenti teoriche, la propria azione in classe consente al docente di mettere in atto prime pratiche riflessive “guidate”, confrontandosi con il mentore per evidenziare sia le difficoltà incontrate nel porsi correttamente in relazione ai contenuti affrontati durante le lezioni, sia le eventuali lacune della propria analisi a posteriori. Talvolta, quando il docente si trova maggiormente in difficoltà, il mentore può sostituirsi ad esso proponendo stimoli che consentano al docente di costruirsi un proprio modello per la riflessione. Questi stimoli da parte del mentore potranno gradualmente scomparire, nell’ottica di un *fading* del supporto, quando il docente sarà riuscito ad acquisire maggiori consapevolezze, in un processo di internalizzazione degli stimoli ricevuti. La successiva fase (5), in cui sulle trascrizioni delle lezioni compaiono, accanto alle riflessioni del docente e ai commenti del mentore, riflessioni di altri docenti e ricercatori coinvolti in simili progetti, può essere sempre interpretata in termini di graduale *fading* del supporto, oltre che in termini di *articulation* e *reflection*.

4. Esempi tratti dalle nostre ultime attività con insegnanti in formazione:

In sintonia con il quadro precedentemente delineato, nel nostro lavoro con insegnanti in formazione è stato costante l’obiettivo di creare communities of inquiry all’interno delle quali ciascun docente possa aver modo di analizzare criticamente la propria pratica. L’idea fondamentale è quella di favorire, attraverso la metodologia delle trascrizioni multi commentate, ovvero un continuo lavoro di riflessione a più voci, il passaggio da comunità di apprendimento, all’interno delle quali il focus è sullo studio di aspetti teorici e sulla messa in situazione per imparare ad analizzare le pratiche altrui, a communities of inquiry, all’interno delle quali il focus è sulla riflessione su di sé.

La nuova metodologia di lavoro, caratterizzata dall’introduzione della scandita sequenza di attività preliminari a quelle di *riflessione critica a più voci* che abbiamo presentato nel precedente paragrafo (*studio teorico – analisi delle pratiche altrui – progettazione ed azione – analisi della propria pratica*), è stata sperimentata attraverso una modalità per noi nuova, quella della formazione istituzionale a distanza⁵⁴. Questo nuovo ambiente di lavoro ha comportato la mancanza di situazioni comunitarie reali e la necessità di dover lavorare all’interno di un contesto in cui il confronto tra individui è sempre mediato. Ciò ha condotto ad un indebolimento della componente ‘community of inquiry’ e ad un conseguente rafforzamento del dialogo insegnante-mentore. E’ per questo motivo che le attività sono state affrontate individualmente dai docenti, ma sempre in contatto con il mentore ricercatore, che ha fornito feedback o talvolta affiancato i docenti nelle attività di riflessione.

Qui di seguito presentiamo due stralci di protocolli di analisi prodotti dai docenti durante la quarta ed ultima fase che caratterizza la nostra nuova metodologia (*analisi della propria pratica*). Questi esempi sono proposti per mettere in luce anche quali siano le carenze di un lavoro in cui viene a mancare la componente comunitaria della nostra metodologia, ovvero la fase di riflessione a più voci.

In entrambi gli esempi i docenti coinvolgono le loro classi nell’analisi delle strategie adottate da gruppi di allievi per affrontare il seguente problema: *Considera un numero naturale. Determina la somma tra esso ed i due numeri naturali successivi. Cosa osservi? Sapresti dimostrare quanto affermi?*

4.1 PRIMO ESEMPIO: un docente che non sa porsi come M-CA_{CE} e si serve in maniera erranea del costrutto teorico per interpretare il proprio approccio

⁵⁴ Ci riferiamo al Master “Ambienti di apprendimento per la Matematica: ruolo, strategie e competenze del Tutor per le Discipline Matematiche nella formazione in servizio degli insegnanti”, realizzato in seno all’INDIRE.

Il primo esempio che presentiamo riguarda un docente (T_1) che si rivela non metacognitivo sia nell'azione che nella riflessione ($\neg M_A \neg M_C$): non è infatti riuscito ad allineare i suoi comportamenti a quelli di un docente che si pone come $M-CA_{CE}$ e l'uso che fa del costrutto teorico nella riflessione appare forzato.

Lo stralcio di discussione è inserito nella prima colonna della seguente tabella. Il docente ha scelto di numerare separatamente in sequenza i suoi interventi (indicati con la lettera T) e quelli degli alunni (ciascun alunno è indicato con una diversa lettera dell'alfabeto). Nella seconda colonna sono inseriti, accanto agli interventi ai quali si riferiscono, i commenti che il docente ha proposto nell'analisi a posteriori che ha prodotto in risposta alle nostre consegne. Nella terza colonna sono evidenziati i commenti che abbiamo inserito in un secondo momento sia per mettere in luce come il costrutto di M-CA_{CE} si sia rivelato un buon strumento per analizzare questa tipologia di processi, sia per evidenziare sintonia o contrapposizione tra le interpretazioni che il docente propone dei suoi interventi e le nostre interpretazioni.

Estratto di una discussione	Commenti di T ₁	Interpretazione del ruolo del docente nell'ottica del costruito di docente come M-CA _{CE}
Durante una prima fase della discussione, la classe arriva a concordare che la somma oggetto di indagine rappresenta sempre un multiplo di 3. Nella fase di dimostrazione della congettura prodotta, la docente invita uno studente (I) alla lavagna cercando di coinvolgere l'intera classe in una discussione, durante la quale viene costruita l'espressione che rappresenta la somma tra tre numeri consecutivi: $n+n+1+n+2$.		
T ₁ 15. Bene allora dopo cosa avete fatto? Come avete continuato? M15. Se provo con n=4, n+1 è 5, n+2 è 6 e la somma fa 15, così con gli altri numeri ... T ₁ 16. Va bene, ma voi siete tornati al linguaggio naturale. Siete tornati ai numeri, non sono più simboli. Questa espressione (<i>si riferisce all'espressione scritta alla lavagna dallo studente I</i>) si può sviluppare? Possiamo ottenere qualcosa? Come si può sviluppare, voi le espressioni le sapete risolvere e quindi cosa viene fuori? I16. Facciamolo. T ₁ 17. Cerchiamo di svilupparlo e vediamo cosa otteniamo. M17. Sì. Allora ... togliendo le parentesi ... T ₁ 18. Brava, allora proviamo. <i>I scrive $n+(n+1)+(n+2)=n+3$</i> T ₁ 19. Devi togliere le parentesi ... T ₁ 20. Allora possiamo risolverla? I 19. Sì. T ₁ 21. Proviamo ...	<i>Attiva processi anticipatori attraverso manipolazioni</i> <i>Stimolare gli atteggiamenti riflessivi e riportare l'equilibrio fra gli aspetti semantici (pensiero anticipatorio in relazione agli obiettivi dell'attività) ed aspetti sintattici (controllo della correttezza delle manipolazioni operate).</i> <i>Stimolare alla manipolazione.</i> <i>Guida a una corretta manipolazione.</i> <i>Riflettere sulla scrittura simbolica per cercarne l'interpretazione.</i>	<i>T₁ si pone da suggeritore. Non si pone da attivatore di pensieri anticipatori poiché non chiarisce quale sia l'obiettivo delle manipolazioni che cerca di stimolare. T₁ non attiva inoltre connessioni tra aspetti semantici e sintattici, a scapito della conquista dei significati.</i> <i>Attiva, inconsapevolmente, un approccio cieco ai problemi dimostrativi.</i> <i>T₁ si pone da suggeritore.</i> <i>Attiva, inconsapevolmente, un approccio cieco ai problemi dimostrativi.</i>

MC20. Si sommano T ₁ 22. Brava. Sommiamo i termini. Questo quanto fa ? I 22. $n+3$ T ₁ 24. No, stai attenta. F23. Viene $3n+3$ T ₁ 25. Come si può rendere evidente la proprietà che avete trovato? Perché è un multiplo di 3? Come posso evidenziare tutto questo? Si può fare qualche cosa? Quindi cosa possiamo fare in questo polinomio? ...	<i>Attiva processi anticipatori.</i> <i>Guida a una corretta manipolazione</i> <i>Cerca di attivare il processo di generalizzazione attraverso corrette manipolazioni.</i>	<i>Non sa guidare in maniera efficace i processi interpretativi che tenta di stimolare.</i>
---	--	---

Una sintetica analisi degli interventi di T₁ rivela come questo docente non sia in grado di attivare quelli che sono i tipici comportamenti di un docente M-CA_{CE}, ponendosi invece come suggeritore, finendo col rischiare di trasmettere ai suoi alunni l'idea distorta che la dimostrazione della congettura prodotta debba nascere come frutto di azioni casuali e non sotto la guida di chiari obiettivi da perseguire. Va inoltre sottolineato come gli interventi di T₁ evidenzino che nel suo modo di proporre i contenuti prevale l'aspetto calcolativo, rivelatore di una visione di algebra contrapposta a quella che il percorso didattico vorrebbe promuovere. L'evidente contrapposizione tra gli interventi di T₁ nel corso della discussione, i suoi commenti a posteriori e l'interpretazione che si può fare degli stessi facendo un corretto riferimento al costrutto rivela inoltre come il docente non abbia realmente interiorizzato i caratteri tipici di M-CA_{CE} e per questo motivo incontri difficoltà nel riconoscere la presenza/assenza di tali caratteri nella propria modalità di agire in classe. Va sottolineato che T₁, durante la fase di *analisi delle pratiche altrui*, aveva invece proposto riflessioni mirate sulla discussione da analizzare, facendo spesso corretto riferimento al costrutto. Questa osservazione ci ha spinto ad ipotizzare quali nuove problematiche siano intervenute in questa fase successiva di lavoro. Riteniamo che un aspetto chiave che possa aver rappresentato una causa di "blocco" per T₁ risieda nell'incapacità di "sdoppiarsi", ovvero di mettersi su un piano esterno rispetto al proprio lavoro. Questo blocco ha fatto sì che T₁ abbia finito con l'attivare una sorta di **approccio rituale** all'analisi della propria pratica: incapace di analizzare se stesso in maniera critica, propone riflessioni che soddisfano canoni "formali" (fa frequente uso di termini specifici che delineano i caratteri di M-CA_{CE}), senza che vi sia reale aderenza tra contenuto e forma della riflessione.

L'uso di uno strumento astratto (il costrutto teorico), rivelatosi efficace sia in fase di analisi delle pratiche altrui che in precedenti interventi di formazione insegnanti (Cusi e Malara 2011), ha consentito dunque di evidenziare il gap tra le consapevolezza circa le azioni da attivare rispetto a particolari contenuti matematici (*awareness relativa al come porsi in classe*), e le consapevolezza relative alla propria azione ed alla riflessione su di essa.

4.2. SECONDO ESEMPIO: un docente che sa porsi come M-CA_{CE} e propone riflessioni mirate, ma rivela difficoltà nel servirsi del costrutto teorico per analizzare la propria pratica

Il secondo esempio che presentiamo riguarda un docente (T₂) che ha mostrato di aver realmente interiorizzato il costrutto di M-CA_{CE} e che sa analizzare in modo critico il proprio approccio durante l'azione di classe. Evidenzia però alcuni blocchi nel servirsi del costrutto stesso per l'analisi che deve condurre. La discussione che segue riguarda lo stesso problema affrontato dal docente T₁. Come nell'esempio precedente, le tre colonne della tabella contengono, da sinistra, uno stralcio della discussione di classe, i commenti di T₂ e la nostra

analisi a posteriori degli interventi di T₂. In fondo alla tabella abbiamo inserito anche una riflessione spontanea che T₂ ha proposto come premessa al suo protocollo di analisi.

Estratto della discussione	Commenti di T ₂	Interpretazione del ruolo del docente nell'ottica del costrutto di docente come M-CA _{CE}
In una prima fase della discussione, la classe arriva a concordare che la somma richiesta risulta sempre essere un multiplo di tre (congettura introdotta dalla studentessa F). Una studentessa (L) dichiara di aver inoltre messo in luce che non si tratta di un qualsiasi multiplo di 3, bensì del prodotto tra 3 ed il successivo del numero considerato inizialmente. La docente (T ₂) introduce qui di seguito la fase di discussione relativa alla costruzione della dimostrazione della congettura prodotta.		
T₂ (46): Ripartiamo da questa somma che deve essere un multiplo di tre. Se F tu mi proponi questa tua congettura, allora qual è il tuo punto di partenza e quale diventa il tuo obiettivo? F8: Eh sono partita dagli esempi quindi ho individuato la congettura e ho iniziato a generalizzare T₂ 47: Cercando di arrivare a cosa? F9: A una regola che risulti invariante per tutti T₂ 48: Una regola valida per tutti, mhm ma che cosa devo leggere, dove voglio arrivare? ... impastare per arrivare dove? ... tu vuoi un multiplo di tre quindi cosa vuoi? F11: Voglio ... voglio un 3n T₂ 50: Un 3n perché voglio un 3...per qualcosa. Invece L nella tua proposta ... tu cosa vuoi avere in uscita ... l'impasto cosa ti deve dare ... L8: Deve dare nx+1	<i>Tentativo di porsi come modello di ragionamento.</i> <i>Intervento troppo condizionante, infatti la replica.</i> <i>Intervento poco significativo rispetto ad una situazione che richiedeva maggiori approfondimenti. Lo stesso tentativo di utilizzare un termine decisamente non tecnico, 'impasto', non aiuta ma confonde ulteriormente (eppure non era la prima volta che lo utilizzavo).</i>	Focus sull'obiettivo: T₂ si pone come attivatore di pensieri anticipatori. Focus sull'obiettivo. Tentativo di attivare pensieri anticipatori. Focus sull'obiettivo.
<i>Dopo una lunga discussione la classe arriva a proporre la seguente espressione-punto di partenza: n+(n+1)+(n+1+1). T₂ fa riflettere gli alunni su come questa espressione possa essere trasformata, nell'ottica del raggiungimento dell'obiettivo prefissato, applicando opportune proprietà delle operazioni aritmetiche (associativa, commutativa, distributiva).</i>		
T₂ 93: Allora, F, siamo a 3n+3 F29: Io più avanti di così non sono riuscita ad arrivare. Veramente a me mi basta per dire che il numero che si ottiene è sempre un multiplo di tre. È sufficiente. T₂ 94: Perché? F31: Perché 3n è multiplo di tre e se sommiamo tre otteniamo il multiplo di tre successivo T₂ 95: Però non siamo arrivati a quello che volevamo. Ci siamo dati un obiettivo ma ci siamo fermati prima. C'è un motivo per	<i>L'intervento ha il fine di stimolare una riflessione globale, anche per stimolare quello che si riteneva (nell'analisi a priori del problema) un punto delicato della giustificazione. Infatti, rispetto alla conclusione espressa in F31 per cui la tesi è dimostrata pur non ottenendo una 'scrittura' in uscita analoga a quella attesa, l'intervento T2 95 cerca di provocare una riflessione ulteriore ponendosi ancora una volta come</i>	T₂ si pone da attivatore di processi interpretativi. T₂ si pone da attivatore di atteggiamenti riflessivi: mira ad indurre un atteggiamento meta

arrivare a tre per qualcosa? ...	<i>modello.</i>	<i>anche negli allievi.</i>
Riflessioni a posteriori di T₂: <i>Rispetto al precedente laboratorio⁵⁵, l'analisi di un mio intervento in classe è stato ancor più difficile e complesso. Seppur la memoria completava la visione forse troppo limitativa data dalla trascrizione pura della discussione, tuttavia l'autocritica e/o il 'volersi salvare da critica' non mi ha permesso di analizzare in modo oggettivo. Quanto detto può essere inteso come scusante per quanto sto per trascrivere, ma, al contrario, è forse più una richiesta di un punto di vista esterno, di un occhio che complementare al mio possa aiutarmi ad analizzare in modo più oggettivo il mio modo di procedere nella discussione in classe.</i>		

A differenza di quello adottato da T₁, l'approccio di T₂ evidenzia che l'insegnante ha fatto propri i caratteri tipici di docente che si pone come M-CA_{CE}. Focalizzando, sin dall'inizio di questo stralcio di discussione, l'attenzione sull'obiettivo del lavoro di formalizzazione e manipolazione che la classe sta mettendo in atto, T₂ si pone da attivatore di pensieri anticipatori e di processi interpretativi. Contemporaneamente non perde di vista la dimensione meta, ponendo domande che inducono gli allievi ad esplicitare il senso dell'approccio adottato. Queste osservazioni consentono di evidenziare la consapevolezza maturata dal docente circa gli atteggiamenti ed i comportamenti da attivare in riferimento a queste pratiche di classe. Nonostante le interessanti riflessioni che propone, T₂ non si serve però di termini teorici caratterizzanti il costrutto di M-CA_{CE} per descrivere ed oggettivare il proprio approccio. Ad esempio, si serve del generico termine "modello di ragionamento", richiamando l'idea di M-CA_{CE}, anziché specificare che il suo intervento rivela un tentativo di porsi come attivatore di pensieri anticipatori; oppure osserva che un suo intervento ha l'obiettivo di "stimolare la riflessione", senza oggettivare il suo ruolo attraverso il concetto di "attivatore di atteggiamenti riflessivi". Se ci poniamo nell'ottica di analizzare il suo essere metacognitivo nell'azione e nella riflessione, questo aspetto denota che T₂ può essere inserito nella categoria M_A→M_C, in quanto, pur proponendo corrette riflessioni da un punto di vista pratico, non ha ancora sviluppato la necessaria sicurezza per analizzare le proprie azioni anche in termini teorici. T₂ è infatti in grado di "descrivere" la propria pratica, ma lo fa senza porsi in termini generali. Sa riconoscere i caratteri del costrutto di M-CA_{CE}, ma non li esplicita, scegliendo di far riferimento ad essi attraverso esempi concreti che li caratterizzano.

Va rilevato che, come nel caso di T₁, questa problematica non è stata evidenziata in fase di *analisi delle pratiche altrui*, durante la quale T₂ ha fatto riferimento diretto ai termini del costrutto. Riteniamo che la mancata oggettivazione dei processi attivati sia ascrivibile a difficoltà connesse al passaggio da un'esperienza di osservazione di altri ad un'esperienza di osservazione di sé, come la riflessione a posteriori proposta da T₂ rivela: *"l'autocritica e/o il 'volersi salvare da critica' non mi ha permesso di analizzare in modo oggettivo"*. T₂ può essere descritto come un docente ancora in transizione, però consapevole del suo essere, in termini Vygotskyani, in zona di sviluppo prossimale. La richiesta che T₂ fa di *"un punto di vista esterno"*, un *"occhio complementare al suo"* che funga da aiuto nel condurre una oggettiva analisi del suo *"modo di procedere nella discussione in classe"* apre la strada ad un'ulteriore riflessione: favorire il superamento di questa fase di transizione richiede l'intervento di uno o più osservatori esterni, che guidino il docente, attraverso un continuo confronto, nel lavoro di esplicitazione dei processi attivati. Tale percorso richiede dunque la costituzione di un rapporto dialogico, in cui l'analisi di micro situazioni venga condotta con l'obiettivo di favorire lo sviluppo di una reale consapevolezza della propria azione, attraverso una sua oggettivazione mediante l'uso del costrutto teorico, che, da strumento di analisi, viene ad

⁵⁵ T₂ si riferisce all'attività di *analisi delle pratiche altrui* precedentemente affrontata.

assurgere anche il ruolo di strumento per comunicare con i docenti e per modellizzare i processi di riflessione.

In allegato 4 presentiamo un esempio del possibile lavoro che un mentore dovrebbe condurre per stimolare questo processo di modellizzazione. Si tratta di un estratto di discussione di classe, commentata linea per linea dal mentore (sotto sollecitazione del docente, che aveva dichiarato di non riuscire ad operare un'analisi oggettiva del proprio lavoro), facendo un costante riferimento ai termini caratterizzanti il costrutto di $M-CA_{CE}$ ed alternando dunque osservazioni relative ai processi di pensiero sviluppati dagli allievi ad osservazioni relative alla conduzione della discussione, in relazione al particolare contenuto in esame. Nella tabella in allegato 4 sono indicati, accanto ai commenti del mentore, gli obiettivi dei commenti stessi in termini di sviluppo di consapevolezza circa la propria azione ed il proprio ruolo. I feedback del mentore possono essere interpretati come interventi mirati in un processo di *scaffolding* finalizzato alla modellizzazione della riflessione. Solo quando tali interventi saranno riusciti a provocare i necessari shifts nelle structures of attention per favorire una piena awareness-in-discipline relativa sia alla capacità di agire in classe, sia alla capacità di riflettere a posteriori sulla propria pratica, al processo di scaffolding potrà seguire un processo di fading, durante il quale gli interventi del mentore, proposti solo dopo quelli del docente, saranno mirati a mettere in luce aspetti non ancora pienamente colti da quest'ultimo. Come osservato da Mason (2008) nel descrivere ciò che accade a uno studente che internalizza gli stimoli ricevuti dal proprio docente, questo processo favorisce l'internalizzazione, da parte dell'insegnante, degli stimoli ricevuti dal mentore, in modo che l'attività di riflessione passi da processo "in sé" a processo "per sé".

Questa è la dichiarazione di un docente circa il ruolo chiave svolto dal mentore nel favorire lo sviluppo di queste consapevolezze:

La presenza del mentore aveva inizialmente alterato la mia pretesa di unica conduttrice delle attività, inattaccabile sia dal punto di vista didattico che comportamentale, sicuramente dovuta al non essere abituata a ricevere osservazioni da colleghi se non riguardo ai diversi argomenti da trattare ed alla loro scansione temporale. ... ho realizzato invece i benefici di un lavoro di questo tipo: il meditare su alcuni miei atteggiamenti/interventi negativi, emersi nelle osservazioni a posteriori con il mentore, mi ha permesso di essere meno impulsiva e di riuscire, all'occorrenza, ad attivare opportune strategie mirate a motivare gli alunni nel percorso (M).

5. Alcune riflessioni conclusive

Gli esempi presentati consentono già di delineare due diverse categorie di approccio alle attività di riflessione su pratiche altrui e sulla propria pratica. Da un lato, T_2 mostra di essere un docente $M_A \rightarrow M_C$, metacognitivo nell'azione di classe ma ancora "in transizione" nell'uso dei costrutti definitivi di $M-CA_{CE}$ per l'analisi della propria pratica. Dall'altro, T_1 si è rivelato, in fase di analisi della propria pratica, un docente di tipo $\neg M_A \neg M_C$, poiché non ha saputo assumere nel vivo dell'azione i caratteri di $M-CA_{CE}$ e fa un uso distorto di questo costrutto teorico nell'analisi a posteriori della propria pratica, proponendosi attraverso un *approccio di tipo rituale*. Altri docenti che hanno partecipato a queste attività, a differenza di T_1 , hanno mostrato queste difficoltà non solo in fase di analisi della propria pratica, ma anche in fase di analisi delle pratiche altrui. Per distinguere queste due diverse problematiche abbiamo scelto di indicare quest'ultima categoria di approccio alla riflessione, che rivela una totale mancanza di awareness, con il termine *rituale puro* e di indicare l'approccio di T_1 con il termine *rituale condizionato*. La scelta di servirci del termine "condizionato" è legata al fatto che questa categoria è caratterizzata da una maggiore lucidità nell'analisi di interventi altrui, associata ad una componente di ritualità in relazione all'analisi di sé. Il condizionamento è, in questo secondo caso, a nostro parere causato dalle proprie emozioni e dal coinvolgimento diretto

nelle pratiche che il docente si trova a dover analizzare. Per docenti come T_1 pare si sia realizzata una appropriazione del costrutto come strumento interpretativo delle azioni di un insegnante-terzo, mentre è evidente una scollatura tra uso del costrutto nella propria azione e nella riflessione su di sé, che diventa problematica perché viene a confliggere col proprio modo di essere nella classe. Si tratta dunque di interferenze di tipo emotivo: la storia vissuta con la propria classe impedisce un azzeramento rispetto al contesto, inibendo l'analisi oggettiva di quanto accade. Queste stesse osservazioni si possono fare anche in relazione alla tipologia di comportamenti evidenziati da T_2 , seppure meno problematico se analizziamo il suo saper essere metacognitivo nell'azione e nella riflessione.

Come T_2 ha fatto nel presentare il protocollo precedentemente analizzato, anche altri docenti, senza alcuna sollecitazione da parte nostra, hanno proposto riflessioni globali spontanee sul processo di formazione che li ha visti coinvolti. Tali dichiarazioni testimoniano l'avvenuto sviluppo di consapevolezze a vari livelli.

Da un lato alcune riflessioni rivelano lo sviluppo di una *awareness-in-discipline relativa ad aspetti contenutistici-metodologici*. In particolare, vari docenti riconoscono di aver compreso la necessità di modificare la propria pratica, sia in termini di metodologia da attivare, sia in termini di attenzione maggiore verso i propri atteggiamenti e comportamenti, sottolineando in particolare di aver colto che l'attivazione di specifici atteggiamenti e comportamenti (quelli che caratterizzano un M-CA_{CE}) favorisce il reale sviluppo di competenze e consapevoli da parte degli allievi. Ne sono testimonianza le seguenti dichiarazioni:

*Queste attività mi stanno aiutando molto a capire in quali parti del ragionamento gli studenti possono incontrare le maggiori difficoltà, a comprendere la difficoltà dalla costruzione di congetture alla dimostrazione vera e propria. Adottando questa metodologia "non tradizionale" **si sviscerano i processi cognitivi più nascosti**, si riduce l'ambiguità del linguaggio parlato e si riesce a percepire immediatamente dove intervenire prima che si vada troppo avanti nel processo dimostrativo. Mi diverte questo modo di insegnare e mi prefiggo di farlo rientrare nella mia pratica didattica quotidiana. **Probabilmente anche nella lezione frontale il docente si pone come modello di comportamenti efficaci ma sicuramente meno consapevoli, poiché l'elemento innovativo di questa metodologia di insegnamento-apprendimento è proprio la maggiore scientificità del processo.** (M.C.)*

Ritengo che un insegnante che imposti la sua attività didattica mantenendo fissi questi riferimenti possa davvero formare degli studenti che siano in grado di pensare e non limitarsi all'addestramento di studenti abili nella riproduzione di algoritmi e contenuti che rimangono per loro privi di alcun significato. (C)

Altre riflessioni testimoniano l'avvenuto sviluppo di una *awareness-in-discipline relativa alle modalità attraverso le quali cercare di favorire il proprio sviluppo professionale*. Vari docenti sottolineano infatti di aver colto che il processo di formazione per un insegnante non deve mai arrivare a termine e focalizzano l'attenzione sulla necessità di condurre studi teorici a livello di ricerca in didattica della matematica per imparare sia ad agire che a riflettere meglio.

*Per poter svolgere con serietà il lavoro di insegnante non è sufficiente limitarsi allo sbrigliamento della matassa delle implicazioni che soggiacciono ai contenuti, ma è anche necessario che l'insegnante si mantenga aggiornato sugli studi di didattica che vengono continuamente svolti riguardo all'argomento che di volta in volta ci si accinge ad affrontare. **La continua formazione del docente, infatti, gli permette di rifarsi a dei quadri teorici di riferimento che lo guidino nell'identificazione delle strategie da adottare affinché il suo intervento risulti efficace.** L'efficacia dell'intervento didattico, inoltre, non può prescindere dall'atteggiamento con cui il docente si pone di fronte agli allievi (S).*

Queste riflessioni testimoniano che il percorso formativo ha favorito, nonostante le difficoltà incontrate da vari docenti, lo sviluppo di consapevolezza circa la didattica della propria disciplina ed il senso del proprio essere insegnanti. La modellizzazione del processo di riflessione sulle pratiche altrui e sulla propria pratica grazie alla griglia di indicatori forniti dal costrutto di M-CA_{CE} consente dunque di perseguire effettivamente alcuni degli obiettivi nel nostro lavoro con gli insegnanti: far loro acquisire una crescente capacità di interpretare la complessità dei processi di classe; far loro riflettere sulla efficacia del proprio ruolo; far loro osservare l'influenza del proprio approccio sui comportamenti e sull'apprendimento degli allievi.

Nonostante questo, gli esempi presentati mostrano che ancora l'obiettivo di rendere gli insegnanti reali "insegnanti metacognitivi" non è ancora stato completamente perseguito. Il fatto che molti docenti abbiano sviluppato una awareness relativa ai ruoli assunti da un M-CA_{CE} solo nell'ambito dell'analisi delle pratiche altrui (come l'esempio del protocollo di T₁ testimonia) implica la necessità di realizzare un maggior dispiegamento di forze sul versante dell'analisi della propria azione, sia in termini di spazi per la riflessione che in termini di tempi da dedicarvi. Riteniamo inoltre che la principale causa alla base delle problematiche evidenziate sia il ruolo secondario svolto dalla dimensione comunitaria in questo particolare intervento di formazione insegnanti. La testimonianza di T₂ ci ha consentito, in particolare, di mettere in luce che lo scivolamento dall'analisi degli altri all'analisi di sé stessi richiede di lavorare su tempi più lunghi, attraverso ulteriori interventi mirati ad attivare un confronto continuo tra docente, mentore ed altri colleghi, nel contesto di una reale community of inquiry. Un percorso più strutturato che preveda spazi per un confronto anche diretto tra il singolo docente ed il mentore e tra il mentore e gruppi di docenti, nel contesto di un long-life learning, può favorire il superamento dei gap evidenziati. Nella progettazione degli interventi per i futuri Tirocini Formativi Attivi occorrerebbe promuovere queste pratiche di condivisione come metodologia dei tirocini diretti, impegnando piccoli gruppi di futuri insegnanti sulle stesse attività da proporre in classe e coinvolgendoli in attività di riflessione congiunta, in modo che possano fruire dei benefici di questo approccio.

Ci piace concludere il nostro contributo con le riflessioni di un insegnante coinvolto in un percorso pluriennale di formazione impostato su queste basi:

La scoperta che più desidero sottolineare è quella del gruppo di lavoro, del "circolo culturale" al quale per questi tre anni ho sentito di appartenere, nel quale ognuno ha inseguito la propria missione, diversa nella sua applicazione per ambito e contenuto, ma comunque all'interno di un unico disegno. (S.D.)

Vogliamo infine indicare un problema molto serio che si profila a livello istituzionale, relativo alla professionalità e sensibilità dei mentori su queste tematiche. In questo studio il mentore è partecipante immerso nella comunità di inquiry, ben consapevole del compito che si trova di fronte. Egli, con cura attenta, svolge attività di coaching e scaffolding per i docenti nella analisi di processi, educandoli al corretto riferimento ai vari indicatori caratterizzanti il modello M-CA_{CE} (egli è dotato di awareness-in-counsel secondo la terminologia di Mason); risulta pertanto variabile muta nel processo di formazione dei docenti. Quando vi è il concorso di svariati mentori, per le inevitabili differenze dovute, al di là della competenza individuale, alla emotività e personalità di ciascuno, emergono differenze a volte anche significative tra i loro comportamenti. La questione potrà diventare più problematica nel caso della attivazione del TFA, dove i mentori potranno essere chiamati ad operare in un contesto scientifico con il quale i contatti possono essere sporadici e non sono previsti interventi istituzionali per la loro formazione. Quello che ci preoccupa è il mancato investimento sul versante della formazione dei mentori, problema oggi di punta e di interesse crescente nella ricerca (si veda ad esempio Jaworski e Wood 2008).

ALLEGATO 1: ESEMPI di ATTIVITA' del PERCORSO DIDATTICO

Attività di traduzione da linguaggio verbale ad algebrico e viceversa

1) Traduci i seguenti enunciati in linguaggio algebrico:

Il successivo di un numero	Il precedente di un numero
Un numero dispari	Due dispari consecutivi
Un numero di due cifre	Un numero di tre cifre
Un numero divisibile per 7	Un multiplo di 5
Un numero non divisibile per 2	Un numero non divisibile per 3

2) Traduci le seguenti procedure in linguaggio algebrico:

Aggiungi 5 al successivo del quadrato di un multiplo di 5.

Togli da un numero dispari il dispari che lo precede.

3) Traduci in linguaggi algebrico le seguenti frasi, che esprimono l'uguaglianza tra due espressioni. Verifica successivamente se l'uguaglianza espressa è corretta. In caso non lo sia, trova l'errore.

La differenza tra il quadrato di un numero ed il numero stesso è uguale al prodotto del numero per il suo precedente.

La somma del cubo di un numero per il quadrato del numero stesso è uguale al prodotto del numero di partenza per il suo successivo.

Sommando 3 al doppio del precedente di un numero si ottiene il successivo pari di un numero pari.

Studio delle relazioni tra proprietà di una data espressione algebrica e proprietà delle variabili in essa contenute

1) Determina quali condizioni debba soddisfare k (naturale) affinché:

$k+3$ sia multiplo di 3 $k+3$ sia pari

2) Determina quali condizioni debba soddisfare b (naturale) affinché:

$3b$ sia multiplo di 3 $3b$ sia pari

$3b$ sia multiplo di 6 $3b$ sia dispari

3) Determina quali condizioni debba soddisfare n (naturale) affinché:

n^2 sia pari

n^2 sia dispari

n^2 sia multiplo di 4

n^2 non sia divisibile per 9

Analisi della veridicità/falsità di enunciati riguardanti proprietà dei numeri naturali e giustificazione delle risposte fornite

Determina quali delle seguenti affermazioni sono false e quali vere, motivando la tua risposta.

1) L'espressione n^2+1 rappresenta sempre un numero dispari.

2) Se il prodotto di due numeri è dispari, allora la loro somma è pari.

Esplorazione di situazioni numeriche, formulazione di congetture e relative dimostrazioni

1) Cosa puoi dire della differenza tra il cubo di un numero naturale ed il numero stesso? Fai qualche esempio numerico per aiutarti nella congettura richiesta. Sapresti dimostrare quanto affermi?

2) Scrivi un numero naturale di due cifre ed il numero che ottieni da questo invertendo le cifre. Calcola la differenza tra il maggiore ed il minore. Ripeti il procedimento a partire da altri numeri di due cifre. Che regolarità puoi osservare? Sapresti dimostrare quanto affermi?

Analisi di strategie dimostrative

Considera il seguente enunciato: *"Se n è un numero naturale non divisibile per 3, allora il precedente del suo quadrato è divisibile per 3".*

Analizza ciascuna delle seguenti dimostrazioni dell'enunciato, proposte da quattro studenti, chiarendo se si tratta o meno di effettive dimostrazioni dell'enunciato e motivando quanto affermi.

Successivamente confronta le 4 dimostrazioni cercando di evidenziare, se esistono, i legami che intercorrono tra alcune di esse.

Dimostrazione di Giovanni:

Se n vale 2, allora $n^2-1=4-1=3$, che è divisibile per 3.

Se n vale 4, allora $n^2-1=16-1=15$, che è divisibile per 3.

Se n vale 5, allora $n^2-1=25-1=24$, che è divisibile per 3.

Se n vale 7, allora $n^2-1=49-1=48$, che è divisibile per 3.

Quindi l'enunciato è vero perché si ottiene sempre un numero divisibile per 3.

Dimostrazione di Alice:

Il precedente del quadrato di n è uguale al prodotto tra il precedente ed il successivo di n stesso. Se n non è divisibile per 3, allora uno tra il suo il precedente ed il suo successivo sicuramente è divisibile per 3, perché se prendo tre numeri successivi, uno tra essi è sempre un multiplo di 3, visto che i multipli di 3 compaiono ogni tre numeri. Ma allora n^2-1 è il prodotto di due fattori, dei quali uno è sicuramente un multiplo di tre, quindi anche n^2-1 è un multiplo di 3. Quindi ho dimostrato che l'enunciato è vero!

Dimostrazione di Filippo:

Se $n \neq$ multiplo di 3, allora $\frac{n}{3} = x + y$ (y è il resto della divisione di n per 3 e x è il quoziente).

Quindi $n=3(x+y)$.

Allora $n^2-1=[3(x+y)]^2 - 1 = 9(x+y)^2 - 1 = 9(x^2+y^2+2xy-1)$

Quindi ho ottenuto che il precedente del quadrato di n è un multiplo di 9 e, se è un multiplo di 9, è anche un multiplo di 3!

Dimostrazione di Elena:

$$n^2-1=(n+1)(n-1)$$

Se n non è multiplo di 3, i casi sono due: $n=3x+1$ oppure $n=3x+2$.

Se $n=3x+1$ allora $(n+1)(n-1)=(3x+2)(3x)=3(x)(3x+2)$

Se $n=3x+2$ allora $(n+1)(n-1)=(3x+3)(3x+1)=3(x+1)(3x+1)$

In entrambi i casi ho dimostrato che n^2-1 è un multiplo di 3, quindi ho dimostrato l'enunciato!

Costruzione delle dimostrazioni di teoremi assegnati

1) Per elevare al quadrato un numero la cui ultima cifra è 5 basta moltiplicare il numero privato della cifra 5 per il suo successivo e far poi seguire a questo risultato le cifre 2 e 5.

Esempio 1. Per calcolare il quadrato di 35, basta considerare 3 e moltiplicarlo per il suo successivo: si ottiene $3 \cdot 4 = 12$. Ora basta far seguire a questo numero le cifre 2 e 5. Il numero così ottenuto, 1225, è proprio 35^2 !!!

Esempio 2. Per calcolare il quadrato di 175, basta considerare 17 e moltiplicarlo per il suo successivo: si ottiene $17 \cdot 18 = 306$. Ora basta far seguire a questo numero le cifre 2 e 5. Il numero così ottenuto, 30625, è proprio 175^2 !!!

Prova a giustificare algebricamente perché vale questa regola.

2) Un criterio di divisibilità afferma che, se la somma delle cifre di un numero è un multiplo di 3, allora il numero è anch'esso un multiplo di 3.

Considera un numero di due cifre. Dimostra che, se la somma delle sue cifre è un multiplo di 3, allora il numero è un multiplo di 3.

ALLEGATO 2: UNA SCHEDA DI LAVORO PROPOSTA DURANTE LA FASE

DI ANALISI DI PRATICHE ALTRUI

Qui di seguito è riportata una discussione collettiva che si riferisce ad una attività di costruzione di una dimostrazione via linguaggio algebrico che vede coinvolta una classe (seconda di un Liceo delle Scienze Sociali) e la docente T_3 .

Facendo riferimento al modello teorico presentato nell'articolo "*Il linguaggio algebrico come strumento per dimostrare: l'interazione insegnante-allievo per uno sviluppo di nuove consapevolezze*", analizzate l'approccio adottato da T_3 durante questa discussione collettiva e gli interventi degli allievi della classe, cercando di evidenziare, in particolare:

- (1) i momenti nei quali T_3 assume il ruolo di *docente che si pone come modello di comportamenti consapevoli ed efficaci*;
- (2) gli interventi di T_3 che si rivelano meno efficaci (ovvero i momenti in cui l'approccio adottato da T_3 si discosta da quello caratterizzante un *docente che si pone come modello di comportamenti consapevoli ed efficaci*);
- (3) gli effetti (positivi e/o negativi) del lavoro di T_3 sugli alunni, in termini di competenze e consapevolezze messe in luce durante la discussione collettiva.

Brano da analizzare: una discussione collettiva condotta da T_3

La classe si sta confrontando, assieme alla docente (T_3), sulle diverse proposte di risoluzione del seguente problema: "*Per quali valori di n n^2 rappresenta un numero dispari?*". Durante una prima fase della discussione l'intera classe concorda nel dichiarare che n^2 risulta dispari nel caso in cui n sia dispari. Soltanto due allievi sentono l'esigenza di formalizzare la proprietà di essere dispari esplicitando che n dovrà assumere la forma $2x+1$. Il brano qui presentato si riferisce al successivo momento di confronto e discussione sulle produzioni, che ha inizio quando l'insegnante chiede ad una allieva di motivare la risposta fornita. Come nel caso delle discussioni analizzate durante i laboratori, T_3 ha l'obiettivo di guidare i suoi allievi a servirsi della formalizzazione algebrica per dimostrare l'implicazione "*se n è dispari, allora n^2 è dispari*".

T_3 (1): Vediamo se questa condizione che avete imposto può essere convincente. Perché avete scritto $n=2x+1$? (*si rivolge ad A*)

A(2): Perché abbiamo visto che se si eleva alla seconda un dispari, si ottiene un dispari.

T_3 (3): Come l'avete visto?

A(4): Perché dispari per dispari dà dispari!

T_3 (5): Allora qui c'è il concetto moltiplicativo. Loro dicono: se moltiplico un dispari per un dispari, dove trovo il fattore 2?

B(6): Non lo trovo.

T_3 (7): Allora è dispari.

T_3 (8): E voi, Z, come l'avete visto?

Z(9): Ho detto che elevando al quadrato un pari, dà un pari. Aggiungendo ad un pari 1, si ottiene un dispari.

T_3 (10): Un attimo. Io qua leggo n^2 . Perché mi dici "aggiungo un 1"?

Z(11): $2x+1$ elevato al quadrato dà un numero dispari perché: $2x$ elevato al quadrato fa $4x^2$, poi c'è più 1.

T₃(12) : $(2x)^2$ fa $4x^2$.

T₃(13) : Tu dici $(2x)^2=4x^2$. $(2x+1)^2$ fa $4x^2+1$?

Coro(14): No !

T₃(15): Torniamo a quello che dice Z. Non posso dire che $(2x+1)^2$ fa $4x^2+1$. Ma vi voglio convincere che $(2x+1)^2$ è un dispari. Cosa posso fare?

O(16): Risolviamolo!

T₃ scrive $(2x+1)^2=4x^2+4x+1$

T₃(17): Ora il "+1" c'è... Il problema è questa quantità qua (*indica $4x^2+4x$*).

P(18): Facciamo il totale: si raccoglie $4x$.

T₃(19): C'è proprio bisogno di raccogliere $4x$?

O(20): Basta raccogliere 2.

T₃(21): Perché 2?

O(22): Perché dopo evidenziamo un pari, più 1.

T₃ scrive $2(2x^2+2x)+1$

Z(23): Ma $4x^2+4x$ è la stessa cosa di $2(2x^2+2x)$!

T₃(24): Sì che è la stessa cosa!

Z(25): Ah, ho capito perché! Perché raccogliendo 2 si vede che si ha un pari.

P(26): E raccogliendo $4x$ si sbaglia?

T₃(27): Si sbaglia? (*Rivolta alla classe*)

(*Silenzio*)

T₃(28): Davanti a $4x(x+1)$ posso ancora dire che si tratta di un pari?

Coro(29): No!

T₃(30): Perché no?! 4 è multiplo di 2, ragazzi!

G(31): Qua si vede bene che è un quadruplo!

T₃(32): Per quello che avrei dovuto ottenere io, mi bastava raccogliere 2. Raccogliendo $4x$ l'obiettivo lo raggiungo lo stesso, ma mi disturba un po' di più. Qua evidenzio che il quadrato di un dispari è il successivo del quadruplo di un numero, quindi evidenzio qualcosa in più rispetto a ciò che mi interessa ...

ALLEGATO 3: UNA SCHEDA DI LAVORO PROPOSTA DURANTE LE FASI DI PROGETTAZIONE DELL'AZIONE DIDATTICA E DI ANALISI DELLA PROPRIA PRATICA

Di seguito sono riportati quattro problemi dimostrativi relativi ad una attività centrale del percorso di introduzione alla dimostrazione via linguaggio algebrico. Principale obiettivo di questa fase è quello di condurre gli allievi a servirsi del linguaggio algebrico come strumento per costruire ragionamenti. I problemi proposti richiedono, infatti, di osservare regolarità e costruire congetture a partire da esplorazioni numeriche e di provare a dimostrare le congetture prodotte. In questo modo, i diversi aspetti che caratterizzano un uso del linguaggio algebrico come supporto nella costruzione di ragionamenti, risultano essenziali nel riuscire a sviluppare un approccio algebrico alle dimostrazioni. I problemi proposti offrono perciò un'occasione per fare acquisire agli studenti meta-consapevolezze circa l'uso del linguaggio algebrico: supportando l'interpretazione e la messa in luce di proprietà, esso si rivela un potente strumento nella costruzione di ragionamenti difficili o, talvolta, impossibili da realizzare tramite il solo linguaggio naturale. Queste attività mirano inoltre ad incrementare le capacità esplorative degli studenti, mostrando loro l'importanza dell'esempio numerico come strumento di indagine, e a renderli consapevoli circa l'inadeguatezza della sola verifica numerica nella produzione di dimostrazioni.

Questa è la scansione del lavoro di sperimentazione che vi viene richiesto:

(1) Prima dell'azione nelle classi:

(a) Scegliete due dei quattro problemi (motivate tale scelta) e realizzate una breve analisi a priori, mettendo in evidenza: quali congetture possono essere prodotte dagli allievi; le principali difficoltà che loro possono incontrare, in particolare nella fase dimostrativa.

(b) Successivamente, facendo riferimento al modello teorico presentato nell'articolo "*Il linguaggio algebrico come strumento per dimostrare: l'interazione insegnante-allievo per uno sviluppo di nuove consapevolezze*", ipotizzate la metodologia da attivare per far sì che possiate porvi di fronte a questi problemi come *modelli di comportamenti ed atteggiamenti consapevoli ed efficaci*.

(2) Attività nelle classi:

(a) Suddividere la classe in piccoli gruppi (di 3-4 individui) e lasciare ai gruppi il tempo di lavorare ai due problemi loro proposti (valutate voi i tempi per il lavoro a gruppi, in funzione delle competenze/difficoltà dei vostri allievi);

(b) al termine delle attività a piccoli gruppi, è necessario condurre una discussione collettiva per riflettere sulle attività proposte. Tali discussioni possono seguire questa scansione:

- Un momento di raccolta delle produzioni dei singoli gruppi, durante il quale i portavoce dei diversi gruppi presentano alla classe le risposte fornite al particolare quesito in analisi;
- Un momento di confronto e discussione sulle produzioni raccolte, durante il quale l'insegnante analizza le singole risposte, cercando di sollecitare osservazioni da parte degli stessi studenti, in modo da evidenziare non solo i punti critici ma anche gli aspetti positivi di ciascuna strategia;
- Un momento di sintesi conclusiva dell'insegnante, durante il quale quest'ultimo cerca di fissare i punti salienti della discussione con l'obiettivo di esplicitare eventuali aspetti che possono risultare ancora non pienamente chiari agli studenti.

(3) Sbobinatura e successiva analisi del lavoro nelle classi. L'analisi va svolta, in sintonia con quella prodotta nel laboratorio 2, cercando di evidenziare:

- i momenti nei quali l'insegnante assume il ruolo di *docente che si pone come modello di comportamenti consapevoli ed efficaci*;
- gli interventi dell'insegnante che si rivelano meno efficaci (ovvero i momenti in cui il suo approccio si discosta da quello caratterizzante un *docente che si pone come modello di comportamenti consapevoli ed efficaci*);
- gli effetti (positivi e/o negativi) di questo lavoro sugli alunni, in termini di competenze e consapevolezze messe in luce durante la discussione collettiva.

NB: Potete anche scegliere di proporre tutti e quattro i problemi alle vostre classi. In caso faceste questa scelta, suggerisco però di proporre i quattro problemi in due momenti diversi (per lasciare agli studenti il tempo di consolidare quanto appreso).

Attività sulla formulazione di congetture e costruzione di dimostrazioni

1) Considera un numero naturale. Determina la differenza tra il suo quadrato e quello del suo precedente. Che regolarità osservi? Sapresti dimostrare quanto affermi?

2) Considera un numero naturale. Determina la somma tra esso ed i due numeri naturali successivi. Cosa osservi? Sapresti dimostrare quanto affermi?

3) Cosa puoi dire della differenza tra il cubo di un numero naturale ed il numero stesso? Fai qualche esempio numerico per aiutarti nella congettura richiesta. Sapresti dimostrare quanto affermi?

4) Scrivi un numero naturale di due cifre ed il numero che ottieni da questo invertendo le cifre. Calcola la differenza tra il maggiore ed il minore. Ripeti il procedimento a partire da altri numeri di due cifre. Che regolarità puoi osservare? Sapresti dimostrare quanto affermi?

ALLEGATO 4: UN ESEMPIO DI LAVORO CON IL MENTORE: IL COSTRUTTO DI M-CA_{CE} COME STRUMENTO PER MODELLIZZARE I PROCESSI DI RIFLESSIONE

Il seguente stralcio è parte di una discussione di classe condotta in riferimento al seguente problema:

Prendi un numero di 3 cifre con cifre strettamente decrescenti (esempio: 543); considera il numero che si ottiene da questo invertendo le cifre (es: 345); considera la differenza tra questi due numeri. Considera altri esempi. Che regolarità osservi? Prova a dimostrare quanto affermi.

Le tre colonne della tabella qui sotto riportata contengono, da sinistra, gli interventi del docente (T) e di alcuni studenti (indicati con diverse lettere dell'alfabeto) nel corso della discussione di classe, i commenti del mentore e gli obiettivi dei commenti stessi in termini di sviluppo di consapevolezza circa la propria azione ed il proprio ruolo.

Trascrizione di una discussione di classe	Commenti del mentore	Awareness che i feedback del mentore hanno l'obiettivo di far sviluppare
Nella prima parte della discussione la classe si confronta sulla regolarità individuata, concludendo che le differenze considerate sono sempre uguali a 198. Nella successiva fase di confronto tra le dimostrazioni prodotte, un gruppo di studenti riferisce di aver rappresentato la differenza considerata attraverso l'espressione $100x + 10y + z - (100z + 10y + x)$ e di aver in seguito operato alcune trasformazioni sintattiche fino a giungere all'espressione $99(x-z)$, ma di non aver potuto procedere nell'analisi della scrittura prodotta per mancanza di tempo. Nello stralcio di discussione che segue un allievo, D, presenta l'approccio adottato dal suo gruppo.		
D: Noi abbiamo fatto in un modo diverso (scrivo sulla lavagna ciò che detta l'alunno, indicandola come proposta b) b) $100(k+2) + 10(k+1) + k$		
D: Dove questo qua rappresenta il numero di 3 cifre decrescenti. T: Puoi spiegarci perché? D: Il $100(k+2)$ sono le centinaia, che sono quelle con la cifra più grande: $k+2$, che deve essere il numero decrescente più grande. Abbiamo messo $k+2$ perché abbiamo iniziato con la cifra più piccola nelle unità, che abbiamo indicato con k.	<i>Difficoltà espressive – basti pensare al termine 'numero decrescente'! - ma ha saputo cogliere la necessità di attivare anche il frame 'successivo di un numero' per costruire, a partire dalla cifra delle unità k, quelle delle decine e delle centinaia in modo da esplicitare la relazione tra le tre cifre.</i>	Awareness circa i processi attivati/da attivare-stimolare negli allievi.
T: Esatto, come dice C, le centinaia sono quelle che hanno la cifra maggiore tra le tre, ed inoltre nella rappresentazione $(k+2)$, $(k+1)$, k compare la decrescenza a passi di uno tra le cifre. Mi chiedo perché abbiate scelto questa rappresentazione, anziché usare k, $(k-1)$, $(k-2)$?	<i>T nuovamente esplicita al resto della classe quanto D ha cercato di spiegare: questo è in sintonia con le tipiche azioni di un docente che si pone come modello e che aiuta a riconoscere modelli efficaci nella classe. Corretta è anche la scelta di G di far esplicitare a D le motivazioni alla base della conversione prodotta nel rappresentare tre cifre disposte in ordine decrescente).</i>	Awareness circa i ruoli che il docente deve cercare di interpretare in classe: Guida operativa/strategica.
D: Eh, perché altrimenti non sarebbe venuto naturale. Se $k=0$, non vengono cifre	<i>Qui forse era il caso comunque di far precisare all'allievo l'insieme di</i>	

positive. T: Esatto, con la rappresentazione che ti ho proposto avremmo dovuto specificare $k \geq 2$.	variabilità di k , che è una cifra!!! Anche nel caso precedente non hai fatto fare questa osservazione.	
D: Quindi, se questo che ho dettato rappresenta il primo numero di tre cifre, dobbiamo fare la sottrazione con il secondo numero che è quello che otteniamo invertendo le cifre quindi (scrivo sulla lavagna ciò che detta l'alunno) b) $100(k+2)+10(k+1)+k-100k-10(k+1)-(k+2)$	Anche D mostra di aver ben interiorizzato la rappresentazione polinomiale dei numeri e di saper coordinare i frame notazione polinomiale e posizionale per rappresentare il numero che si ottiene invertendo le cifre.	Awareness circa gli effetti del lavoro del docente in termini di competenze/consapevolezze sviluppate dagli studenti.
D: Dove quella che prima era la cifra delle unità è diventata quella delle centinaia, il $(k+1)$ rimane alle decine, e il $(k+2)$ è rimasto per le unità.	Anche in questa discussione un allievo, D, comincia a fare interventi "simili a quelli dell'insegnante", mirati cioè ad esplicitare al resto della classe il senso dell'espressione che ha costruito.	

ALLEGATO 5: UN ESEMPIO DI TRASCRIZIONE MULTICOMMENTATA

L'estratto qui presentato riguarda un intervento di classe che si inserisce all'interno di una serie di attività sugli aspetti relazionali del numero, attuate in prima media. Esse prevedono l'introduzione naïve delle lettere in semplici quesiti di tipo numerico, coinvolgenti una o più operazioni aritmetiche e sono finalizzate a: (a) valorizzare la distinzione tra numero e sua rappresentazione; (b) identificare rappresentazioni additive e/o moltiplicative diverse di uno stesso numero; (c) confrontare numeri attraverso loro rappresentazioni moltiplicative. Una attenzione particolare è data al coordinamento tra rappresentazioni additive e moltiplicative, quali $a+a+a$, $3 \times a$ e $a \times 3$ e $3a$, ai legami tra operazioni dirette ed inverse ed ai diversi modi di rappresentare una data relazione tra due numeri. Attraverso le situazioni proposte, si guidano gli allievi a confrontare e trasformare relazioni numeriche date, ad individuare analogie formali, equivalenze e differenze tra rappresentazioni, a distinguere tra incognita e numero generico e ad avvicinarsi al concetto di variabile.

Il problema matematico che l'insegnante affronta è un problema aperto sul confronto di due espressioni moltiplicative, ciascuno con un fattore letterale diverso, in riferimento al valore possibile dei numeri rappresentati a seconda dei valori numerici attribuiti alle lettere. Vuole essere un problema di approccio alla visione delle lettere come variabili e consolidare l'idea che lettere diverse possono anche assumere valori numerici uguali. L'insegnante è consapevole dei diversi ruoli da assumere nelle discussioni ed abbastanza attenta al controllo di sé nell'azione. Da un punto di vista matematico ha chiari gli obiettivi da raggiungere, le possibili difficoltà degli allievi, i nodi da affrontare.

L'estratto mette in luce le potenzialità della riflessione a-posteriori del docente per comprendere sia visioni mentali degli allievi e loro interpretazioni impreviste che proprie trascuratezze o propri interventi risultati fuorvianti per gli allievi.

Brano di discussione ⁵⁶	
<i>L'insegnante scrive le seguenti uguaglianze alla lavagna, una sopra all'altra:</i> $R = a \times 4 \times 9$ $S = 2^2 \times b \times 3^2$ 1.I: Che cosa possiamo dire di R ed S? 2. AAA: silenzio	1) COMMENTO DI I: Ho pensato che i miei allievi capissero immediatamente che R ed S fossero due numeri distinti e, soprattutto, che a e b potessero assumere qualsiasi valore nell'ambito numerico considerato (numeri naturali). Ed invece ... silenzio! COMMENTO DI M1: Visto il silenzio appunto, forse sarebbe stato meglio decodificare quelle due scritture ricordando che con le due maiuscole si intendeva dare i "nomi" a due numeri .
3.I: Chi è tre alla seconda? 4.A1: 9 5.I: Chi è a nel numero R?	2) COMMENTO DI I: Riflettendo a posteriori , direi che ho sbagliato strategia e domanda: in effetti il mio obiettivo era che i ragazzi riuscissero a "leggere" lo stesso numero rappresentato in modi diversi ma anche che si spingessero ad argomentare sul legame eventuale tra R ed S affidandosi al pensiero ipotetico . COMMENTO DI M2: La domanda 'chi è a nel numero R' spiazza. Cosa ti aspettavi? Che dicessero un fattore di R? un numero nascosto? Oppure un numero che posso scegliere a piacere? Potevi riproporre il problema del confronto tra R ed S e richiamare l'obiettivo da raggiungere, tipo "R ed S sono due scritture numeriche devo stabilire se possono rappresentare lo stesso numero. Come posso fare?". Sarebbe stato un primo passo per indirizzare gli allievi al confronto tra i rispettivi fattori numerici. Pensavi che vedessero subito l'uguaglianza dei fattori

⁵⁶ Nel brano di discussione la lettera I introduce gli interventi dell'insegnante ed A quelli di un allievo. Il numero che segue A indica l'allievo che ha quel numero d'ordine nell'elenco di classe. AAA sta per indicare più allievi che rispondono o intervengono insieme. Nella colonna accanto a quella contenente la discussione di classe compaiono le riflessioni fatte dall'insegnante e da due mentori (M1 ed M2).

	numerici 9 e 3^2 e anche 4 e 2^2 e potessero direttamente argomentare su a e su b?
6. A2, A1: due alla seconda 7. AAA: due alla seconda 8. I: Due alla seconda? Questo è molto curioso. Per la posizione rispetto ad S? 9. AAA: sì 10. I: Quanto vale 2 alla seconda ? 11. A3: 4 12. I: Nella moltiplicazione ha importanza l'ordine con il quale scrivo i fattori? Che cosa abbiamo sempre detto per la proprietà commutativa? 13. AAA: Sì, ... no	3) COMMENTO DI I: ... "Che cosa abbiamo sempre detto..." . Avrei dovuto fare un esempio numerico oppure invitare i miei allievi a proporre una situazione anche molto semplice di applicazione della proprietà commutativa per riattivare le loro competenze ed aumentare così la loro fiducia nella possibilità di risolvere progressivamente il compito che avevo loro assegnato. COMMENTO DI M2: Potevi forse scrivere R come $4 \times a \times 9$ chiedendo se la nuova scrittura è ancora R oppure no e poi rilanciare il problema.
14. I: Perché a è due alla seconda? Provate a scambiare l'ordine dei fattori, cioè la posizione dei numeri che si moltiplicano, il valore dei numeri R ed S cambierebbe? 15. AAA: silenzio 16. AAA: Sì ...	4) COMMENTO DI I: Questa è stata una domanda troppo difficile... Ha confuso gli studenti che sono ancora alla ricerca delle "analogie" tra i fattori di R e di S e del significato di a e b. Poteva essere ripetuta la domanda iniziale. Avrei dovuto dire: "se scrivessi i fattori di R in un altro modo".
17. I: Sicuri? Se scrivessi 18. R in un altro modo e lasciassi S come è scritto, vi sbloccate? (<i>riscrivo alla lavagna R ed S</i>) 19. $R = 4 \times a \times 9$ 20. $S = 2^2 \times b \times 32$ 21. A2: a è uguale ad 1 e b è uguale a 1 !	5) COMMENTO DI I: Lo studente A2 si accorge della analogia di struttura ed indica immediatamente che a e b sono uguali ad 1. Ciò risolve il problema sul valore di R e di S e apre la discussione agli altri esempi che realizzano la stessa uguaglianza. Avrei comunque potuto chiedere quale sarebbe stato in quel caso il valore di R e di S.
22. I: Che cosa hai fatto? Che valore hai dato ad a e a b? 23. A2: Lo stesso valore 24. I: Se a e b fossero uguali a 5? Cambierebbe qualcosa?	6) COMMENTO DI I: Le richieste formulate successivamente hanno lo scopo di generalizzare la relazione di uguaglianza tra R ed S ogni volta che a e b assumono lo stesso valore. COMMENTO DI M2 Qui avrei visto bene una ripresa del ragionamento del ragazzo ed un rilancio alla classe della questione.
25. A2: No, perché il risultato sarebbe sempre lo stesso. 26. I: R ed S sono o non sono lo stesso numero?	7) COMMENTO DI I: La risposta di A2 mi spiazza, a quale risultato si riferisce? Al valore di R ed S quando a e b sono uguali ad 1, oppure per risultato intende la stessa situazione? Pertanto cerco di chiarire ulteriormente. COMMENTO DI M1: Avrei sollecitato la classe chiedendo: "siete tutti d'accordo?" oppure "scommettiamo che io faccio diventare R diverso da S?"
27. A3: Sì, lo sono. 28. I: Quando? 29. A2 : Quando a e b hanno lo stesso valore 30. I: Vi fa sbagliare molto il fatto che a e b siano in posizioni diverse? 31. AAA: silenzio	8) COMMENTO DI I: Fino ad ora il dialogo è stato prevalentemente con un paio di studenti, che tra l'altro non sempre partecipano in maniera attiva alle attività di classe. Gli altri sono rimasti in silenzio anche se hanno seguito la maggior parte della discussione. Mi rivolgo quindi a tutta la classe per verificare fino a che punto gli altri studenti hanno seguito ...
32. I: Si può o non si può cambiare la posizione dei fattori in una moltiplicazione? 33. AAA: Sì ... no 34. I: Provate a scambiare l'ordine dei fattori? Cambia qualcosa in R ed S? Fate delle prove assegnando sempre gli stessi valori alla lettera a. Fate lo stesso con la lettera b.	9) COMMENTO DI I: Alcuni allievi mostrano comunque perplessità a svolgere il compito assegnato, quindi scrivo alcune loro proposte alla lavagna a cui aggiungo le mie.

Provate a giocare. ...	
---------------------------	--

3.3 Progetti di formazione degli insegnanti: le esperienze del gruppo torinese

Premessa: le linee di ricerca

...the use of and the emphasis on processes is a didactic principle.

“Indeed, didactics itself is concerned with processes. Most educational research, however, and almost all of it that is based on or related to empirical evidence, focuses on states (or time sequences of states when education is to be viewed as development)...

(Hans Freudenthal)

Le parole di Freudenthal esprimono uno dei cardini della ricerca del gruppo torinese, centrata sui *processi* di insegnamento-apprendimento, con particolare attenzione agli aspetti *cognitivi*.

Secondo il paradigma della ricerca per l'innovazione, l'attenzione per i processi didattici e gli aspetti cognitivi, osservati in sperimentazioni di classe, sono stati i punti di partenza per l'elaborazione teorica, che ha riguardato principalmente:

- i processi di argomentazione e dimostrazione, nell'avvio al pensiero teorico (anche con l'utilizzo di strumenti tecnologici);
- il ruolo del corpo e dei segni nell'apprendimento-insegnamento della matematica.

Per non allargare il quadro oltre il necessario in funzione della finalità del Seminario, ci concentreremo solamente sulla seconda linea di ricerca, della quale diamo una sintetica presentazione in chiave storica, rimandando ai lavori allegati e citati per approfondimenti ed esempi

L'attenzione al corpo e alle sue esperienze percettivo-motorie è esplosa circa una decina di anni fa, inseguito alla pubblicazione di *Where mathematics comes from*, libro scritto da un linguista, G. Lakoff, e uno scienziato cognitivista, R. Nuñez (Lakoff & Nuñez, 2000). Il libro, che suscitò immediatamente l'interesse della comunità internazionale dell'Educazione Matematica, sosteneva con aperto tono provocatorio la tesi dell'*embodied cognition*, secondo cui l'origine delle idee e dei concetti matematici sia da collocarsi nel corpo e nelle sue esperienze nella vita quotidiana. A partire da queste esperienze, le idee matematiche si formerebbero mediante il meccanismo cognitivo del “pensiero metaforico”, basato su metafore concettuali che preservano le inferenze da un dominio “sorgente” legato al corpo ad un dominio “target” di tipo matematico. Ad esempio, gli autori individuano il dominio sorgente dei contenitori e la metafora “Gli insiemi sono contenitori” (espressa graficamente dalla classica rappresentazione di Eulero-Venn) per descrivere i fondamenti embodied della teoria degli insiemi, una delle parti più astratte della matematica moderna. Le evidenze portate a sostegno dell'embodiment sono essenzialmente di tipo linguistico, e fanno riferimento all'ampio utilizzo da parte dei matematici stessi di un linguaggio metaforico durante il

loro lavoro: si pensi per esempio ad espressioni quali “muoversi lungo la linea dei numeri”, “una funzione cresce”, “fuori/dentro un insieme”⁵⁷.

Queste tesi sono state criticate da diversi punti di vista, anche a tratti in modo molto duro⁵⁸. Le principali lacune delle prospettive embodied riguardano l'assenza delle dimensioni sociale e storico-culturale della matematica. Infatti, le idee matematiche non sono fisse, ma evolvono nella storia ed emergono in stretta relazione al contesto storico della società e ai suoi progressi tecnologici (si pensi ad esempio all'introduzione della notazione posizionale decimale nel XIII secolo). Inoltre, una discussione sulle idee matematiche non può prescindere dal considerare i segni di rappresentazione usati per esprimere tali idee: come ha suggestivamente espresso Duval, “il n'y a pas de noésis sans semiosis” (Duval, 1995).

L'idea che il corpo e le esperienze quotidiane giochino un ruolo importante nella formazione dei concetti scientifici non è certamente nuova: basti pensare alle ricerche di Piaget e di Vygotskij in psicologia e ai contributi dei fenomenologisti in filosofia (Husserl, Merleau-Ponty in particolare). All'interno delle scienze cognitive (ma anche in molti ricercatori e insegnanti di matematica) tuttavia prevalgono spesso paradigmi di tipo cognitivista classico, in cui la mente è considerata come un dispositivo predisposto per manipolare simboli, in accordo con il dualismo cartesiano mente-corpo. In Educazione Matematica, le prospettive dell'embodiment hanno avuto i meriti di puntare l'attenzione verso un elemento spesso trascurato in matematica (il corpo) e di fornire degli elementi teorici utili per l'analisi dei processi cognitivi sottesi all'apprendimento (le metafore concettuali).

Nel gruppo di ricerca torinese, l'osservazione diretta di processi di insegnamento-apprendimento in situazioni di classe, raffinata con l'uso di videoregistrazioni e le analisi dei video prodotti, ci ha permesso di fare dei passi avanti, per cogliere l'importanza e la specificità degli aspetti embodied in matematica, in particolare per quanto riguarda l'uso dei gesti da parte di studenti e di insegnanti, e la loro interazione con altri tipi di risorse. La ricerca psicologica sul ruolo dei gesti in conversazioni e nella risoluzione di compiti specifici (come quelli piagetiani di conservazione) ha messo infatti in luce come essi svolgano funzioni importanti sia a livello comunicativo, sia a livello cognitivo (McNeill, 1992; 2005; Goldin-Meadow, 2003). La nostra ipotesi di lavoro, condivisa anche a livello internazionale (per esempio, Radford, 2005) considera i gesti come parte integrante delle diverse risorse cognitive e comunicative che intervengono nella formazione del pensiero matematico, insieme alle parole, ai segni scritti, all'uso di strumenti, ai toni della voce e così via. Il termine “*multimodalità*”, proveniente dalle neuroscienze e usato ampiamente anche nelle scienze della comunicazione⁵⁹, intende superare il dualismo cartesiano tra mente e corpo, e viene a sottolineare

⁵⁷ E' chiaro che in senso letterale, non c'è alcun movimento da un numero all'altro lungo una linea, neppure nella rappresentazione stessa della linea: siamo noi, in quanto esseri umani, a concepire e a comprendere la linea dei numeri grazie alla nostra esperienza quotidiana di movimento e al pensiero metaforico.

⁵⁸ Si veda per esempio la recensione di Gabriele Lolli, disponibile sul suo sito

<http://homepage.sns.it/lolli/articoli.htm>.

⁵⁹ Infatti, sulla base di risultati neuroscientifici riguardanti i neuroni specchio, Gallese e Lakoff hanno presentato l'ipotesi secondo cui il cervello lavora in modo multimodale piuttosto che modulare:

“multimodal integration has been found in many different locations in the brain, and we believe that it is the norm. That is, sensory modalities like vision, touch, hearing,

che l'apprendimento della matematica non possa essere ridotto ad una mera “questione di testa”, bensì coinvolga in modo essenziale le esperienze percettivo-motorie, le attività con gli strumenti e quelle con i segni.

Per studiare l'insegnamento-apprendimento in un'ottica multimodale, la scelta metodologica è stata quella di utilizzare una lente di analisi semiotica che va a considerare come segni i diversi tipi di risorse che intervengono nei processi di risoluzione di problemi e di argomentazione: dalle parole (scritte o orali), ai disegni, diagrammi e segni scritti, ai gesti e ai segni embodied. Si tratta naturalmente di un'accezione ampia di “segno”⁶⁰, in cui possono rientrare anche sistemi non codificati, come quello della produzione gestuale. L'interesse non è tanto nei segni in sé, ma nella loro funzioni nel processo di apprendimento: per studiarle si possono considerare le relazioni reciproche tra i diversi tipi di segni (es: tra gesti e produzioni scritte) e le loro evoluzioni nel tempo. In altri termini, le diverse risorse semiotiche possono essere viste come facenti parte di un unico sistema, del quale si studiano la natura, gli aspetti dinamici e la funzione: è questo il significato del “semiotic bundle” o “fascio semiotico” introdotto da Arzarello (2006). In altri termini, nell'osservazione delle attività matematiche in contesto di classe andiamo ad osservare quali segni vengono utilizzati (parole, gesti, diversi tipi di segni scritti, ...), con particolare attenzione alle loro relazioni reciproche in un dato momento (relazioni di tipo sincronico) o nel fluire del tempo (relazioni diacroniche). La figura 3.1 illustra le dinamiche del semiotic bundle in maniera schematica.

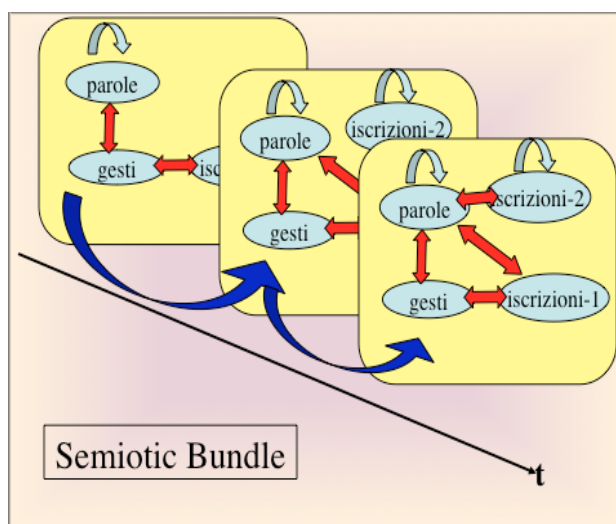


Figura 3.1. Il semiotic bundle e le sue dinamiche

and so on are actually integrated with each other *and* with motor control and planning” (Gallese & Lakoff, 2005).

D'altro canto, nell'ambito della comunicazione, si sottolineano le diverse modalità disponibili per comunicare ed esprimere significati.

⁶⁰ Tale accezione ampia trova riferimento nella teoria semiotica elaborata da C. S. Peirce (1931-58), nella quale ogni cosa che può essere interpretata da qualcuno, in una qualche maniera, può essere considerata un segno. A differenza di altri approcci semiotici che sottolineano l'aspetto sistematico delle rappresentazioni in matematica (es: Duval, 1995), con un inquadramento peirciano e la nozione di semiotic bundle si possono quindi considerare come segni i gesti di studenti e insegnanti mentre cercano di interpretare e risolvere un problema o una questione matematica.

Nello stesso tempo, la nostra attenzione, dapprima concentrata sui processi di formazione della conoscenza da parte degli studenti, man mano si è allargata a comprendere l'azione dell'insegnante, nell'ottica di considerare insegnamento e apprendimento come due facce della stessa medaglia.

La formazione degli insegnanti

Nella prospettiva delineata, le attività di formazione per gli insegnanti si sono articolate in tre diverse modalità:

1. Nuclei di ricerca didattica (NRD);
2. Gruppi di lavoro di insegnanti
3. Progetto M@t.abel

1. Nuclei di ricerca didattica

L'attività di ricerca è stata in grande misura portata avanti all'interno di gruppi di lavoro coordinati da Ferdinando Arzarello e costituiti da ricercatori e insegnanti che si incontrano con cadenza mensile o bimensile. Gli insegnanti sono "insegnanti-ricercatori" a tutti gli effetti (Arzarello & Bartolini Bussi, 1998): partecipano infatti attivamente a tutte le fasi di ricerca, dalla progettazione, all'analisi dei dati, alla stesura di report e articoli di ricerca, fino alla loro discussione in convegni nazionali e internazionali.

Nell'ottica della ricerca per l'innovazione, in questi gruppi la ricerca teorica e la ricaduta pratica evolvono in interazione sinergica, con particolare attenzione da un lato all'elaborazione e studio di proposte innovative e dall'altro all'analisi fine dei processi didattici, secondo la prospettiva della multimodalità.

Sul primo versante, il gruppo della scuola secondaria, che si ritrova da circa quattro-cinque anni nell'ambito di un lavoro svolto per Lauree Scientifiche, ha recentemente prodotto un volume sull'insegnamento della geometria con un metodo embodied, che apparirà nella collana Convergenze dell'UMI.

Le insegnanti del gruppo della scuola primaria (che chiamiamo il "Gruppo Maestre") ha invece approfondito l'osservazione dei processi di apprendimento nella loro complessità, attraverso l'analisi semiotica con il semiotic bundle. Sulla base della propria esperienza ha prodotto un volume sull'approccio embodied alla matematica nella scuola elementare (Arzarello et al., 2010). Nel Gruppo Maestre una parte essenziale del lavoro è costituita dall'analisi di videoregistrazioni delle attività didattiche messe a punto nel gruppo e sperimentate nelle classi. Tipicamente, l'insegnante-sperimentatore propone il video (o gli episodi che ritiene significativi) all'attenzione dell'intero gruppo. Si procede allora ad un'*analisi collettiva* del video, nella quale le diverse interpretazioni vengono vagliate e discusse. Nell'analisi collettiva, il video costituisce il punto di partenza, ma anche un riferimento di validazione per le ipotesi emerse. Attraverso la discussione, inoltre, le insegnanti che partecipano al gruppo per le prime volte famigliarizzano con i costrutti teorici, soprattutto nella

loro operatività. Proprio la necessità di confronto sull'analisi fine di video ha portato la genesi dello "timeline" o "linea semiotica", illustrato in Figura 3.2. Si tratta di una tabella realizzata con un foglio elettronico, nella quale le diverse componenti del semiotic bundle sono evidenziate in righe diverse. A partire da un video, permette quindi di registrare in forma scritta (e con l'inserimento di fotografie) l'evoluzione delle risorse semiotiche nel fluire del tempo (analisi diacronica), ma anche le loro relazioni reciproche (analisi sincronica).

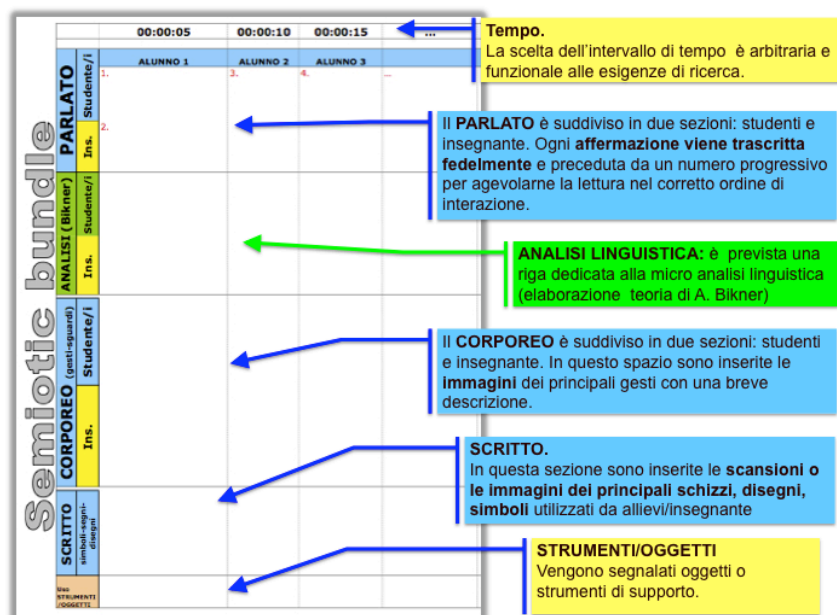


Figura 3.2. La timeline o linea semiotica.

Come leggiamo nel libro prodotto dal gruppo:

La *timeline* è uno strumento di analisi nato dall'esigenza di raffinare l'osservazione e la ricerca per "entrare dentro" le situazioni didattiche e studiarne colori, sfumature e relazioni tra le numerose variabili che sono presenti in classe. Si tratta di una sorta di rappresentazione grafica che permette dunque di avere uno sguardo d'insieme della microanalisi a posteriori, di tipo sia sincronico sia diacronico, dei diversi registri del semiotic bundle: parlato, corporeo, scritto.

In quanto strumento di analisi, la timeline è il frutto di un lungo percorso nel tempo, di crescita e di condivisione di idee, problemi e attenzione rispetto a quanto avviene in classe. [...]

La timeline ci permette così di studiare la multimodalità dell'apprendimento, l'intreccio dei segni del semiotic bundle, le interazioni tra insegnante e alunni e tra pari. In essa, sono stati inseriti via via nuovi simboli e nuove abbreviazioni, arrivando a considerare anche i toni della voce e le posture dei soggetti. (Arzarello et al., pp. 52-53).

La timeline costituisce lo strumento messo a punto dal gruppo per migliorare la pratica di *condivisione* dell'analisi dei video. Essa ha permesso di individuare o meglio descrivere alcuni fenomeni individuati con il semiotic bundle, come il "*gioco semiotico*" tra insegnante e allievi (Arzarello & Paola, 2007; Arzarello et al., 2009). Un'analisi di questo tipo può essere considerata come una lente di ingrandimento sulle situazioni didattiche, uno zoom piuttosto accurato. Naturalmente non è pensabile poterla applicare a tutte le situazioni didattiche, soprattutto per i tempi di analisi e di realizzazione che essa richiede.

Tuttavia, riteniamo che sperimentarne l'efficacia, seppur su una singola situazione didattica così da passarla al setaccio, possa essere alquanto arricchente e stimolante per un insegnante. Tale processo permette infatti di attivare sistemi di controllo e di analisi dei propri gesti e delle proprie parole, ma anche di porre maggiore attenzione alla gestualità e al "linguaggio" usato dai propri allievi, migliorandone la codifica, e persino di riuscire a orchestrare meglio una discussione matematica (Arzarello et al, p. 58).

Oltre ad essere dispendiosa in termini di tempo, un'analisi con lo strumento della timeline richiede una *formazione* specifica da parte degli insegnanti, che permetta loro di acquisire sensibilità ad osservare i processi di insegnamento-apprendimento nella loro multimodalità, e di cambiare le loro concezioni a riguardo (Zan, 2007). Per gli insegnanti del NRD, questa formazione avviene attraverso il coinvolgimento nel lavoro di ricerca condotto con il gruppo. Le parole di Bruna Villa, una insegnante del gruppo, esprimono bene questo aspetto:

Durante l'attività non avevo la percezione di ciò che stava avvenendo e del ruolo che avrebbero giocato i miei interventi, ero troppo coinvolta e tesa a raggiungere l'obiettivo. Fu attraverso l'analisi con la *timeline*, e dunque a posteriori, che l'orizzonte nuovo sulla comprensione dei processi di insegnamento - apprendimento divenne per la prima volta davvero chiaro: rivedendomi mentre interagivo con i bambini, potevo cogliere tutta la portata dei gesti (l'uso delle dita, delle mani, del corpo) e delle parole, nel costruire connessioni utili alla conoscenza. Durante lo svolgimento dell'attività invece v'era in me solo la consapevolezza che anche i gesti, oltre al linguaggio, ai segni scritti e agli strumenti, potessero servire alla comprensione, ma non certo il perché e soprattutto in quale modo. (Arzarello et al., 2010, p. 131).

Nell'allegato 1 riportiamo interamente le voci di tre insegnanti che hanno partecipato alle attività del Gruppo Maestre e che raccontano come sia cambiata la loro pratica didattica dopo aver 'sperimentato' analisi multimodali di processi di insegnamento – apprendimento⁶¹.

Certamente il numero di insegnanti raggiunto da questo tipo di formazione è molto basso (attualmente circa una ventina). Tuttavia, vi è un altro tipo di ricaduta (una sorta di ricaduta al II ordine), dovuto al fatto che alcuni di essi svolgano attività di formazione in servizio. In genere, vengono chiamati da una scuola o da un gruppo di insegnanti di una scuola, per proporre e coordinare un aggiornamento. Il punto di forza di tali interventi risiede, oltre che nel rispondere ad un *bisogno* degli insegnanti (una motivazione intrinseca, quindi), nel fatto che il formatore si proponga come insegnante, parte della stessa comunità degli insegnanti. In questi percorsi di formazione, si propone agli insegnanti di partire provando in classe una proposta didattica tra quelle discusse, nelle quali l'accento è sui nuclei di processo, sull'argomentazione, sulla rivalutazione dell'errore. Per esempio, Donatella Merlo nel parlare della ricaduta didattica dell'attività di ricerca pone in primo piano un cambiamento nella propria attività di formazione insegnanti (si veda l'Allegato 1):

Posso parlare di cambiamento, è vero, ma nel mio caso, di cambiamento nella modalità con cui conduco la formazione degli insegnanti. [...] Il mio obiettivo è quello di dare un supporto agli insegnanti che sentono l'esigenza di modificare la loro prassi didattica sulla base degli stimoli ricevuti.

⁶¹ L'allegato 1 riporta il capitolo quarto del libro "Matematica: non solo testa".

Durante l'attività di formazione richiedo agli insegnanti di documentare le attività che realizzano in classe, inviandomi i protocolli degli allievi e le trascrizioni delle discussioni. Nella prima fase si instaura un dialogo molto stretto tra me e l'insegnante in quanto commento per scritto tutta questa produzione. Successivamente, gli episodi più interessanti diventano oggetto di un confronto collettivo attraverso la discussione nel gruppo formato da tutti gli insegnanti. Siccome nella prima fase l'interazione è diretta, posso fare un'analisi abbastanza dettagliata e suggerire strategie contestualizzandole non solo nell'attività, ma anche nei percorsi di apprendimento degli alunni. Essendo aumentata complessivamente la mia competenza, ora mi risulta quasi spontaneo analizzare, seguendo il paradigma della multimodalità, i materiali che ricevo e quindi dare indicazioni in questo senso agli insegnanti. (Arzarello et al., 2010, p. 122).

Nella formazione proposta dagli insegnanti-ricercatori, si realizza pertanto un “salto di qualità” della formazione stessa: l'accento non è sulla novità delle attività proposte, ma su un cambiamento di metodologia e di visione della matematica, sul coinvolgimento degli insegnanti nel considerare e analizzare i processi didattici con “occhi nuovi”. Si tratta, questo, di un cambiamento di paradigma nella formazione, che possiamo far corrispondere al passaggio dal filone A al filone D della ricerca italiana: da una formazione basata sulle proposte didattiche ad una formazione basata su cambiamenti di metodologie e di convinzioni.

2. Gruppi di lavoro di insegnanti

L'attività di aggiornamento, formazione, ricerca, è stata portata avanti all'interno di gruppi di lavoro coordinati da Ornella Robutti e costituiti da supervisori SIS, formatori di insegnanti, insegnanti che collaborano a vario titolo. Il supporto finanziario e logistico dell'iniziativa è dato dalla collaborazione tra la Facoltà di Scienze dell'Università di Torino, la Provincia di Torino e il Dipartimento di Matematica. Le iniziative sono organizzate come formazione permanente di docenti in servizio, secondo le indicazioni della Comunità Europea. Esse fanno uso di modalità laboratoriale e alto coinvolgimento dei docenti nelle sperimentazioni in classe e sono raccolte nel progetto *DI.FI.MA*⁶² *in rete* (Robutti, 2009; Robutti, 2010; Rinaudo et al., 2010). Tale progetto ha una piattaforma di riferimento creata su Moodle, grazie alla collaborazione della dott. Tiziana Armano (<http://teachingdm.unito.it/porteaperte/>), dove non solo sono depositati tutti i materiali di formazione ministeriali o locali, ma anche sperimentazioni dei docenti e attività interattive a distanza, come Forum e Compiti, ecc. (Robutti & Armano, 2011). I docenti coinvolti nel progetto sono più di 1200 al momento (è stato premiato il millesimo nel quinto Convegno DIFIMA di ottobre 2011 <http://www.difima.unito.it/difima11/>).

Gli insegnanti si iscrivono volontariamente alla piattaforma compilando un form con i loro dati e hanno così accesso a tutti quei corsi che sono liberi e aperti a tutti. Partecipando a tali corsi, si identificano con obiettivi e tematiche del corso, possono partecipare ai Forum di discussione e

⁶² DI.FI.MA. nasce nel 2003 con un convegno dedicato alla formazione degli insegnanti della secondaria organizzato da Ornella Robutti e un gruppo di supervisori della SIS Piemonte (Robutti, 2006 ; Robutti et al., 2010). Ha una buona partecipazione di docenti, tant'è che dalla successiva edizione, nel 2005, si allarga a tutti i dicenti di tutti gli ordini di scuola, si estende in durata da uno a tre giorni, e si apre a varie collaborazioni di enti, non solo la SIS. Nell'ottobre 2011 c'è stata la quinta edizione. Di ogni convegno vengono distribuiti i sunti nel convegno stesso e gli atti con i contributi l'anno successivo. La caratteristica del Convegno è di perseguire la democratizzazione della cultura, per cui gli insegnanti che vi partecipano non pagano né l'iscrizione né gli atti. Nel 2008 si decide di creare un supporto a distanza per la formazione dei docenti legati al convegno DIFIMA e alla realtà piemontese, e con l'aiuto di Provincia e Regione si riesce a lanciare la piattaforma “DIFIMA in rete”, che nel 2011 raggiunge circa 1200 iscritti, in gran parte sul territorio piemontese, ma anche nel resto d'Italia e all'estero.

scambiare opinioni con colleghi, possono altresì iscriversi ai seminari in presenza relativi a particolari temi come quelli descritti sopra. Siccome la pratica è al centro del processo di apprendimento (Wenger, 1998) il gruppo che gestisce il progetto non solo apre Forum di discussione, ma anche Compiti, in cui i docenti sono invitati a spedire entro una certa data le loro esperienze didattiche su temi fissati. Le migliori sono poi premiate nei seminari in presenza. In questi seminari, i docenti hanno l'opportunità di interagire con il contesto di formazione e con altri attori del processo di apprendimento, in modo attivo, presentando e confrontando esperienze. Infatti, la pratica è la fonte principale della produzione sociale di significato (Wenger, 1998), e in questo confronto fra le varie pratiche, gli insegnanti possono negoziare pratiche comuni e processi di insegnamento-apprendimento con l'uso di materiali, tecnologie, metodologie anche nuove. Nelle attività progettate e realizzate nel progetto abbiamo cercato di seguire le tappe di costruzione e coltivazione di comunità di pratica, secondo quanto elencato sopra nella presentazione teorica: quindi, non solo progettarne la nascita e l'evoluzione, ma anche cercare di aprire un dialogo tra prospettive esterne e interne, di favorire differenti livelli di partecipazione; di sviluppare spazi di comunità sia pubblici che privati, e infine di dare ritmo alla comunità tutta o alle sotto-comunità create.

Nella piattaforma "DIFIMA in rete" abbiamo, per esempio, creato un corso (*corso* è il nome su Moodle di una sezione autonoma cui può accedere un gruppo di utenti, diverso da quello che accede a un'altra sezione) dedicato alla comunità di tutti gli insegnanti di matematica, di tutti i livelli scolari. In questo corso sono presenti informazioni su congressi, seminari, eventi non solo in Piemonte ma su tutto il territorio nazionale, materiali di formazione dei docenti (come i Quaderni della Direzione Classica che contengono i seminari di Viareggio o la Matematica per il cittadino), articoli di ricerca e attività per la sperimentazione (Figura 3.3).

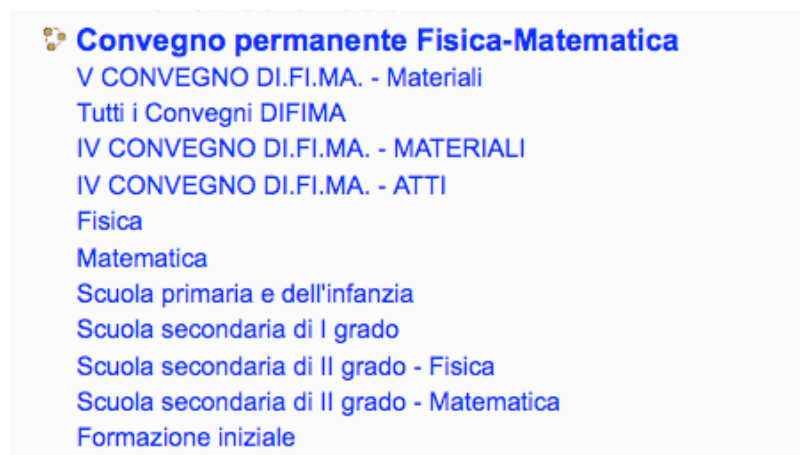


Figura 3.3: La piattaforma DIFIMA in rete: materiali per i docenti dei vari livelli scolari

Inoltre, altre tre sezioni sono dedicate ai docenti di matematica, ma questa volta ciascuna per un solo livello scolastico: una per l'infanzia e la primaria, una per la secondaria di primo grado e l'ultima per la secondaria di secondo grado. I materiali sono suddivisi nei 4 nuclei della proposta curricolare dell'UMI, ovvero Numeri, Figure, Relazioni e Dati (Figura 3.4).

Scuola Primaria e dell'Infanzia

Questo corso contiene materiali

- di **Matematica** raccolti secondo i *temi* contenuti nelle INDICAZIONI PER IL CURRICOLO per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione
- di **Fisica** raccolti secondo *temi* contenuti nei programmi ministeriali che hanno interesse generale anche per le altre Scienze Sperimentali

Il seguente indice fa riferimento alla numerazione degli argomenti in questo corso per agevolare la ricerca.

1. Numeri
2. Spazio e figure
3. Relazioni, misure, dati e previsioni
4. Matematica per la Scuola dell'Infanzia
5. Temi vari di Matematica
6. Le "dimensioni" delle cose: osservare, misurare, riflettere
7. Forze e movimento. L'energia nelle sue molteplici forme
8. Luce e suono
9. Temi vari di scienze
10. Scienze per la scuola dell'infanzia

Figura 3.4: La piattaforma DIFIMA in rete: materiali per la scuola primaria dell'infanzia

Uno spazio considerevole è lasciato a quei progetti che si occupano della continuità tra scuola superiore e Università (Figura 3.5). Per esempio, sulla piattaforma sono ospitati tutti i materiali di lavoro, non solo i prodotti finiti, del Progetto Lauree Scientifiche: i docenti coinvolti nel progetto partecipano alle attività e condividono uno spazio comune con funzione interattiva, non solo di repository.



Continuità SSS-Università
Iniziative di collaborazione
Precorso per matricole di Matematica

Lauree Scientifiche 2 (2009/2010)
Lauree scientifiche
Lauree Scientifiche: Fisica del Quotidiano
Lauree Scientifiche: Fisica a Mompellato (G.Rinaudo)
Lauree Scientifiche: Geometria dell'Universo (F. Arzarello)
Lauree Scientifiche: Geometria piana (O. Robutti)

Lauree Scientifiche 3 (2010/2011)
Lauree Scientifiche: Fisica
Una introduzione all'Algebra Moderna
Bolle di sapone e curvature
Dai dati alla conoscenza
Dalla geometria di Euclide alle geometrie dell'universo
Laboratorio di Computer Vision
Laboratorio di Storia delle matematiche
Metodi di rappresentazione di curve: le curve di Bézier
Tre mattine all'università

Figura 3.5: La piattaforma DIFIMA in rete: l'Istituto di GeoGebra

Un altro corso di questo tipo è quello dedicato al Precorso di Matematica che si tiene alle matricole del Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Torino (Armano et al., 2008; Laiolo et al., 2009): i docenti possono reperire materiale utilizzato con i loro ex-studenti che accedono all'Università, ma anche avere statistiche sui loro risultati o sulle loro competenze.

Occorre notare che dentro la piattaforma le tipologie di accesso ai corsi sono due: una volta iscritto alla piattaforma, infatti, il docente può iscriversi liberamente solo a quei corsi “aperti”, ovvero disponibili per un pubblico generico. Non può invece accedere a quei corsi “chiusi”, ovvero che comportano la partecipazione di un numero di docenti ristretto solo a coloro che fanno parte di un progetto particolare. Per esemplificare, al corso Lauree Scientifiche possono accedere – tramite password – solo i docenti iscritti a tale progetto, mentre al corso Precorso di Matematica può accedere qualunque docente.

Particolare attenzione merita la partecipazione di docenti che risiedono fuori dal Piemonte o addirittura all'estero, che non potendo seguire le attività proposte in presenza, seguono a distanza. Per questo, sulla piattaforma abbiamo iniziato dallo scorso anno a mettere a disposizione podcast e filmati di conferenze e seminari.

Particolare attenzione merita la sinergia che abbiamo creato, nel progetto DIFIMA in rete, tra vari enti e istituzioni. A titolo di esempio, nella piattaforma sono ospitati i materiali dei corsi su GeoGebra, che si tengono dal 2010 sul territorio piemontese. Nel 2010 a Torino abbiamo fondato l'Istituto di GeoGebra, primo in Italia (oggi seguito da Bari e in futuro da Milano). Tramite la collaborazione tra il Dipartimento di Matematica, la Provincia di Torino, l'associazione La Casa degli Insegnanti, abbiamo organizzato eventi come seminari, corsi, convegni. La piattaforma è il luogo di incontro virtuale dei partecipanti alla comunità GeoGebra (Figura 3.6).



Figura 3.6: La piattaforma DIFIMA in rete: l'Istituto di GeoGebra

Data la sua ampiezza, il progetto DIFIMA può non essere adatto alla necessità di sperimentazioni locali in singole scuole o gruppi di scuole, su tematiche circoscritte per le quali i docenti non ritengano opportuno darne ampia visibilità sui progetti regionali sopra citati. Si è quindi creata nel 2008, nell'ambito del Dipartimento, una piattaforma che soddisfi queste necessità locali: <http://teachingdm.unito.it/mediaquarini>. Tale piattaforma, strumento di condivisione per il cosiddetto progetto *Quarini in rete* (dal nome della scuola secondaria di primo grado di Chieri che ha iniziato questo tipo di lavoro), è uno spazio ad uso e consumo dei docenti di quelle scuole che vogliano seguire un loro progetto di formazione e sperimentazione in classe (Figura 3.7). Vi partecipano parecchi gruppi di scuole distribuite sul territorio piemontese, dall'infanzia alla secondaria, con coinvolgimento a vario livello dei gruppi di docenti, e ogni anno se ne aggiungono di nuove (Bonicatti et al., 2010).



Figura 3.7. La pagina iniziale della piattaforma per il *progetto Quarini in rete*

Il progetto è realizzato in collaborazione tra il Dipartimento di Matematica dell'Università di Torino, con referente Ornella Robutti e amministratore tecnico la dott.ssa Tiziana Armano. Vi partecipano i docenti della scuola secondaria di primo grado “M. L. Quarini” di Chieri (e le sezioni associate di Andezeno e Riva presso Chieri) e la scuola secondaria di primo grado “via Addis Abeba” di Biella (con le succursali) con docenti e studenti, tutte le altre scuole sono con i docenti. Esso nasce e si sviluppa in seguito ad alcune esperienze e riflessioni svolte in ambito locale e ad incontri di formazione in merito a una didattica innovativa (*active learning*, secondo la terminologia internazionale).

Il lavoro si è articolato in due fasi sostanziali: la progettazione delle attività, a cura di Robutti e di numerosi laureandi (circa una decina in 4 anni scolastici), e la loro sperimentazione nelle classi, a cura dei docenti (una ventina in tutto, tra le due scuole), coadiuvati dai laureandi.

Il collegamento tra le due fasi è stato realizzato tramite incontri con gli insegnanti, in presenza, per delineare il percorso sperimentale, e una serie di materiali e di attività in piattaforma. La piattaforma Moodle infatti è diventata il luogo virtuale degli incontri a distanza tra gli insegnanti, i laureandi e Robutti per tutta la durata dell'anno scolastico. Le sessioni dedicate a questi incontri in piattaforma sono due: il *Quadro teorico* e la parte *Docenti* (Figura 3.8). Nel Quadro teorico sono raccolti e organizzati articoli scientifici, materiali, istruzioni per l'uso di Moodle, che servono agli insegnanti come supporto per la formazione e per condividere con la parte universitaria la basi teoriche di riferimento del progetto di sperimentazione. Nella parte Docenti invece ci sono materiali più informali, come la programmazione da fare in classe, le schede di lavoro, e i forum di discussione per concordare le fasi di sperimentazione e di osservazione dei ragazzi. I ragazzi erano filmati nelle loro attività di classe dai laureandi stessi, che dalla raccolta dei filmati hanno analizzato i dati e tratto conclusioni per la loro ricerca.

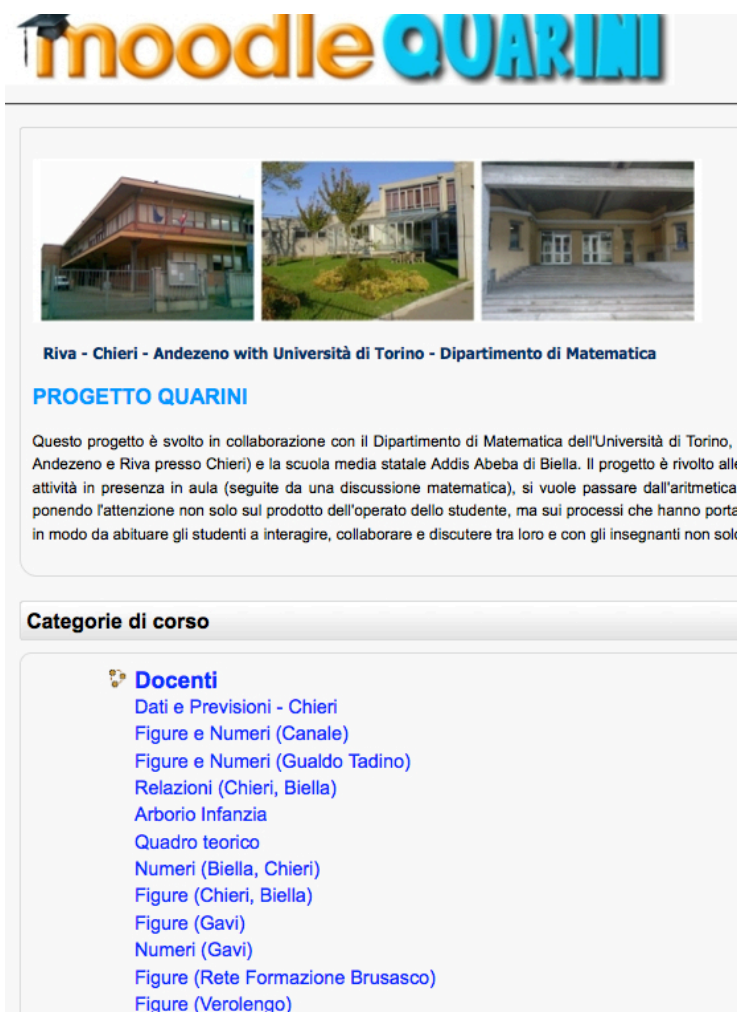


Figura 3.8: le sezioni dedicate ai docenti

Il quadro teorico su cui si basa il progetto didattico è quello del *costruttivismo sociale*, secondo il quale la conoscenza è attivamente costruita da chi apprende (Vygotskij et al., 1978), realizzato in modalità *blended* (ossia misto di presenza e distanza), caratteristica oggi condivisa nei processi di formazione sia dei giovani che degli adulti (Trentin, 2008; Ghislandi, 2002), che non solo fanno uso delle tecnologie, ma che centrano l'attività sulla pratica condivisa da una o più comunità (Wenger, 1998).

Il ruolo degli insegnanti nell'uso della piattaforma non si è esaurito negli incontri a distanza: infatti, altra sezione della piattaforma era destinata alle classi, ciascuna con partecipanti i ragazzi, il docente della classe e il laureando che seguiva la sperimentazione (*Studenti*, Figura 3.9). In questa sezione, l'insegnante era l'organizzatore e il progettatore, nel senso che il suo ruolo di "teacher" nella piattaforma gli consentiva di aprire forum, inserire materiali, iniziare chat, richiedere compiti a scadenza, ecc., in modo da favorire al massimo l'interazione a distanza con e tra gli studenti, come controparte della loro interazione in presenza. La piattaforma ha favorito la *costruzione collettiva del sapere* e la progressiva formazione di *comunità di pratica* non solo a livello docenti, ma anche a livello studenti.



Figura 3.9: le sezioni dedicate agli studenti

Il progetto si colloca nello stesso contesto della costruzione di una literacy matematica, condividendo quadro teorico, scopi, materiali, valutazioni del quadro OCSE PISA e Invalsi. Le modalità per la costruzione delle competenze di literacy matematica passano attraverso le attività in presenza e a distanza realizzate nelle classi. Pensare a una didattica per competenze vuol dire abituare lo studente a interagire con problemi sempre diversi, che non richiedano una risoluzione ‘meccanica’, bensì che coinvolgono: costruzione di significati, esplorazioni e sperimentazioni, formulazione di congetture, giustificazione di risultati attraverso argomentazioni.

Per fare ciò, gli studenti partecipano in classe a lavori di gruppo, discussioni collettive, e a distanza tramite la piattaforma Moodle, a lettura di materiali, chat, forum, compiti, messaggi vari, con i loro compagni di classe e con l’insegnante o il laureando. Infatti, ogni classe ha una sezione ad essa dedicata, dove gli iscritti sono i ragazzi col ruolo di *student* e il docente di matematica e un laureando col ruolo di *teacher*.

Inoltre, i ragazzi hanno l’opportunità di partecipare anche a un’altra sezione, denominata *Tutte le classi*, disponibile a tutti gli studenti del progetto appartenenti a classi e a scuole diverse, in modo che possano lavorare a distanza anche con studenti di un’altra scuola o di un’altra città. Quindi, uno studente di Chieri potrebbe discutere in un forum con uno studente di Biella che non ha mai incontrato, per risolvere un problema di matematica.

L’esperienza è positiva sia per gli studenti che per i docenti, che hanno riscontrato nell’utilizzo della piattaforma Moodle e nello svolgimento delle attività un modo per fornire una visione più aperta e dinamica della matematica, che aiuta a superare i preconcetti e le diffidenze degli studenti nei

confronti della materia; l'entusiasmo mostrato dalla maggior parte degli allievi nei confronti della sperimentazione ha permesso il perseguimento di obiettivi specifici (avvio alla dimostrazione, all'argomentazione, all'algebra, passaggio al linguaggio simbolico, sviluppo delle capacità comunicative, ascolto e costruzione comune, utilizzo di nuove tecnologie) altrimenti difficilmente raggiungibili con la normale didattica. Il progetto ha permesso anche un confronto costruttivo tra docenti e tesisti che ha contribuito alla crescita di entrambi i gruppi sotto aspetti diversi.

Durante lo svolgimento del progetto si è assistito alla formazione di comunità di pratica su più livelli: tra studenti, tra docenti, tra tesisti e ricercatori. Si sono osservate differenti tipologie di interazione: tra pari (allievo-allievo, docente-docente, tesista-tesista) e tra soggetti appartenenti a categorie diverse (studenti-docenti, studenti-tesisti, docenti-tesisti, ricercatore-docenti, ricercatore-tesisti, ricercatore-allievi). Possiamo osservare come la pratica comune in classe e sulla piattaforma abbia delineato i confini e l'identità della comunità di studenti. L'esistenza di un repertorio condiviso di azioni, competenze, interessi, linguaggio specifico, simboli (creatosi attraverso la graduale interazione dei componenti) ha favorito il processo di costruzione di significato (negoiazione) attraverso la partecipazione dei membri e la reificazione. Man mano che si procedeva nelle attività, gli studenti si sono costruiti il proprio spazio all'interno della comunità, negoziando continuamente il proprio ruolo. Sono stati attivamente partecipi al processo di negoziazione dei significati, hanno costruito la propria immagine all'interno della comunità e si sono allineati al repertorio condiviso.

Anche i docenti hanno negoziato continuamente il proprio ruolo all'interno della comunità, sottolineando, a seconda dei momenti, aspetti differenti. Sono stati 'direttori d'orchestra', ascoltatori, osservatori, analisti, allestitori, 'giocatori' e maieuti. Le attività svolte, sia in classe sia tramite la piattaforma, hanno stimolato innanzitutto una riflessione sulle metodologie utilizzate (prima e dopo la sperimentazione). Una riflessione di questo tipo ha portato un cambiamento a livello metacognitivo: l'insegnante si interroga e si rende consapevole del suo modo di lavorare, di porsi in classe, dell'immagine che gli allievi hanno di lei/lui, dell'importanza che le convinzioni e le emozioni hanno all'interno della pratica didattica. Da semplice trasmettitore di contenuti, l'insegnante diventa allora osservatore degli studenti, ma prima di tutto di se stesso, e mediatore nella costruzione dei significati. Attraverso nuove attività, che stimolano la creatività e l'interesse degli allievi, il docente osserva i processi degli studenti (e non solo più i loro prodotti), ma osserva anche il proprio processo di insegnamento. Il rendersi osservatore stimola nel docente una capacità critica che lo porta a migliorarsi. Inoltre, l'essere osservatore porta il docente a predisporre all'ascolto e al rispetto dei tempi di ogni studente.

3. Il Progetto [M@t.abel](#)

Il progetto [M@t.abel](#) raccoglie le istanze più attuali provenienti dalla ricerca didattica internazionale e le cala nella realtà effettuale della scuola italiana. La prima componente è assicurata dai contributi dati al progetto da ricercatori ed esperti italiani in didattica della matematica; la seconda è stata ottenuta col grande lavoro degli insegnanti della scuola, impegnati come autori delle attività didattiche proposte. Si tratta di una collaborazione che vede coinvolti agenti diversi, i quali esprimono le diverse competenze necessarie alla realizzazione del progetto:

MIUR, ANSAS, UMI, SIS. È la prosecuzione naturale di proposte didattiche innovative avanzate nei primi anni 2000 dalle associazioni professionali UMI e SIS in collaborazione col MIUR nell'ambito di un protocollo d'intesa firmato tra queste e il Ministero: il risultato della collaborazione era stato il materiale della *Matematica del Cittadino*, un curriculum unitario per la matematica dai sei ai diciannove anni, con duecento esempi di attività didattiche ed elementi di prove di verifica. Tali proposte curriculari sono alla base di tutte le *Indicazioni* elaborate successivamente dal Ministero negli anni successivi. Il piano di formazione adegua le attività proposte in forma opportuna rispetto alla tecnologia presente nella scuola, producendo parimenti, grazie al contributo importante dell'ANSAS (già INVALSI), un materiale adatto alla formazione cosiddetta *blended* tramite piattaforma in rete. Quindi si ha un inserimento delle tecnologie dell'informazione e della comunicazione (TIC) non solo nella pratica scolastica con gli allievi, ma anche nelle modalità stesse dell'aggiornamento degli insegnanti.

Parte integrante del percorso è la sperimentazione in classe di materiali didattici opportunamente predisposti per una didattica prevalentemente laboratoriale. Tali materiali sono relativi a nuclei tematici significativi previsti dalle indicazioni nazionali e afferiscono ai quattro grandi temi della disciplina matematica individuati per la scuola secondaria. Il percorso proposto da ogni singola unità didattica è scandito secondo una metodologia laboratoriale che prevede un percorso di scoperta con attività sia individuali che di gruppo, e verifiche dell'apprendimento già predisposte.

All'interno del piano M@t.abel, ciascun insegnante dovrebbe sperimentare quattro attività nel corso dell'anno scolastico e redigere un "*diario di bordo*" che racconta gli esiti di tale esperienza (attività per attività), individuandone punti di forza e di debolezza.

La compilazione del diario di bordo è un requisito per ottenere la certificazione della formazione. In esso il docente dovrà consistere:

- esplicita i principali nodi concettuali cui l'attività scelta fa riferimento
- descrive l'esperienza svolta in classe e la metodologia usata (schede di lavoro, lavoro di gruppo, discussione matematica in classe, software utilizzato, etc.)
- valuta come l'attività è stata recepita dagli studenti e il modo in cui hanno assolto al loro compito
- rileva le difficoltà incontrate dagli studenti nella comprensione dei vari concetti matematici e le metodologie di superamento
- commenta le prove di verifica proposte e i relativi risultati.

Come leggiamo nel Rapporto di analisi dei diari di bordo (Rapporto [m@t.abel](#) sui diari di bordo):

Ipotizziamo che il diario di bordo possa rappresentare uno strumento di lavoro e verifica sul processo formativo, che consente ai docenti di raccontare la sperimentazione delle attività e di contestualizzare tale sperimentazione entro uno specifico assetto organizzativo. In quanto "strumento" esso prevede un'ipotesi di utilizzo per chi lo produce, oltre che costituire una fonte preziosa di informazioni per chi lo legge ed è interessato a cogliere alcune dimensioni. Può essere, ad esempio, utile al docente per sviluppare un pensiero su quanto accade in classe e sulla propria funzione educativa, al fine di orientare e ri-organizzare in modo più funzionale la propria azione formativa entro la sperimentazione stessa. Tale funzione di "autoriflessione" e di resocontazione potrebbe, quindi, contribuire a un "miglioramento" dell'insegnamento abituando gli insegnanti ad

una riflessione organica sulla propria attività didattica (p. 7).

L'allegato 3 riporta la struttura del diario di bordo, così come presentata in M@t.abel-PON.

Al termine della sperimentazione PON 2009-10, dal rapporto di analisi risulta che la metodologia seguita abbia una certa incidenza sul cambiamento delle pratiche didattiche:

In circa un quarto dei diari di bordo (il 25,29%) i docenti dichiarano di aver modificato la propria impostazione didattica e il proprio atteggiamento verso la disciplina relativamente all'unità di lavoro svolta in classe. Ciò non avviene per il 26,56% delle unità didattiche sperimentate rispetto alle quali non si rileva un impatto significativo sull'abituale pratica di insegnamento. In circa la metà dei diari (48,15%), invece, le risposte fornite dai docenti sono state valutate, in fase di codifica, come non definite poiché mancanti (9,45%) o non nettamente siglabili in quanto:

- sottolineano il rafforzamento di metodologie di insegnamento abitualmente adottate che non si configura quindi quale cambiamento significativo apportato dalle attività sperimentate (13,28%);
- rimarcano l'utilità che l'unità di lavoro proposta ha per gli studenti senza pronunciarsi sulla propria impostazione didattica (25,42%).

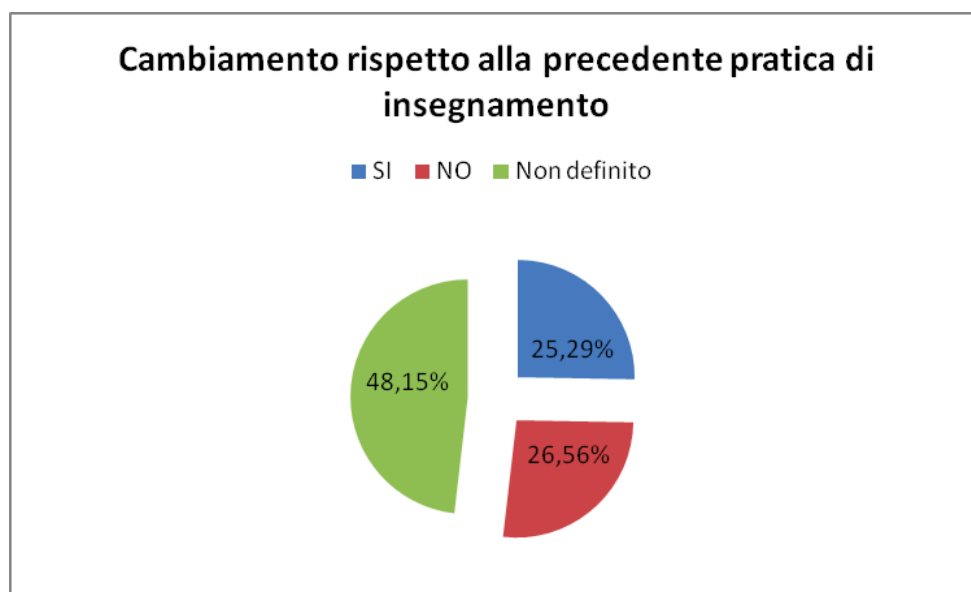


Figura 3.10 Impatto dell'unità didattica sperimentata sull'impostazione didattica abituale

(Rapporto PON M@t.abel 2009-10, p. 36)

Nel progetto si trovano quindi unificate due componenti che spesso sono divise in momenti successivi nella formazione degli insegnanti: l'aggiornamento vero e proprio e la sperimentazione in classe. In M@t.abel, entrambi crescono insieme in un rapporto dialettico di arricchimento reciproco col supporto del tutor responsabile della piattaforma. Come conseguenza, la crescita professionale dell'insegnante avviene attraverso la formazione di *comunità di pratica* nelle scuole, che permettono l'effettivo cambiamento delle pratiche di insegnamento, con un'interazione effettiva del curriculum ideale su quello concretamente sviluppato in classe. Infatti, da una parte introduce nelle pratiche in classe la necessità dell'*osservazione dei processi* e non la sola attenzione ai prodotti, attraverso la compilazione del *Diario di Bordo*, insieme con le discussioni in piattaforma di quanto avviene in classe. Dall'altra, esplicita i legami con i quadri valutativi PISA e INVALSI, offrendo un concreto supporto agli insegnanti che decidano di lavorare in questa direzione. È noto

che la diffusione di strumenti valutativi esterni alla fine dei cicli scolastici sia un forte incentivo alla modificazione dei metodi e all'innovazione dei contenuti. Tutto il materiale è ora a disposizione di tutti gli insegnanti italiani, sul sito Indire, con la possibilità di organizzare localmente tramite le USR dei corsi introduttivi ad esso, che metteranno in grado gli insegnanti interessati di sperimentarlo al fine di attuare il meglio possibile quanto prescritto dalle nuove Indicazioni.

Dalle prime analisi effettuate su scala nazionale, la *validità* del metodo seguito risulta confermata, soprattutto per quanto riguarda gli aspetti metodologici, come un approccio didattico di tipo laboratoriale e il lavoro di gruppo per gli studenti:

La proposta di una didattica di tipo laboratoriale sembra rappresentare per i docenti la parte più innovativa, in quanto tali unità di lavoro risultano per lo più assenti dal panorama editoriale o non sufficientemente validate e garantite come quelle, ad esempio, reperibili sui siti Internet. L'avere dei materiali già strutturati costruiti con questa metodologia ha permesso loro di sperimentare con un maggiore margine di sicurezza, avviando una graduale acquisizione di competenze spendibili successivamente e potenzialmente trasferibili nell'abituale pratica di insegnamento. A tale riguardo, il diario di bordo può rappresentare un utile accompagnamento al processo formativo e alla relazione di apprendimento dal momento che la riflessione sul lavoro didattico in classe non è un elemento della professionalità docente che in genere viene richiesto. L'azione educativa, infatti, viene spesso ridotta al trasferimento di nozioni, la cui verifica è interna al sapere stesso. Dalle analisi effettuate, sembrerebbe, invece, che l'innovazione riguardi proprio la possibilità di ripensare la relazione di apprendimento, più che l'aggiornamento professionale in senso tecnico o la maggiore familiarità con le nuove tecnologie.

[...] rileviamo come la possibilità di lavorare in gruppo rappresenti per i docenti la dimensione più innovativa introdotta con le attività sperimentate, promuovendo quindi una visione del gruppo classe come risorsa per l'apprendimento. (Rapporto PON M@t.abel 2009-10, p. 68).

Tuttavia, una delle difficoltà riscontrate nell'effettivo svolgimento del progetto riguarda proprio lo *scarso coinvolgimento* dei docenti nella compilazione dei diari di bordo:

Probabilmente gli insegnanti hanno vissuto lo strumento come un atto formale indispensabile per ottenere la certificazione, un ulteriore adempimento burocratico tra i tanti che pervadono quotidianamente la vita professionale. La difficoltà nel cogliere la spendibilità di quanto prodotto, infatti, ha reso la rendicontazione un verbale di attività piuttosto che uno strumento di lavoro per ripensare la prassi educativa, favorire lo scambio e la condivisione con i colleghi ed esplicitare nella sostanza il percorso didattico compiuto. Anche l'analisi tematica ha confermato questa impressione evidenziando l'uso di termini propri della burocrazia scolastica (ibid., p. 67).

Questo elemento di criticità può costituire uno dei nodi di discussione per il nostro Seminario Nazionale e più in generale per riflettere sulle azioni di formazione all'interno di paradigmi nei quali la partecipazione attiva dell'insegnante (compresi i suoi sistemi di valori e le sue convinzioni) è parte essenziale del percorso formativo.

4. Elementi teorici comuni

Proviamo a sottolineare alcuni elementi comuni che emergono dai tre tipi di proposte di formazione.

Comunità di pratica. Un primo elemento è la presenza di una *comunità di pratica* in cui gli insegnanti vengono ad essere partecipi. Questa nozione fu introdotta dagli antropologi cognitivi Jean Lave ed Etienne Wenger (Lave & Wenger, 1991) negli anni novanta ed è successivamente stata adattata all'insegnamento della matematica, in particolare da Barbara Jaworski, nel decennio successivo (Jaworski, 2008). Il metodo propone una teoria sociale dell'apprendimento che si fonda su quattro premesse:

- siamo esseri sociali;
- la conoscenza è una questione di competenza per tutta una serie di attività socialmente apprezzate (cantare intonati, scoprire leggi scientifiche, riparare macchine, scrivere poesie e quant'altro);
- conoscere vuol dire partecipare al perseguimento di queste attività socialmente apprezzate, ossia assumere un ruolo attivo nel mondo;
- il significato (il nostro fare esperienza del mondo e la nostra relazione attiva con esso come qualcosa di significativo) è ciò che alla fine l'apprendimento è chiamato a generare.

Sulla base di questi assunti, la teoria si concentra principalmente sull'apprendimento come *partecipazione sociale*, ovvero come un processo nel quale si è partecipanti attivi nelle *pratiche* di comunità sociali e nel quale bisogna costruirsi una propria *identità* in relazione a queste comunità. La partecipazione sociale influenza non solo ciò che facciamo, ma anche chi siamo e come interpretiamo ciò che facciamo. Una teoria sociale dell'apprendimento deve integrare perciò le componenti necessarie a caratterizzare la partecipazione sociale come un processo legato all'apprendere e al conoscere.

Le componenti in questione, profondamente interconnesse tra di loro, sono pertanto:

- *Significato*: si riferisce alla capacità delle persone di sperimentare la vita e il mondo come qualcosa di significativo, sia a livello individuale che collettivo.
- *Pratica*: evoca le risorse storiche e sociali, le strutture di riferimento e le prospettive comuni che sostengono il reciproco coinvolgimento nell'azione.
- *Comunità*: rimanda agli aspetti sociali in cui le nostre attività sono considerate meritevoli di essere perseguite e dove la partecipazione è identificabile come competenza.
- *Identità*: dice come l'apprendimento modifica chi siamo e crea delle storie personali in divenire nell'ambito delle nostre comunità.

E-learning. Le tecnologie hanno cominciato ad avere una diffusione consistente nelle attività formative verso la fine degli anni Novanta sotto diverse denominazioni, ma con il rapido imporsi di metodologie di formazione di tipo *e-learning*.

L'approccio iniziale fu sostanzialmente caratterizzato dall'accesso a contenuti multimediali e ipertestuali via internet, quindi piuttosto semplicistico nei riguardi dei problemi dell'apprendimento. Sono state avviate allora riflessioni, ricerche e concettualizzazioni che hanno portato a nuove pratiche di usi didattici delle tecnologie, tutte caratterizzate dalla focalizzazione sull'apprendimento

più che sulla tecnologia, e sull'utilizzo delle tecnologie per quelle loro peculiari caratteristiche in grado di migliorare l'apprendimento.

Per e-learning si intende apprendimento con le tecnologie, siano esse infrastrutture rappresentazionali o comunicative (Hegedus & Moreno-Armella, 2009). Non bisogna fare l'errore di intendere con il termine e-learning una didattica unicamente a distanza, volta a raggiungere studenti lontani. Occorre, invece, puntare l'attenzione sulla qualità e sulla ricchezza degli ambienti di apprendimento che le tecnologie consentono di progettare e sul ripensamento della didattica che i media favoriscono. A questo proposito, Trentin (2008) sostiene che l'e-learning, come possibile pratica formativa, potrebbe avviare una profonda riflessione a riguardo delle problematiche generali legate all'educazione. Venendo addirittura paragonato ad un moderno "cavallo di Troia" potrebbe, stimolando lo studio di come sfruttare efficacemente le nuove tecnologie a vantaggio dei processi di apprendimento, indurre un'analisi generale sui modi di innovarli qualitativamente. Trentin (2008) illustra un interessante paradigma, articolato in otto aspetti strettamente e mutuamente interrelati, che dovrebbe rendere efficace e sostenibile una pratica e-learning:

1. *economia*: ottimizzazione delle risorse in gioco (costi di sviluppo, di esercizio, di investimenti successivi, etc.);
2. *didattica e formazione*: valore aggiunto e potenzialità pedagogiche introdotte dai media;
3. *professionalità*: individuazione dei personaggi chiave necessari alla gestione, progettazione, sviluppo ed erogazione degli interventi e-learning;
4. *informalità*: processi del singolo individuo messi in atto autonomamente per far fronte alle proprie esigenze conoscitive attraverso interazione "a rete" e "in rete" all'interno di comunità di pratica on-line;
5. *organizzazione e gestione*: creazione delle condizioni organizzative per una integrabilità delle metodologie e-learning nelle prassi dell'organizzazione;
6. *contenuti*: qualità dei contenuti veicolati e implementati in e-content;
7. *tecnologia*: stabilità e funzionabilità dell'infrastruttura tecnologica;
8. *società e cultura*: cambiamenti socio-culturali derivanti dalla diffusione dell'e-learning.

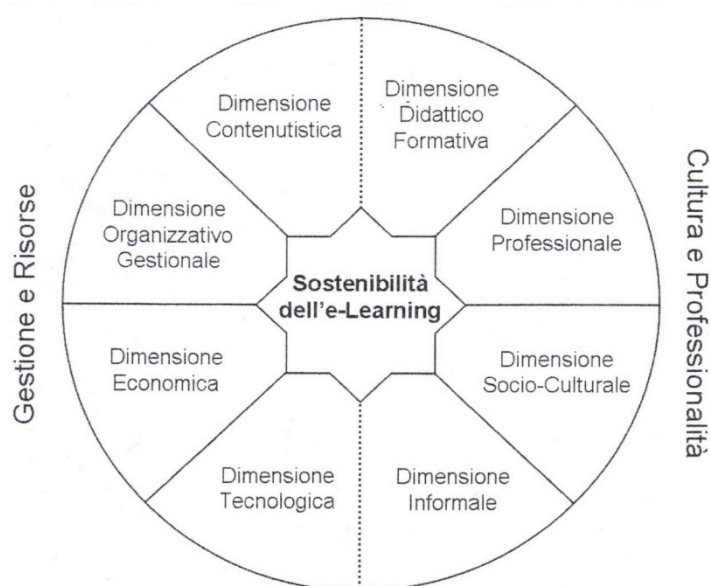


Fig. 7 – Il modello per un'efficace e sostenibile pratica e-learning (Trentin, 2008)

Gianni Marconato, psicologo esperto in processi formativi, riassume molte ricerche articolando in quattro tempi questo progressivo spostamento (Marconato, 2009):

- Il passato: *e-learning* o *delivery mode* (costruzione, organizzazione e distribuzione di informazioni/contenuti).
- Il presente: *collaborative & networked learning* (comunicazione, collaborazione e costruzione di artefatti).
- Il futuro prossimo: *connected learning* (reti sociali, condivisione di risorse, costruzione di conoscenza).
- Il futuro remoto: *immersive learning* (visualizzazione, manipolazione, interazione e costruzione).

Si passa da una pubblicazione statica di documenti su web ad una progressiva gestione dinamica di documenti, per arrivare a una spiccata interazione tra persone e tecnologie di varia natura. Ad ognuno di questi quattro tempi corrispondono dei modelli molto diversi tra di loro, sia per quanto riguarda l'uso che in essi viene fatto delle tecnologie, sia per i presupposti didattici sulla base dei quali sono implementati⁶³.

Alcuni degli spostamenti concettuali indotti di conseguenza sono:

- Da formale a informale: da modelli di apprendimento basati sul setting della scuola con ruoli ben definiti, con programmi didattici e sistemi di valutazione ben formalizzati, i nuovi ambienti di apprendimento si evolvono verso modelli di apprendimento informale basati sull'esperienza, sulla riflessione, sulla conversazione, sulla soluzione di problemi, sullo svolgimento di attività.
- Da strutturato a destrutturato: gli ambienti di apprendimento strutturati, formalizzati, sequenziali, rigidamente pianificati diventano destrutturati, aperti, con obiettivi verso cui dirigersi ma con il percorso non prefissato, in continuo adattamento al contesto.
- Da statico a dinamico: mentre i valori cardine degli ambienti tradizionali sono la rigida strutturazione e la progettazione pianificata, gli ambienti emergenti sono dinamici, con una progettazione iniziale rappresentante le intenzioni, ma sempre pronti ad adattarsi alle condizioni reali in cui si sta svolgendo il processo.
- Da certo a incerto: prende il sopravvento l'incertezza sia dell'esito, consapevoli del fatto che non è possibile prevedere esattamente il risultato finale di un processo complesso come l'apprendimento, sia dello svolgimento del processo stesso.
- Da generico a situato: gli obiettivi di conoscenza e la conoscenza stessa abbandonano la genericità e l'astrattezza, per essere sempre più focalizzati sul contesto, sulla specifica situazione di utilizzo concordando con il principio secondo cui più la formazione è generica, meno è efficace.

⁶³ M@t.abel si situa al terzo livello e tende idealmente al quarto.

- Dalla conformità alla divergenza: prima ciò che veniva chiesto allo studente era di conformarsi a regole dettate dalla disciplina, ora invece viene valorizzato il pensiero divergente, la creatività, il perseguimento di obiettivi personali degli alunni.
- Dalla dipendenza alla responsabilità: l'atteggiamento di sostanziale dipendenza da scelte esterne che viene richiesto di assumere alla persona che apprende in ambienti tradizionali diventa un atteggiamento di responsabilità del risultato personale anche con il rischio di non raggiungere il prodotto sperato.

Invece gli spostamenti rilevati sul piano della pratica sono:

- Dai contenuti all'interazione didattica, alla costruzione: i modelli primitivi di uso didattico delle tecnologie replicavano semplicemente il modello tradizionale di scuola, quello basato sui contenuti e sulla loro trasmissione. Si cerca ora di trovare usi più ricchi delle tecnologie consentendo una interazione tra i soggetti coinvolti, una comunicazione al fine di condividere conoscenze ed esperienze, per argomentare, per affrontare e risolvere problemi, per costruire artefatti.
- Dalla centralità del docente alla centralità del soggetto che apprende: negli ambienti di apprendimento tradizionale il docente, essendo il depositario dei contenuti, rappresentava la centralità, nel senso che le conoscenze erano quelle comunicate dal docente e la sua interpretazione dei fatti era quella cui gli studenti si dovevano conformare. Ora il controllo del processo di apprendimento è nelle mani dello stesso soggetto che apprende.
- Il ruolo del docente da esperto dei contenuti a facilitatore dell'interazione tra chi apprende: avendo assunto centralità il soggetto che apprende e il suo processo di apprendimento, il ruolo di docente diventa quello di supporto all'apprendimento, fino a scomparire del tutto (*learning without teaching*).
- Dalla classe alla comunità di apprendimento e di pratica: la classe non è più l'unico luogo in cui si impara, infatti sempre più spesso si apprende attingendo alle risorse presenti nella comunità di riferimento.
- Da tecnologie visibili a tecnologie invisibili: l'approccio iniziale alla tecnologia aveva dato alla tecnologia stessa una forte visibilità. Con lo spostamento sull'utilizzo della tecnologia per migliorare i processi di apprendimento, le caratteristiche di questi ultimi hanno conquistato centralità e visibilità, portando la tecnologia in secondo piano, cioè rendendola trasparente e facendole assumere valore per quanto è strumento per un fine.

Per poter riassumere tutti questi spostamenti, potremmo dire che è come se ci fosse stato un passaggio dal *learning* con prefisso (la *e* di electronic) al *learning* senza prefisso, ovvero una perdita di centralità della tecnologia e una riappropriazione di centralità dei processi di apprendimento. Infatti, il futuro delle tecnologie per la didattica sta nella ricentatura dell'attenzione sul *learning*, oggetto di studio della ricerca psicologica, cognitiva e didattica contemporanea.

A livello internazionale, l'utilizzo della tecnologia in corsi di formazione a distanza che coinvolgono comunità di pratica è studiato in Brasile dal gruppo di M. Borba, a partire dalla nozione di *humans-with-media* (Borba & Villareal, 2005). Il costrutto intende sottolineare come "Knowledge is always produced by humans, but also by different media such as orality, writing, or the new languages that emerge from computer technology" (Borba & Mulatto, 2006, p. 202). A

livello didattico, si evidenzia come l'utilizzo di nuovi strumenti tecnologici offra nuove possibilità di rappresentazione e cambia il modo stesso di fare attività matematiche in classe. L'aspetto più interessante per noi è il fatto che tale quadro sia stato applicato alla formazione insegnanti a distanza basata su piattaforme (aspetto simile ai nostri interventi 2 e 3). In questo contesto, Borba afferma: "knowledge is produced not solely by humans, but by a collective of humans-with-media. [...] the way teachers collaborate is shaped by the possibilities of different e-learning platforms. [...] different media shape different kinds of collaboration. » (ibid.).

ALLEGATI

ALLEGATO 1

Riportiamo interamente il capitolo quarto del libro « Matematica : non è solo questione di testa », frutto del NRD Gruppo Maestre (Arzarello et al., 2010, pp. 121-136).

Tre insegnanti raccontano

Tre insegnanti che hanno partecipato alle attività del gruppo di ricerca, e all'elaborazione delle *timeline* presentate nella parte III raccontano come sia cambiata la loro pratica didattica dopo aver 'sperimentato' analisi multimodali di processi di insegnamento - apprendimento.

Donatella

Insegnante di scuola primaria dal 1969, in pensione dal 2007, è impegnata da molti anni nella formazione degli insegnanti presso vari circoli didattici e istituti comprensivi. Ha partecipato alla stesura del testo UMI-MIUR "Matematica 2001". Fa parte del Nucleo di ricerca didattica dal 1987.

Posso parlare di cambiamento, è vero, ma nel mio caso, di cambiamento nella modalità con cui conduco la formazione degli insegnanti. Gli strumenti presentati in questo libro, infatti, permettono di avere una visione più dettagliata dei processi di costruzione di conoscenza e nello stesso tempo dei modi attraverso cui questi processi possono essere influenzati dall'azione dell'insegnante. Il mio obiettivo è quello di dare un supporto agli insegnanti che sentono l'esigenza di modificare la loro prassi didattica sulla base degli stimoli ricevuti.

Durante l'attività di formazione richiedo agli insegnanti di documentare le attività che realizzano in classe, inviandomi i protocolli degli allievi e le trascrizioni delle discussioni. Nella prima fase si instaura un dialogo molto stretto tra me e l'insegnante in quanto commento per scritto tutta questa produzione. Successivamente, gli episodi più interessanti diventano oggetto di un confronto collettivo attraverso la discussione nel gruppo formato da tutti gli insegnanti. Siccome nella prima fase l'interazione è diretta, posso fare un'analisi abbastanza dettagliata e suggerire strategie contestualizzandole non

solo nell'attività, ma anche nei percorsi di apprendimento degli alunni. Essendo aumentata complessivamente la mia competenza, ora mi risulta quasi spontaneo analizzare, seguendo il paradigma della multimodalità, i materiali che ricevo e quindi dare indicazioni in questo senso agli insegnanti.

Ma quali sono i contributi che posso dare concretamente? Esaminando lo sviluppo dell'attività con l'aiuto della *timeline*, ho avuto modo di accorgermi di alcune cose:

- in pochissimi istanti possono concentrarsi molti elementi rilevanti che inseriti nel fluire della discussione e, a un livello di analisi più grezzo, non possono essere facilmente individuati;
- un elemento di sblocco (pivot cognitivo, gioco semiotico dell'insegnante...) può risolvere in breve tempo una situazione di stallo, in altre parole l'uso di una strategia adeguata da parte dell'insegnante o l'introduzione di un elemento (segno o strumento) produce un'accelerazione dei processi che portano alla comprensione;
- i passaggi diventano più rapidi quando scattano nuove idee nella testa dei bambini;
- i gesti e le parole si trasferiscono da un alunno all'altro in un processo di contaminazione continua quando si crea sintonia.

Riflettiamo sui *gesti*. L'insegnante, 'educata' a prestare attenzione alla gestualità spontanea degli allievi, può verificare se il gesto dice la stessa cosa delle parole o se anticipa ciò che le parole non possono ancora dire; questo avviene, ad esempio, quando ciò che l'alunno vuole esprimere non è ancora ben chiaro nella sua mente oppure manca un linguaggio adeguato. Siccome il gesto aiuta sia a esprimersi sia a capire meglio, l'insegnante dovrebbe stimolare l'uso dei gesti, favorendo l'imitazione e la contaminazione fra gli alunni, e rispecchiare quelli degli alunni stessi, ogni volta che ciò sia possibile, attuando giochi semiotici con l'obiettivo di aiutare gli alunni a trasformare i gesti in parole o in altri segni.

Sfruttando le potenzialità delle diverse risorse del semiotic bundle, sia prese singolarmente sia nei loro intrecci reciproci, l'insegnante aiuta gli alunni a mantenere il contatto con i significati. A mio avviso spesso l'uso precoce del linguaggio simbolico della matematica rischia di allontanare dai significati e di sostituire la comprensione con un surrogato, ad esempio la manipolazione corretta dei simboli solo a livello sintattico o l'uso di una terminologia vuota di significato. In particolare, l'uso della gestualità per la sua immediatezza impedisce, in certe situazioni, che questo accada e, nello stesso tempo, favorisce il raccordo tra diversi punti di vista mettendo in sintonia allievo con allievo e gli allievi con l'insegnante. Lo stesso si può dire rispetto agli altri segni, ad esempio le produzioni scritte, gli schizzi, le rappresentazioni spontanee degli alunni: ogni elemento, con il codice che gli è proprio, rivela sfaccettature diverse del percorso cognitivo di un alunno e il suo uso, in un contesto sociale, può facilitare o rallentare questo percorso.

Nel caso del tetraedro, i gesti, tracciati in aria con il dito per disegnare strutture in 3D, sono poi diventati in un momento successivo linee tracciate sul foglio per rappresentare la figura in 2D, dai due punti di vista che gli alunni avevano sperimentato nella discussione, e cioè vista dall'alto e da davanti. Chi è riuscito a coordinare i diversi punti di vista, ha prodotto anche disegni coerenti (Figura IV.1).

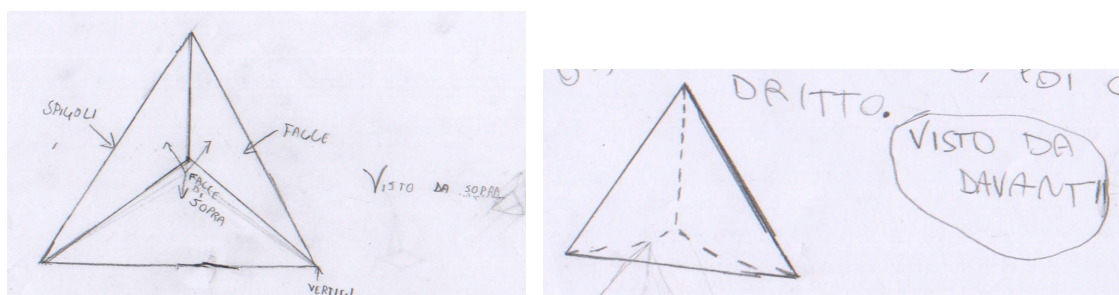


Figura IV.1 - I due disegni sono stati eseguiti dagli allievi senza aver visto il solido, basandosi solo sulle descrizioni fatte a gesti e a parole durante la discussione.

La matita è un prolungamento della mano e il disegno si può considerare, in questo caso, un modo di rendere permanenti i gesti attraverso segni scritti; il gesto, secondo me, contiene il significato perché è spontaneo, non mediato, quindi il segno che parte dal gesto nasce, più facilmente, da idee autentiche e non da stereotipi.

Un altro aspetto rilevante del ruolo giocato dai gesti riguarda il superamento di quegli ostacoli percettivi che diventano in alcuni casi anche ostacoli cognitivi o misconcezioni. Se il passaggio al piano concettuale è mediato da gesti, che stanno al posto di elementi geometrici precisi (facce, spigoli e vertici), e quindi ne richiamano la forma, la visione mentale della struttura complessiva di un solido risulta più semplice rispetto a quella che potrebbe suggerire una rappresentazione bidimensionale, come il disegno su un foglio di carta.

È evidente che una didattica che privilegi gli aspetti verbali, ad esempio con un uso massiccio di schede, è riduttiva rispetto alla ricchezza delle risorse semiotiche che ogni alunno, messo in situazioni in cui si può esprimere, è in grado di produrre. Occorre quindi che gli insegnanti coltivino, per sé e per i propri alunni, la capacità di inserire in modo 'intenzionale' nella comunicazione verbale anche gesti, rappresentazioni, oggetti e strumenti vari per capire e farsi capire.

Il semiotic bundle, nel paradigma della multimodalità, è fondamentale, ma altrettanto si può dire del *clima* e della *modalità di lavoro* della classe: se agli alunni, ad esempio, non è consentito muoversi, usare il proprio corpo e gli oggetti che si trovano - o sono portati - in classe, dalla matita al computer, dal foglio di carta agli strumenti di misura, dall'oggetto di uso quotidiano a quello tecnologicamente avanzato, la ricchezza di cui si parlava prima viene meno.

La centralità del corpo e dell'azione per capire e per produrre pensieri e idee originali è quindi indiscutibile, ma da sola non basta. È solo attraverso il confronto tra pari, con la *discussione* condotta dall'insegnante, che le azioni e i pensieri individuali si trasformano poco per volta in conoscenze condivise che diventano, poi, patrimonio comune della classe. L'apprendimento ha tempi lunghi e non va ricondotto ai soli contenuti essenziali perché nel farlo si perdono tante idee e tante conoscenze che forse non sono spendibili nell'immediato, ma permettono agli alunni di collegare fatti e azioni per costruire strutture

coerenti. Secondo me occorre prestare maggiore attenzione a ciò che vogliono veramente comunicare gli alunni: l'insegnante non può non cogliere la ricchezza dei collegamenti tra le conoscenze acquisite nel contesto scolastico e in quello extrascolastico. Spesso, poi, è più dalle parti 'fuori copione' che ricava informazioni preziose su ciò che veramente sanno (e sono) gli alunni. Questi momenti, però, nascono solo se gli alunni si sentono liberi di esprimersi perchè ciò che dicono non è sottoposto continuamente a valutazione. Per questo, insieme alla multimodalità, la discussione è un punto di forza di questa proposta didattica nel clima che è stato descritto.

È bene ancora porre l'accento sull'importanza dell'uso di *strumenti e oggetti concreti* 'mentre si parla': discutere senza avere niente in mano, guardando da lontano un oggetto (ad esempio, un triangolo di cartoncino) induce comportamenti diversi dalla situazione in cui posso toccare direttamente l'oggetto. Una conseguenza può essere la produzione di una gamma di segni (parole, gesti, scritti) differenti rispetto a una situazione senza oggetti. Ma soprattutto il contatto con l'oggetto fa sì che gli alunni condividano i significati mantenendo più facilmente il controllo della situazione e il contatto con l'obiettivo da raggiungere.

Un altro elemento importante è il *setting*: stare seduti intorno a un tavolo o stare in piedi, essere seduti in cerchio sul pavimento o in fila nei banchi, induce diverse modalità di approccio al problema e quindi può influenzare, rallentare o accelerare i processi, favorire o impedire la condivisione e forse anche la comprensione. Il setting influenza anche la modalità d'uso degli oggetti. Ad esempio nella situazione di piccolo gruppo, analizzata per il tetraedro, il triangolo di cartoncino, tenuto in mano dall'insegnante e fluttuante nell'aria, ha impedito ad alcuni alunni di condividere subito la procedura di costruzione e quindi di mettersi in sintonia con i compagni. Nella situazione di classe in cui lo stesso triangolo era in una posizione fissa e orizzontale è stato più facile immaginare facce laterali nella loro corretta posizione e superare lo stereotipo della piramide a base quadrata.

Da quanto detto finora è evidente che l'attenzione dell'insegnante deve essere diretta più ai *processi* che non ai prodotti degli allievi, anche se ciò è molto oneroso perché i tempi degli alunni non sono né quelli dell'insegnante né quelli della scuola. Sarebbe molto più facile mettere in campo una strategia di insegnamento con passaggi predefiniti, e quasi scontati, finalizzata ad acquisizioni strumentali, che permetta di valutare immediatamente i prodotti. La riflessione sugli errori e sulle difficoltà incontrate dagli alunni spesso è considerata un'attività da svolgere solo se c'è tempo, anche se la sua mancanza conduce, quasi sempre, a un rapporto distorto tra insegnanti, alunni e sapere. Invece questa prassi dovrebbe fare parte integrante del metodo di lavoro e su questo gli insegnanti dovrebbero costruirsi una vera competenza partendo anche dagli esempi di questo libro.

Secondo me, condurre un'*analisi fine*, almeno su qualche situazione particolare, su punti di snodo del curriculum, ha il merito di far capire come ogni alunno, seguendo la propria strada e, scontrandosi con i propri errori, faccia piccoli passi avanti e a volte ritorni indietro, ma poco per volta arrivi di solito a capire. Aiuta anche a comprendere quali siano le difficoltà che gli allievi devono affrontare e se esse siano di tipo cognitivo o solo didattico.

L'uso, anche solo una tantum della *timeline*, fa sì che l'attenzione dell'insegnante si concentri su tutto l'insieme delle risorse messe in campo, abituandolo a cogliere sintonie e non sintonie, sincronismi e non sincronismi, evoluzioni e ritorni indietro e loro possibili cause. Questo metodo di analisi, come ho già detto, richiede tempi che la scuola non concede di solito agli insegnanti. Ma è da quest'analisi che l'insegnante ricava elementi per comprendere l'andamento del processo di apprendimento e per elaborare strategie di azione per il futuro perché acquisisce due competenze fondamentali:

- la capacità di 'accorgersi' dei processi che vengono messi in moto sia da lui/lei stesso/a sia dagli alunni nei momenti cruciali di costruzione di conoscenza;
- la capacità di elaborare (e poco per volta padroneggiare) interventi idonei a favorire questi processi.

Con l'introduzione del paradigma della multimodalità, l'attenzione si è allargata a tutto l'insieme di segni e strumenti che intervengono nel processo di apprendimento. Per l'insegnante si tratta quindi di acquisire strategie di azione più articolate, non limitate alla sola capacità di 'orchestrare' in modo produttivo una discussione.

Quali sono queste 'nuove' strategie? Ho cercato di individuarne alcune:

- predisporre materiali, strumenti, luoghi del lavoro in modo da favorire l'uso di diverse risorse e poter verificare quali vengono usate e come;
- cogliere e esplicitare/far esplicitare i punti di vista epistemologici propri e degli alunni per renderli chiari agli stessi alunni e per creareintonie tra alunni e tra alunni e insegnante;
- osservare i gesti, le parole, i segni prodotti dagli alunni e saperli riutilizzare nei giochi semiotici, condotti ai tre livelli già descritti.

Questo non è tempo perso.

Ketty

Insegnante di scuola primaria dal 1992, laureata in matematica. Collabora da diversi anni con il progetto Avimes Piemonte per la valutazione, la didattica della matematica e il miglioramento dell'efficacia della scuola. Fa parte del Nucleo di ricerca didattica dal 2004.

Ecco quali sono le mie convinzioni oggi, dopo aver fatto questa esperienza di osservazione e ricerca che dura ormai da molti anni. Intendo le convinzioni in merito alla mia pratica didattica e agli elementi che ne costituiscono una parte essenziale, diventati elementi irrinunciabili perché il percorso dei miei allievi sia anche un percorso di crescita e di arricchimento per me stessa e per il mio metodo di insegnamento (sia a livello cognitivo sia a livello metacognitivo). Tutti questi elementi sono in collegamento tra loro: rappresentano alcune delle innumerevoli variabili in gioco durante la costruzione di sapere matematico in classe. Non si può pensare di rinunciare a qualcuna di esse, soprattutto a una loro osservazione e analisi, in quanto tutte contribuiscono a rendere l'apprendimento della matematica ricco, significativo: un viaggio speciale per chi insegna e per chi apprende.

Comunicazione e argomentazione. La comunicazione e l'argomentazione rappresentano sicuramente il perno fondamentale dell'apprendimento. Sono convinta che comunicare in matematica, condividere il pensiero utilizzando parole e gesti per farsi capire, stimoli la condivisione e la costruzione di sapere che spesso non è unicamente sforzo individuale, ma in primis costruzione sociale. Argomentare, spiegare i propri ragionamenti, non accontentarsi del semplice dare risposte, aiuta i bambini non solamente a concentrarsi sui prodotti ma a essere consapevoli soprattutto dei processi. Diventa questa una competenza per la vita, non solo per la matematica.

Discussione. La discussione è la metodologia principale per sostenere la didattica, soprattutto in situazioni di problem solving. Penso sia utile la creazione non di situazioni artificiali, dove tutto sia assolutamente lineare e pianificato, ma di situazioni in cui la discussione, ad esempio sull'interpretazione di un testo e sulle strategie da seguire, sia parte fondamentale per avviare la comprensione e lasciare spazio alla creatività. In questo senso, la discussione aiuta a costruire atteggiamenti non stereotipati, che sostengono una visione della matematica non solo fatta di calcoli, procedimenti e algoritmi. Irrinunciabile è anche la discussione di bilancio⁶⁴. Grazie a questa, tutti contribuiscono alla soluzione: si vagliano infatti tutti i procedimenti, anche le difficoltà e gli errori vengono messi in condivisione, per essere superati e trasformati in punti di forza. La soluzione è così il frutto dello sforzo collettivo e viene socialmente accettata.

Gli *errori* non fanno più paura, non sono ostacoli. Aiutano a crescere matematicamente: sono anch'essi momenti del percorso, tappe che fanno parte essenziale di un patrimonio di conoscenza che si evolve e migliora. Mai sotterrarli, ma starli; condividere, allontanare paure, sbagliare insieme e comprendere che sbagliando s'impara. Questa metodologia valorizza le diversità: accettare diverse rappresentazioni, non imporre strutture, dire la stessa cosa in tanti modi diversi, essere in grado di cogliere le sfumature, tutte necessarie a far emergere la complessità e la bellezza di ciò che s'impara.

⁶⁴ Bartolini Bussi, op.cit.

Ritengo che sia l'argomentazione sia la discussione siano fondamentali ed efficaci fin dalla classe prima; esse producono attitudini e atteggiamenti positivi che si sviluppano nel tempo e aiutano al raggiungimento di risultati significativi.

Gesti e immaginazione. I gesti funzionano come seconda lingua, soprattutto per far emergere misconcetti, errori, forme alternative di comunicazione. Per esempio, raccontare e assieme gesticolare sulla geometria è straordinario. Prima ancora del disegno, descrivere le figure geometriche attraverso l'uso di gesti aiuta a fissarne le proprietà principali e a sostenere il processo di astrazione. Lo stesso vale per quei concetti più complessi che non sono, per loro natura, palpabili attraverso forme geometriche. In questo caso, la capacità d'immaginazione è fondamentale e di solito viene a costituire una parte irrinunciabile dei processi di pensiero che supportano sia la comunicazione sia la comprensione. L'immaginazione aiuta a visualizzare quelle proprietà e quelle relazioni che di solito sono nascoste nei simboli della matematica. I bambini con difficoltà di apprendimento possono essere aiutati attraverso i gesti nell'attribuire significati a concetti astratti, come spesso avviene con le formule.

Ricordo la 'strategia' adottata da un mio alunno con difficoltà in classe quinta per riuscire a ricordarsi la formula per il calcolo dell'area di un trapezio: una 'filastrocca' di gesti, da lui creata, in cui 'racconta' a modo suo l'equiestensione tra un trapezio e un triangolo. Il triangolo ha come base il segmento dato dall'unione delle due basi del trapezio e la stessa altezza del trapezio. Immaginatevi di partire con le braccia parallele l'una sopra l'altra davanti a voi, a rappresentare le due basi del trapezio, e di spostare il braccio in alto all'altezza di quello più in basso, unendoli; quindi di alzare il nuovo 'segmento' così creato verso l'alto di una lunghezza che rappresenta quella dell'altezza del trapezio e infine fare un gesto netto con la mano destra simile a un taglio, per rappresentare la divisione per due. Attraverso i gesti, questo bambino ha attribuito alla formula dell'area del trapezio un significato esplicito che gli ha permesso di ricordare il procedimento e nel contempo l'equiestensione con il triangolo.

Persino la 'traduzione' di concetti mediante gesti da parte mia, il gioco semiotico, diventa un momento di dialettica molto potente con gli allievi. È attraverso il gioco semiotico che si possono veicolare supporti e pivot per la ricerca di significato che anticipano qualsiasi simbologia.

Atteggiamento e Autostima. C'è spazio per tutti. È importante non trasmettere la disciplina come ricchezza per pochi eletti ma come risorsa quotidiana, utile per tutti. Le convinzioni sulla matematica giocano un ruolo fondamentale nell'apprendimento: lavorare sull'autostima è cruciale, permette di rendere fertile il terreno. Vietato dire «non sono capace»: almeno «ci provo». In questo senso, il lavoro a coppie o a piccoli gruppi, può agevolare l'interazione tra pari e lo scambio di opinioni verso la ricerca di una soluzione. Si tratta di una condizione protetta che permette di potersi mettere in gioco senza avere paura di esprimere le proprie idee e di essere giudicati.

Tempi. Ognuno ha i suoi tempi e i suoi modi di apprendere. Anche la didattica necessita di tempi rilassati per realizzare percorsi di tipo elicoidale: stessi contenuti in evoluzione, con un linguaggio che si arricchisce, si completa. Si ha inoltre bisogno di 'sedimentazione', di pazienza: i processi di apprendimento si snodano solo in tempi lunghi lasciando il giusto spazio alla riflessione e all'elaborazione individuale, e alla metacognizione.

Ordine e Disordine. C'è un tempo per l'ordine e uno per il disordine. Soprattutto in situazioni di problem solving sono indicativi i protocolli grezzi, disordinati, dove anche gli schizzi contengono informazioni preziose, tentativi di soluzione, strade intraprese e

abbandonate. Spesso in queste 'iscrizioni'⁶⁵ è insito un tentativo di rappresentare la soluzione, un anticipo di ciò che ancora non è stato tradotto matematicamente. La capacità di esplorare, anche mediante figure di vario tipo, è una competenza. Supportare la didattica promuovendo il ricorso a diverse rappresentazioni (grafici, tabelle, disegni, configurazioni, segni) aiuta gli alunni ad avere un repertorio vasto di strumenti duttili da sfruttare per risolvere situazioni problematiche.

Bruna

Insegnante di scuola primaria dal 1976, laureata in pedagogia. Lavora nel Circolo Didattico di S. Mauro Torinese, sempre nel Tempo Pieno; fa parte del Nucleo di Ricerca Didattica dal 1996. Negli ultimi dieci anni si è dedicata alla formazione degli insegnanti sia del proprio circolo didattico, dove coordina un gruppo di circa trenta insegnanti, sia di altri circoli didattici e istituti comprensivi.

Nel novembre del 2007 alla classe sottoposi la situazione problematica 'Quanto è grande 1000'. Era un'attività che conoscevo, avendola già svolta altre due volte. Applicavo già da diversi anni una metodologia di lavoro fondata sull'attenzione ai registri linguistici che mi aveva aperto finestre impensabili su come si costruiva la conoscenza all'interno di un gruppo paritetico. Registravo regolarmente e trascrivevo puntualmente le discussioni che si svolgevano in classe, imparando a orchestrarle sempre meglio, con un raccorciamento dei tempi. Inoltre una valutazione 'a posteriori' mi permetteva di accertare quali allievi avessero 'cambiato il livello' della discussione; quali avessero posto le domande 'ingenue' e centranti il problema; quali fossero stati solo degli 'amplificatori' di tesi sostenute da altri e ancora non pienamente comprese; quali fossero stati 'assenti' dal dibattito, ma attenti; e quali fossero invece sempre interlocuenti, ma 'sconnessi'.

Tali valutazioni mi avevano consentito di creare buoni canovacci per le discussioni successive e anche di limitare al massimo i miei interventi, tutti comunque estremamente interlocutori: a domanda rispondevo con domande, ad affermazione con un 'rilancio' o con un 'rispecchiamento' in modo che tutti comprendessero.

Nella prassi ordinaria del lavoro – cioè al di fuori della soluzione dei problemi – stavo comunque attenta alle conoscenze pregresse e non affrontavo alcun argomento senza annotare le frasi più significative degli allievi. Non ero dunque digiuna o inesperta nel momento in cui, con i bambini della mia classe terza svolsi l'attività 'Quanto è grande 1000'.

Nel Nucleo di Ricerca stavamo studiando la multimodalità dell'apprendimento ed entravano in gioco risorse a cui non sempre avevo fatto ricorso (ad esempio, strumenti come il computer) e manifestazioni fisiche, in particolare la gestualità, che era difficile prendere in carico. Non di meno le prospettive che si aprivano erano intriganti: era come accedere a territori prima invisibili che di colpo si manifestavano in tutta la loro importanza. Il corpo nella sua interezza era coinvolto quando si trattava dell'apprendimento e ogni sua manifestazione – gesti, parole, sguardi, posture – era rivelatore del processo di apprendimento in corso. L'intuizione dell'importanza della gestualità mi aveva guidata, in classe prima, con gli stessi alunni, nell'ideazione di un percorso di approccio ai numeri,

⁶⁵ Iscrizioni (scripting): testi scritti contenenti parole, rappresentazioni, schizzi prodotti spontaneamente dagli allievi.

fondato sull'uso dei gesti, che aveva prodotto risultati sorprendenti⁶⁶. Quindi ero molto motivata.

Al fine di poter studiare meglio le procedure di intervento dell'insegnante, nel Nucleo si decise che avrei interloquuto con gli allievi fin dalla fase di soluzione del problema, contrariamente alle solite modalità che prevedevano per l'insegnante un ruolo poco direttivo, orientato all'ascolto e all'osservazione, per lasciare agli allievi maggiore autonomia nelle scelte.

La classe venne quindi divisa in tre gruppi di livello che, uno per volta sotto la mia supervisione, risolsero il problema di quanti quadretti di 1 cm² fossero presenti in un cartellone di 70 x 100 cm. Tutto venne videoregistrato da una collega del Nucleo. Posso affermare con tranquillità che né io né gli allievi fummo condizionati più di tanto da queste riprese, essendoci abbastanza abituati fin dalla classe prima.

Per quanto mi riguarda avevo in mente di limitarmi ad aiutare i bambini a esplicitare comprensibilmente le loro tesi, senza interferire nelle loro procedure di soluzione. Pensavo di adottare le tipiche prassi della 'discussione matematica'⁶⁷:

- il rispecchiamento, cioè la ripetizione di un'affermazione fatta da un allievo per poterla 'rilanciare' a tutto il gruppo;
- la riformulazione del problema, cioè la rimessa in gioco del quesito quando si ritenga che il gruppo se ne stia allontanando troppo o perda di vista l'obiettivo;
- l'esplicitazione dei conflitti, cioè la formulazione delle due o più affermazioni divergenti;
- la messa in luce delle strategie, cioè la richiesta di spiegare le procedure in atto, ma implicite o sviluppate da un solo allievo;
- il riassunto dei ragionamenti;
- il 'prestito' agli allievi delle espressioni linguistiche corrette.

In realtà il mio ruolo risultò assai più rilevante del semplice coordinamento, divenendo un vero supporto all'apprendimento attraverso i giochi semiotici condotti a vari livelli. Agii dunque in profondità, continuando i ragionamenti dei bambini, cercando di sviluppare le loro intuizioni, forzando alcuni passaggi laddove vi erano delle 'empasse', figurandomi delle strade anche in presenza di un semplice sentiero e commettendo inevitabili errori di interpretazione!

Durante l'attività non avevo la percezione di ciò che stava avvenendo e del ruolo che avrebbero giocato i miei interventi, ero troppo coinvolta e tesa a raggiungere l'obiettivo. Fu attraverso l'analisi con la *timeline*, e dunque a posteriori, che l'orizzonte nuovo sulla comprensione dei processi di insegnamento - apprendimento divenne per la prima volta davvero chiaro: rivedendomi mentre interagivo con i bambini, potevo cogliere tutta la portata dei gesti (l'uso delle dita, delle mani, del corpo) e delle parole, nel costruire connessioni utili alla conoscenza. Durante lo svolgimento dell'attività invece v'era in me solo la consapevolezza che anche i gesti, oltre al linguaggio, ai segni scritti e agli

⁶⁶ L'esperienza è stata pubblicata sul sito nazionale dell'INDIRE con il titolo "Numeri cinesi & oltre".

⁶⁷ Bartolini Bussi, op.cit., p.21

strumenti, potessero servire alla comprensione, ma non certo il perché e soprattutto in quale modo.

Il lavoro di analisi che seguì lo svolgimento dell'attività, anche se limitato ad alcuni brevissimi episodi, mise in luce, come ho detto, una gamma di fatti che concorsero all'apprendimento da parte del terzo gruppo; fatti di cui teoricamente conoscevo l'esistenza, ma che non avevo mai individuato precisamente nell'effettivo svolgimento del lavoro in classe.

Le conoscenze che avevo si sono così integrate con i risultati dell'esperienza vissuta, producendo inevitabili cambiamenti nel mio modo di essere in classe, benché non me ne sia resa subito conto. Solo ora, riflettendo a distanza di tempo dall'esperienza, comincio a intravedere dei mutamenti nel mio modo di agire, che riassumerei in tre punti:

- minor apprensione per i tempi di apprendimento;
- maggior fiducia nelle capacità dei bambini;
- uso più disinvolto di tutti i registri semiotici.

Proverò a dar conto di questi cambiamenti, che attengono ad aspetti sia didattici sia psicologici (anche se non sono ancora del tutto chiari neanche a me!), fornendo dove possibile esempi concreti.

Minor apprensione per i tempi di apprendimento. Sono una maestra 'normativa' cioè molto rigorosa e precisa sia nelle proprie attività sia verso i bambini. Scandisco puntualmente l'orario settimanale; dedico tempi prestabiliti a ogni attività, pur lasciando margini di sfioramento verso i giorni successivi; programmo sulla carta con attenzione tutti i miei interventi, giungendo spesso a calcolare anche i risultati delle operazioni che assegno agli allievi o risolvendo i problemi che sottopongo loro, con proiezioni statistiche delle strategie che ritengo possano usare. Un modo di procedere, come ben s'intuisce, che lascia poco spazio al caso, anche se sono pronta a modificare i miei piani di fronte a fatti nuovi⁶⁸.

Questa rigidità ha sempre comportato una certa apprensione verso i tempi dei bambini, specialmente di quelli meno pronti, meno recettivi, che hanno bisogno di più attenzione e di spiegazioni aggiuntive. La modalità ordinaria era di dedicarmi a loro negli interstizi di tempo – negli intervalli, nei gruppi di recupero – ma avevo chiara la percezione che si trattasse solo di palliativi: spesso non erano allievi incapaci ma solo poco sintonizzati col ritmo della classe.

Da quando ho cominciato a confrontarmi con la multimodalità, il mio modo di procedere è stato diverso. Nel momento della programmazione del lavoro quotidiano, ad esempio, includo il più possibile l'uso di strumenti, per esempio Excel per provare, verificare, calcolare, e quello di manufatti vari come scatole, stoviglie, oggetti quotidiani. Non ne definisco precisamente l'utilizzo, ma li tengo presenti e all'occorrenza ne suggerisco l'uso a questo o a quel bambino. Ciò comporta un'inevitabile sfasatura dei tempi: c'è chi ha

⁶⁸ È un tratto del mio carattere quello di approntare delle 'strutture' per poi disattenderle o 'saltarci sopra': crearmi una 'rete di senso' è forse un modo per affrontare l'angoscia del vuoto e dare un significato al caos quotidiano... Però poi, una volta costruita questa proiezione in avanti, visualizzato questo percorso, se durante l'effettivo svolgimento del lavoro avviene qualcos'altro, non ho difficoltà a recepirlo: l'aver programmato un'attività mi ha permesso di identificare con precisione la meta, il punto focale nonché la cornice. Tutto ciò che poi avviene non farà che arricchire questo quadro.

proceduto velocemente e chi si è attardato, ma l'esperienza è stata varia e penso anche più coerente con gli stili di ognuno.

Ad esempio Mara⁶⁹ per risolvere situazioni problematiche ha bisogno di visualizzare con disegni ciò che ha davanti, per lei né i calcoli né l'uso del computer né costruzioni varie hanno alcun interesse. Così lavora sempre in gruppo con due bambine - Serena e Gianna - che hanno all'incirca il suo stesso stile: disegnano e disegnano, immettendo sempre i personaggi delle storie, finché non si precisano i termini della questione che hanno davanti. Il mio intervento è suggerire 'forme' di disegno, per così dire, più organizzato: isolare un insieme, aggiungere delle etichette, usare dei simboli.

Mario e Nuccio invece parlano: è un dialogo fatto di domande e risposte – e non metterebbero mai niente sul foglio. Vengono a dirmi “Noi abbiamo pensato che Paperina ha ragione” – che è la soluzione giusta del problema. Ma se chiedo loro perché e in qual modo sono arrivati a quella conclusione non sanno spiegarlo. Se li invito ad argomentare sul foglio sono in enorme imbarazzo e finiscono per rinfacciarsi la soluzione: “Tu hai detto...” “No, io ho detto che...” “Allora tu hai fatto...” “No, io ho deciso...”. A un certo punto scrivono sul foglio una frase minima o un calcolo, lo cancellano, lo riscrivono facendo regolari errori di conteggio, ma quell'elemento, pur rappresentando solo la punta dell'iceberg, è sovente anche il punto focale del problema, appena intravisto, ma, probabilmente, compreso nella sua essenzialità. È sempre Nuccio a guidare i ragionamenti, ma è Mario a provarli con le sue obiezioni anche astruse o irrilevanti e poi a buttare sul foglio qualche segno, qualche simbolo, sempre prima cancellato e poi ripreso.

Mentre lavorano io annoto come procedono, quali strade (verbali e non verbali) intraprendono, quali ragionamenti mettono in campo. Spesso in passato li ho disorientati con le mie parole, con una mia richiesta di esplicitazione. Ora li ascolto produrre ragionamenti ingenui “Ma perché qui c'è la virgola?” “Non puoi mica aggiungere e neanche togliere...”; cercare ragioni anche extrascolastiche “Mio papà mi ha spiegato che quest'anno non ha avuto un guadagno, magari in questo problema è così”. Sono affabulatori che interpretano storie (dal loro punto di vista un po' insensate: a nessuno dei due piace molto la matematica!), ma non sono privi di logica e se lascio il tempo di procedere con i loro mezzi, li vedo arrivare a percepire e poi comprendere completamente le questioni. Inoltre, come tutti i bambini che parlano molto, leggono poco: a volte il mio intervento più efficace è rileggere il testo del problema con la giusta inflessione di voce e le punteggiature o, meglio ancora, sceneggiandolo. Gesti e parole riescono laddove spiegazioni e ragionamenti hanno spesso fallito.

Viceversa Antonio e Giulio pensano spesso in termini di tabelle e grafici: attraverso veloci proiezioni mentali cercano di organizzare ogni informazione in tal modo, sfruttando Excel e le calcoline. Anche Ludovico e Alberto hanno modalità di pensiero astratto: condensano in formule semplici e stringate intere procedure svolte mentalmente, di cui però faticano a render conto, proprio perché basate in gran parte sull'intuizione del momento. A questi allievi devo semplicemente fornire qualche termine più appropriato, porre qualche domanda interlocutoria che li inviti a controllare le procedure e sviluppare argomentazioni sensate e complete.

Altri allievi, per esempio Silvia, Roberta e Renzo organizzano delle costruzioni, a volte anche per rappresentare teatralmente la scena, più spesso per figurarsi le soluzioni e

⁶⁹ I nomi degli allievi sono di fantasia.

vagliare il grado di sensatezza (“Non può venire così grande, allora sarà sbagliato”). A questi allievi chiedo solo di soffermarsi maggiormente sulle procedure, di controllarne l'esattezza in modo da poterle poi rendere chiare e comprensibili a tutti. Mi soffermo di più su aspetti di metacognizione.

Al termine del lavoro, sintetici resoconti finali mettono in campo tutte le soluzioni trovate, assicurando i bambini sulla bontà dei loro sforzi e sul fatto che non ci sia a priori una procedura inadatta.

Per me, un simile modo di procedere ha significato lasciare uno ‘spazio vuoto’ all'interno della mia programmazione: non so come procederà una certa lezione, che evoluzione avrà una certa situazione problematica e soprattutto quanto tempo richiederà, pur sapendo dove devo arrivare. In compenso ora ho la consapevolezza che l'uso di differenti modalità non conduce al caos, ma arricchisce il sapere di un senso più ampio.

Maggior fiducia nelle capacità dei bambini. Nella normale prassi scolastica creavo inevitabilmente delle scale di valutazione delle capacità intellettive dei bambini: c'era chi velocemente capiva, c'era chi aveva bisogno di brevi spiegazioni o solo d'incoraggiamenti, c'era chi inevitabilmente recepiva solo il 50/60% di ciò che veniva affrontato⁷⁰. Da questi ultimi allievi non mi aspettavo risultati diversi: pur dedicando loro quantitativamente più tempo, ero rassegnata perché credevo di aver fatto tutto il possibile e sapevo di non poter forzare oltre. Il lavoro di ricerca mi ha fatto capire che forse, nel loro caso, si trattava solo di performance non adeguate a fronte di stimoli limitati e che, se offrivamo loro la possibilità di usare registri alternativi a quello linguistico, qualcuno poteva trovare un canale migliore di comunicazione e comprensione. Da qui la maggior fiducia nelle possibilità dei bambini e il minor scoraggiamento di fronte a quelli che sembrano degli insuccessi.

Esemplare il caso di Alessia, una bambina molto silenziosa, forse un po' troppo coccolata dalla famiglia, essendo l'ultima di quattro figli, e per di più con un'irregolare frequenza scolastica. Alessia non dimostrava interesse per l'apprendimento matematico e imparava con fatica anche le più semplici nozioni. Non mi sembrava incapace, ma i risultati dei primi due anni di scuola sfioravano appena la sufficienza e io, in qualche modo, incolpavo lei di ciò.

Nella seconda parte della classe terza e quest'anno, in quarta, ho provato a mandarle messaggi differenti: la consultavo su ogni affermazione per avere la certezza che comprendesse le parole che usavo, mostravo di tenere in gran conto anche le frasi minime che pronunciava, portavo spesso ad esempio i suoi timidi gesti e la facevo lavorare solo con compagni non prevaricanti, ma attenti e pazienti. Il suo atteggiamento è pian piano cambiato: ha cominciato a mettere in mostra, specialmente nelle situazioni problematiche, una buona logica e strategie d'apprendimento lente ma efficaci, fondate sulla memorizzazione delle esperienze più significative - “Ho pensato agli altri problemi di Nonna Paperà” - e su procedure ormai 'arcaiche' per la classe (quali ad esempio una pagina di addizioni ripetute e poi in margine, quasi distrattamente, la moltiplicazione), ma che in qualche modo riassumevano tutto il percorso fin lì faticosamente svolto.

Ciò che in ogni modo ho potuto capire è come il linguaggio verbale, per questa bambina, non fosse adeguato agli scopi della comunicazione, essendo costituito solo di brevi e stentate frasi minime attraverso le quali non trasmetteva interamente il suo pensiero. Adesso il linguaggio è usato come supporto ai gesti, che, pur essendo semplici, risultano

⁷⁰ Il dato è suffragato da dati statistici abbastanza rigorosi, ricavati da 20/25 prove di verifica per ogni quadrimestre.

molto più esplicativi: “Non so come si dice... ecco, lo metti giù... lo metti giù..., lo metti giù...” – e visualizza con il gesto della mano il numero sempre più piccolo sulla linea ($0,01 - 0,001 - 0,0001$, ecc.) che si produce nel problema ‘Vince il più piccolo’. Alessia si schernisce ancora quando la invito a riprodurre i suoi gesti, magari chiedendole di mostrarli ai compagni - “Beh, ho fatto così..” - ma ha acquistato fiducia nelle sue capacità (ed io con lei!) e non rifiuta più di cimentarsi e provare.

Uso più disinvolto di tutti i registri semiotici. L’ultimo cambiamento che ho percepito tra un ‘prima’ e un ‘dopo’ - il lavoro di ricerca condotto con il Nucleo - è come io abbia usato con molta più frequenza e disinvoltura i vari registri semiotici introducendo nuove procedure didattiche.

Non sono mai stata un’insegnante ‘seduta alla cattedra’ avendo realizzato per anni attività di laboratorio a ‘classi aperte’⁷¹, però mi rendo conto di aver sempre privilegiato il registro linguistico. Il lavoro di ricerca invece mi ha fatto comprendere che utilizzando anche altri registri è possibile attivare nuove strategie e ottenere risposte più adeguate. In altri termini, sapere che per l’apprendimento della matematica i gesti sono importanti tanto quanto le parole e i simboli, mi ha permesso di usare deliberatamente e quantitativamente in modo più massiccio, tali risorse, assecondando anche un po’ la mia naturale tendenza alla drammatizzazione teatrale.

Ecco allora che ho riempito la matematica di personaggi: dal mitico draghetto cinese della classe prima siamo approdati poi al signor Pallino, al commerciante Corrado, alla giornalista Paola, ad Archimede Pitagorico e alla famiglia Rossetti, interpretandoli e facendoli interpretare dai bambini. Le ‘lezioni’ non sono più oasi di tranquillità, ma spazi di creazione, con tutti in movimento e intenti a fare; solo dopo una fase ‘attiva’, che conduce alla soluzione di un problema e alla scoperta di nuovi saperi matematici, possiamo concludere a tavolino col classico “...e adesso proviamo a mettere per scritto tutto questo, affinché non vada dimenticato”.

Racconti, cronologie, riassunti, schemi, tabelle, grafici, disegni, cartelloni, il ‘Magazzino del Matematico’⁷², tutto concorre a legare insieme i fili del sapere in costruzione. Ma è soprattutto il corpo che è diventato più presente: a esso pongo sempre più attenzione, anche tenendo sempre a portata di mano una macchina fotografica per cogliere al volo gesti, espressioni, azioni che altrimenti andrebbero inevitabilmente confusi e perduti.

Lo studio, durato due anni, di ciò che è avvenuto durante la soluzione della situazione problematica inclusa nell’attività ‘Quanto è grande 1000’, mi ha fatto comprendere come nei processi d’insegnamento - apprendimento esistano fenomeni molto più complessi e ampi di quanto immaginassi o almeno di quanto normalmente fossi in grado di percepire. In particolare ho capito che questi processi non si sviluppano magicamente, attraverso strade misteriose e perciò incontrollate. Al contrario è possibile indirizzarli, coadiuvarli, per esempio attraverso giochi semiotici ben mirati, e soprattutto è possibile favorirne l’evoluzione utilizzando tutti i registri semiotici a disposizione. È probabile che in questo modo un numero sempre maggiore di allievi possa capire la matematica.

In sintesi:

⁷¹ Per ‘classi aperte’ si intende un’organizzazione del lavoro scolastico che prevede momenti di lavoro con gruppi misti di alunni di classi diverse.

⁷² Il ‘Magazzino del Matematico’ è una scatola che contiene tutti gli ‘attrezzi’ del matematico: i numeri, i segni delle operazioni e tutti i simboli che giorno per giorno si scoprono in classe facendo matematica.

- l'osservazione della gestualità apre 'nuove finestre';
- lo strumento 'video' rivela che non basta 'avere l'intenzione' perché qualcosa avvenga.

Concretamente si è prodotta:

- meno preoccupazione per i tempi (della scuola) e quindi più rispetto dei tempi degli allievi;
- maggior fiducia nei bambini e nei loro modi di procedere (non sono incapaci se non scrivono; possono parlare e capire attraverso altre modalità);
- maggior fiducia nella teatralità/gestualità: i vari registri, integrati fra di loro, permettono di veicolare meglio le conoscenze.

Conclusione: ho capito che ci sono più stelle di quelle che si vedono, o, fuor di metafora, più processi di quanti se ne percepiscano ordinariamente.

Bibliografia IV parte

Brousseau, G., (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, La Pensée Sauvage

Brousseau, G., (2000). *Elementi per una ingegneria didattica*. Bologna, Pitagora Editrice

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical problem-solving*. New York, Academic Press.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York, MacMillan.

Skemp, R.R. (1976). *Relational Understanding and Instrumental Understanding*. First published in *Mathematics Teaching*, 77, 20–26

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer Verlag Italia

ALLEGATO 2

Riportiamo un esempio di attività di formazione del *Progetto Quarini*.

Le attività: gli insegnanti

Il percorso didattico (Robutti, 2010; Bonicatti et al., 2010) si è articolato in attività che, a partire da riflessioni metacognitive sugli oggetti matematici (Zan, 2007), hanno proposto varie situazioni problematiche volte all'esplorazione di successioni e alla costruzioni di significati e di processi risolutivi per le equazioni, in una progressiva sequenza da un approccio numerico a uno più simbolico, tramite successive generalizzazioni. Tale scelta si

colloca nella letteratura internazionale come *early algebra* ed è condivisa da un'ampia comunità di ricercatori (Malara et al., 2004; 2006; Kieran, 2004), nonché proposta nella proposta curricolare UMI-SIS Matematica 2001 (Anichini et al., 2003).

Tali attività, discusse tra i laureandi e la sottoscritta, condivise con i docenti della scuola, sono state oggetto di attenta programmazione nel piano di lavoro delle classi, tramite riunioni dei docenti e forum di discussione a distanza.

Un esempio: Seconda attività

L'attività qui di seguito presentata riguarda le successioni ed è stata svolta utilizzando la metodologia del lavoro a gruppi per incentivare il *collaborative learning*. I ragazzi sono, infatti, stati divisi in gruppi di tre-quattro componenti. Ogni insegnante ha scelto autonomamente la formazione dei gruppi (eterogenei o omogenei).

L'obiettivo dell'attività era: analizzare una sequenza di numeri e determinare il successivo, spiegando la legge sottostante. Inizialmente sono state proposte in classe delle successioni non numeriche, ma solo simboliche (figure geometriche realizzate con stuzzicadenti, decorazioni di pallini o quadratini, ...). A ciascun gruppo è stata consegnata una scheda ed è stato chiesto agli alunni di rispondere ai quesiti proposti, cercando di riflettere insieme e di collaborare per la risoluzione del problema. Nella scheda distribuita abbiamo riportato i primi tre termini di una successione grafica, e le richieste di disegnare e indicare la composizione, prima delle figure numero quattro e cinque, poi della figura dieci e infine della figura cento. A proposito della figura cento, era richiesto di spiegare verbalmente (e poi per scritto) la procedura utilizzata per il calcolo del numero di palline. In questo modo, si volevano abituare gli studenti a giustificare i ragionamenti, ma soprattutto permettere loro di giungere alla generalizzazione della procedura legando posto della successione e numero di palline mediante la formula richiesta dall'ultima domanda. Questa attività è stata pensata per aiutare gli studenti ad affrontare alcuni degli ostacoli cognitivi che sorgono affrontando la generalità.

Osserva queste decorazioni di palline.



Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3

1. Qual è la figura numero 4? Disegnala nel posto mancante.
2. E la quinta figura? Disegnala e scrivi da quante palline è composta.
3. La decima figura da quante palline è composta?
4. E la centesima figura da quante palline è composta? Spiega a parole come hai fatto a determinarla.
5. Ora indica con n una figura qualunque e scrivi una formula che esprima il numero di palline da cui è composta la figura n .

Di seguito tre interventi nel forum: il primo della laureanda che fa un bilancio sulla sperimentazione dell'attività, gli altri due delle docenti che l'hanno attuata in classe.

Venerdì abbiamo svolto l'attività sulle successioni nelle due classi di Riva. I ragazzi sono stati divisi in gruppi di 3-4 persone e hanno lavorato a gruppi sulla scheda, ho visto una buona interazione tra i ragazzi.

In 1A ho filmato un gruppo solo, quello medio-alto (formato da 4 ragazzi molto svegli, ma forse un po' "scolastici"), hanno discusso e lavorato bene insieme ma non sono arrivati alla formulazione della soluzione $2n+1$. Vi è però arrivato un altro gruppo, purtroppo non ho potuto riprendere il momento della formulazione originale, ma hanno poi spiegato a tutti i compagni come erano arrivati a quel risultato e come avevano ragionato. Lo scoglio più grande che ho potuto notare è il passaggio dalla ricerca del numero di palline nella figura *tot* (numero) alla figura generica. Tutti sono stati in grado di determinare il numero di palline nella figura di posto 100, ma poi non sono riusciti ad andare oltre. Alcuni sono stati fuorvianti dall'espressione *figura qualunque* (pensando di dover trovare una figura diversa da quelle della successione).

In 1B il gruppo che inizialmente avevo filmato (eterogeneo, formato da 3 studenti, due ragazzi molto bravi ma individualisti a mio avviso, e una ragazzina non molto amante della materia e un po' demotivata anche solo a provare a ragionare) non si è rivelato una buona scelta; infatti erano intimoriti e disturbati dalla telecamera (uno continuava a salutare) e volevano mettersi in mostra prevaricando la ragazzina. Viste queste reazioni ho iniziato a filmare anche un altro gruppo, formato da tre ragazze che hanno discusso costruttivamente, arrivando a scrivere la formula per un numero particolare ma non riuscendo a generalizzarla. Ha stupito osservare come anche i ragazzini che spesso mostrano delle difficoltà, se inseriti in un gruppo omogeneo, magari non arrivano alla formalizzazione ultima, ma comprendono e fanno loro ciò che "scoprono" nell'attività, anzi hanno piacere di spiegare come hanno ragionato e perché hanno concluso una data cosa.

Nel complesso mi posso dire molto soddisfatta di come è stata svolta l'attività.

Cara Elisa,

nel formare i gruppi avevo pensato di formarli abbastanza omogenei, per quanto li conosco io in questo momento, in modo che tutti all'interno del proprio gruppo potessero esprimersi e dare il proprio contributo. Penso che gruppi omogenei possano dare migliori risultati perché tutti devono sforzarsi in ugual misura. Anche se alcuni non sono arrivati alla sintesi finale con la formula.

Carissima Elisa,

come vedi ho impiegato un po' di tempo a risponderti, ma eccomi!!! Per quanto riguarda la prima attività sulle successioni condivido che il gruppo da te ripreso fosse un po' scolastico, tuttavia tutti i ragazzi della classe come avrai potuto constatare sono molto rispettosi nei confronti dei compagni e tutti ascoltano gli interventi degli altri senza commentare negativamente. I gruppi formati erano abbastanza omogenei, questo per permettere a tutti i componenti di intervenire. Come giustamente hai osservato il punto più critico è sicuramente quello conclusivo vale a dire trovare la formulazione della soluzione, mi sembra però che nell'ultimo incontro di venerdì 31 ottobre la stessa domanda abbia creato meno difficoltà, difatti alcuni gruppetti ci sono arrivati. F. per la seconda volta ha trovato la soluzione, non solo ma questa volta senza conoscere i monomi ha operato con i monomi: $kx^2 + (k-2)$, dimenticavo siccome la volta successiva c'era la lettera n e questa volta la lettera K questo forse li ha un po' spiazzati. Vediamo come risolvono la scheda di compito.

Da questi interventi si nota che non solo la piattaforma ha offerto l'occasione per programmare le attività, ma anche per fare discussioni di bilancio come quella presente qui sopra, per riflettere sulla somministrazione della proposta di lavoro, sulla sua realizzazione e sulle modalità di osservazione della medesima. L'intreccio di opinioni visibili anche a soggetti non direttamente coinvolti offre suggerimenti agli stessi per replicare l'esperienza anche in tempi, luoghi e modalità differenti.

Le attività: gli studenti

Ora qui di seguito si osservano le reazioni degli studenti all'attività scelta e descritta nel paragrafo precedente.

Alla fase del lavoro di gruppo è seguita una discussione di istituzionalizzazione in classe in cui l'insegnante ha raccolto le diverse soluzioni e si sono condivise quelle corrette.

In un primo momento i ragazzi hanno attuato quella che Radford (2008) chiama *generalizzazione aritmetica*, riconoscendo il carattere iterativo della successione. In un secondo momento invece, la *generalizzazione algebrica* della successione ha portato gli allievi a scrivere la formula che lega il termine della successione al posto.

Ed ecco in figura le risposte date da due gruppi di allievi per quanto riguarda la formulazione della legge che lega il numero della figura al numero di pallini.

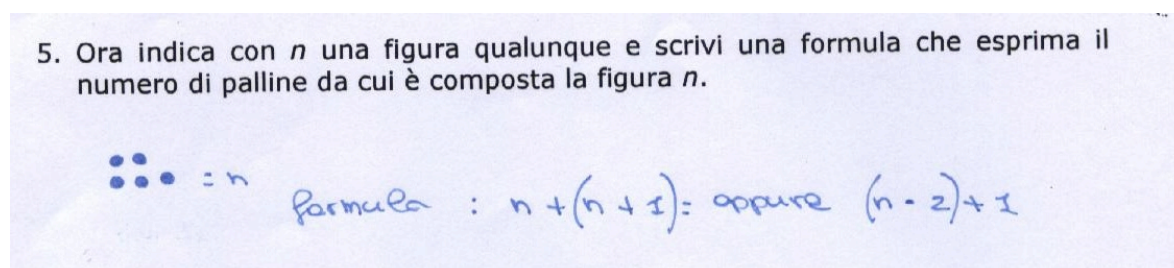


FIGURA N. : PALLINE SOPRA = AL N. FIGURA.

PALLINE SOTTO = AL N. FIGURA + 1

PALL. TOT. : AL N. FIGURA $\times 2 + 1$ $(N \times 2) + 1$

Figura 4: risposte alla domanda sulla generalizzazione

Successivamente è stata utilizzata la piattaforma Moodle (in modalità Forum) per proporre agli studenti altre successioni da analizzare, ed è poi stato chiesto loro di inventarne di proprie, e di proporle ai compagni, affinché le analizzassero e le risolvessero. Questa attività di invenzione è stata pensata per incentivare l'interesse dei ragazzi verso questo argomento, sviluppare la creatività e verificare l'acquisizione delle competenze. I ragazzi hanno proposto le successioni utilizzando la piattaforma Moodle sia in modalità Forum, sia usando la funzione Compito, che permette di consegnare elaborati tramite la piattaforma. Le successioni inventate sono state raccolte e utilizzate per creare un "archivio" di successioni da custodire in classe e presentare in occasione della settimana della scienza che la scuola organizza ogni anno.

L'attività delle successioni ha consentito ai ragazzi di risolvere con successo alcuni item tratti dalla prova Invalsi dell'Esame di Stato. Aver svolto attività volte alla generalizzazione ha permesso agli studenti di argomentare in maniera puntuale le risposte fornite.

ALLEGATO 3

Il diario di bordo del progetto m@t.abel.

PON Formazione Matematica

Anno scolastico 2009/2010

DIARIO DI BORDO

Titolo attività

Docente

Nome della scuola

Tipo di Scuola

Classe coinvolta

Data inizio esperienza ...

Data fine esperienza ...

N° ore di sperimentazione in classe ...

N° ore di impegno personale al di fuori dell'orario di lezione ...

DESCRIZIONE DELL'ESPERIENZA

Descrivere dal punto di vista operativo l'esperienza svolta in classe (il contesto della classe, gli eventuali adattamenti necessari, ...) e la metodologia usata (schede di lavoro, lavoro di gruppo, discussione matematica in classe, software utilizzato...)

Eventualmente allegare

ORGANIZZAZIONE DEL LAVORO

Lavoro di gruppo	Si	No
Gruppi omogenei	Si	No
Numero di studenti per gruppo		
Coinvolta l'intera classe	Si	No
Sono stati realizzati collegamenti trasversali con altre discipline/docenti	Si	No
Se Sì, Quali?		

COMPORTAMENTO DEGLI STUDENTI

Descrivere come l'attività è stata accolta dagli studenti e il modo in cui hanno assolto al loro compito.

Descrivere il clima di lavoro

Sono state evidenziate differenze di atteggiamento tra

- studenti e studenti, quali:
- studenti e docente, quali

<u>APPENDIMENTO: SUCCESSI E DIFFICOLTÀ</u>	
Rilevare i risultati positivi e le difficoltà incontrate dagli studenti nella comprensione dei vari concetti matematici e le metodologie di superamento	
	Commenti ai risultati:
Risultati <u>positivi</u> dal punto di vista <u>motivazionale</u> (atteggiamento/interesse/impegno)	
Risultati <u>positivi</u> dal punto di vista <u>cognitivo</u> (incremento del livello degli apprendimenti)	
	Metodologie di superamento
Difficoltà dal punto di vista <u>motivazionale</u> (atteggiamento/interesse/impegno)	
Difficoltà dal punto di vista <u>cognitivo</u> (incremento del livello degli apprendimenti)	

DIFFICOLTA ORGANIZZATIVE

Descrivere le difficoltà organizzative incontrate nelle attività di svolgimento dell'esperienza

Difficoltà	Strategie di superamento

VALUTAZIONE

Quali prove di verifica sono state somministrate? Riportare e commentare le prove di verifica proposte e i relativi risultati.

Eventualmente allegare materiali

L'unità di lavoro proposta ha permesso di effettuare una efficace

azione di recupero per gli studenti in difficoltà.

Si

No

Come:

L'unità di lavoro proposta ha permesso di effettuare una efficace

azione di stimolo per gli studenti più brillanti.

Si

No

Come:

Facendo riferimento all'esperienza relativa a questa Unità di Lavoro, rilevi dei cambiamenti nella tua impostazione didattica, nel tuo atteggiamento verso la disciplina, rispetto alla precedente pratica di insegnamento?

Quali ritieni essere i più significativi?

SUGGERIMENTI

Alla luce dell'esperienza effettuata, hai suggerimenti, considerazioni, materiali, ...da fornire per permettere a questa Unità di Lavoro di sempre meglio rispondere alle varie utilizzazioni che i tuoi colleghi potranno farne? (Eventualmente allegare materiali)

Eventualmente allegare materiali

GRAZIE

Parte II: dai fatti alle interpretazioni.

La seconda parte del seminario è dedicata all'interpretazione dei "fatti" presentati nella prima parte (capitoli 2 e 3) ed è suddiviso in quattro capitoli: 4, 5, 6, 7.

Nel capitolo 4 si introduce un quadro teorico atto a interpretare le pratiche didattiche illustrate nei tre esempi del capitolo 3 (MO1, MO2, TO) in un contesto generale, che precisi sia le loro componenti comuni, esterne ed interne, sia la dialettica tra queste.

Nei successivi capitoli 5 e 6 si ritornerà agli esempi per illustrare concretamente il significato delle categorie interpretative qui introdotte.

Infine nel capitolo 7, si amplierà ulteriormente il quadro introdotto nel capitolo 4 e si collocheranno sia gli eventi elencati nel capitolo 2 (Il filo della storia), sia gli esempi con l'interpretazione loro data nel capitolo 4, all'interno di una cornice interpretativa, che cattura il senso socio-culturale delle pratiche, delle riflessioni e dei risultati prodotti in questi ultimi decenni dalla nostra comunità di ricercatori come intellettuali.

8. La trasposizione meta-didattica: componenti interne ed esterne delle pratiche didattiche e relative dinamiche.

In questo capitolo introdurremo un quadro interpretativo che permetterà di leggere in modo compatto e unitario *le pratiche e le riflessioni teoriche riguardanti la formazione degli insegnanti* (PRARIFOR), illustrate nel cap. 3⁷³. Precisamente, a partire della cosiddetta Teoria Antropologica della Didattica della matematica (TAD) elaborata da Chevallard (1999) e precisata da altri allievi e studiosi (Chevallard Y., Bosch M., Gascón J., 1997; Godino J. D., Batanero C., 1998; D'Amore, B. & Godino, J. D., 2006; Bosch, M., 2000; si veda l'Allegato al fondo del capitolo), introdurremo la nozione di *Trasposizione meta-didattica* come costrutto dinamico essenziale per descrivere tutti i principali fenomeni che troviamo nei tre esempi (e possibilmente anche in altre attività di formazione insegnanti di altre sedi). Basandoci su questo costrutto, distingueremo le componenti esterne ed interne nei processi di formazione degli insegnanti e descriveremo la dialettica che ne risulta, all'origine delle dinamiche riscontrate nei processi di trasposizione meta-didattica.

Elencheremo per punti i concetti che mutueremo dalla TAD, giustificheremo via via il loro uso nel nostro quadro teorico, che introdurremo proprio in questo modo (parti in corsivo). Citeremo per questo stralci presi da Godino & D'Amore (2006).

L'ipotesi fondamentale da cui muoviamo è di usare il quadro della TAD per descrivere le PRARIFOR.

Giustificazione: *le ricerche di Ball e Bass (e altri), cui si è fatto riferimento nel capitolo 1, permettono, infatti, di definire, sia pure in modo statico, una conoscenza matematica specifica per*

⁷³Come già ricordato nel cap.1, indichiamo con PRARIDID la *Ricerca didattica per l'innovazione*, descritta secondo il quadro del '91; essa è esattamente il tipo di ricerca che facevamo negli anni '80 e nei primi anni '90. Successivamente essa si è evoluta, in base a una serie di concause analizzate nel cap. 7, ed è diventata la PRARIFOR, cui appartengono gli esempi del cap. 3. In questo capitolo analizzeremo la PRARIFOR inquadrandola in un paradigma che supera, integrandolo, quello della Ricerca didattica per l'innovazione. Nel cap. 7 amplieremo ulteriormente l'analisi e vedremo la PRARIFOR come *Ricerca didattica di innovazione nelle Istituzioni*.

l'insegnamento, la MKT, che è oggetto di studio e di pratiche appunto nelle PRARIFOR e quindi è un'attività matematica specifica (come le ricerche in matematica applicata: l'esempio è di Bass). Di qui la possibilità di applicare il modello TAD.

1. La TAD si centra quasi esclusivamente sulla **dimensione istituzionale della conoscenza matematica**: «la TAD pone l'attività matematica, e dunque l'attività di studio in matematica, nell'insieme delle attività umane e delle istituzioni sociali» (Chevallard, 1999).

Esattamente in questo senso noi considereremo le PRARIFOR, come attività meta-matematica che riguarda la matematica per l'insegnamento. È evidente il loro situarsi nel contesto delle istituzioni sociali (comunità di ricerca, scuole, Ministero, Associazioni, ...).

2. Un **oggetto matematico** è «un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici: registro orale, delle parole o delle espressioni pronunciate; registro gestuale; dominio delle iscrizioni, ovvero ciò che si scrive o si disegna (grafici, formule, calcoli,...), vale a dire, registro della scrittura»; essendo il “praxema” un oggetto materiale legato alla prassi, l'oggetto è allora un «emergente da un sistema di praxema» (Chevallard, 1991, p. 8).

Nel nostro caso gli oggetti meta-matematici che emergono dai sistemi di “praxema” propri delle PRARIFOR costituiscono ad esempio l'insieme dei costrutti in $M-CA_{CE}$, $SCKc$, il semiotic bundle e altri che vedremo sotto.

3. Negli oggetti matematici secondo la TAD sono centrali **la persona o l'istituzione, che si mette in relazione all'oggetto**, e non l'oggetto in sé: «Un oggetto esiste dal momento in cui una persona X (o una istituzione I) riconosce questo oggetto come esistente (per essa). Più esattamente, si dirà che l'oggetto O esiste per X (rispettivamente per I) se esiste un oggetto, rappresentato da $R(X,O)$ (rispettivamente $R(I,O)$) e detto relazione personale da X ad O (rispettivamente relazione istituzionale da I ad O)» (Chevallard, 1992, p. 9).

Nel nostro caso, gli oggetti che considereremo sono essenzialmente legati a due tipi di istituzioni (secondo la terminologia di Chevallard): le comunità di indagine⁷⁴ e le comunità degli insegnanti partecipanti ai vari progetti di formazione come comunità di pratica⁷⁵ in formazione/evoluzione, che sono in relazione istituzionale con la scuola in senso ampio (la scuola in cui insegnano e hanno insegnato, la Scuola come istituzione generale con i suoi programmi, la sua tradizione di insegnamento, i manuali, ecc.)

4. **Praxeologie.**

Le praxeologie sono così descritte dai loro cultori:

The ATD proposes a general epistemological model of mathematical knowledge, conceived as a human activity. The main theoretical tool is the notion of praxeology (or mathematical organization) that is structured in two levels:

- *The praxis or “know how”, which includes different kinds of problems to be studied as well as techniques available to solve them.*
- *The logos or “knowledge”, which includes the “discourses” that describe, explain and justify the techniques used and even produce new techniques. This is called technology in its etymological sense of “discourse (logos) on the technique (technè)”. The formal argument which justifies such technology is called theory. It is conceived as a second level of description-explanation-justification.*

(García, Gascón, Ruiz Higuera, & Bosch, 2006. Sottolineature nostre).

Si distinguono due livelli di praxeologie:

Praxeologia matematica (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997): sistemi di pratiche che una istituzione considera appropriati per risolvere (un tipo di) compiti [Godino & Batanero (1994)

⁷⁴Vedi cap. 3, contributo di MO2.

⁷⁵Vedi cap. 3, contributo di MO2.

parlano del significato istituzionale di un oggetto matematico]. Se si adotta una epistemologia di tipo pragmatista, le praxeologie sono i significati degli oggetti matematici (teorie, contenuti o organizzazioni matematiche).

Praxeologia didattica (Chevallard, 1999): coincide con la praxeologia matematica ma la componente praxemica fa riferimento ai compiti dell'insegnante e dell'allievo, tecniche di studio ecc.; contiene riferimenti problematici al linguaggio specifico che si instaura tra insegnante e allievo e a quell'oggetto che si chiama "traiettoria didattica" (progettazione didattica) nella quale assume significato specifico il tempo durante il quale si evolve, in virtù dei feed-back che si hanno nello svolgimento delle attività progettate.

La nozione di praxeologia è divenuta, nel tempo, una delle nozioni di base della teoria antropologica. Entriamo maggiormente nel merito, seguendo Chevallard (1999, pp. 224-229).

Sia T un tipo di compiti o di problemi; a T risultano legati:

- una tecnica: τ
- una tecnologia di τ : θ
- una teoria di θ : Θ .

Si chiama praxeologia puntuale la quaterna: $[T/\tau/\theta/\Theta]$; puntuale sta per specifica, cioè indica che si tratta di una praxeologia relativa ad un certo tipo dato di problemi, T ; si può anche denominare organizzazione praxeologica.

In una praxeologia puntuale possiamo distinguere:

- un blocco pratico-tecnico: $[T/\tau]$: il "saper fare"
- un blocco tecnologico-teorico: $[\theta/\Theta]$: il "sapere".

Spesso si usa designare come "sapere" la praxeologia puntuale completa $[T/\tau/\theta/\Theta]$; ma questo va pensato come una metonimia e addirittura una sineddoche, in quanto in tale terminologia emerge una implicita tendenza a dare minore importanza al saper fare.

In TAD si considera infine la praxeologia matematica globale, estensione della praxeologia matematica puntuale a tutti i tipi T possibili di problemi, con le variazioni che ne conseguono.

*Noi faremo riferimento alle **praxeologie meta-didattiche**, intese come praxeologie globali⁷⁶: si riferiscono alle pratiche e alle riflessioni su queste che nei vari progetti sono utilizzate per "formare" gli insegnanti in conformità a un certo quadro teorico. Le praxeologie meta-didattiche comprendono le forme di interazione con gli insegnanti da formare e una "traiettoria meta-didattica", cioè il progetto di formazione nella sua evoluzione temporale. Le praxeologie meta-didattiche sono quindi quelle che abbiamo chiamato PRARIFOR (pratiche e riflessioni teoriche riguardanti la formazione degli insegnanti), analizzate secondo il quadro della TAD. Esse ovviamente sono generate dalla riflessione della comunità di indagine sulle praxeologie didattiche progettate/praticate precedentemente dalla stessa comunità o discusse nella letteratura.*

Le praxeologie didattiche rispetto a quelle meta-didattiche sono caratterizzate da un diverso tipo T di compiti e di problemi che affrontano: quelli delle praxeologie didattiche riguardano la modellizzazione dell'apprendimento-insegnamento della matematica o di suoi specifici ambiti, mentre quelli delle praxeologie meta-didattiche riguardano la modellizzazione della formazione degli insegnanti. Pertanto tecniche, tecnologie e teorie sono ben distinte nelle due. Più precisamente, nelle praxeologie meta-didattiche il blocco pratico-tecnico si riferisce alle pratiche sviluppate all'interno della comunità di indagine per la gestione della formazione degli insegnanti (ad esempio la pratica delle trascrizioni multicommentate di MO2, le attività di laboratorio e le pratiche del diario di bordo negli esempi di MO1 o in $m@t.abel$); il blocco tecnologico-teorico si riferisce all'elaborazione teorica sulle pratiche adottate (il loro significato nel progetto di formazione: ad esempio l'elaborazione teorica di MO2 sull'uso, il significato e gli obiettivi formativi che risultano dall'uso delle trascrizioni multicommentate nel loro progetto;

⁷⁶L'obiettivo del nostro studio è di studiare le PRARIFOR come praxeologie globali; per arrivarci siamo partiti dalle praxeologie relative ai tre esempi del cap. 3.

analogamente per i report finali⁷⁷ per MOI e in m@t.abel).

5. Dalla trasposizione didattica a quella meta-didattica.

5.1 La matematica “vive” in diverse istituzioni, in genere a intersezione non vuota (diverse comunità di ricerca dei matematici, dei ricercatori in didattica della matematica, scuole, associazioni, industrie). Ciascuna di queste istituzioni costituisce una “nicchia ecologica” in cui vivono tipologie particolari di pratiche e conoscenze matematiche. In tali nicchie si ha una diversità di fonti, di modi di controllo ed i meccanismi di crescita delle pratiche e delle conoscenze, i cui rapporti reciproci è importante studiare (un esempio molto dettagliato e documentato di lavoro in questo senso per la matematica nei luoghi di lavoro è il libro di C.Hoyles, R.Noss, P.Kent, e A.Bakker, 2010).

Tipicamente TAD ha considerato la differenza tra i “contratti istituzionali” dentro i quali si inseriscono da un lato la conoscenza e le pratiche nella ricerca matematica (dei ricercatori professionisti) e dall’altro le conoscenze e le pratiche del mondo della Scuola. Tale differenza determina due atteggiamenti completamente diversi, da parte del ricercatore, dell’insegnante e dello studente che apprende.

Noi qui consideriamo la differenza tra i “contratti istituzionali” dentro i quali si inseriscono da un lato le pratiche e le conoscenze proprie delle comunità di ricerca didattica⁷⁸ e dall’altro pratiche e conoscenze proprie di una comunità composita (in prima istanza supposta omogenea) degli insegnanti cui si rivolgono le iniziative di formazione, che sono definite dalla cornice istituzionale in cui gli insegnanti operano (scuole, programmi, libri di testo, percorsi di formazione, ecc.).

5.2 La trasposizione didattica è il meccanismo mediante il quale si converte l’una conoscenza (il cosiddetto “sapere sapiente”) nell’altra (“sapere insegnato”).

Come sottolineano D’Amore e Godino riprendendo Sierpinska e Lerman (1996), il punto di vista antropologico e l’interazionismo (Bauersfeld, 1994) condividono alcuni punti di vista:

- entrambi vedono l’educazione da prospettive sociali e culturali;
- entrambi danno priorità ai processi di creazione di “dominii di consenso” o di accordo, interpretati come meccanismi che danno conto della relativa stabilità delle culture, nei quali certi elementi della cultura si convertono in “accettati come condivisi” o “che si impongono da sé, trasparenti”.

Entrambi i punti di vista sono interessati a certi meccanismi di cambio. Gli interazionisti sono interessati a guardare l’insegnamento e l’apprendimento ad un livello micro -da dentro l’aula- ed attribuiscono un compito importante ai contributi individuali degli insegnanti e degli studenti: la nozione di “riflessività” e di “emergenza” danno conto del cambio delle culture della classe. Per Chevallard, che studia “i sistemi didattici” ad un livello macro, la fonte di cambio sta nel lavoro della “noosfera”⁽⁷⁹⁾ o nell’interfaccia tra le scuole e la società nel suo insieme, dove si concepiscono l’organizzazione, i contenuti ed il funzionamento del processo cognitivo.

*Noi considereremo il meccanismo mediante il quale, con i vari progetti di formazione le praxeologie proprie della comunità di ricerca sono trasposte alle comunità degli insegnanti, quali appartenenti alla istituzione scuola, incidendo quindi nella loro professionalità. Siccome l’oggetto primo della trasposizione sono le praxeologie relative all’insegnamento-apprendimento della matematica (praxeologie meta-didattiche), parleremo di **trasposizione meta-didattica**. Si ha quindi uno slittamento dal “sapere sapiente” alle conoscenze matematiche e pedagogiche necessarie per l’insegnamento⁸⁰, che diventa oggetto della trasposizione meta-didattica. Gli esempi che abbiamo visto considerano sia gli aspetti micro sia quelli macro, secondo le esigenze. Anche noi terremo*

⁷⁷I report finali del progetto MMLab-ER hanno come finalità la divulgazione dei risultati delle sperimentazioni in particolare si differenziano dai diari di bordo, oltre che per la finalità, per le riflessioni dell’insegnante sull’esperienza.

⁷⁸Si tratta di qualcosa di molto simile alla MTK definita da Ball & Bass: si veda la discussione sotto.

⁷⁹The term noosphere denotes the interface between didactic systems stricto sensu, and the outside world. The noosphere involves all those having curricular responsibilities, the authors of textbooks and didactic material, the members of educational commissions and association. Artigue, M. & Houdement, N. 2007, Note 10, p. 372. Quindi la noosfera si occupa della “manipolazione” della conoscenza, d’accordo con le priorità che emergono nella società in un dato momento.

⁸⁰ Si veda la nota 1 e la discussione sotto sulle MKT.

presenti entrambe le prospettive. Nel capitolo 7 affronteremo la prospettiva macro considerando l'evoluzione storica di una componente della noosfera, cioè della comunità dei ricercatori in didattica della matematica quali intellettuali.

6. Brokering. Per entrare più in profondità nel meccanismo della *trasposizione meta-didattica* troviamo utile rifarsi alla nozione di “brokering” (mediazione), un meccanismo che riguarda il grado di contiguità tra comunità. Per esempio, nelle attività didattiche in classe si possono avere i seguenti tre tipi di comunità: la più ampia comunità matematica (che elabora il “sapere sapiente”), la comunità locale costituita dalla classe, e le comunità ancora più piccole costituite dai gruppi di studenti che hanno risolto insieme un certo problema. Un *broker* è colui che ha lo stato di appartenenza a più di una comunità. Nell'esempio della classe, il ruolo di broker può essere assunto dall'insegnante (che fa parte in modo essenziale della comunità di docenti della scuola specifica; della comunità dei docenti di matematica della scuola, e può esserne anche il coordinatore; in modo periferico, della comunità dei matematici; in modo più centrale, di quella della classe; in modo più periferico, di quella dei gruppi di studenti), ma anche alcuni allievi (che fanno parte della classe, ma anche di un gruppetto di lavoro). Se leggiamo la seguente descrizione del ruolo di brokers data da Rasmussen, Zandieh & Wawro (2009), potremmo parafrasarla per descrivere la formazione insegnanti attraverso i vari progetti (ad esempio attraverso le comunità di pratica che si costituiscono in tutti i nostri esempi):

“Brokers are unique in that they are “able to make new connections across communities of practice, enable coordination, and – if they are good brokers – open new possibilities for meaning” (p.109). Wenger also argues that the job of brokering requires the ability to “cause learning” by introducing into community elements of practice from different community (p.109). For example, the teacher as broker might introduce formal terminology from the discipline of mathematics into the classroom community. On the other hand, particular students who are adept at certain forms of activity make up a classroom mathematics practice might act as a broker to facilitate others in the class as they move from periphery to more central participants in this practice. This latter example is brokering between different communities within the same classroom. In other words, learning is evidenced by the initiation and evolution of classroom mathematics practices, and it is towards this end that we now turn” (Rasmussen, Zandieh & Wawro (2009).

Considerando le attività di formazione insegnanti nei vari esempi, ritroviamo in modo quasi pervasivo il ruolo di *broker*, come illustreremo nel capitolo 5.

Nell'azione di brokering assume rilevanza la nozione di **oggetto di confine**: “boundary objects are those objects that both inhabit several communities of practice and satisfy the informational requirements of each of them” (Bowker & Star, 1999: 297; Lee, 2007). Si ottiene un oggetto di confine ad esempio quando il *broker* considera un oggetto facente parte della comunità di indagine e lo porta al confine della comunità di pratica dei docenti in formazione per favorirne la trasposizione o viceversa considera un oggetto emergente nella comunità di pratica e lo porta al confine verso la comunità di indagine per tentarne un'analisi alla luce delle pratiche e teorie di questa. Dagli oggetti di confine, il *broker* intraprende poi il “boundary crossing”. Ad esempio, nel caso delle domande chiave di MO1, si ha la produzione di un “oggetto di confine”: il *broker* “spinge” verso la devoluzione ai corsisti di una pratica didattica fondamentale per il progetto, cioè porta l'oggetto oltre il confine. La nozione di oggetto di confine assume connotazioni particolarmente interessanti quando si intreccia con le TIC: nel libro di Hoyles ed altri (citato a pag. 3), vi è un'ampia discussione che porta alla definizione dei “technological enhanced boundary objects”⁸¹: essi sono presenti negli esempi di Torino in cui è coinvolta la piattaforma di e-learning.

⁸¹TEBOs are software tools that adapt or extend symbolic artefacts identified from existing work practice, that are intended to act as boundary objects, for the purposes of employees' learning and enhancing workplace communication. A key characteristic of a TEBO is that it involves symbolic information, typically a graph, a model expressed in algebraic symbols, or even a single numerical measure. In all the cases the meanings of the symbolic information are rendered more visible and manipulable, and therefore more accessible, by the use of interactive software tools. (Hoyles

Muovendo dall'adattamento e integrazione di questi elementi teorici, si possono schematicamente descrivere i progetti per la formazione degli insegnanti esaminati, secondo questa dinamica:

- All'interno di una comunità di indagine si elabora una **praxeologia didattica P_{R0}** (praxeologie didattiche dei ricercatori allo stadio iniziale del processo), vale a dire un sistema collegato, coerente e teoricamente stabile di tecniche, tecnologie e teorie concernenti l'apprendimento-insegnamento della matematica. P_{R0} è basata sulle ricerche per l'innovazione fatte nella comunità di indagine, dalla definizione, uso e integrazione di vari costrutti teorici per descrivere i processi di insegnamento-apprendimento della matematica (ad esempio, la mediazione semiotica in MO1, il semiotic-bundle in TO, la definizione precisa degli stili di insegnante in MO2, ecc.) e per affrontare la formazione degli insegnanti. Tale praxeologia è stata definita in vario modo all'interno delle comunità di indagine considerate (ad esempio, $M-CA_{CE}$, SCK_c) e all'esterno nella letteratura internazionale (ad esempio la MKT di Ball e Bass, che però è una fotografia statica di un processo dinamico: si veda la discussione successiva).
- Dall'interazione tra P_{R0} e le praxeologie didattiche delle comunità degli insegnanti da formare, indichiamole con p_{I0} (I per insegnanti) si elabora un processo di trasposizione meta-didattica, che ha una sua traiettoria e sviluppo (illustrato dai progetti di formazione degli esempi MO1, MO2 e TO). La trasposizione è centrata su specifiche azioni di "brokering" tra la comunità di indagine e quella di pratica: ad esempio, l'apprendistato cognitivo (MO2), i passi del "corso di formazione" descritto in MO1, l'apprendimento "blended" tramite piattaforma e incontri in presenza dei progetti m@t.abel, DIFIMA e Quarini. Essi utilizzano via via opportuni "oggetti di confine" per realizzare le azioni di brokering e produrre la devoluzione di P_{R0} all'interno della comunità di pratica in evoluzione. Detto in altre parole: la trasposizione meta-didattica è il fenomeno di passaggio mentre il brokering è ciò che rende possibile, fa accadere, questo passaggio.
- Nel corso del processo di formazione tende a costituirsi una comunità di indagine (costituita da ricercatori ed insegnanti), che viene a possedere una sua propria praxeologia meta-didattica P_1 , originata dall'interazione più o meno conflittuale con le praxeologie didattiche di partenza possedute dagli insegnanti da formare all'inizio del processo (p_{I0}) e più o meno vicina alla praxeologia "ideale" (P_{R0}), la cui acquisizione è l'obiettivo ideale del corso di formazione.
- La comunità di indagine, cui ora partecipano, a livelli vari di integrazione, anche componenti che provengono dalla comunità di pratica del corso di formazione, riflette sul processo di trasposizione meta-didattica avvenuto, non solo per definire una migliore traiettoria didattica per il futuro, ma anche per rivedere e integrare P_{R0} , alla luce delle esperienze fatte (ad esempio l'attuale formulazione articolata del gioco semiotico di TO è frutto di una rielaborazione di questo tipo). Si ottiene così eventualmente un'evoluzione di P_{R0} , che indicheremo con P_{R0}^+ .
- Anche le praxeologie didattiche degli insegnanti possono evolvere per effetto della trasposizione meta-didattica: indicheremo con p_{I1} la conseguente evoluzione di p_{I0} .

Il processo è illustrato nelle Figure 4.1 e 4.2.

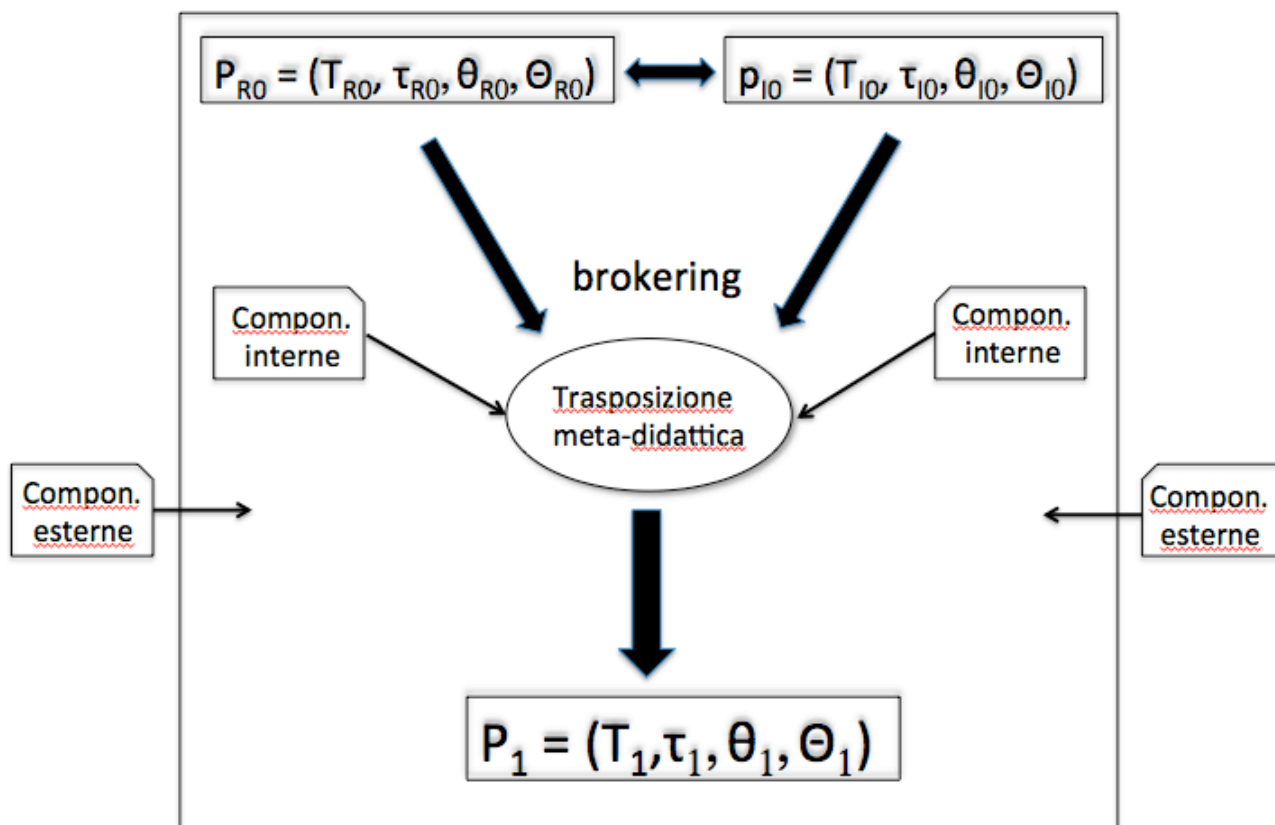


Figura 4.1. Il processo di trasposizione meta-didattica

Nel processo di *trasposizione meta-didattica* esaminato concorrono due tipi di **componenti**, che chiamiamo **interne** ed **esterne**. Sono componenti interne gran parte delle tecniche, tecnologie e teorie che hanno prodotto P_{R0} . Viceversa sono componenti esterne le praxeologie proprie delle istituzioni da cui provengono gli insegnanti da formare (vedi sopra), che abbiamo indicato complessivamente con p_{I0} . Naturalmente di solito l'intersezione non è vuota; a volte però le due comunità possono usare la stessa parola per indicare concetti o processi non identici e da qui possono muovere interessanti azioni di "brokering" (spesso improvvisate "on the spot" dal broker di turno, mentore, ricercatore o meno che sia).

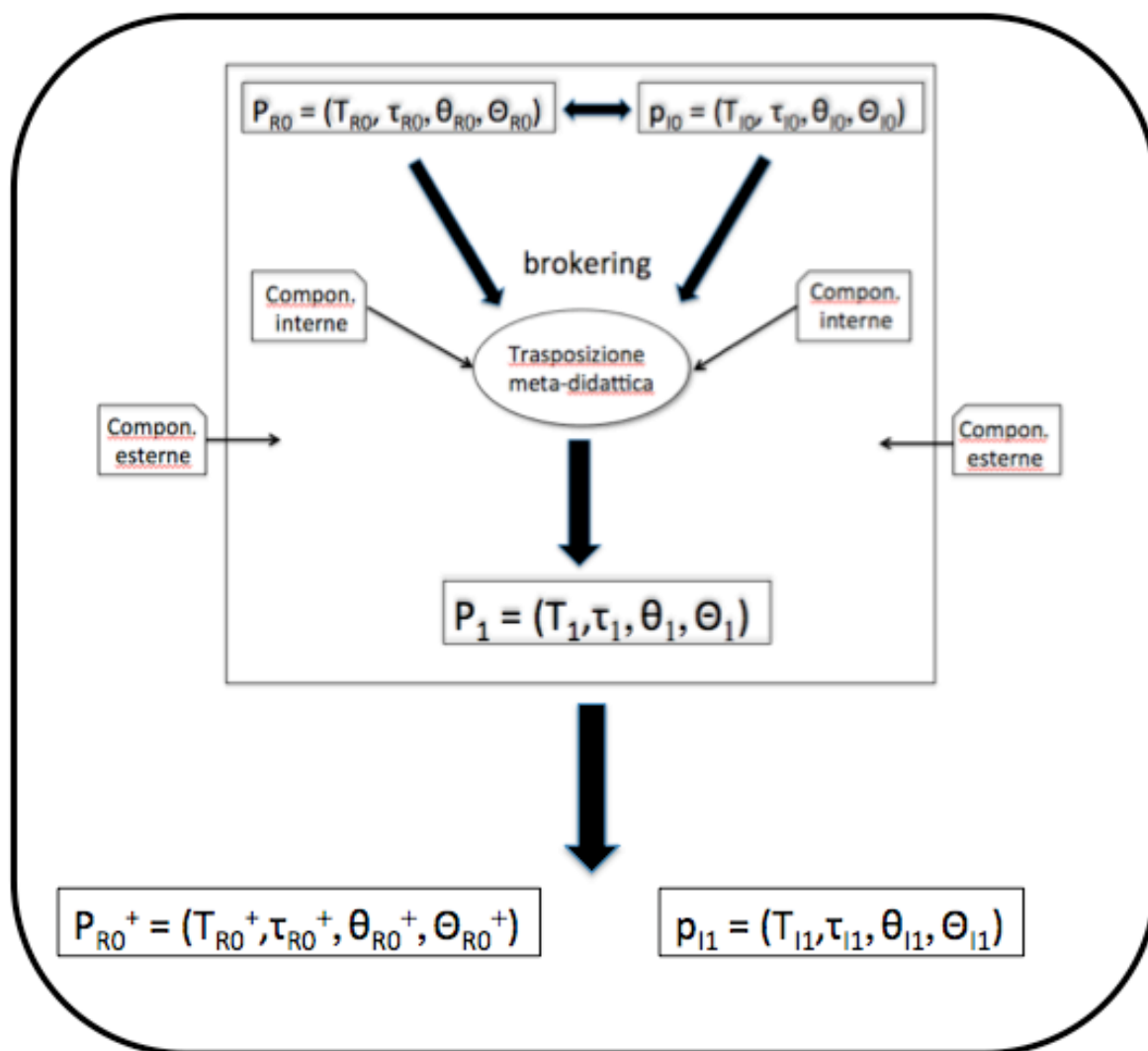


Figura 4.2 Riflessione della Comunità di indagine sulla trasposizione meta-didattica e praxeologie degli insegnanti per effetto delle attività di formazione

Al fine di evitare equivoci, si chiarisce che la distinzione interno/esterno è unicamente relativa al processo di trasposizione meta-didattica considerato e non è assoluto. In altre parole, la comunità di indagine che ha elaborato P_{R0} , ha certamente usato costrutti provenienti dalla letteratura (ad esempio, l'apprendistato cognitivo in MO2) oltre a costrutti elaborati dalla comunità stessa; ma nel momento in cui essi entrano a far parte di P_{R0} , costituiscono per ciò stesso una componente interna. Viceversa le praxeologie p_{I0} , proprie delle istituzioni da cui provengono gli insegnanti da formare (vedi sopra), costituiscono l'ambiente in cui si sviluppa la traiettoria della trasposizione meta-didattica. Tipicamente nel suo sviluppo si incontrano ostacoli di varia natura, originati spesso proprio dalle praxeologie pregresse dei docenti in formazione (ovvero anche da "errori" di progettazione).

Ovviamente vi è una dialettica tra le due componenti, alla base del processo dinamico che costituisce la trasposizione meta-didattica e che fa passare da (P_{R0}, p_{I0}) a (P_{R0}^+, P_1, p_{I1}) . Il processo può continuare con nuove trasposizioni meta-didattiche, come sarà illustrato nel capitolo 5.

È proprio la natura dinamica di questo processo che costituisce una caratteristica fondamentale dei progetti di formazione considerati. In questo senso riteniamo che la nostra interpretazione aggiunga qualcosa alla pur fondamentale definizione di MKT data da Ball & Bass.

Il loro lavoro costituisce un'elaborazione su un periodo lungo di tempo di una p_{I0} , che viene considerata criticamente alla luce delle conoscenze teoriche dei ricercatori per giungere a una

formulazione il più possibile ampia e generale di una MKT, che è quindi in qualche modo confrontabile con il nostro P_{R0} . Nel nostro caso c'è una teoria (Θ), mentre in Ball et al., si rimane prevalentemente al livello delle tecnologie (θ). La dimensione teorica invece per noi è una componente fondamentale, proveniente dal paradigma della ricerca per l'innovazione (filone D) e in generale dalla nostra tradizione culturale. Inoltre, al di là delle possibili assenze di componenti rilevanti in MKT (per esempio le CAC di Boero & Guala, 2008), la differenza sostanziale col modello nostro è che P_1 risulta come effetto di una trasposizione meta-didattica effettiva, nella quale P_{R0} si incontra (e scontra) concretamente con p_{I0} . L'elaborazione di Ball e Bass, invece è più il risultato di un'analisi di una realtà effettuale, analoga al nostro p_{I0} , su cui si è esercitata a posteriori un'analisi critica. Diventa così più simile al nostro P_{R0} ; tuttavia, mancando le relazioni dinamiche di cui sopra, non diventa P_1 . In questo senso è forse più generale, ma certo più ideale e astratta e meno realistica. È come se le mancasse un confronto dialettico con la realtà effettuale per verificare come l'analisi critica effettuata su p_{I0} possa effettivamente incidere su tale realtà.

Troviamo che il nostro quadro sia molto simile a quello usato da J. Adler & D. Huillet (in Sullivan & Wood, cit., pp. 195-222) per descrivere delle esperienze di formazione in Sud Africa: ivi l'intreccio dialettico tra componenti interne ed esterne risulta particolarmente evidente. Non a caso gli autori usano il quadro della TAD per descriverlo. Altri ricercatori che sentono il bisogno di integrare il quadro MKT con un quadro analogo alla TAD sono J. Godino e C. Batanero, che usano il cosiddetto "approccio ontosemiotico"⁸²: (Godino, J., Batanero, C. & Font, 2007).

I progetti di formazione insegnanti possono quindi essere descritti come un processo di *trasposizione meta-didattica* tra due comunità, la prima di indagine, la seconda di pratica; la trasposizione meta-didattica converte una coppia di praxeologie iniziali $\langle P_{R0}, p_{I0} \rangle$ in una terna di praxeologie $\langle P_{R0}^+, P_1, p_{I1} \rangle$ prodotte in momenti successivi.

Un'ulteriore immagine che può aiutarci a comprendere la natura della trasposizione meta-didattica e a chiarire le sue funzioni che rendono più specifico, operativo e concreto il quadro MKT è la seguente. In quasi tutti gli esempi, sia pure con modalità e nomi diversi, si affronta il problema della *trasposizione didattica* come *mediazione semiotica*, cioè come attivazione di pratiche che tendono a produrre la transizione dai *sensi personali* che gli allievi attribuiscono ai segni (in un senso lato del termine) cui sono esposti nelle situazioni didattiche proposte al *significato istituzionale* di questi. Il gioco semiotico di TO, la mediazione semiotica di MO1, l'apprendistato cognitivo di MO2, ecc. hanno esattamente questo obiettivo. I costrutti elaborati sono tipicamente il prodotto teorico socializzato nei corsi di formazione come strumento meta-didattico per fare comprendere il tipo di trasposizione didattica da attuarsi in classe per favorire questa transizione negli allievi. In altre parole si crea un *doppio livello di dicotomie*:

- a) una prima dicotomia è a *livello didattico* in classe: tra il senso personale attribuito dagli allievi alla situazione didattica cui sono esposti e il significato istituzionale che essa ha;
- b) la seconda dicotomia è a *livello meta-didattico*: tra l'interpretazione che gli insegnanti danno alla prima dicotomia (i loro "sensi personali" di tipo meta-didattico, frutto di p_{I0}) e il significato che secondo la comunità di indagine assume la dicotomia didattica in a) al fine di farne prendere atto alla comunità dei docenti da formare (l'analogo del "significato istituzionale", frutto di P_{R0}).

Gli insegnanti da formare si rendono conto della dicotomia didattica a) in virtù della situazione proposta nel corso di formazione: ad esempio, la visione di videoclip o protocolli scritti in cui si analizzano le attività semiotiche prodotte dagli allievi esposti a una certa situazione didattica (TO); la simulazione con le macchine fatta in MO1 in cui gli insegnanti risolvono il problema pensando

⁸²Scrive testualmente Patricia K. Konic nella sua tesi dottorale con J. Godino: "In tal senso la tipologia proposta dai suddetti ricercatori [Ball et al.] in se stessa non fornisce criteri dettagliati sui componenti di ogni tipo di conoscenza, condizione che abbiamo considerato basilare per far diventare operativo il nostro studio. Riteniamo che l'"Approccio Ontosemiotico" (AOS) della conoscenza e dell'istruzione matematica [...] dispone di strumenti teorici adeguati per fare un'interpretazione ed il dettaglio operativo delle suddette categorie". (Tesi, Univ. Granada, 2011, pp. 395-396).

più o meno implicitamente a come farebbero i loro allievi nella stessa situazione; l'analisi con i frames, il pensiero anticipatorio nella costruzione di dimostrazioni in ambito algebrico e l'analisi del ruolo dell'insegnante attraverso le lenti teoriche associate al costrutto M-CA_{CE} in MO2.

Tipicamente la seconda dicotomia (meta-didattica) nasce dal contrasto tra P_{R0} e p_{I0} : la prima dicotomia (didattica) genera cioè la seconda con un'opportuna "ingegneria meta-didattica" progettata dalla comunità di indagine. La trasposizione meta-didattica è il processo dinamico per effetto del quale la comunità dei docenti da formare, a partire dall'interpretazione della situazione proposta, col supporto della comunità di indagine giunge ad elaborare un insieme di tecniche, tecnologie e possibilmente teorie per risolvere il problema di quale trasposizione didattica sia opportuno progettare per produrre la transizione dei sensi personali degli allievi al significato istituzionale. La condivisione di tali praxeologie, frutto dell'interazione di P_{R0} con p_{I0} costituisce appunto la trasposizione meta-didattica, il cui prodotto è P_1 e successivamente P_{R0}^+ . Si hanno così i costrutti dei vari esempi: il semiotic bundle di TO si arricchisce della time-line; la mediazione semiotica che modella l'attività laboratoriale di MO1 con le macchine matematiche viene trasposta nella formazione degli insegnanti e allarga il suo spettro con la SCKc; i costrutti di partenza di MO2, dall'apprendistato cognitivo al noticing, alle Trascrizioni Multicommentate (MT), si arricchiscono con i vari profili di insegnante metacognitivo associati all'uso del costrutto M-CA_{CE} nella riflessione sulla propria pratica ($M_A M_C$, $M_A \rightarrow M_C$), ecc.

La doppia dicotomia costituisce un elemento di maggiore dinamicità nel modello della meta-trasposizione didattica rispetto alla trasposizione didattica della TAD. Quest'ultima è più statica: fotografa le relazioni intrinseche e funzionali delle praxeologie. La doppia dicotomia introduce una tensione fra i due livelli a cui esse vivono. È questa tensione che genera e supporta l'evoluzione delle relazioni tra le componenti delle praxeologie coinvolte nei processi di trasposizione meta-didattica. Si tratta infatti di un processo che si sviluppa nel tempo al variare delle relazioni tra le sue componenti (tecniche, tecnologie, teorie), ovvero di un flusso continuo di cui si possono descrivere degli stati significativi (ad esempio i nostri P_{R0} , P_{R0}^+ , ecc.: si veda il capitolo 5), con la consapevolezza che tale descrizione ha i limiti delle fotografie istantanee di un evento dinamico: la scelta di un punto di vista, della messa a fuoco, del momento in cui la fotografia è scattata, ecc.

Nel prossimo capitolo riprenderemo gli esempi del capitolo 3 per descriverli proprio come un flusso di praxeologie interrelate e in continua evoluzione. Risulterà che essi sostanzialmente sono esempi di un unico fenomeno, ma in fasi diverse di evoluzione. Il costrutto della trasposizione meta-didattica mette a fuoco in un unico quadro teorico i rapporti reciproci tra le varie praxeologie in essi presenti, nonché le modifiche e le integrazioni che tecniche, tecnologie e teorie subiscono via via nel concreto evolversi dei diversi progetti.

ALLEGATO

Chevallard, Y. (2007). *‘La théorie anthropologique des faits didactiques devant l’enseignement de l’altérité*

culturelle et linguistique. Le point de vue d'un outsider Conférence plénière donnée le 24 mars 2006 au colloque *Construction identitaire et altérité : Créations curriculaires et didactique des langues*, Université de Cergy-Pontoise, 24-25 mars 2006.

Published in: Aden, J. (Ed.), (2007). *Construction identitaire et altérité en didactique des langues* [e-book], Éditions Le Manuscrit, s.i.p.(leggibile ma non scaricabile in: http://www.amazon.com/Construction-identitaire-alt%C3%A9rit%C3%A9-didactique-ebook/dp/B005NJHG96#reader_B005NJHG96)

La théorie anthropologique du didactique repose sur un premier postulat selon lequel toute activité humaine se laisse analyser en structures d'action que je nomme des types de tâches. Le mot « type » est ici essentiel : ce qui permet de nous entendre, même grossièrement, sur le contenu d'une activité humaine, individuelle ou collective, au sein d'une société donnée, ou, au moins, au sein d'une institution donnée de cette société, c'est que nous partageons un certain répertoire de types de tâches. Que fait-elle ?, demandera-t-on. « Elle est en train de calculer le prix hors TVA. » Que fait-il ?, demandera-t-on encore. « Il demande à la dame où se trouve le cinéma. » Le premier exemple impressionne peut-être certains d'entre vous : on connaît un prix TVA incluse, disons un prix de 45 €, et on veut connaître le prix avant l'ajout de la TVA. Rechercher ce prix consiste à effectuer une certaine tâche, une tâche d'un certain type – qui est, en l'espèce, essentiellement mathématique. Demander à la dame que l'on a arrêtée dans la rue où se trouve le cinéma est une tâche essentiellement linguistique. Notez que répondre à quelqu'un qui vous demande son chemin est une tâche d'un autre type, et d'un type regardé, semble-t-il, comme sensiblement plus difficile à maîtriser. Plus difficile encore, bien sûr, est en général la tâche consistant à comprendre la réponse de la personne interrogée. Ces petites variations ont aussi pour objet de faire entendre un principe crucial : il n'est rien dans l'activité humaine qui ne se laisse décrire en termes de type de tâches. Se gratter l'oreille, se moucher, chanter à tue-tête « Capri, c'est fini », se hâter de rédiger la conclusion d'un devoir de français parce qu'il ne reste plus que deux minutes avant la fin de l'épreuve, serrer la main d'une connaissance que l'on croise dans une réunion mais avec qui l'on n'a guère envie de s'attarder, ôter son manteau, le poser sur une chaise, descendre d'un bus, chercher comment on pourrait dire en anglais « Longtemps, je me suis couché de bonne heure », vérifier dans les dictionnaires si le mot *mismidad* existe bien en espagnol, sont autant de tâches, subsumées sous autant de types de tâches.

Un deuxième principe sous-tend les exemples que j'ai évoqués : accomplir une tâche d'un certain type suppose une certaine manière de faire, une technique – tel est le mot utilisé. J'insiste là-dessus parce que ce principe, que l'on accepte facilement en certains cas, heurte le sentiment de naturel qui s'attache faussement à nombre d'activités dès lors qu'elles sont pour nous devenues routinières, voire automatiques, au point que nous n'y voyons plus l'accomplissement de tâches de types déterminés. L'enfant apprend à marcher : marcher est un type de tâches, et qui suppose une technique. Les techniques de marche sont diverses, selon les sociétés, les « genres », l'âge, la position sociale – ce que Marcel Mauss (1872-1950) a autrefois mis en évidence dans ses travaux sur les techniques du corps. Ainsi en va-t-il pour tout. Revoilà, troublante, l'altérité, la différence, là où l'on attendrait du même, de la répétition.

En mathématicien, j'use, pour désigner types de tâches et techniques, de ce que Lacan nommait des « petites lettres ». Je dirai donc : à tout type de tâches *T* est associée une technique *t*, qui permet d'accomplir les tâches de type *T*. Permettez-moi de prendre l'exemple pour moi le plus facile – et pour certains d'entre vous, peut-être, le plus exotique. Soit à calculer un prix hors TVA ; voici une manière de faire – une technique – à l'adresse d'un profane quasi complet en la matière :

Si la TVA est par exemple de 21 % (comme en Irlande), pour obtenir le prix hors TVA, divisez le prix TVA incluse par 1,21 (ce que vous pouvez faire à l'aide de votre téléphone portable). Vous obtiendrez ici 37,19008... : le prix hors TVA était donc de 37,19 €.

Si le taux est de 19,6 % (comme en France), divisez par 1,196. S'il est de 17,5 % (comme au Royaume-Uni), divisez par 1,175.

S'il s'agit d'un taux réduit, comme par exemple 7 % (en Allemagne) ou 5,5 % (en France), divisez de même par 1,07 ou 1,055.

Pourquoi faire ainsi ? Cette technique est-elle correcte ? Peut-on la justifier ? Une telle interrogation sur la technique conduit en principe à formuler un petit discours justificatif, que la théorie anthropologique désigne par la lettre grecque q et nomme une technologie – un discours raisonné (logos) sur la technique (technè). Pour le mathématicien, aucun doute n'est possible : classiquement, la technique proposée ici est justifiée par ce qu'on nomme une « démonstration », laquelle peut prendre par exemple la forme suivante (que vous devriez tous entendre, n'était la volatilité des connaissances scolaires, car il n'y est question que d'équations du premier degré, dont vous avez été rassasiés au collège et au-delà) :

Si p est le prix hors TVA, alors le prix TVA incluse est égal à $p + 21\% \text{ ' } p$, soit $p + 0,21 p$ ou $1,21 p$. Comme le prix TVA incluse est de 45 €, on a $1,21 p = 45$ et donc $p = 45 : 1,21 = 37,190082$.

Ce discours technologique ne se soutient pourtant pas de lui-même : il s'appuie sur un niveau supérieur de justification, qui est celui de la théorie – ici, de la théorie (mathématique) des nombres, qui justifie par exemple que l'on passe de l'équation $1,21 p = 45$ à l'égalité $p = 45 : 1,21$.

Mais je ne voudrais pas vous égarer avec ces questions de mathématiques : pour résumer, disons que l'analyse de l'activité humaine conduit à dégager des entités minimales, les praxéologies, qu'on peut désigner par la formule $[T / t / q / Q]$, parce qu'elles sont faites d'un type de tâches T , d'une technique t pour accomplir les tâches du type T , d'une technologie q qui justifie et rend intelligible la technique t , enfin d'une théorie, que l'on note usuellement Q , qui justifie et éclaire la technologie q , et permet même, en nombre de cas, de l'engendrer.

5.1 La trasposizione meta-didattica nel progetto regionale MMLab-ER (MO1)

In questo contributo vedremo come la trasposizione meta-didattica ha preso corpo nella formazione degli insegnanti del progetto MMLab-ER (presentato nel Cap.3.1) e come questo costruito ci consenta di interpretare quanto è avvenuto tra l'ideazione del corso di formazione, la formazione stessa, la sperimentazione dei docenti e la riflessione ulteriore sul percorso di formazione. Le praxeologie presentate saranno quindi descritte definendo le *praxis* in termini di *Task/Compiti* e *Tecniche*⁸³ e la conoscenza in termini di *Tecnologie* e *Teorie*⁸⁴ esplicitando il processo di trasposizione meta-didattica che si è svolto nel progetto MMLab-ER.

Il gruppo di ricerca del MMLab ha elaborato nel corso degli anni diverse praxeologie, $P_{R0,i}$, nate dall'intreccio e dall'evoluzione dinamica delle relazioni tra ricerca e didattica tipiche della ricerca per l'innovazione (vedere cap. 3.1). Nella costruzione del design della formazione sono state intrecciate due praxeologie che indicheremo con $P_{R0,1}$ e $P_{R0,2}$.

$P_{R0,1}$ ($T_{R0,1}$, $\tau_{R0,1}$, $\theta_{R0,1}$, $\Theta_{R0,1}$) è la praxeologia legata agli studi sulle attività di insegnamento-apprendimento della matematica che si avvalgono dell'uso delle macchine matematiche⁸⁵. Questa può essere così descritta:

- **Task /Compito** ($T_{R0,1}$): studiare le potenzialità delle attività di laboratorio con le macchine matematiche nell'insegnamento-apprendimento della matematica.
- **Tecnica** ($\tau_{R0,1}$): progettazione e analisi di attività che hanno coinvolto studenti di scuola primaria, secondaria e universitari (sessioni di laboratorio nel MMLab, sperimentazioni svolte nelle classi da insegnanti ricercatori); conduzione e analisi di interviste cliniche a studenti, insegnanti e ricercatori in matematica.
- **Tecnologia** ($\theta_{R0,1}$): idea di laboratorio di matematica (Curricoli UMI), i mediatori semiotici, gli schemi d'utilizzo delle macchine.
- **Teoria** ($\Theta_{R0,1}$): Mediazione semiotica e studi sui processi esplorativi delle macchine matematiche.

⁸³ "The *praxis* or "know how", which includes different *kinds of problems* to be studied as well as *techniques* available to solve them. (Garcia et al., 2006)

⁸⁴ The *logos* or "knowledge", which includes the "discourses" that describe, explain and justify the techniques used and even produce new techniques. This is called *technology* in its etymological sense of "discourse (logos) on the technique (technè)". The formal argument which justifies such technology is called theory. It is conceived as a second level of description-explanationjustification". (Garcia et al. 2006)

⁸⁵ Questa è una praxeologia globale perché è il risultato dell'intreccio di teorie, tecnologie e tecniche diverse.

Questa praxeologia è quella che costituisce il quadro di riferimento del Laboratorio delle Macchine Matematiche così come si è venuta configurando nel corso delle attività di ricerca del gruppo del MMLab sulle attività laboratoriali che si avvalgono dell'uso di strumenti: in particolare gli studi legati alla mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008) e gli studi sui processi cognitivi che si sviluppano durante l'esplorazione delle macchine matematiche (Martignone & Antonini, 2009).

$P_{R0,2}$ ($T_{R0,2}$, $\tau_{R0,2}$, $\theta_{R0,2}$, $\Theta_{R0,2}$) è la praxeologia che è alla base delle scelte fatte nella formazione degli insegnanti (che si fondano sugli studi di Boero & Guala (ACC), di Shulman (PCK) e di Watson & Sullivan (*Task for teachers*) e sull'esperienza del gruppo di ricerca del MMLab (vedere Cap 3.1).

$P_{R0,2}$ è così caratterizzata:

- **Task /Compito** ($T_{R0,2}$): individuare attività per sviluppare l'attenzione degli insegnanti verso i processi di esplorazione, produzione di congetture e costruzione di dimostrazioni nelle attività con le macchine matematiche.
- **Tecnica** ($\tau_{R0,2}$): analizzare come questi processi sono presenti nei curricula, nelle indicazioni nazionali e nelle prove PISA e Invalsi; selezionare macchine e gruppi di macchine in relazione a percorsi didattici possibili; costruire consegne aperte per insegnanti (ad esempio le quattro domande chiave, oppure l'analisi delle “radici matematiche” delle costruzioni con riga e compasso); analizzare sperimentazioni svolte in passato.
- **Tecnologia** ($\theta_{R0,2}$): Analisi culturale dei contenuti e studi sui processi in gioco.
- **Teoria** ($\Theta_{R0,2}$): Il costrutto di Shulman relativo alla Pedagogical Content Knowledge, le ricerche sulle consegne per gli insegnanti (*tasks for teachers*) che favoriscono il confronto e la riflessione degli insegnanti come professionisti.

Il progetto MMLab-ER, attraverso la collaborazione tra l'Università, la regione Emilia Romagna e i centri di documentazione del territorio, ha dato l'opportunità di diffondere su scala regionale i risultati della ricerca e le metodologie prodotti dal gruppo di ricerca del MMLab⁸⁶ e quindi le praxeologie sopra descritte. Gli insegnanti coinvolti nel progetto, nei due anni circa un centinaio, di ordini e indirizzi scolastici diversi, avevano naturalmente le loro praxeologie relative all'uso degli strumenti, all'idea di laboratorio e alle attività matematiche proposte (quelle che nel cap.4 sono indicate con p_{I0} (T_{I0} , τ_{I0} , θ_{I0} , Θ_{I0})) che diventa difficile descrivere perché diverse l'una dall'altra, ma nel corso di formazione sono entrate in contatto (un incontro-scontro in certi casi) con le praxeologie $P_{R0,1}$ e $P_{R0,2}$.

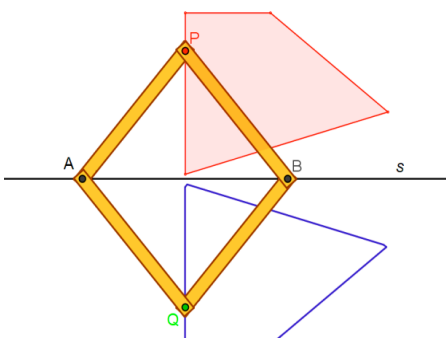
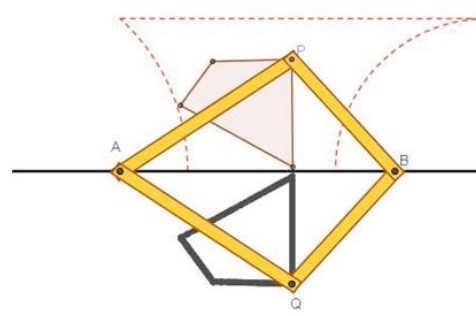
Durante il corso di formazione l'azione di *brokering* svolta dal formatore e dai tutor delle sperimentazioni ha fatto sì che si realizzasse un processo di trasposizione meta-didattica che ha portato alle praxeologie P_1 (T_1 , τ_1 , θ_1 , Θ_1) relative al corso di formazione del progetto MMLab-ER (l'istituzione verso cui avviene la trasposizione meta-didattica è il corso di formazione)⁸⁷. Dettagliamo le componenti di P_1 :

⁸⁶ Il progetto MMLab-ER “si è proposto fino dall'inizio di rispondere alle indicazioni e raccomandazioni nazionali e internazionali sull'idea di laboratorio di matematica, espandendo nella regione Emilia Romagna il modello originale elaborato a Modena” (Bartolini Bussi, 2010; p. 19).

⁸⁷ Come descritto nel cap 3.1, la traiettoria didattica seguita nel corso consiste nello svolgere attività laboratoriali con gli insegnanti e poi supportarli nella progettazione e analisi delle sperimentazioni nelle classi. Per far questo sono stati

- **Task/Compito (T_1)**: condividere con gli insegnanti l'idea di laboratorio con le macchine matematiche avendo come focus gli aspetti legati all'esplorazione, produzione di congetture e costruzione di dimostrazioni; favorire la creazione di una comunità di indagine.
- **Tecnica (τ_1)**: didattica laboratoriale (lavori a piccolo gruppo, discussioni ...), esplorazione delle macchine attraverso consegne per gli insegnanti (*tasks for teachers*) che conducono a una riflessione professionale sui compiti precedenti (teacher as a learner and as a professional), compilazione dei diari di bordo delle sperimentazioni.
- **Tecnologia (θ_1)**: idea di laboratorio di matematica, discussione matematica, aspetti epistemologici, didattici e cognitivi legati alle attività con le macchine matematiche, analisi culturale dei contenuti, studio dei processi di genesi di congetture e produzione di argomentazioni. Riflessione degli insegnanti nei report finali.
- **Teoria (Θ_1)**: Mediazione semiotica e studi di Mariotti, Boero e Garuti sulla dimostrazione.

Queste P_1 sono il risultato dell'incontro della "ricerca" ($P_{R0,1}$ e $P_{R0,2}$) con la "pratica" (p_{10}) degli insegnanti e hanno modificato in qualche modo sia l'una che l'altra attraverso il processo di trasposizione meta-didattica. Per fare un esempio, vedi Cap. 3.1, le domande chiave che guidano l'esplorazione della macchina (*Come è fatta? Cosa fa? Perché? Cosa succederebbe se?*) si sono reificate attraverso le proposte dei docenti del corso. In particolare le variazioni alla struttura delle macchine hanno portato alla costruzione virtuale di macchine nuove (rispetto a quelle esplorate concretamente). Ad esempio nel corso di Rimini alcuni insegnanti hanno generato e discusso diverse ipotesi di variazioni del pantografo per la simmetria assiale (Fig. 5.1 – a) , oltre a quelle previste dai formatori (*task for teachers*; Fig 5.1-b)⁸⁸ : sono emerse quindi ipotesi di variazione che hanno messo in atto attività di problem solving per gli insegnanti (*task of teachers* - vedi Fig.5.1 c-d-e).

 A	 B
<i>Task for teachers:</i> <i>Esplora la macchina? Come è fatta? Cosa fa?</i>	<i>Task for teachers:</i> <i>Cosa succederebbe se per costruire una macchina simile a quella della simmetria</i>

forniti diversi strumenti per la comunicazione e condivisione di risultati e riflessioni, come ad esempio griglie per la progettazione delle sperimentazioni, schemi di diari di bordo, piattaforme moodle, etc.

⁸⁸ Le variazioni previste al pantografo per la simmetria assiale riguardavano la modifica della figura mantenendo le condizioni necessarie per ottenere ancora la stessa trasformazione geometrica.

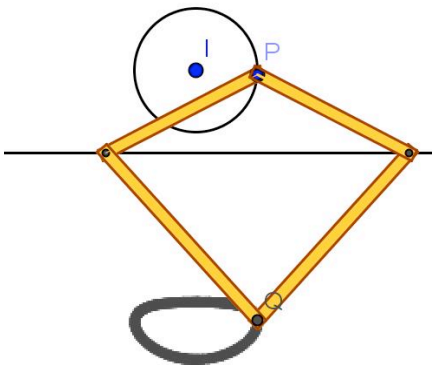
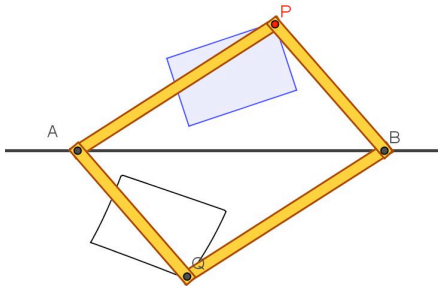
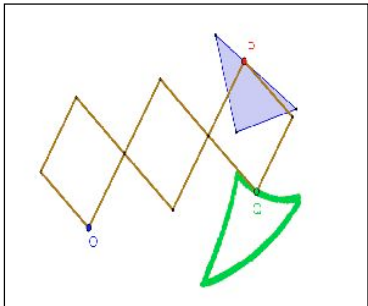
<i>Perché?</i>	<i>assiale invece di aste uguali avessimo a disposizione quattro aste uguali a due a due?</i>
 C	 d
Variazioni proposte dagli insegnanti (<i>Task of teachers</i>) <i>E se il deltoide fosse disposto in questo modo?</i>	Variazioni proposte dagli insegnanti (<i>Task of teachers</i>) <i>E se fosse un parallelogramma generico?</i>
 e	
Variazioni proposte dagli insegnanti (<i>Task of teachers</i>) <i>E se avessimo un sistema articolato formato da più rombi incernierati uno di seguito all'altro e fissati al piano in O?</i>	

Fig.5.1 Dalle task **for** teachers alle task **of** teachers

Gli insegnanti si sono messi in gioco costruendo consegne per se stessi, non necessariamente da utilizzare in classe, e formulano congetture relative alle trasformazioni che si possono ottenere con le variazioni, verificandole attraverso la costruzione “virtuale” delle macchine (usando GeoGebra) e identificando le funzioni implementate dalle nuove macchine.

Se quindi le prime due consegne fanno parte delle $P_{R0,i}$, quelle prodotte dagli insegnanti durante la formazione e discusse con i formatori e anche riprese nei diversi gruppi di formazione entrano a far parte di P_1 .

Lo sviluppo delle praxeologie coinvolte nel processo di trasposizione meta-didattica è influenzato da diverse componenti sia interne, sia esterne. Alcuni esempi di componenti esterne che hanno influito sull'elaborazione delle praxeologie coinvolte nel programma di formazione del progetto MMLab-ER sono: i costrutti teorici provenienti da altre ricerche (ad esempio la Specialised Content Knowledge di Ball & Bass); tecniche provenienti da altri progetti per la formazione insegnanti (ad esempio l'uso del diario di bordo seguendo le linee di quello m@t.abel); supporti per la comunicazione a distanza (come le piattaforme Moodle, Skype, e-mai, etc). Possiamo anche identificare esempi di componenti interne che si sono sviluppate verso l'esterno, ad esempio: le attività che gli insegnanti del progetto hanno creato nelle scuole degli coinvolgendo il collegio dei Docenti e/o organizzando mostre finali nelle scuole con le macchine costruite dagli studenti; il coinvolgimento dei docenti formati nella gestione dei laboratori che si sono approntati nei Centri di documentazione territoriali (questi laboratori provinciali per "vivere" hanno infatti bisogno di docenti che continuano sia le attività di formazione sia quelle di sperimentazione); le presentazioni dei risultati del progetto a convegni nazionali e internazionali ad opera di ricercatori ed insegnanti (PME e Education 2.0) e gli articoli e report di divulgazione e di ricerca sul progetto pubblicati su libri, riviste e on-line (<http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna/risultati-del-progetto.html> e vedere Allegati 3-4 (MO1)).

Tutte le attività sviluppate grazie al progetto MMLab-ER sono servite per implementare le praxeologie del gruppo di ricerca creando così ampliamenti e modifiche delle $P_{R0,i}$. Indichiamo con P_0^+ la praxeologia costruita quando, tra il primo e il secondo anno del progetto, dopo aver analizzato le attività svolte con gli insegnanti, il gruppo di ricerca ha modificato alcune **tecniche** (ad esempio ha scelto di dare più spazio ad alcune consegne eliminandone delle altre e introdotto nuove consegne elaborate con gli insegnanti nei corsi precedenti) e ha sviluppato gli **studi** per parlare degli aspetti cognitivi coinvolti durante le esplorazioni delle macchine (Antonini & Martignone, 2011).

Un ulteriore risultato del programma di formazione del MMLab-ER è rappresentato da ciò che avviene, e che sta ancora avvenendo, durante le sperimentazioni in classe: vengono elaborate nuove praxeologie da parte degli insegnanti che sperimentano a scuola (p_{11}). Queste praxeologie sono legate alla pratica degli insegnanti nelle loro classi e quindi vogliono rispondere a compiti legati all'insegnamento nella scuola a studenti: per questo soprattutto le variabili legate alle tecniche delle praxeologie del corso di formazione sono state modificate dagli insegnanti secondo obiettivi didattici e contesto di insegnamento (vedere report finali scritti dagli insegnanti⁸⁹: <http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna/risultati-del-progetto/report-delle-sperimentazioni.html>).

Nella Fig. 5.2 viene rappresentato, utilizzando il diagramma introdotto nel cap 4, questo primo passo del processo di trasposizione meta-didattica che si è realizzato durante il primo anno del programma di formazione del progetto MMLab-ER.

⁸⁹ Nell' allegato 2 (MO1) è riportato un esempio di Report finale scritto da Silvegni che collega le attività con le macchine a risorse presenti sul territorio (Mirabilandia Eurowhel). Ferretti (in Martignone (ed) , 2010) presenta attività che hanno anche previsto la ricostruzione delle macchine da parte degli studenti utilizzando materiali di risulta

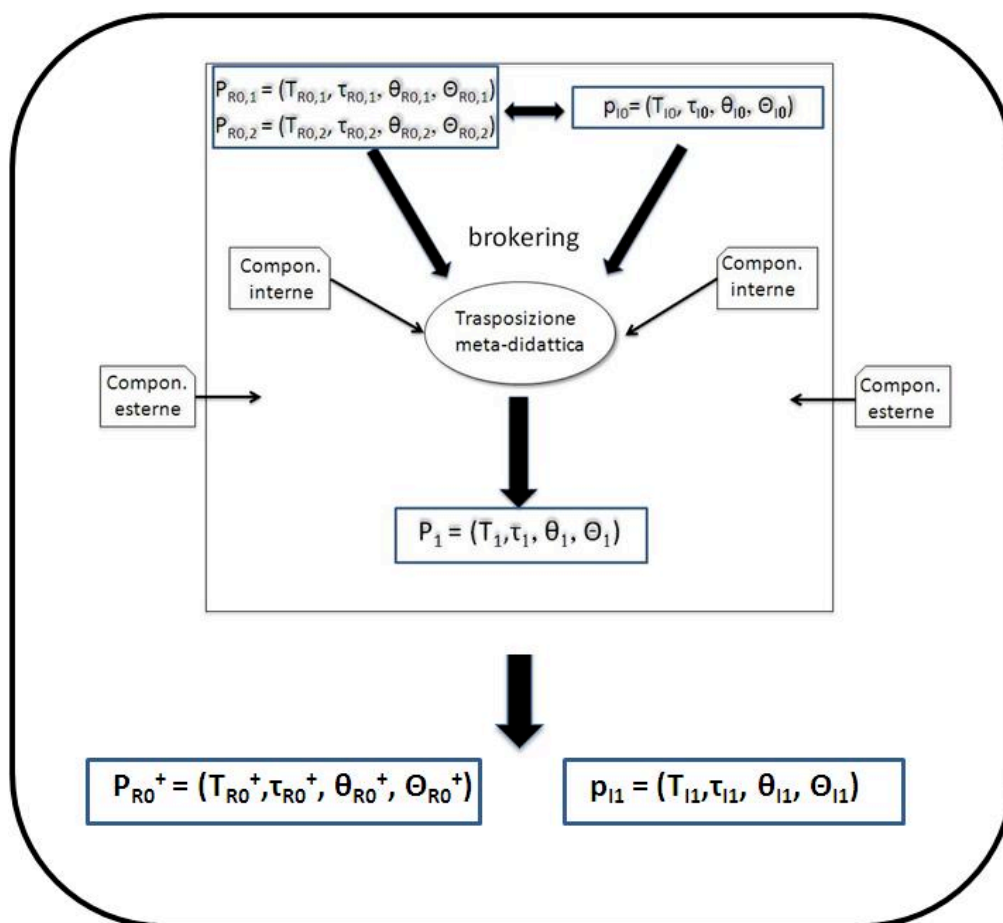


Fig. 5.2: Il processo di trasposizione meta-didattica in MMLab-ER

I risultati provenienti da questo primo anno sono stati il punto di partenza per il secondo anno del Progetto. Al termine del primo biennio (2008/10), il gruppo di ricerca ha interpretato le peculiarità del programma di formazione del progetto MMLab-ER confrontandosi con gli studi MKT di Ball & Bass: in particolare la ricerca di Garuti e Martignone ha portato all'elaborazione della nozione di *SCKc* (vedere capitolo 3.1) integrando così le componenti **teoriche** delle praxeologie P_{R0}^{+} e generando una praxeologia P_{R0}^{++} . Tale praxeologia è stata implementata ulteriormente anche nel blocco **pratico - tecnico**: infatti la possibilità di accedere alla documentazione delle sperimentazioni svolte dagli insegnanti ha dato la possibilità ai ricercatori di elaborare ulteriori nuove **tecniche** che sfruttassero questi materiali (ad esempio analisi di protocolli di studenti, discussioni sui report finali...). Identifichiamo quindi P_{R0}^{++} come:

Task/Compito (T_{R0}^{++}): Caratterizzare la conoscenza specialistica dell'insegnante che che si è voluta sviluppare attraverso il progetto MMLab-ER.

Tecnica (τ_{R0}^{++}): Analisi dei diari di bordo e dei report finali utilizzando il modello della MKT per individuare le componenti che intervengono nella Specilized Content Knowledge degli insegnanti del corso.

Tecnologia (θ_{R0}^{++}): Riflettere sulle somiglianze e differenze fra il modello della MKT e le attività matematiche (esplorazione, congetturare e dimostrare) svolte nel percorso di formazione alla luce

delle riflessioni degli insegnanti nella sperimentazione. Il diario di bordo e il report finale⁹⁰ sono elementi importanti utili per questa riflessione.

Teoria ($\Theta_{R_0,++}$): mediazione semiotica, analisi culturale dei contenuti, e nuovo costrutto teorico la SCKc (vedi Cap.3.1) che arricchisce la SCK con l'analisi culturale dei contenuti e la mette in relazione con la Pedagogical Content Knowledge (analisi dei processi degli studenti KCS, predisposizione di consegne adeguate per gli studenti KCT, scelta degli elementi significativi del curriculum di matematica KCC).

Le praxeologie elaborate nel corso del progetto MMLab-ER sono poi state messe in atto in altri progetti: come ad esempio nel progetto Mate-Laboratorio di Cremona e nei progetti portati avanti autonomamente nelle singole scuole o nei centri di documentazione da insegnanti formati nel progetto MMLab (per approfondimenti visitare la sezione del sito del MMLab dedicata agli sviluppi avvenuti dopo il primo biennio del progetto MMLab-ER: <http://www.mmlab.unimore.it/site/home/progetto-regionale-emilia-romagna/dopo-il-progetto-mmlab-er....html>).

Le diverse implementazioni delle praxeologie sono rappresentate secondo l'evoluzione temporale avvenuta mettendo in luce il processo e la concatenazione che le lega (figura 5.3).

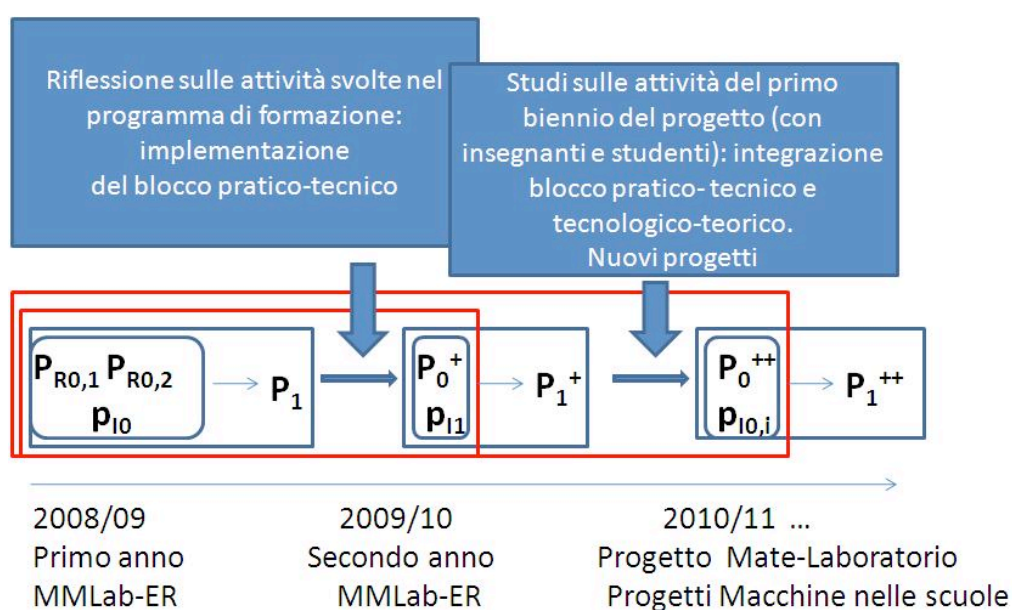


Fig. 5.3 L'evoluzione delle praxeologie nel tempo

⁹⁰ Il diario di bordo, mutuato da quello del progetto [m@t.abel](http://m@t.abel.it), è essenzialmente uno strumento del docente per descrivere e documentare le sperimentazioni in classe. Il report finale è redatto per la divulgazione del progetto e presenta, oltre ad aspetti di descrizione delle sperimentazioni, elementi di riflessione sui cambiamenti occorsi nella pratica didattica del docente (vedi Allegati (M01))

5.2 La trasposizione meta-didattica nella ricerca presentata da MO2

L'esempio da noi presentato nel capitolo 3 può essere interpretato nel quadro della trasposizione meta-didattica come evoluzione di diverse praxeologie relative a vari tipi di compiti rivolti all'analisi di processi di avvio all'uso del linguaggio algebrico come strumento di pensiero. Tali praxeologie sono caratterizzate dalla modifica dei ruoli di tecnica, tecnologia e teoria in relazione agli obiettivi dei diversi tipi di compito che ci siamo trovati ad affrontare.

Ad un primo livello possiamo considerare la praxeologia $P_{R0,1}(T_{R0,1}, \tau_{R0,1}, \theta_{R0,1}, \Theta_{R0,1})$ elaborata all'interno della nostra community of inquiry, che può essere interpretata come il principale risultato del lavoro di ricerca condotto con l'obiettivo di analizzare il ruolo svolto dall'insegnante nei processi di costruzione di dimostrazioni via linguaggio algebrico.

La realizzazione di tale analisi rappresenta dunque il primo elemento $T_{R0,1}$ della quaterna costituente la praxeologia. Per perseguire tale obiettivo è stato necessario delineare uno sfondo teorico $\Theta_{R0,1}$ all'interno del quale analizzare sia i processi di produzione di pensiero via linguaggio algebrico (con riferimento alle teorie elaborate da Arzarello *et Al.*, Boero, Duval), sia i processi di insegnamento apprendimento (nel nostro caso il modello dell'apprendistato cognitivo, nel più generale quadro in cui si fa riferimento ad idee di Vygotsky e Leont'ev). L'analisi dei protocolli raccolti nel corso della ricerca ha consentito di delineare un costrutto teorico, quello di M-CA_{CE} che permette di caratterizzare i diversi ruoli assunti da un docente che stimola lo sviluppo, da parte degli studenti, delle competenze chiave per costruire dimostrazioni via linguaggio algebrico. L'individuazione degli elementi definatori di tale costrutto (ad esempio quello di attivatore di pensieri anticipatori, o di guida operativa-strategica, o di guida riflessiva) lo viene a caratterizzare come nostra tecnica di riferimento $\tau_{R0,1}$, ovvero uno strumento per l'analisi del ruolo svolto dal docente durante le attività di classe. Tale individuazione può essere inoltre interpretata come il "discorso razionale" su $\tau_{R0,1}$, ovvero la tecnologia $\theta_{R0,1}$, associata ad una duplice funzione: la *funzione tecnica* (nella terminologia di Chevallard) di mostrare come si effettua l'analisi del ruolo svolto dal docente e quella *tecnologica* di giustificare perché tale analisi risulta efficace alla luce del nostro quadro di riferimento.

Il lavoro oggetto del nostro esempio si situa all'interno di un più ampio progetto (il progetto ArAl) che ha tra i principali obiettivi quello di condurre con gli insegnanti attività di studio e riflessione congiunta sui processi di classe

che attivano. Il compito associato a tale obiettivo è parte integrante di una consolidata praxeologia $\mathbf{P}_{R0,2}(T_{R0,2}, \tau_{R0,2}, \theta_{R0,2}, \Theta_{R0,2})$, a sua volta frutto di una evoluzione a partire da precedenti praxeologie, caratterizzata da una tecnica, quella delle trascrizioni multi-commentate MT, mirata a condurre gli insegnanti all'attivazione di pratiche riflessive. Tale tecnica trova fondamento e giustificazione nello sfondo teorico delineato in particolare dai lavori di Mason (discipline of noticing) e Jaworski (community of inquiry).

Le *riflessioni teoriche* attivate all'interno della nostra comunità di ricerca in relazione a possibili nuove pratiche da attivare nella formazione insegnanti ci hanno suggerito di concepire il costrutto M-CA_{CE}, ovvero la tecnica caratterizzante la praxeologia $\mathbf{P}_{R0,1}$, come possibile strumento per la formazione. Nel momento in cui il costrutto comincia ad assumere questo nuovo ruolo, la praxeologia $\mathbf{P}_{R0,1}$ si trova ad interagire con quella $\mathbf{P}_{I0}$ degli insegnanti. Va sottolineato che queste due praxeologie non possono ovviamente essere identificate, poiché diverso è il *compito* che gli insegnanti si propongono di affrontare, ovvero quello di stimolare un reale apprendimento in ambito algebrico da parte degli allievi. Per perseguire tale obiettivo, gli insegnanti attingono da un repertorio di *tecniche e tecnologie*, connesse ad una loro *teoria* di riferimento, spesso implicita, sviluppatasi in particolare a partire dalla loro esperienza nelle classi o come frutto di precedenti esperienze di formazione. Anche i *beliefs* sull'insegnamento di un determinato contenuto intervengono nel "suggerire" agli insegnanti quali tecniche attivare e dunque possono essere considerati parte integrante della "teoria personale" di riferimento.

Durante la fase di trasposizione meta-didattica, caratterizzata dalla traiettoria che abbiamo presentato (momento di studio-riflessione; momento di azione-riflessione), attraverso la metodologia MT nell'ottica di un lavoro da attivare all'interno di una community of inquiry, i mentori-ricercatori svolgono il ruolo di *broker*, consentendo ai docenti di appropriarsi delle tecniche da noi messe a punto per l'analisi del ruolo dell'insegnante nei processi di costruzione di ragionamenti via linguaggio algebrico e, nello stesso tempo, di costruirsi un modello di riferimento per la riflessione sulla propria pratica.

Questo processo produce risultati a diversi livelli. Se ci riferiamo al nuovo compito (che indichiamo con T_1) di favorire nei docenti lo sviluppo di consapevolezza riguardanti sia il loro modo di porsi durante l'azione di classe, sia il percorso da attuare per un reale sviluppo professionale, l'innestarsi della praxeologia $\mathbf{P}_{R0,1}$ ha consentito una evoluzione della praxeologia $\mathbf{P}_{R0,2}$ che ha condotto allo sviluppo di una nuova praxeologia $\mathbf{P}_1(T_1, \tau_1, \theta_1, \Theta_1)$. La tecnica τ_1 associata al compito T_1 consiste nel condurre gli insegnanti all'uso del costrutto M-

CA_{CE} come strumento di riflessione attraverso le *attività laboratoriali* di analisi di pratiche altrui, di progettazione-azione e di analisi della propria pratica mediante la metodologia MT (specialmente nel dialogo mentore-insegnante, gli MT sono il tramite fondamentale nel favorire lo sviluppo di un discorso “razionale” sulla tecnica caratterizzante la praxeologia P₀). Il *blocco tecnologico-teorico* [Θ₁/Θ₁] che consente di giustificare razionalmente la nuova impostazione da noi adottata si è delineato grazie ad una interazione tra due principali teorie di riferimento: quella sui livelli di awareness sviluppata da Mason, che ci ha consentito di identificare nell’uso del costrutto teorico una via attraverso la quale stimolare shifts of attention nei docenti, e quella dell’apprendistato cognitivo, che giustifica anche la traiettoria da noi individuata per formare i docenti. La praxeologia P_{R0,1} nata nell’ambito del nostro progetto di innovazione, in interazione con la praxeologia **P**_{R0,2}, sviluppatasi nell’ambito di precedenti ricerche sulla formazione insegnanti, ha dato vita ad una praxeologia P₁, costituitasi nuovamente nell’ambito di ricerche sulla formazione insegnanti.

Nel processo appena descritto intervengono due tipologie di componenti esterne: da un lato le reti di scuole o gli enti promotori dei progetti di formazione che ci hanno visti coinvolti, dall’altro i costanti apporti teorici delle ricerche nazionali ed internazionali riguardanti la formazione degli insegnanti. Possiamo invece identificare inoltre come componenti interne sia i prodotti teorici e metodologici da noi sviluppati nel corso delle nostre ricerche, sia tutti quei risultati della ricerca che noi abbiamo selezionato, condiviso ed integrato nel nostro quadro teorico.

La riflessione sul processo di trasposizione meta-didattica avvenuto ci consente di delineare i nuovi attuali sviluppi delle praxeologie P_{R0,1} e **P**_{R0,2}: (1) da un lato, la praxeologia P_{R0,1} evolve verso una più “evoluta” praxeologia **P**_{R0,1}⁺ (che integra il blocco tecnologico-teorico [Θ_{R0,1},Θ_{R0,1}] con la teoria sui levels of awareness elaborato da Mason); (2) dall’altro lato la praxeologia **P**_{R0,2} evolve verso una praxeologia **P**_{R0,2}⁺ (affinamento di **P**_{R0,2} a partire da una rivisitazione della metodologia di lavoro con i docenti, mirata ad un potenziamento delle tecniche e delle tecnologie atte a stimolare i processi di riflessione e a favorire lo sviluppo di nuove consapevolezze). Le praxeologie **P**_{R0,1}⁺ e **P**_{R0,2}⁺ confluiscono in un’unica praxeologia **P**_{R0}⁺.

Le riflessioni che spontaneamente alcuni docenti ci hanno proposto al termine delle attività di formazione consentono di ipotizzare inoltre due ulteriori sviluppi ancora non pienamente

attuati della praxeologia p_{10} , che confluiscono in una nuova praxeologia p_{11} . Da un lato, in relazione al compito di favorire negli allievi lo sviluppo di competenze chiave nella costruzione di ragionamenti via linguaggio algebrico, le nuove consapevolezze maturate circa i ruoli da attivare durante le attività di classe conducono verso lo sviluppo di una nuova praxeologia $p_{11,1}$ (tale evoluzione è anche evidenziabile grazie alle trascrizioni delle attività di classe). Dall'altro lato, in relazione ad un nuovo compito, quello di identificare modalità attraverso le quali mirare ad una propria crescita professionale, si delinea anche una nuova praxeologia $p_{11,2}$ frutto delle consapevoli maturate circa l'importanza di formarsi come docenti consapevoli grazie allo studio ed all'attivazione di pratiche riflessive. In figura 5.2.1 è illustrato l'intero processo fin qui descritto.

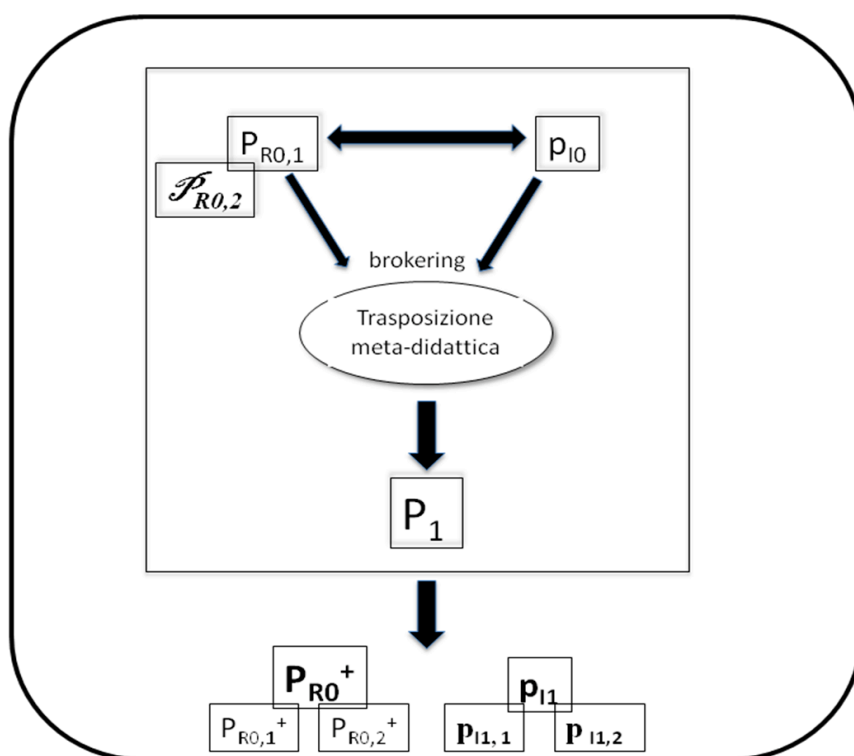
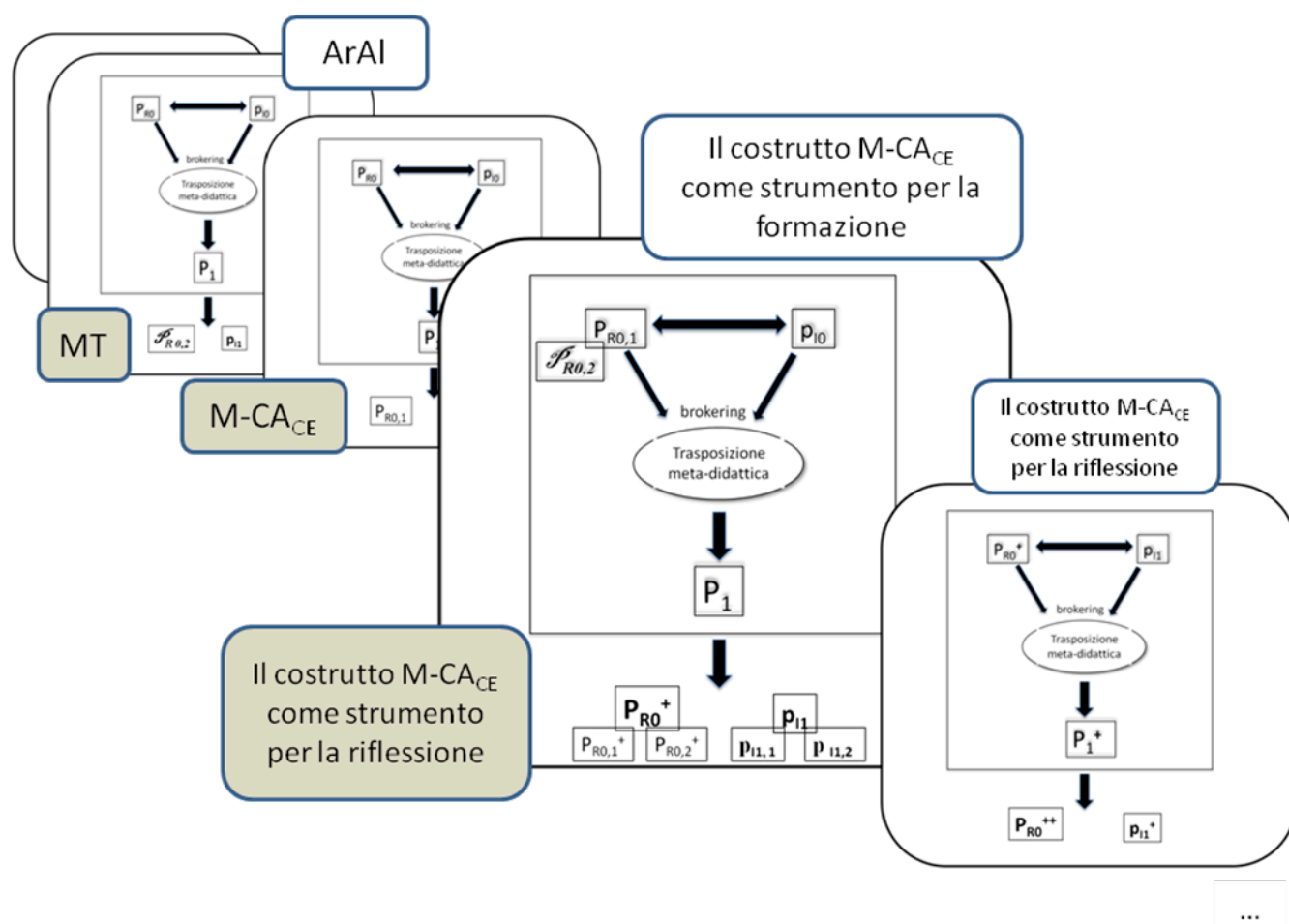


Figura 5.2.1

Riteniamo che le riflessioni che abbiamo condotto al termine delle attività di formazione, riguardanti in particolare gli aspetti problematici evidenziati, consentano di mettere in luce un ulteriore aspetto. L'interazione con i docenti durante le attività di formazione e l'analisi a posteriori dei risultati ottenuti ci hanno permesso di ipotizzare nuovi sviluppi potenziali futuri delle praxeologie e di evidenziare perciò una "tensione verso" altre praxeologie, che potranno confluire in una nuova praxeologia P_0^{**} : (1) da un lato, una possibile evoluzione nell'ottica di un affinamento della tecnica M-CA_{CE}, con l'obiettivo di renderlo uno strumento

più efficace per la riflessione degli insegnanti sulla propria pratica; (2) dall'altro lato, una possibile evoluzione nell'ottica di una rivisitazione della metodologia di lavoro da adottare durante i corsi di formazione, con l'obiettivo di potenziare l'uso degli strumenti multimediali in alcune fasi della traiettoria meta-didattica per favorire una maggiore interazione all'interno della comunità.



5.3 La trasposizione meta-didattica nel gruppo di ricerca di Torino

A. I nuclei di ricerca didattica

La praxeologia iniziale/ P_{R0} elaborata dai ricercatori può essere descritta in termini di:

- *Task/compito*: studiare il ruolo delle esperienze percettivo-motorie, dell'uso di segni e di strumenti nell'insegnamento-apprendimento della matematica;
- *Teoria*: il paradigma della multimodalità;
- *Tecnologia*: il semiotic bundle;
- *Tecnica*: l'analisi di videoregistrazioni di processi didattici.

Come si è illustrato nel capitolo 4, questa praxeologia affonda le sue radici nella ricerca per l'innovazione ed integra vari costrutti teorici (embodiment, multimodalità, definizione peirciana di segno, categorie di gesti, ecc.), continuamente posti in relazione dialettica con la realtà effettuale della classe, attraverso il confronto con gli insegnanti e i teaching-experiments.

La trasposizione meta-didattica è resa possibile dai diversi ruoli di *broker* giocati sia dai ricercatori sia dagli insegnanti, all'interno del nucleo di ricerca:

- i ricercatori sono infatti parte della più ampia comunità di ricerca nazionale e internazionale, ma anche del gruppo di indagine locale (il nucleo di ricerca); attraverso questo ruolo, essi possono facilitare gli insegnanti-ricercatori (dapprima *partecipanti periferici*) nell'assumere ruoli sempre più *centrali* nella pratica di ricerca fino a condividere l'intera praxeologia;
- gli insegnanti-ricercatori sono parte sia della comunità di ricerca, sia di quella degli insegnanti; questo aspetto non è secondario, perché è proprio la funzione di broker (ben descritta nella terminologia "insegnanti-ricercatori") a fornire uno dei punti forti della loro attività di formazione di altri insegnanti.

Il nucleo di ricerca didattica si configura sia come comunità di *pratica* (considerando la pratica della ricerca), sia come comunità di *indagine* (sull'oggetto della ricerca). Gli insegnanti partecipanti *si formano attraverso la partecipazione*, dapprima periferica e poi più centrale, alla comunità. In altri termini, la loro formazione avviene *attraverso* la pratica di ricerca effettuata nel gruppo, e attraverso la loro riflessione su tale pratica. La pubblicazione di un libro da parte del nucleo di ricerca (Arzarello et al., 2010) ha costituito un'occasione di oggettivazione in questo senso. Le parole di una di queste insegnanti esprimono significativamente questo aspetto:

Il lavoro di analisi che seguì lo svolgimento dell'attività, anche se limitato ad alcuni brevissimi episodi, mise in luce, come ho detto, una gamma di fatti [...] di cui teoricamente conoscevo

l'esistenza, ma che non avevo mai individuato precisamente nell'effettivo svolgimento del lavoro in classe.

Le conoscenze che avevo si sono così integrate con i risultati dell'esperienza vissuta, producendo inevitabili cambiamenti nel mio modo di essere in classe, benché non me ne sia resa subito conto. Solo ora, riflettendo a distanza di tempo dall'esperienza, comincio a intravedere dei mutamenti nel mio modo di agire, che riassumerei in tre punti:

- minor apprensione per i tempi di apprendimento;
- maggior fiducia nelle capacità dei bambini;
- uso più disinvolto di tutti i registri semiotici. (Bruna Villa, in Arzarello et al., 2010, p. 131).

Nel processo di formazione un passaggio interessante dal nostro punto di vista è stato quando, focalizzando l'attenzione sulle relazioni tra le varie componenti del semiotic bundle, le insegnanti stesse hanno messo a punto delle *tecniche* via via più elaborate per raccogliere le informazioni emergenti dalle video registrazioni e riguardanti in particolare la relazione gesti-parlato-segni scritti, fino ad arrivare alla produzione di *timelines* raffinatissime, veri e propri strumenti per il lavoro collettivo di analisi dei video. Nello stesso tempo, il quadro teorico si era arricchito di componenti specifiche sui gesti (match, mismatch, classificazione dei gesti, ecc) e sulle funzioni degli atti linguistici (aspetti non locutori).

La relativa praxeologia (P₁) è pertanto un'evoluzione della precedente, e può essere descritta nei termini seguenti:

- *Task/compito*: studiare le dinamiche e le evoluzioni tra gesti, parole e segni scritti;
- *Teoria*: il paradigma della multimodalità, gli studi sui gesti e sul linguaggio;
- *Tecnologia*: il semiotic bundle (arricchito con componenti gestuali e linguistiche);
- *Tecnica*: la timeline e la discussione collettiva di video.

All'interno di questa praxeologia sono emersi importanti risultati di ricerca, come l'identificazione di specifiche dinamiche semiotiche tra studenti e insegnante, che sono poi state chiamate "giochi semiotici" (Arzarello et al., 2011).

In questo tipo di intervento di formazione, certamente particolare e di piccolo gruppo, le *componenti interne* alla trasposizione giocano ruoli di primo piano. Capita quindi che le insegnanti svolgano nelle classi delle attività didattiche in certe forme particolari, adatte allo studio di aspetti specifici emersi nella comunità di indagine: per esempio, far immaginare un solido e utilizzare le mani per rappresentarlo, prima di utilizzare modelli o disegni (Bazzini et al., 2010). Le componenti esterne sono prevalentemente di tipo di ricerca (ad esempio l'analisi delle componenti linguistiche introdotte nella timeline).

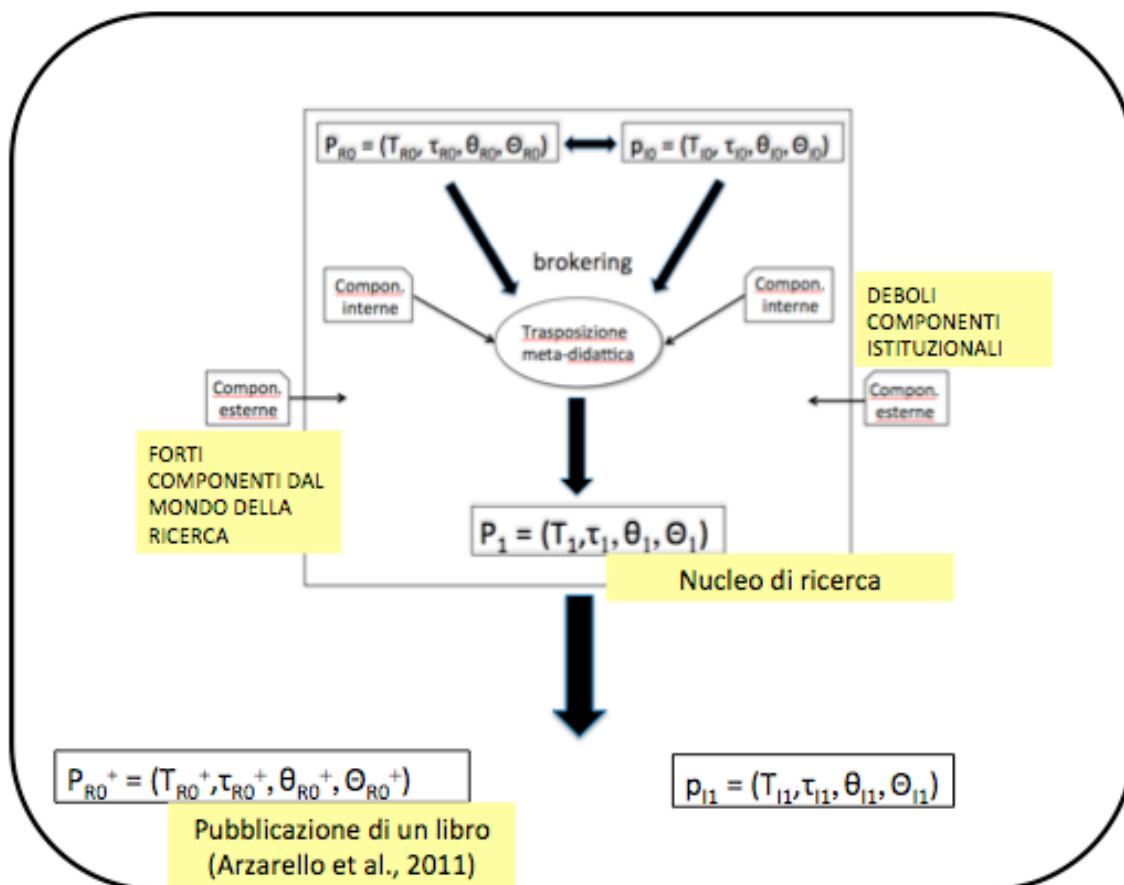


Figura 5.3.1 La trasposizione meta-didattica attraverso il Nucleo di ricerca didattica

Nei progetti che seguono invece le componenti esterne di tipo istituzionale giocano un ruolo maggiore.

B. Gruppi di lavoro di insegnanti

Nel Progetto DIFIMA sono tanti gli insegnanti che partecipano ai vari sotto-progetti, sia che si tratti di Lauree Scientifiche, sia che si tratti dei Precorsi, o di GeoGebra, o dei gruppi di livello scolastico. Questi insegnanti, che possono seguire da lontano i vari sotto-progetti, o diventare parte attiva con il ruolo di insegnanti-sperimentatori, condividono pratiche con il gruppo di cui fanno parte, che non è gruppo di ricerca, ma di sperimentazione in genere, o di formazione (nel caso di GeoGebra). Per qualcuno di loro a volte si tratta di una vera e propria scoperta del mondo della ricerca didattica (da cui sono molto lontani), e in tal caso di responsabilità individuale e coinvolgimento nel cambiamento metodologico e nella riflessione sulle pratiche didattiche. Il Convegno biennale, insieme con la piattaforma “DIFIMA in rete”, fungono da strumento mediatore per seguire le iniziative in modo continuativo o più sporadico.

Invece nel progetto Quarini c'è a monte una ricerca, focalizzata e messa a punto dal gruppo universitario (Robutti e laureandi), che segue all'incirca il percorso qui delineato: fissa problemi di ricerca; mette a punto un progetto di sperimentazione didattica focalizzato su un tema, di solito derivato dal quadro della *Matematica per il Cittadino* (Es. Dai Numeri alle Relazioni; dalle Figure alle Relazioni; le Relazioni e le Funzioni; ...); realizza in classe il

progetto didattico inserendolo nel curriculum, con la collaborazione dei docenti; osserva e raccoglie dati tramite videoregistrazioni; analizza i dati alla luce dei riferimenti teorici e delle domande di ricerca.

Nel contesto descritto, si ha la seguente dicotomia a livello meta-didattico (vedi Capitolo 4), che si articola in due Task/compiti. Il primo, legato alla praxeologia iniziale riferita alla *ricerca* (P_{R0}), può essere descritta in termini di:

- *Task/compito*: domande e questioni legate al problema specifico della tesi, che può riguardare la multimodalità, il ruolo degli strumenti, l'uso dei gesti nella costruzione di conoscenza matematica, l'analisi semiotica delle interazioni, ...;
- *Tecnica*: l'analisi di videoregistrazioni di processi didattici;
- *Teoria*: il quadro teorico scelto col laureando e comunque basato su embodiment, multimodalità, gesti, ...;
- *Tecnologia*: (variabile a seconda del problema di ricerca della tesi): può essere analisi dei gesti, o uso del semiotic bundle per interpretare processi cognitivi, o uso della timeline, ...

Il secondo, legato alla praxeologia iniziale riferita alla formazione *insegnanti* (p_{10}), può essere descritta in termini di:

- *Task-compito* (indirizzato ai docenti e condiviso dal ricercatore e dai laureandi): avviare la formazione dei docenti secondo paradigmi di ricerca, e migliorare i processi di insegnamento e apprendimento coerentemente con essi;
- *Tecnica*: l'uso della piattaforma Moodle con attività in sincrono e asincrono (materiali, forum, chat, compiti, ...) nella sezione Docenti; la gestione della piattaforma Moodle nella sezione Studenti; l'uso di strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica (GeoGebra, foglio elettronico, sensori e calcolatrici, ...); la sperimentazione di attività laboratoriali in classe; l'uso della discussione matematica;
- *Teoria*: gli elementi della ricerca, che però rimangono sullo sfondo per i docenti;
- *Tecnologia*: il paradigma del laboratorio di matematica per l'UMI; i metodi di osservazione dei processi degli studenti; caratteristiche dell'apprendimento percettivo-motorio.

Le due praxeologie in questo progetto sono inizialmente piuttosto lontane (vedere Figura 5. Quarini, che riprende la Figura del Capitolo 4), per vari motivi, tra cui principalmente il fatto che gli insegnanti non si sono mai avvicinati prima alla ricerca didattica. Ma durante e dopo la trasposizione meta-didattica via via si avvicineranno – in quanto gli insegnanti cominciano a entrare via via nelle problematiche del progetto di ricerca e di formazione, attivando nuove metodologie e usando nuove tecnologie – fino a raggiungere lo stato P_1 di comunità integrata con praxeologia comune. Durante tale processo, via via le componenti esterne diventano man mano interne, perché soprattutto quelle di carattere metodologico, e la comunità degli insegnanti passa al livello p_1 (Figura 5. Quarini).

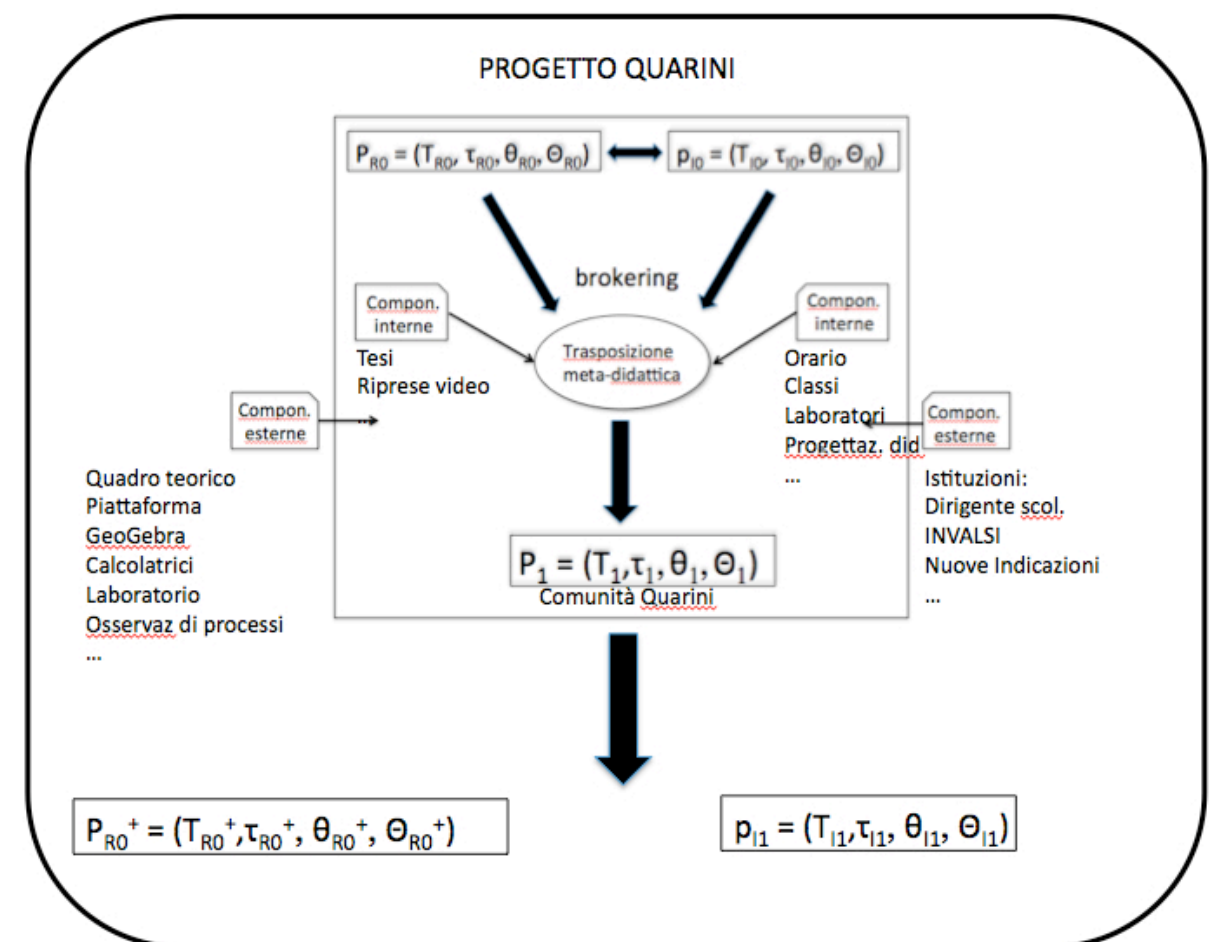


Figura 5. **Quarini**: La trasposizione meta-didattica nel Progetto Quarini

La trasposizione meta-didattica si realizza grazie ai diversi ruoli di *broker* giocati da tutti gli attori nel progetto: il ricercatore, l'amministratore della piattaforma, gli insegnanti che sperimentano in classe le attività proposte (Figura 5.X):

- il ricercatore è broker per eccellenza, infatti fa parte della più ampia comunità di ricerca nazionale e internazionale, ma anche del gruppo del progetto (insegnanti e laureandi) e non solo, anche delle varie comunità degli studenti: può quindi portare al gruppo di docenti, tramite la sezione *Quadro teorico*, elementi dalla ricerca utili per la formazione; può intervenire nei forum delle classi, portando risposte e osservazioni; può discutere nei forum per soli docenti;
- gli insegnanti-ricercatori sono parte delle comunità della loro scuola e delle altre scuole che sperimentano lo stesso percorso (es. la scuola di Biella) e nel contempo del gruppo del progetto: essi vengono a contatto con la comunità della ricerca (ricercatore e laureandi), ne discutono con i colleghi finalità e realizzazione, quindi realizzano la sperimentazione nella loro classe;
- i laureandi sono broker: nelle loro mani passa sia il progetto di ricerca individuale, condiviso con il ricercatore, sia la sua realizzazione in classe tramite la sperimentazione. Essi progettano ricerca, sue finalità, ma anche attività e metodologie. Quindi ne condividono la realizzazione con i docenti di cui vanno ad osservare le classi, filmando

l'intera sperimentazione; essi agiscono come broker sia in presenza, tramite le riunioni, sia a distanza tramite la piattaforma;

- l'amministratore della piattaforma non partecipa alla ricerca o alla sperimentazione, ma gestisce gli utenti, il loro accesso in piattaforma, la struttura dei corsi su Moodle e i partecipanti per ognuno di essi: il suo lavoro è essenziale e non potrebbe essere in alcun modo sostituito da una persona non esperta nell'uso di questa tecnologia.

PIATTAFORMA QUARINI

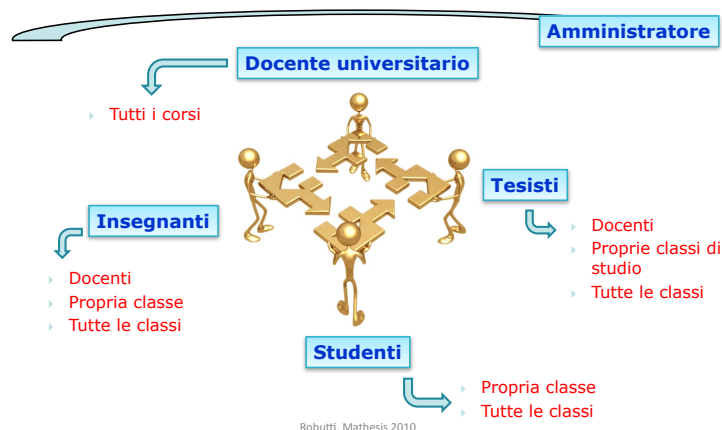


Figura 5.X La piattaforma del Progetto Quarini e i partecipanti

Le attività messe in piattaforma hanno il ruolo di *technological boundary object*: si tratta delle attività che costituiscono il percorso didattico e che sono state messe a punto da laureandi e ricercatore. Esse vengono messe a disposizione dei docenti sperimentatori nella sezione *Docenti*, nel corso corrispondente al progetto.

I docenti che partecipano al progetto (es. i docenti della scuola Quarini e quelli della scuola di Biella che hanno partecipato al progetto *Dai Numeri alle Relazioni*) costituiscono una comunità di pratica che condivide scopi, attività, finalità, uso delle tecnologie, e che viene coordinata dal gruppo di ricerca (ricercatore e laureandi). Come dice Wenger (1998), essi condividono delle pratiche (didattiche, in questo caso) con modalità partecipativa. Se inizialmente (prime due settimane dell'anno scolastico) la loro partecipazione è più periferica, in quanto attraverso la sezione *Docenti* si confrontano tra loro e col gruppo di ricerca per condividere il percorso da sperimentare, successivamente essi diventano a loro volta gestori di comunità (di studenti) nelle loro classi.

I risultati della trasposizione meta-didattica si possono descrivere secondo due tipologie: diretti e indiretti.

I risultati di tipo diretto riguardano i docenti, che inizialmente coinvolti nella praxeologia descritta sopra, spesso diventano consapevoli delle finalità e dei risultati della ricerca, non solo della realizzazione della sperimentazione in classe, e diventano attori a loro volta in occasioni di incontri di ricerca: seminari (Es. Mathesis Subalpina), il Convegno DIFIMA (con conferenza plenaria nel 2009 e comunicazioni nel 2011), o di formazione insegnanti. Essi quindi passano a una nuova praxeologia, che si realizza negli anni in step successivi a quella di partenza. Infatti, il progetto Quarini è al suo quarto anno di realizzazione, e ogni anno

aumenta il numero di docenti che vi partecipa, mentre i docenti che vi partecipano per più anni da un anno all'altro aumentano il numero delle sperimentazioni e sono sempre più motivati e consapevoli dei cambiamenti metodologici attuati. Infatti, partiti con le classi prime nel 2008-09 e la sperimentazione *Dai Numeri alle Relazioni*, nell'anno successivo, 2009-10, hanno continuato a realizzare lo stesso percorso nelle prime e hanno iniziato un nuovo percorso nelle classi seconde, poi un altro nuovo nel 2010-11 nelle terze, e quest'anno ne hanno aggiunto uno nuovo ai tre precedenti. Ogni anno quindi, la relativa praxeologia è un'evoluzione della precedente, e porta gli insegnanti a un livello maggiore di consapevolezza sia rispetto alla progettazione e sperimentazione di attività laboratoriali, sia rispetto all'osservazione dei processi degli studenti e alla gestione di comunità di pratica con strumenti di e-learning. Infatti, le componenti esterne alla trasposizione meta-didattica, di cui fanno uso nei percorsi sperimentati, diventano via via componenti interne e fanno parte del bagaglio culturale e professionale della scuola. Tutto questo è possibile grazie alla figura del dirigente scolastico, menzionata nel Capitolo 3, che sostiene le sperimentazioni, grazie alle Indicazioni Nazionali e ai test Invalsi somministrati ogni anno agli studenti. La coerenza tra le varie componenti esterne in gioco dà ogni anno feedback positivo ai docenti per proseguire in questo lavoro di sperimentazione. In pratica gli insegnanti che hanno iniziato questo percorso sono diventati insegnanti-sperimentatori, e in alcuni casi in insegnanti-ricercatori.

I risultati di tipo indiretto riguardano gli studenti, che affrontando le prove Invalsi, danno ai docenti modo di verificare se le loro sperimentazioni sono state utili.

Ecco alcuni dati (Figura 5.Y):

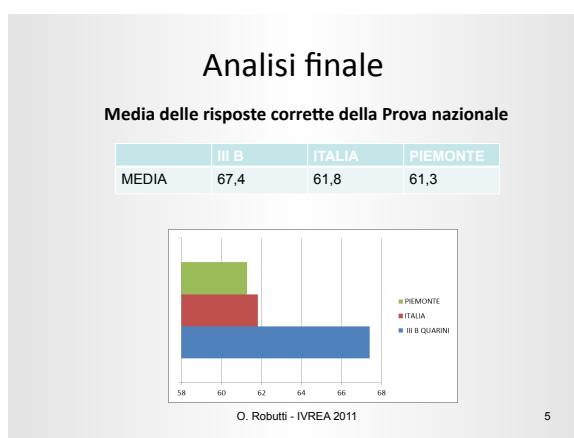


Figura 5.Y

I docenti del progetto Quarini che vedono i dati dei loro studenti ai test INVALSI di quest'anno, dopo tre anni di sperimentazione delle attività in collaborazione con il gruppo di ricerca (ricercatore e laureandi), con l'uso di e-learning in presenza e a distanza e di metodologia laboratoriale, sono confermati nella loro scelta e modificano volentieri, per piccoli passi, di anno in anno, la praxeologia di partenza. Dai dati si vede infatti che una delle classi coinvolte ha risultati decisamente più alti della media regionale e nazionale (Figura 5.Y), che raggiungono picchi in alcune domande, che sono perfettamente in linea con le attività svolte nel percorso sperimentale.

Le prove INVALSI e i loro risultati sono quindi un esempio di componente esterna che incide in modo rilevante nel progetto di formazione (Figura 5.Quarini).

C. Il Progetto m@t.abel

La praxeologia iniziale/ P_0 di m@t.abel è stata elaborata dalla comunità dei ricercatori del primo CTS del progetto (2006) e presentata ai cosiddetti Autori nei primi seminari di formazione a Montecatini agli inizi del progetto (anche il nome e il logo furono inventati in quell'occasione).

Mentre nel progetto Quarini la dicotomia era sincronica, qui la dicotomia a livello meta-didattico è diacronica. Infatti nel Progetto [m@t.abel](#) si possono osservare due trasposizioni meta-didattiche, una relativa ai tutor, che i ricercatori formano e che partecipano alla redazione dei materiali, poi quella dei docenti, formati a loro volta dai tutor in un momento successivo. Queste due trasposizioni dunque agiscono in tempi differenti, ma si appoggiano agli stessi riferimenti teorici, a cui i tutor sono inizialmente più vicini, mentre gli insegnanti da formare sono più distanti.

Anche qui i task sono due, ma agiscono in successione e non contemporaneamente come nel Progetto Quarini. La praxeologia iniziale P_{R0} elaborata dai ricercatori (e che si relaziona con quella dei tutor), sulla base dei quadri teorici provenienti dalla *Matematica per il Cittadino* può essere descritta in termini di:

- *Problema di ricerca* (Task, compito): studiare come rendere effettivamente condivise le metodologie e i contenuti della *Matematica per il Cittadino*, visto il limitato numero di insegnanti raggiunto con i progetti di diffusione attuati per quel progetto (convegni e libri diffusi tramite i referenti delle Olimpiadi della Matematica);
- *Tecnica*: trasposizione di parte del materiale della *Matematica per il Cittadino* per renderlo fruibile nella piattaforma per il blended e-learning, secondo la sistemazione data dall'Invalsi alla piattaforma;
- *Teoria*: l'utilizzo delle infrastrutture rappresentative e comunicazionali (Hegedus & Moreno-Armella, 2009) come strumento per inserire e organizzare materiali di formazione;
- *Tecnologia*: elaborazione di un modello per la trasposizione (di parte) del materiale della *Matematica per il Cittadino* al fine di renderlo fruibile nella piattaforma per il blended e-learning; elaborazione di un modello di formazione dei tutor in opportuni seminari.

La seconda praxeologia iniziale P_{R0} (vedere Figura 5.M) elaborata dai ricercatori (e che si relaziona con quella degli insegnanti da formare), sulla base dei quadri teorici provenienti dalla *Matematica per il Cittadino* può essere descritta in termini di:

- *Task/compito*: studiare come rendere effettivamente condivise le metodologie e i contenuti della *Matematica per il Cittadino*, visto il limitato numero di insegnanti raggiunto con i progetti di diffusione attuati per quel progetto (convegni e libri diffusi tramite i referenti delle Olimpiadi della Matematica);
- *Tecnica*: utilizzo della piattaforma nel Corso di formazione; compilazione del Diario di Bordo;

- *Teoria*: l'utilizzo delle infrastrutture rappresentative e comunicazionali (Hegedus & Moreno-Armella, 2009) come strumento per sviluppare comunità di pratica relative alle metodologie, ai contenuti e agli obiettivi della *Matematica per il Cittadino*;
- *Tecnologia*: elaborazione di un modello di formazione di docenti in cui siano presenti forme concrete di riflessione critica sulle attività di classe nello stesso momento in cui avviene la formazione (evitando così il classico modello della formazione in due tempi: prima la formazione poi la sperimentazione).

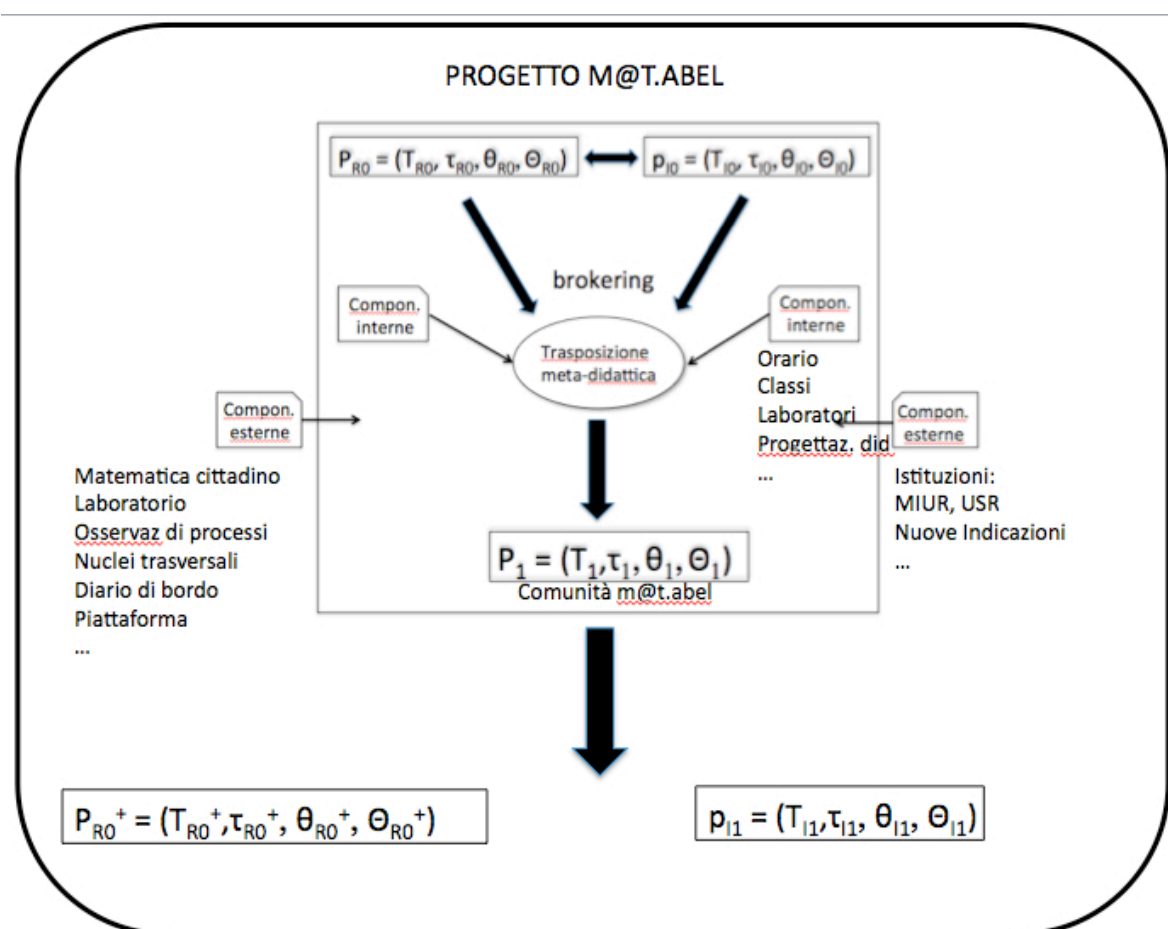


Figura 5.M: La trasposizione meta-didattica nel Progetto [m@t.abel](#), riferita ai docenti

In questo caso i broker sono i tutor e i docenti: fanno parte sia della comunità di pratica del gruppo di lavoro m@t.abel, sia della comunità degli insegnanti della propria scuola. Si hanno dei *technological enhanced boundary objects* (Hoyles et al.: si veda nel capitolo 4 la definizione del costrutto), costituiti dal materiale in piattaforma organizzato secondo un formato che intreccia le istanze metodologiche provenienti da m@t.abel con la logica della piattaforma .edu utilizzata dall'Indire.

5.4 Uno sguardo d'insieme

L'analisi svolta in questo capitolo dei tre esempi come processi di trasposizione meta-didattica in evoluzione, rivela la loro natura comune: infatti in tutti quanti troviamo la *doppia dicotomia* come

generatrice e alimentatrice dei processi; si è anche sottolineato il ruolo che le *componenti interne ed esterne* giocano nel fare evolvere le costituenti delle varie praxeologie in gioco. La **Figura 5.x** ne illustra sinteticamente la dinamica.

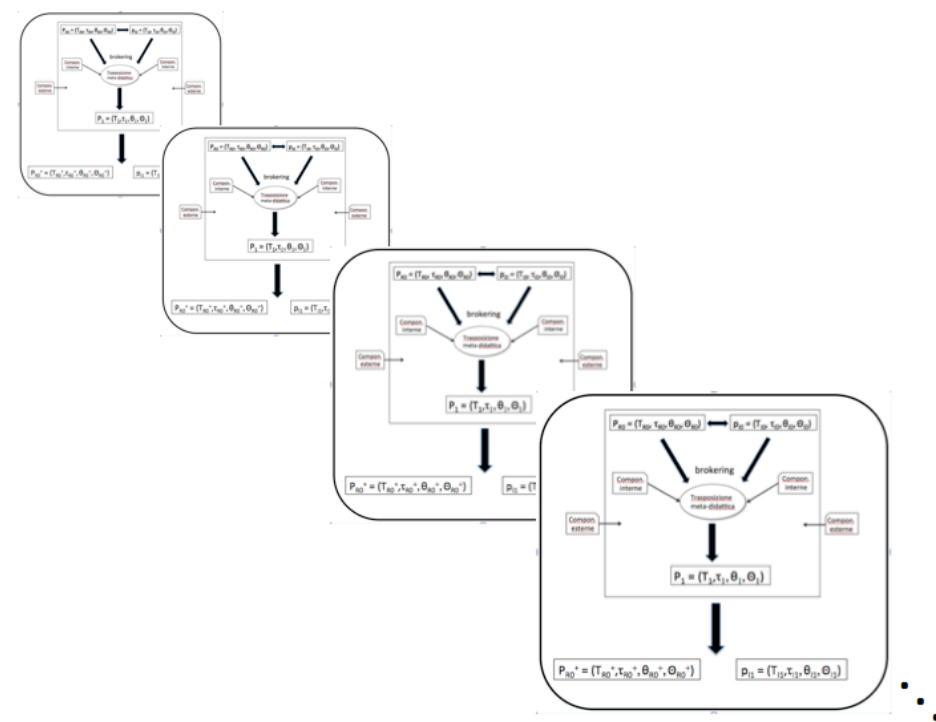


Figura 5.x L'evoluzione dinamica delle praxeologie meta-didattiche.

Il costrutto della trasposizione meta-didattica rivela qui la sua utilità come strumento di analisi teorica. Esso permette di entrare molto in profondità nei processi di formazione dei docenti come processi dinamici. Da un lato esso amplia il quadro della TAD, adattandolo all'analisi dei processi di formazione degli insegnanti e arricchendolo con alcune componenti dinamiche (la doppia dicotomia, la dialettica esterno-interno), ma rimanendo sostanzialmente coerenti con esso. Dall'altro integra in modo sostanziale il quadro teorico della Ball et al., aggiungendo strumenti di analisi che permettono di entrare più in profondità nella MKT, cogliendone in particolare gli elementi dinamici che mettono a fuoco i processi evolutivi dei fenomeni considerati.

Parte III. Dalle micro- alle macro-scale di analisi

Capitolo 6. Riflessione sulla formazione degli insegnanti e sull'evoluzione delle loro funzioni

Nel capitolo precedente abbiamo descritto gli esempi MO1, MO2, TO alla luce della trasposizione meta-didattica; abbiamo tratteggiato l'evoluzione dinamica delle praxeologie delle varie comunità coinvolte (di indagine e di pratica), e osservato che a loro volta queste evolvono e si integrano (si veda lo schema della Figura 4.2: da (P_{R0}, p_{I0}) a (P_1, P_0^+, p_{I1})). Si è anche visto che la dinamica è generata dalla dialettica tra componenti interne ed esterne.

In questo capitolo approfondiremo l'analisi degli esempi mettendo a fuoco alcuni aspetti generali dell'evoluzione delle praxeologie meta-didattiche delle diverse comunità. Precisamente, studieremo le tipologie di insegnanti coinvolti nei processi di formazione (§ 6.1) e l'intreccio tra alcune componenti interne (§6.2) ed esterne (§§ 6.3, 6.4) che supportano questi ultimi.

6.1 Gli insegnanti coinvolti nella formazione

Possiamo identificare diverse "tipologie di insegnanti" coinvolti nei vari percorsi di formazione considerati:

- Insegnanti "ordinari" che diventano insegnanti-sperimentatori di attività nuove (ad esempio TO: progetto DIFIMA e progetto Quarini, MO1 e MO2, m@t.abel) che partecipano ai diversi progetti). Si tratta di insegnanti che abitualmente non hanno contatti con la ricerca e la formazione, che un certo punto, sotto la spinta del dirigente, o di necessità autonoma di formazione, o di migliorare risultati Invalsi, o di curiosità personale, richiedono l'intervento di un ricercatore universitario nella loro scuola o partecipano a iniziative di formazione organizzate sul territorio. Tali insegnanti decidono, più o meno spontaneamente, di mettersi in gioco pienamente, accettando la sfida di cambiare metodologie di lavoro sotto le sollecitazioni del docente universitario, di apprendere nuovi contenuti matematici e di acquisire qualche idea sui risultati di ricerca, sia sul versante teorico della riflessione sui contenuti matematici, sia sul versante metodologico. A tale scopo, sono presenti materiali come articoli di ricerca o di divulgazione didattica, che l'insegnante può scaricarsi e leggere comodamente a casa o discutere e utilizzare in classe coi colleghi. In genere sulle piattaforme prese in esame è presente una sezione dal titolo "Quadro teorico", dove sono collocati materiali, come ad esempio articoli di ricerca, suddivisi per tematiche a seconda della sperimentazione effettuata. Questi insegnanti fanno parte della comunità di insegnanti, ma anche di comunità nuove che sorgono con la formazione stessa (o perché appartengono allo stesso istituto, o perché entrano a far parte di comunità reali e virtuali). C'è un bisogno che sorge in questi insegnanti, e la formazione viene a soddisfare questo bisogno: la motivazione, essendo intrinseca, è quindi

un buon motore per mettersi in gioco. Molto spesso il coinvolgimento dell'istituzione, sia essa il Ministero o il dirigente scolastico, funziona da moltiplicatore di interesse.

- Insegnanti-formatori: un secondo livello è rappresentato dai docenti che, avendo partecipato già a parecchie iniziative di formazione, formano a loro volta gli altri docenti. Questi insegnanti sono coinvolti, in genere, dalle istituzioni (USP; USR, MIUR, ecc), a progettare e scrivere materiali per la formazione, sotto forma non solo di attività per gli studenti, ma di indicazioni metodologiche, di osservazioni puntuali legate ai nodi concettuali matematici e alle competenze coinvolte, in modo da legare tali attività al quadro istituzionale attuale Indicazioni per il Curricolo. Inoltre, questi insegnanti, a volte, partecipano essi stessi alla formazione in doppia veste: prima, formati dai ricercatori universitari in presenza (seminari e produzione di materiali con la componente universitaria, come ad esempio in m@t.abel), poi, formatori-tutor dei docenti ordinari coinvolti nel piano di formazione. Quindi esercitano una complessa attività di *brokering* tra diverse comunità: non solo quella della ricerca e quella degli insegnanti ordinari, ma anche quella delle istituzioni, che spesso è duplice: da una parte il Ministero, nelle sue articolazioni (USR, USP, ecc) e dall'altra l'Agenzia di formazione (ANSAS, ex-INDIRE).
- Insegnanti-ricercatori (Nuclei di Ricerca in Didattica NRD): la loro caratteristica peculiare è che partecipano a tutte le fasi di ricerca (dalla progettazione all'analisi dei dati). Sono ricercatori essi stessi, quindi da una parte conoscono e condividono gli obiettivi e la letteratura di riferimento del gruppo di ricerca, dall'altra si documentano e approfondiscono in modo autonomo e hanno un collegamento diretto con la loro classe. Un elemento caratterizzante è la duplice natura di questi insegnanti, che si può esprimere in termini di comunità di appartenenza: infatti, fanno parte sia della comunità di ricerca, sia della comunità di insegnanti e che caratterizza anche il loro intervento nella progettazione di percorsi didattici o analisi di risultati, e nella sperimentazione e osservazione in classe. Questi insegnanti possono agire come *broker* tra diverse comunità: per esempio tra la comunità dei ricercatori e quella dei formatori, o tra la comunità dei ricercatori e quella degli insegnanti ordinari, portando idee dalla ricerca nella pratica didattica e da questa di nuovo alla ricerca.

6.2 L'intreccio tra formazione e sperimentazione

Ciò che è peculiare dei progetti presentati negli esempi, è il profondo intreccio che esiste tra la formazione degli insegnanti da una parte, e la sperimentazione dall'altra. Se ripercorriamo i progetti nazionali presentati nel Cap. 2 possiamo osservare che anche in questo caso nel tempo si è osservata una evoluzione.

Per esempio, nel corso del Piano Nazionale per l'Informatica (PNI), l'intreccio con la sperimentazione nelle classi non era così forte come appare oggi nei progetti presentati nel Cap. 3 ed era una preoccupazione reale, come si evince dalla riflessione di uno dei protagonisti del PNI: *“C'è da domandarsi se questo grande impegno economico e umano che è stato il PNI abbia inciso realmente sull'insegnamento della matematica nella Scuola secondaria. Non si può rispondere “sì” in maniera generalizzata, ma neppure “no”. Certamente l'informatica, bene o male, è entrata in tutte le scuole secondarie ed argomenti nuovi, come la logica, la probabilità e la statistica sono divenuti familiari a molti. Forse i programmi non sempre sono stati attuati con l'intento metodologico che li aveva ispirati e che mirava a costruire nelle menti dei ragazzi il significato degli “oggetti” matematici più che a travasare contenuti, ma il cambiamento richiesto era a 180° e*

ciò non è di tutti e non è rapido. Forse coloro che li hanno formulati non hanno effettuato sufficienti tagli, forse gli stessi tagli proposti non sono stati colti e messi in pratica dai docenti, che tendono ad insegnare il vecchio ed il nuovo. Furono, comunque, molti i docenti che, svegliati da un profondo letargo, cominciarono a dubitare della matematica che insegnavano e del come la insegnavano. Sono, comunque, ora tanti i docenti che hanno imparato a fare una buona matematica.” (Ciarrapico, 2001)⁹¹.

Nei progetti descritti nel Cap. 3 (MO1, MO2, TO) il legame fra formazione e sperimentazione non è solo molto stretto, ma intrecciato nel senso che, grazie alle nuove tecnologie, spesso c'è uno scambio continuo in tempo reale fra quello che avviene nelle classi durante la sperimentazione e la riflessione tra insegnanti in formazione e formatori. E' questo un elemento importante perché in qualche modo evolve sia la formazione quanto la sperimentazione. Nei progetti tipo PNI o PPA degli anni '80 la relazione temporale fra formazione e sperimentazione era di tipo diacronico: prima la formazione, poi la sperimentazione. Per esempio, nel PNI le fasi della formazione erano: la partecipazione al corso di tre settimane, spalmate in un quadrimestre, in cui l'insegnante era distaccato dalle classi, quindi lo studio e la rielaborazione a casa dei materiali e delle idee, nel resto dell'anno scolastico. La sperimentazione nelle classi avveniva solo l'anno successivo, nella migliore delle ipotesi, o anche dopo.

Nei progetti attuali (nazionali come m@tabel o locali come DIFIMA, MMLab-ER, ArAl, ecc.) la relazione temporale è quasi sincronica: già durante la formazione possono partire le sperimentazioni e nello stesso tempo, in presenza o tramite piattaforme multimediali si avvia una riflessione su ciò che sta avvenendo in classe alla luce degli obiettivi della formazione. In questo modo le sperimentazioni sono condivise fra docenti che stanno sperimentando la stessa attività o attività diverse e fra questi e il docente formatore. La conseguenza di questo intreccio è una formazione che partecipa della sperimentazione e viceversa. Pertanto l'evoluzione da (P_0, p_0) a (P_1, P_0^+) risulta accelerata nei tempi: i processi di riflessione meta-didattica avvengono in tempo reale nel momento stesso della sperimentazione in classe.

Come commento a latere, vorremmo aggiungere che le modalità della formazione hanno riflesso in ogni periodo il modello teorico di apprendimento più condiviso in quel periodo.

Per esempio, negli anni 80, la formazione PNI e quella PPA aveva alla base dei materiali di riflessione utilizzati e delle attività svolte dagli insegnanti (che poi avrebbero dovuto proporre in classe agli allievi durante la realizzazione dei nuovi programmi scolastici) il modello costruttivista, inteso in senso più o meno forte. Questo modello, tipico del periodo e utilizzato a livello internazionale, non solo in Italia, viene così commentato da B. Jaworski⁹², e offre un supporto teorico per l'introduzione di metodologie di problem solving e problem posing, sia nell'apprendimento degli insegnanti in formazione, sia in quello degli allievi.:

“In a constructivist frame, common particularly in teacher education prograes in the 1980s and 1990s (Jaworski & Wood, 1999), educators recognize teachers as independent cognisers, constructing knowledge of mathematics teaching through their experiences whether in courses or classrooms and through processes of assimilation, accommodation and reflective

⁹¹ Ciarrapico, L. (2001). L'insegnamento della matematica dal passato recente all'attualità. Articolo tratto dalla relazione svolta a Cattolica il 7 ottobre 2001, in occasione del Congresso ADT (Associazione per la Didattica con la Tecnologia). Una versione ridotta di questo articolo è pubblicata su Archimede, n. 3 del 2002.

⁹² Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In: Jaworski, B., & Wood, T. (Eds.) (2008). *International handbook of mathematics teacher education. The mathematics teacher educator as a developing professional*. Vol. 4, 335-361. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

abstraction (Piaget, 1950). As a consequence, educators seek to provide relevant experiences from which teachers can construct the knowledge they need. Unlike the traditional view there is no expectation that teachers will develop knowledge as conceived by educators and this creates a source of issues as educators seek access to teachers' conceptions to perceive outcomes from teacher education initiatives. Explicit in this perspective on teacher education is that teachers see students also as constructors of knowledge: in their professional learning settings educators use well documented strategies to foster teachers' perspectives relating to students' growth of mathematics knowledge".

Nei decenni successivi, fino ad arrivare a noi, si sono fatti strada molti altri modelli di apprendimento, come dice ancora Jaworski:

“ A multiplicity of paradigms has become evident in the literature: particularly, sociocultural approaches have now become more widely used and discusses. However, the shift is not from the constructivist to the sociocultural, but rather to a recognition that different lenses on practice can afford different ways of seeing and doing, and that we can learn as a community from them all.”

In modo particolare, come fa notare l'autrice, non si tratta tanto di riconoscere un passaggio da un approccio costruttivista a uno socio-culturale, ma di notare l'importanza che via via viene data sempre in misura maggiore all'apprendimento sociale da una parte, e al valore delle esperienze percettivo-motorie, dall'altra, diciamo noi. L'influenza del percettivo-motorio nello studio dell'apprendimento viene riconosciuto internazionalmente da svariati studi, con influenze della teoria dell'*embodied cognition* che, anche se non abbracciata in toto dai didattici della matematica, viene comunque riconosciuta come dirompente rispetto a teorie più tradizionali.

Questi due paradigmi appena citati hanno avuto, nella formazione degli insegnanti, un valore decisivo, soprattutto negli ultimi anni, per motivare la svolta metodologica richiesta loro nella direzione del “laboratorio di matematica”, descritto in Matematica 2001 e 2003 come un insieme di attività e pratiche con uso di strumenti e schemi d'uso, indipendentemente dal luogo fisico in cui esse sono effettuate.

6.3 L'intreccio tra formazione e infrastrutture tecnologiche

Se prendiamo in considerazione la tabella del Cap. 2 ci rendiamo conto che negli ultimi trent'anni, come sono cambiati i progetti di formazione, le loro modalità di attuazione e i loro prodotti, parallelamente sono cambiate le infrastrutture che li hanno supportati e diffusi. In questo paragrafo vogliamo affrontare una breve digressione su tali cambiamenti, alla luce anche del dibattito che Hegedus e Moreno-Armella (2009)⁹³ hanno portato all'attenzione della comunità di ricerca, in continuità con gli studi di Kaput. Kaput era particolarmente interessato alla democratizzazione della cultura e dell'uso delle tecnologie, e alla loro diffusione spontanea e gratuita a tutti i livelli. Certamente, grazie alle infrastrutture rappresentazionali e comunicative, le prime atte a rappresentare e a elaborare dati, le seconde atte a favorire la comunicazione e la diffusione di informazione, nel tempo questa democratizzazione è sempre più facile da raggiungere.

Infatti, se pensiamo alla formazione negli anni del PNI e del PPA, le infrastrutture erano i computer, ma non essendosi ancora diffuso internet, per diffondere i materiali ci si serviva di fotocopie e dischetti (da 5_{1/4}) per lasciare materiale ai docenti, e di lavagne luminose e lucidi per presentare in

⁹³ Hegedus, S.J., & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*. 41 (4), 399-412.

aula le lezioni o le attività. Questi materiali non rendevano disponibile tutto e subito a tutti i docenti, e avevano costi ingenti.

Negli anni successivi, il progetto SeT (nel 2001) diede una svolta all'uso delle infrastrutture, perché introdusse il web come infrastruttura rappresentazionale, per diffondere le buone pratiche dei progetti premiati, ognuno di essi su sito navigabile e strutturato, e tutti insieme raccolti sul sito dell'Indire. Tale modalità di diffusione dei materiali diede la possibilità al progetto di avere un'ampia diffusione, e di essere utilizzato non solo dagli insegnanti che lo avevano progettato o sperimentato, ma anche a tutti gli altri. Per esempio, il SeT venne usato tanto nei corsi di aggiornamento in tutta Italia, quanto nelle SIS per la formazione iniziale degli insegnanti, per fare conferenze o iniziare sperimentazioni nelle scuole. Ma, pur essendo sul web, non era ancora interattivo, quindi il sito non rappresentava una infrastruttura comunicazionale.

E' con le piattaforme degli ultimi anni che i progetti possono contare su infrastrutture rappresentazionali e comunicative, e quindi realizzare effettivamente quella che Hegedus e Moreno-Armella chiamano "*representational expressivity*", ovvero avere una comunicazione che viene profondamente influenzata dall'uso della piattaforma. La piattaforma offre infatti modalità di comunicazione sincrone (chat, collegamenti sincroni, videoconferenze) e asincrone (forum, messaggi, mail, attività di vario tipo), le quali condizionano il modo di interagire e comunicare delle persone. La loro idea è che: « *For us, culture is the co-evolution of digital media and expressive communicative actions* ».

Questo intreccio tra interazione e infrastruttura tecnologica usata si vede nei nuovi progetti, da m@t.abel a m@t.abel-PON, da DIFIMA a Quarini, e in parte anche nel progetto MMLab-ER, che fanno uso di queste piattaforme in modo sincrono e asincrono, per insegnanti o per studenti o per entrambi. Si osserva infatti, per esempio, che gli studenti in forum e chat prediligono il modo di comunicare che usano abitualmente negli sms, non quello che usano nei temi o nelle relazioni richieste a scuola.

6.4 L'intreccio tra formazione e istituzioni

Nei progetti di formazione degli insegnanti il ruolo delle Istituzioni della scuola sono spesso determinanti per la riuscita del progetto: tanto più il numero di docenti coinvolti è ampio, tanto maggiore è il ruolo delle istituzioni scolastiche nella gestione del progetto. Nei progetti PNI e PPA e anche m@t.abel l'istituzione, in questo caso il MIUR, è l'ideatore e organizzatore del programma di formazione. Il MIUR, nei progetti nazionali, agisce in collegamento con le sue articolazioni territoriali (Uffici Scolastici Regionali – USR–, Uffici scolastici Provinciali –USP–, IRRE, fino al Dirigente Scolastico), che giocano un ruolo importante per la diffusione sul territorio del progetto. Ad esempio, uno degli anelli deboli di m@t.abel è stato il coinvolgimento effettivo degli USR. Solo laddove si sono trovate persone (ad esempio ispettori) sensibili al problema, il progetto ha avuto un impatto nelle scuole del territorio, in quanto esse sono state in grado di coinvolgere i dirigenti scolastici, che hanno a loro volta coinvolto i docenti di matematica della loro scuola. Il progetto m@t.abel PON finanziato dai fondi strutturali europei e rivolto alle scuole delle quattro regioni dell'Obiettivo Convergenza, proprio perché debitamente accompagnato sul territorio, non ultimo un investimento economico non indifferente, sta avendo in queste regioni un impatto considerevole.

In altri progetti, come nel caso del progetto regionale MMLab-ER (Laboratori delle Macchine Matematiche per l'Emilia Romagna, la rosa degli attori istituzionali è ancora più complessa: Assessorato Regionale alla scuola, come committente, USR dell'Emilia Romagna e IRRE Emilia Romagna come anello di congiunzione con le scuole, Centri provinciali per gli insegnanti (Centri pedagogici) come sede fisica dei laboratori e responsabili del laboratorio di matematica e Università di Modena e Reggio Emilia (nella veste dei responsabili scientifici) come ideatore del progetto. In

questo caso il “radicamento sul territorio ha operato come catalizzatore e promotore di iniziative oltre il progetto in sé e sono stati favoriti scambi, contatti e sinergie tra le diverse istituzioni, con l’obiettivo appunto di fare sistema nella Regione Emilia Romagna”⁹⁴.

Il progetto DIFIMA, ad esempio, che ha una articolazione territoriale altrettanto complessa perché agisce a livello regionale tramite la piattaforma “DIFIMA in rete” e ogni due anni a livello nazionale tramite il convegno DIFIMA (ora alla quinta edizione), vede anch’esso un dialogo complesso con le istituzioni. Da una parte, l’Università, presente come Facoltà di Scienze MFN e come Dipartimento (e fino a tre anni fa anche come Scuola di Specializzazione), dall’altra, la Regione Piemonte (presente con sostegno finanziario fino a due anni fa, con la giunta precedente, non con quella attuale) e la Provincia di Torino. Un supporto costante e un sostegno finanziario significativo è venuto proprio dalla Provincia, che ha colto la ricchezza del progetto, il coinvolgimento di molti insegnanti (sulla piattaforma oltre 1200) e i risultati in termini di formazione permanente. Tanto è che la Provincia ha messo a disposizione del progetto anche delle risorse umane, non solo finanziarie, e anche degli spazi, dei materiali e la loro stampa.

Il progetto Quarini invece procede con un dialogo diretto tra le diverse figure coinvolte (ricercatori universitari⁹⁵, e i laureandi che si avvicinano) e i dirigenti scolastici che partecipano, finanziando talvolta alcune iniziative, e naturalmente i docenti. Quindi procede per lo più spontaneamente e volontariamente per l’impegno dei vari soggetti coinvolti. L’istituzione è una scuola o una rete di scuole che si fa carico di iniziare un’attività di riflessione, cambiamento e discussione sull’insegnamento e l’apprendimento della matematica. Le prove Invalsi sono sicuramente una motivazione indiretta al sorgere di tali iniziative.

Un altro elemento da prendere in considerazione è il senso di appartenenza ad una comunità che può fare la differenza. Un esempio interessante è rappresentato dagli insegnanti formati nel PNI. Dopo la formazione e la sperimentazione nella sua classe, l’insegnante poteva, tramite richiesta formale al collegio dei docenti e conseguente richiesta della scuola al Ministero, ottenere di insegnare in una classe con sperimentazione PNI, nell’anno scolastico successivo. Una delle problematiche che si ebbero fu il senso di isolamento in cui si sentiva il docente o il gruppo di docenti che iniziavano classi sperimentali, a distanza dal corso di formazione seguito. A tal proposito, il Ministero cercò nei primi anni di intervenire sul territorio, tramite gli IRRSAE, con brevi corsi di “appoggio e sostegno alla sperimentazione”, dedicati proprio a questi insegnanti. Le difficoltà dei docenti risiedevano soprattutto nel fatto che, mentre durante il corso si sentivano “comunità” e lavoravano insieme per 40 ore ogni settimana, tutte in presenza, confrontandosi tra loro e con i formatori, una volta finito il corso dovevano implementare da soli nelle loro classi i programmi sperimentali. Le scuole in cui la sperimentazione fu più efficace furono proprio quelle che riuscirono a ricreare il gruppo di docenti che lavoravano insieme, come comunità, condividendo obiettivi, attività, contenuti dei nuovi programmi sperimentali. Le caratteristiche di questa formazione furono le stesse che si ebbero per gli insegnanti della scuola primaria nel PPA.

Un altro esempio è rappresentato dai corsi di Viareggio: gli insegnanti partecipanti venivano distaccati dall’insegnamento per due settimane, in cui partecipavano a tempo pieno alla formazione, a Viareggio, su un tema specifico (che poteva essere la geometria, o la probabilità e la statistica, o l’algebra). Il senso di appartenenza alla comunità in quelle due settimane era molto forte e si sono creati amicizie e gruppi di lavoro duraturi nel tempo. Ma l’insegnante, una volta tornato nella realtà della propria scuola, difficilmente riusciva a condividere materiali e attività con il resto dei colleghi.

⁹⁴ Bartolini Bussi, M.G. (2010) Il laboratorio di matematica: fare sistema in Emilia Romagna. In Martignone, F (Ed) Scienze e Tecnologie in Emilia Romagna- Azione 1, Tecnodid Editrice, Napoli.

⁹⁵ Robutti e Armano

Quindi poteva sentirsi isolato e solo in qualche caso riusciva a fare attività di aggiornamento e formazione nei confronti di altri docenti.

7. I ricercatori in didattica della matematica come intellettuali: origini, nascita e sviluppi.

“La storia [...] degli avvenimenti è una sorta di agitazione in superficie, scandita da oscillazioni rapide e nervose, da episodi clamorosi che, tuttavia, non sono gli unici importanti e di certo si capiscono davvero e profondamente solo sullo sfondo delle vicende meno impressionanti ma più incisive della storia naturale e sociale dei gruppi umani, con i loro modi di vivere e sopravvivere, le attività economiche e i loro rapporti e le loro associazioni”.
(Ferdinand Braudel, *Il Mediterraneo e il mondo mediterraneo nell'età di Filippo II*)

Ricordavamo nel capitolo 4 che si possono studiare “i sistemi didattici” sia ad un livello macro, nel lavoro di scambio della “noosfera” o nell’interfaccia tra le scuole e la società nel suo insieme, dove si concepiscono l’organizzazione, i contenuti ed il funzionamento del processo cognitivo, sia ad un livello prevalentemente micro (tipicamente i fenomeni didattici in classe). La dicotomia micro/macro introduce certamente una dimensione per così dire spaziale nei fenomeni studiati (Chevallard parla di dimensioni locali, regionali, globali delle praxeologie⁹⁶). Ma la dicotomia micro/macro introduce anche scale temporali diverse per analizzare i fenomeni didattici: mentre è possibile e forse necessario studiare a livello micro-temporale l’insegnamento-apprendimento in classe, per studiare sistemi didattici come la scuola e le sue articolazioni istituzionali è necessario usare una scala temporale basata su un’unità più grande, scandita ad esempio dai lustri e dai decenni.

Le analisi fatte finora si sono concentrate soprattutto su scale temporali medio-piccole (la trasposizione meta-didattica coinvolge i microtempi delle praxeologie meta-didattiche puntuali nel loro evolversi nel medio-tempo di un progetto di formazione). È però importante anche considerare una scala temporale più ampia per cogliere con questa lente l’evoluzione dei sistemi didattici che abbiamo considerato: essenzialmente l’evoluzione nel lungo periodo delle praxeologie meta-didattiche delle comunità di indagine in cui è articolata la comunità dei ricercatori in didattica della matematica. Abbiamo già cominciato a fare così nel capitolo precedente analizzando alcune componenti interne ed esterne dell’evoluzione delle praxeologie.

Useremo una citazione per descrivere la nostra situazione a questo punto: essa va presa “cum grano salis”, vista l’enorme differenza qualitativa e quantitativa dei fenomeni che consideriamo noi e cui ci si riferisce nella citazione. Ma, fatta una considerevole riduzione di scala, la citazione calza a pennello. Essa è presa dal volume di Braudel, *Il Mediterraneo e il mondo mediterraneo nell'età di*

⁹⁶ Un complexe de techniques, de technologies et de théories organisées autour d’un type de tâches forme une organisation praxéologique (ou praxéologie) ponctuelle. L’amalgamation de plusieurs praxéologies ponctuelles créera une praxéologie locale, ou régionale ou globale, selon que l’élément amalgamant est, respectivement, la technologie, la théorie ou la position institutionnelle considérée. [Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999), p. 83].

Filippo II (tradotto impropriamente in italiano con *Civiltà e Imperi del Mediterraneo nell'età di Filippo II*) e recita:

“La storia [...] degli avvenimenti è una sorta di agitazione in superficie, scandita da oscillazioni rapide e nervose, da episodi clamorosi che, tuttavia, non sono gli unici importanti e di certo si capiscono davvero e profondamente solo sullo sfondo delle vicende meno impressionanti ma più incisive della storia naturale e sociale dei gruppi umani, con i loro modi di vivere e sopravvivere, le attività economiche e i loro rapporti e le loro associazioni”.

Come è noto, Braudel distingue tre diverse storie a seconda delle scale temporali usate per analizzare i fenomeni storici:

- a) una storia quasi immobile, le cui fluttuazioni sono quasi impercettibili, che riguarda le relazioni tra l'uomo e l'ambiente;
- b) una storia lievemente più mossa, la storia sociale, riguardante i gruppi umani;
- c) la storia effettiva, quella dell'agitazione di superficie.

Fatte le debite proporzioni, finora noi ci siamo interessati prevalentemente del livello c), ma la realtà effettuale ci spinge verso il livello b), vista la lontananza temporale delle radici delle praxeologie che risultano nelle comunità di indagine attuali.

È quindi importante usare una scala temporale meno fine per passare dall'“agitazione di superficie” studiata finora alla “storia sociale” della nostra comunità. In effetti, già la suddivisione dei “fatti” introdotti nei capitoli 2 (il filo della storia dei progetti nazionali di formazione) e 3 (i tre esempi locali di formazione) è stata fatta per preparare un'analisi che tenga conto dei due livelli, a) e b). Ovviamente nella ricerca dei legami tra i due occorrerà tenere conto dell'analisi dell'agitazione di superficie sviluppata nei capitoli 4, 5, 6 secondo una scala temporale fine.

Questa analogia con lo schema di Braudel descrive bene la lettura che noi diamo di Chevallard e della sua TAD (e crediamo di non essere lontani in questo dal suo modo di vedere i fenomeni didattici). Per usare il suo linguaggio, stiamo passando dalla dimensione locale (al massimo regionale) a quella globale con un conseguente cambiamento dell'ordine di grandezza della scala temporale.

La meta-trasposizione didattica ci ha permesso di descrivere abbastanza compiutamente i progetti esaminati a livello micro e medio. Manca ancora l'analisi a livello macro (nei due sensi precisati sopra: “spaziale” e temporale). Essa ci potrà aiutare a risolvere il problema posto nell'Introduzione e che qui ricordiamo:

Riflettendo sulle nostre PRARIDID ci siamo così resi conto di quanto forte sia divenuto il loro intrecciarsi con questa “componente istituzionale”, chiamiamola provvisoriamente così. Il significato di costrutti come la MKT di Ball et al. o della “Ricerca per l'innovazione” del nostro quadro del '91 ne risulta profondamente mutato. I tre gruppi di ricerca hanno maturato questa consapevolezza e hanno sentito il bisogno di darsi degli strumenti di lettura opportuni per entrare dentro a questi nuovi aspetti delle PRARIDID.

Ricordiamo anche la soluzione che daremo, così riassunta nell'Introduzione:

Approfondendoli, ci si è accorti come questi due aspetti dell'approccio “esterno” ci portano a considerare due nuove componenti:

- (c) **le istituzioni** (locali, nazionali) e il rapporto delle nostre PRARIDID con queste;
- (d) il definirsi della comunità dei ricercatori in didattica della matematica come gruppo di **intellettuali** che interagisce con le istituzioni.

Queste due componenti non sono presenti da oggi, ma l'analisi che faremo evidenzierà un'evoluzione di queste componenti esterne, profondamente intrecciata con quelle interne, descritte nel precedente quadro della Ricerca per l'Innovazione. Ne risulterà un panorama più complesso, che comprende certamente il vecchio quadro, nonché i vari elementi propri della MKT (Fig. 1.1), che chiameremo Ricerca didattica di innovazione nelle istituzioni.

Il nostro problema diventa: che cos'è la Ricerca didattica di innovazione nelle Istituzioni?

Si faceva formazione anche molti decenni fa nei nostri gruppi (i famosi “corsi di aggiornamento”): però quanto appare ora dà l'impressione di qualcosa di molto diverso e di enormemente più complesso e sofisticato. Ma questo è solo un aspetto, abbastanza naturale, dell'evoluzione nel tempo di una disciplina. C'è anche un altro aspetto che caratterizza la nostra evoluzione ed è, a nostro parere, il macro-fenomeno più rilevante.

Infatti, il rapporto tra le nostre comunità e le comunità istituzionali è cambiato profondamente nel corso dei decenni. I nostri progetti attuali di formazioni degli insegnanti sono profondamente diversi da quelli di 30-40 anni fa. Con questo non si vuol dire la banalità che la ricerca didattica è nel frattempo “andata avanti” e quindi si trasmettono nozioni nuove e diverse da quelle di quegli anni. Si vuol dire invece che è il nostro rapporto stesso con le istituzioni ad essere profondamente mutato. Ricordando, la definizione di Chevallard di oggetto già data nel cap. 4⁹⁷, ciò significa che sono profondamente mutate le nostre praxeologie didattiche e quindi la componente essenziale delle nostre comunità di indagine.

La nostra tesi è che la nostra comunità si è venuta identificando sempre più come comunità di intellettuali rispetto alle istituzioni e che quindi i “contratti istituzionali” di cui parla Chevallard (vedi 5.1) in cui si inseriscono conoscenza e pratiche proprie della nostra ricerca assumono un rapporto mutato con le istituzioni. È proprio questo mutato rapporto che definisce la natura della Ricerca didattica di innovazione nelle istituzioni.

Per avere un quadro completo occorrerebbe analizzare sia i rapporti con le istituzioni italiane sia quelli con le “istituzioni” all'estero (comunità di ricerca, associazioni, istituti di ricerca, ecc.). Qui ci limiteremo a uno studio della prima componente e ad alcuni cenni alla seconda, rimandando l'analisi di quest'ultima (pur cruciale) a una successiva ricerca.

Per precisare il discorso e legare la (macro) analisi che stiamo intraprendendo con quella (micro) sviluppata nei precedenti capitoli, abbiamo bisogno di un ulteriore concetto teorico di riferimento, cioè la definizione di “intellettuale”, preso dagli studi di sociologia. Ovviamente non vogliamo rubare il mestiere a chi se ne occupa professionalmente e ci limiteremo a considerare i riferimenti contenuti nelle seguenti opere e in alcune pubblicazioni in esse citate, ampiamente sufficienti per i nostri scopi:

A. Gramsci, *Gli intellettuali e l'organizzazione della cultura*, Torino 1949.

N. Bobbio, *Intellettuali*, Enciclopedia del Novecento. Scaricato il 10-11-2011 da: www.treccani.it/enciclopedia/intellettuali_%28Enciclopedia_Novecento%29/.

Z. Bauman & B. Bongiovanni, *Intellettuali*, Enciclopedia Treccani delle Scienze Sociali. Scaricato il 10-11-2011 da: www.treccani.it/enciclopedia/intellettuali_%28Enciclopedia-delle-Scienze-Sociali%29/.

Chomsky, N. A., *American power and the new mandarins*, New York 1969³ (tr. it.: *I nuovi mandarini. Gli intellettuali e il potere in America*, Torino 1969).

Luciano Gallino, *Sociologia dell'economia e del lavoro*, Utet, Torino, 1989, p. 204, voce “Intellettuale”.

P. Battista, *Il partito degli intellettuali. Cultura e ideologie nell'Italia contemporanea*, Bari, 2001.

Anche qui procederemo per punti.

1. Cominciamo col precisare che cosa si intende per **intellettuale**. Tutti gli studiosi esperti dell'argomento (da Gramsci a Battista) concordano nel dire che la definizione di intellettuale deve fare riferimento non tanto al tipo di lavoro che si svolge (manuale o meno) quanto alla funzione che si esercita e che comunque può essere più o meno ampia “*secondoché vi si*

⁹⁷ «Un oggetto esiste dal momento in cui una persona X (o una istituzione I) riconosce questo oggetto come esistente (per essa). Più esattamente, si dirà che l'oggetto O esiste per X (rispettivamente per I) se esiste un oggetto, rappresentato da R(X,O) (rispettivamente R(I,O)) e detto relazione personale da X ad O (rispettivamente relazione istituzionale da I ad O)» (Chevallard, 1992, p. 9).

comprendano soltanto coloro che fanno opera di produzione artistica o letteraria o scientifica, o anche coloro che trasmettono il patrimonio culturale acquisito o applicano invenzioni o scoperte fatte da altri, i creatori o i commentatori, o, per usare la distinzione weberiana, i profeti, coloro che annunziano il messaggio, o i sacerdoti, coloro che lo trasmettono". (Bobbio, cit. §2). Qualunque sia l'ampiezza della definizione di intellettuale che noi consideriamo, certamente essa ricomprende i ricercatori in didattica della matematica.

2. In genere si distinguono poi i cosiddetti **"intellettuali ideologi"** e gli **"intellettuali esperti"**: *"gli ideologi sono coloro che elaborano i principi in base ai quali un'azione si dice razionale in quanto conforme a certi valori proposti come fini da perseguire; gli esperti sono coloro che suggerendo le conoscenze più adatte per raggiungere un determinato fine fanno sì che l'azione che vi si conforma possa dirsi razionale secondo lo scopo"*. (Bobbio, cit., § 3).

Noi useremo entrambe le categorie nella nostra analisi.

3. Gli intellettuali costituiscono **diverse comunità**, sempre più parcellizzate e raggruppanti intellettuali sempre più "specifici". Infatti la figura dell'intellettuale è cambiata nel tempo e il processo di cambiamento è così schematizzato da Bongiovanni (cit., § 5 della II parte): *"Sembra però che si possa dire, seguendo Foucault⁹⁸, che l'intellettuale portatore in quanto tale di valori universali diventa tanto più obsoleto quanto più tende a occupare posizioni specifiche e a installarsi nei saperi socialmente utili che la società complessa organizza e dispiega secondo una strategia diffusiva e non necessariamente universalizzante. L'intellettuale 'universale' tende cioè a monumentalizzarsi e a museificarsi proprio mentre l'intellettuale 'specifico' si afferma in modo molecolare: inoltre la forza di gravità delle competenze attrae inevitabilmente il letterato-scienziato dei tempi passati trasformandolo in 'esperto', vale a dire in operatore della scienza e della cultura che si professionalizza nella scuola, negli ospedali, nei laboratori, nelle pubbliche amministrazioni, nelle aziende, nelle pratiche organizzative, nelle arti, nel mondo del commercio e del business, nella ricerca, nei mass-media. L'esperto, tuttavia, non è l'erudito autosegregatosi o il 'competente apolitico': racchiude potenzialmente, infatti, disperdendosi nei mille rivoli della microfisica sociale e politica, la tensione, frammentata e insieme moltiplicata, verso la giustizia e la verità che era propria dell'intellettuale 'universale'. Questa tensione, peraltro, non è facilmente riconoscibile, talvolta è muta, talvolta è nascosta tra le pieghe del tessuto civile"*.

4. **Come studiare una comunità di intellettuali.** Useremo uno strumento metodologico fondamentale dell'analisi che Gramsci fa degli intellettuali in alcuni dei suoi Quaderni dal Carcere nel 1932⁹⁹ e che è alla base della definizione stessa che abbiamo dato di intellettuale (accettata ancora oggi dagli studiosi di questo argomento).

Scriveva Gramsci (op. cit., p. 6) discutendo l'ampiezza che può avere il termine intellettuale:

"Si può trovare un criterio più unitario per caratterizzare ugualmente tutte le diverse e disparate attività intellettuali e per distinguere queste nello stesso tempo e in modo essenziale dalle attività degli altri raggruppamenti sociali? L'errore metodico più diffuso mi pare quello di avere cercato questo criterio di distinzione nell'intrinseco delle attività intellettuali e non invece nell'insieme del sistema di rapporti in cui esse (e quindi i gruppi che le impersonano) vengono a trovarsi nel complesso generale dei rapporti sociali".

È questa chiave di lettura metodologica che noi useremo per leggere la nostra macro-storia, cioè come si è evoluta la nostra comunità di ricercatori in relazione al sistema di rapporti sociali e

⁹⁸ Foucault, M., *Microfisica del potere: interventi politici* (a cura di A. Fontana e P. Pasquino), Torino 1977.

⁹⁹ Come è noto, Gramsci rifiuta la tesi, avanzata in quegli anni da K. Mannheim (1929), che egli peraltro dal carcere non poteva conoscere, di un unico ceto degli intellettuali, e distingue due gruppi contrapposti, quello degli intellettuali tradizionali e quello degli intellettuali organici.

istituzionali in cui essa si è via via trovata ad operare. Essa è in perfetta consonanza con il quadro della TAD. Là studiavamo come evolveva il rapporto dalle PRARIDID alle PRARIFOR rispetto a vari rapporti istituzionali; qui studiamo l'evoluzione dei rapporti sociali della comunità rispetto alle istituzioni. Abbiamo cambiato la granularità di lettura: al centro dello studio sono sempre i rapporti con le istituzioni; ora però non studiamo l'evoluzione delle praxeologie meta-didattiche all'interno di questi rapporti (micro livello), ma analizziamo l'evoluzione stessa di tali rapporti quali rapporti sociali e di potere fra istituzioni e comunità dei ricercatori nel suo insieme (macro livello).

La tesi fondamentale di questo capitolo è che la nostra comunità quali intellettuali è passata dalla funzione di esperti (a volte nemmeno questo) a quella di ideologi.

Conseguentemente definiremo la Ricerca didattica di innovazione nelle Istituzioni, come quelle praxeologie meta-didattiche proprie di una comunità di indagine che si pone come comunità di intellettuali ideologi rispetto alle Istituzioni.

Considereremo come istituzioni in gioco, da un lato le nostre comunità di indagine, dall'altro le varie istituzioni scolastiche (locali, regionali, nazionali) con le quali abbiamo interagito. Alcuni commenti sono già stati fatti nel capitolo 6 (§6.4 L'intreccio tra formazione e istituzioni). Qui ci concentreremo sul rapporto tra la nostra comunità e le istituzioni nazionali, soprattutto il Ministero dell'Istruzione (variamente indicato in questi anni: MPI, MURST, MIUR). Naturalmente si tratta di un discorso diacronico (macro livello temporale). Argomenteremo la tesi analizzando l'evoluzione del tipo di rapporti tra i due blocchi di istituzioni nel corso degli anni, scandita dai fatti elencati nella scala temporale del capitolo 2. Evidenzieremo così un filo rosso che collega molti dei fatti elencati nel capitolo 2 e che segna la nostra evoluzione come comunità di intellettuali e un conseguente profondo cambiamento delle nostre praxeologie meta-didattiche.

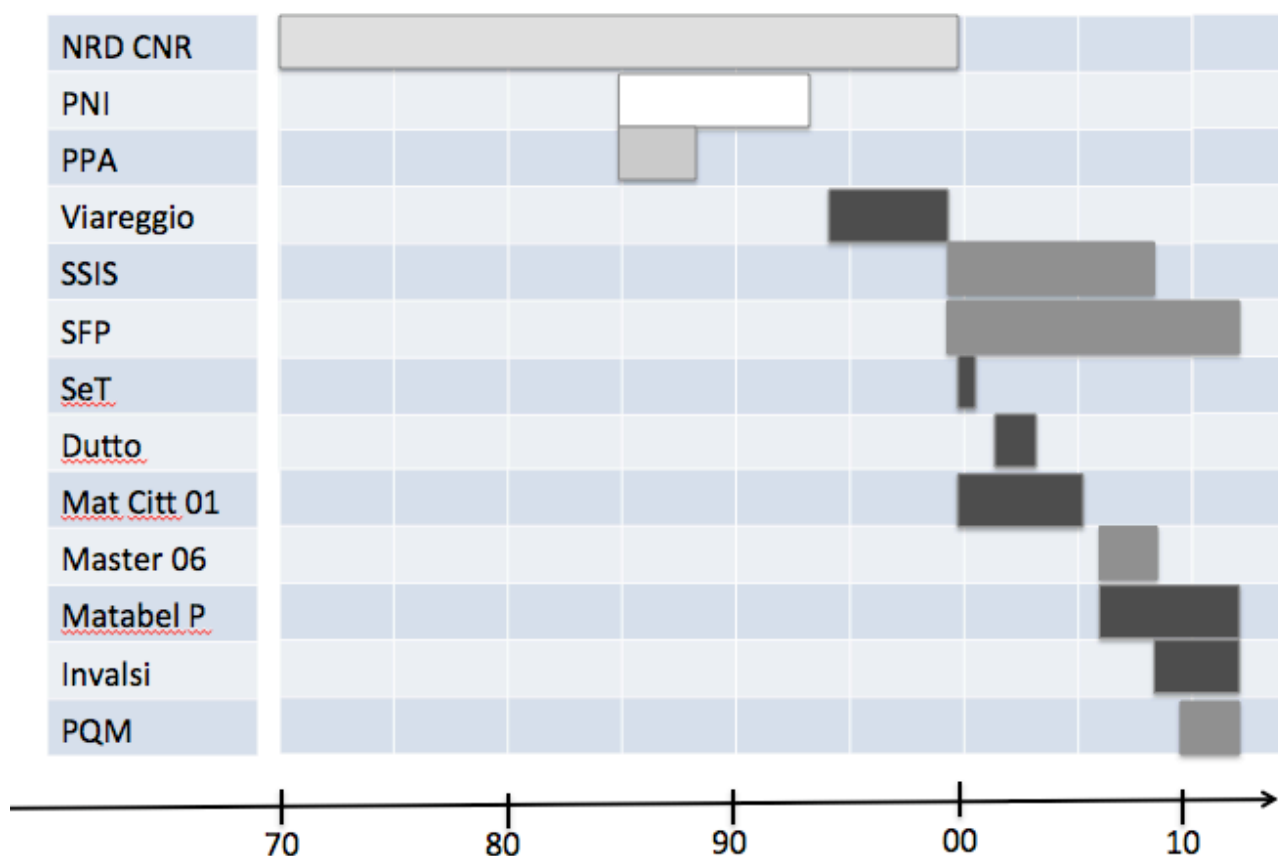


Tabella 7.1

Il filo che descriveremo è illustrato dalle Tabelle 7.1, 7.2. Nella prima rappresentiamo i “fatti” del cap. 2 nella loro durata temporale contrassegnando altresì il rapporto tra intellettuale ideologo e intellettuale esperto: i toni diversi di grigio indicano il coinvolgimento del ricercatore come intellettuale ideologo rispetto alle istituzioni (più il colore è marcato, maggiore è la funzione di incidenza ideologica rispetto alle istituzioni). Naturalmente si tratta di un’indicazione puramente qualitativa. Nella Tabella 7.2, oltre al grafico precedente, è riportato un grafico che indica il livello dell’incidenza della funzione ideologica rispetto al numero di insegnanti coinvolti nell’iniziativa: ad esempio le scuole di Viareggio segnano un primo forte coinvolgimento della nostra comunità a livello di progettazione paritaria col ministero e così via, come descriveremo sotto. Maggiore è il numero di insegnanti, più alto è il valore assegnato. Ovviamente anche questo grafico dà solo un’idea qualitativa del fenomeno.

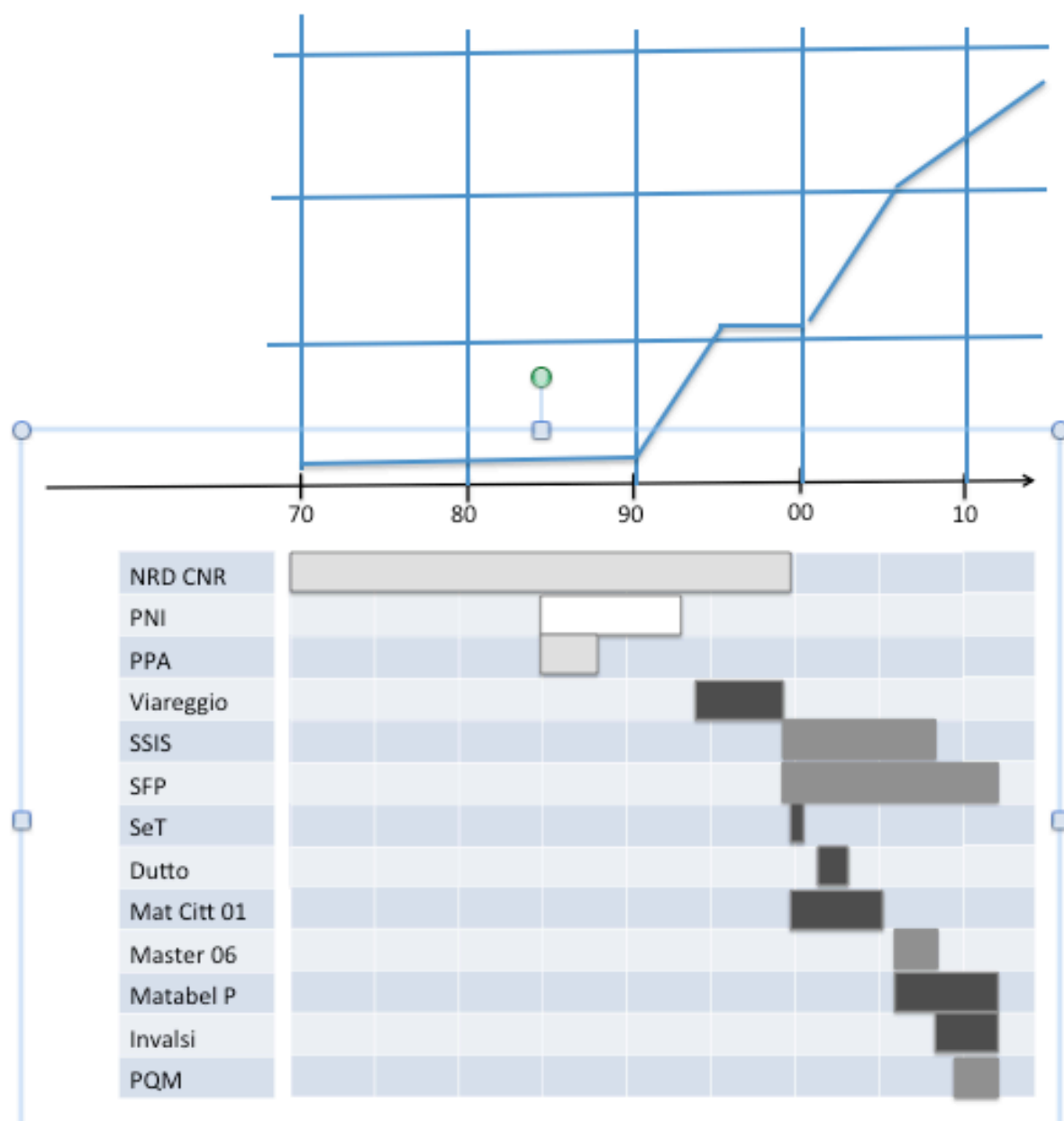


Tabella 7.2

In generale, si può osservare che fino al 1994 (scuole di Viareggio) la presenza dei ricercatori della nostra comunità in progetti a forte impatto istituzionale come il PNI, il PPA, il lavoro sui

nuovi programmi per le medie ('79) e poi le elementari ('85) è al massimo nella funzione di esperti (con l'eccezione di qualche "grande intellettuale" "ideologo", ad esempio G. Prodi o F. Speranza, su quali torneremo alla fine) e in genere di "sacerdoti" nel senso weberiano del termine e non di "profeti" (ideologi progettisti). I momenti più alti di intreccio con l'esterno si hanno con iniziative editoriali molto importanti (ad es. i Volumi del progetto Prodi, pietra miliare per tutti noi: ma qui di nuovo occorre fare un discorso a parte sulla figura di Prodi come grande intellettuale, che rimandiamo a dopo).

Le nostre funzioni cambiano invece con la scuola di Viareggio, in cui la nostra comunità è coinvolta anche nel momento di progettazione, anzi il progetto è proposto da noi al Ministero ed è reso fattibile grazie alla precedente stesura di un protocollo d'intesa tra UMI e MPI, firmato nel 1993. È un primo momento chiave in cui noi certo siamo coinvolti anche come esperti ma la nostra funzione comincia a cambiare, evolvendo positivamente verso modalità più progettuali in forma paritaria con l'istituzione ministero, anche grazie all'intelligenza di alcuni suoi funzionari, che dall'altra parte dell'istituzione lavorano in sinergia con la comunità dei ricercatori. È interessante notare il ruolo mediatore e fortemente propositivo svolto dalla CIIM in quegli anni: essa funge da anello di congiunzione tra la comunità dei ricercatori in matematica e il Ministero (ad esempio anche l'iniziativa dei comandi presso di insegnanti presso i NRD opera in questa direzione: un'altra componente esterna che entra istituzionalmente all'interno della nostra comunità). Precedentemente, per esempio con le vicende dei nuovi programmi essa aveva avuto un ruolo diverso.

Un ulteriore passo decisivo verso il coinvolgimento della nostra comunità a livello progettuale e quindi della nostra evoluzione da esperti a ideologi si ha con il Progetto "La Matematica del Cittadino"¹⁰⁰. In esso molti ricercatori provenienti dalle nostre comunità di pratiche ricerca e anche dalle comunità di pratica e di ricerca del PNI confluiscono nella progettazione e produzione non solo di un curriculum innovativo ma anche di moltissimi (200) esempi di attività didattiche, provenienti in gran parte dalle attività dei vari gruppi.

Le PRARIDID di queste comunità di indagine sono rese disponibili alle comunità di pratica delle scuole. Il prodotto è frutto dell'interazione positiva tra il Ministero e le nostre comunità, di nuovo con la CIIM che funge da mediatore istituzionale tramite il citato Protocollo d'intesa. L'interazione istituzionale tra l'altro si allarga in quanto il Protocollo e la collaborazione si estende anche alla Società Italiana di Statistica. Nel progetto le funzioni dei gruppi sono certo ancora di esperti, ma molti ricercatori provenienti da questi assumono una funzione decisamente progettuale.

Il passo successivo è il Progetto m@t.abel, in cui la collaborazione col Ministero diventa paritaria a livello di progettazione e il numero di insegnanti direttamente coinvolti aumenta in modo decisivo. Nel CTS che dirige scientificamente il progetto la percentuale di persone che provengono dai Nuclei di Ricerca didattica è superiore al 50%. La cosa è ancora più evidente se si esaminano i dati relativi alla provenienza dei ricercatori che collaborano a livello progettuale con l'INVALSI per la preparazione delle prove di verifica nazionali (vedi Tabella 7.3).

Insegnanti e ricercatori coinvolti nelle prove INVALSI			
Attività	Totale	NRD, PNI, m@t.abel*	%
Autori domande	130	75	57%
Coordinamento livelli scolari	25	14	56%

¹⁰⁰ Nelle Indicazioni per il curriculum (2007) del primo ciclo i riferimenti a *Matematica per il cittadino* sono espliciti (vedi l'idea di laboratorio, l'attenzione all'argomentazione in ambito matematico, l'uso degli strumenti, ecc.)

Coordinamento nazionale	6	5	83%
*Abbiamo considerato solo i tutor m@t.abel e non i docenti che sperimentano nelle loro classi il progetto			

Tabella 7.3

La funzione “ideologica” della nostra comunità è realizzata in forma molto decisa. Essa si è ormai mutata ed oggi esiste una comunità che non è più quella dei NRD, ma è un amalgama di persone provenienti dai progetti che hanno le loro radici in quelle lontane ricerche, ma che rappresentano pratiche e riflessioni provenienti da tutti i progetti che abbiamo ora rapidamente esaminato: PNI, Matematica per il Cittadino, m@t.abel, m@t.abel PON. Ognuno di questi ha visto processi di trasposizione meta-didattica fra le varie comunità di pratica e di indagine e la successione di innumerevoli conversioni tra praxeologie meta-didattiche diverse. Queste rappresentano la storia “di superficie”, ma la storia nel lungo periodo è rappresentata dalla lenta evoluzione della nostra comunità. Dopo un periodo, per così dire, di incubazione, durato più di vent’anni, in cui però si è lavorato forse inconsciamente a porre le basi per i futuri sviluppi, essa ha poi cominciato ad evolvere per l’azione di forti componenti esterne: interagendo con esse in questi ultimi quindici anni si è avuta una profonda modificazione strutturale, che abbiamo compendiato con il motto: *da intellettuali esperti a intellettuali ideologi*.

Proprio per questo mentre le nostre PRARIDID agli inizi degli anni Novanta erano descrivibili con gli ingredienti (ABCD) della Ricerca per l’innovazione, oggi sono profondamente mutate (PRARIFOR) e le possiamo descrivere come *Ricerca didattica di innovazione nelle Istituzioni*, secondo la definizione data sopra.

Ovviamente il quadro delineato non è così lineare. Ad esempio, un elemento sempre delicato è il tipo di rapporto tra la comunità dei ricercatori in didattica della matematica e quella dei matematici professionisti, che presenta luci ed ombre. Anche qui si possono vedere degli elementi dinamici positivi, che hanno segnato una maggiore collaborazione fra le due comunità. Ne ricordo tre. Il lavoro nelle SSIS e il progetto Lauree Scientifiche hanno visto talvolta un lavoro comune in cui la MKT è stata al centro di discussioni tra le due comunità e il prodotto è stato una serie di pratiche didattiche e di elaborazioni meta-didattiche che hanno anche presentato elementi di originalità condivisa. Un altro segnale positivo è stato dato dalla presenza di una conferenza plenaria dedicata alla didattica all’ultimo Convegno UMI (Bologna, 2011). Uno dei relatori a questo seminario ricorda che anni fa si è riusciti con una certa fatica a ottenere “solo” delle conferenze sub-plenarie (le cosiddette conferenze a cura della CIIM) di carattere didattico: la novità di quest’anno rappresenta un progresso, perché sembra essere riconosciuto uno spazio non occasionale al settore MAT04 (con storia e didattica in alternanza) delle discipline “matematiche” che definiscono il quadro degli ambiti nella progettazione delle conferenze plenarie dei Convegni UMI.

È opportuno ricordare che il rapporto delle comunità dei matematici (didattici o meno) con l’Istituzione Ministero è comunque sempre assai delicato: vi si intrecciano anche componenti esterne di natura politica, che influenzano variamente e in modo complesso il suo concreto procedere.

Un’altra componente non indifferente è la crescita della nostra comunità all’interno della comunità internazionale dei math educators, sia come presenza attiva a convegni internazionali, sia come presenza in comitati di importanti associazioni o istituzioni internazionali (ERME, PME, ICMI, CIEAEM, ...), sia nei progetti di ricerca internazionali ed europei. È al di là degli obiettivi di questo lavoro considerare questo aspetto e lo rimandiamo a un’estensione della presente ricerca.

Il filo rosso che abbiamo sinteticamente illustrato è emerso riconsiderando la nostra storia, stimolati dalla sensazione di incompletezza avvertita mentre studiavamo il quadro della MKT e rileggeavamo il nostro vecchio quadro ABCD. Dapprima abbiamo riconsiderato le nostre attività più recenti e trovato nella trasposizione meta-didattica una lente opportuna per descrivere la dinamica di tutte le principali componenti, sia interne sia esterne, che sono in gioco nei nostri progetti di formazione

degli insegnanti. Conseguentemente siamo riusciti a focalizzare le somiglianze e le differenze col quadro della MKT (vedi capitolo 4). Successivamente abbiamo dato voce al bisogno, che emergeva da tutte le nostre esperienze, di chiarire il legame tra queste e il nostro passato, spiegando il cambiamento che avvertivamo in forma precisa al di là delle impressioni soggettive. Per questo abbiamo sviluppato l'analisi qui descritta, che ha portato alla definizione di una nuova forma di ricerca didattica (non più per l'innovazione tout court, ma di innovazione nelle istituzioni), legando così le esperienze più attuali con il nostro passato. Quindi la frase di Dumas¹⁰¹ posta come incipit ci è parsa particolarmente adatta a descrivere il senso della ricerca fatta per questo seminario.

Ci sono ancora degli elementi della nostra storia da inserire nel quadro abbozzato. È infatti doveroso dedicare uno spazio speciale a Giovanni Prodi e a Francesco Speranza, come grandi intellettuali.

Francesco Speranza ha partecipato alla commissione costitutiva dei nuovi programmi per la scuola media dove si è proposto per la prima volta, oltre che un insegnamento per temi in un unico ciclo scolastico, una visione dell'insegnante come agente decisionale, portatore nella classe di un atteggiamento di ricerca. Egli vedeva negli insegnanti l'elemento chiave per un rinnovamento reale della scuola cosa che lo ha portato a promuovere, assieme a G. Prodi ed altri, la costituzione presso le università dei Nuclei di Ricerca didattica, a concepire le prime borse di studio per giovani neo-laureati da avviare alla ricerca ed i primi distacchi degli insegnanti presso le università. L'ipotesi di fondo era che con una distribuzione ragionata di tali Nuclei su tutto il territorio nazionale si potesse rigenerare la scuola dall'interno. Il modello di intervento ipotizzato era 'ad onde', prevedeva il coinvolgimento diretto di pochi ma qualificati insegnanti ed ipotizzava la diffusione nella scuola delle innovazioni didattiche tramite il contatto di questi ultimi con colleghi a loro vicini.

Oltre a redigere libri di testo di grande spessore culturale per ogni ordine a grado (dalla scuola secondaria superiore fino alla scuola elementare) e libri specificamente rivolti alla formazione matematica degli insegnanti egli ha lasciato un copioso patrimonio di saggi scientifici di notevole interesse, ancora oggi poco noto nella sua reale portata (si vedano Malara 2000 e Marchini 2000 in Malara et al., 2000).

G. Prodi per parte sua operò sia nella comunità dei matematici sia in quella dei didattici della matematica, agendo spesso come broker tra queste due comunità e con le istituzioni. Egli fu sempre attento a compiere scelte che lasciassero un segno sia istituzionale sia a livello della nostra comunità (anzi in questo senso operò perché si costituisse; così come fece per costruire un gruppo attivo di ricerca in analisi non lineare prima a Trieste e poi a Pisa). Oltre alla già ricordata costituzione dei gruppi di ricerca didattica dipendenti dal CNR, egli fu parte attiva per promuovere nel PNI l'informatica come disciplina insegnata all'interno dei programmi di matematica (in questo ricordo per contrasto il ruolo marginale svolto dall'UMI che insediò una commissione per "contrastare gli informatici", di cui facevano parte Boero, Barozzi, Arzarello ed altri, ma che ebbe poca incidenza nell'effettuale). Importante il suo ruolo (in questo con altri: Speranza, già ricordato, Villani, Pellerrey, ...) per la definizione dei nuovi programmi per la media e le elementari, nonché l'operazione Quaderni del CNR (1984), il tentativo non riuscito di fare un centro interuniversitario per la ricerca didattica. In questo senso il suo ruolo è parallelo a quello svolto da Carlo Pucci per la Matematica: due grandi intellettuali, cui va riconosciuto il merito di essere riusciti per motivi vari, non ultima la loro grande intelligenza politica (oltre che matematica), a incidere sulla realtà effettuale. Un importante articolo di M. Ferrari (*La figura di Giovanni Prodi nella didattica della matematica*) elenca e commenta tutti i contributi di G. Prodi alla didattica della matematica e dimostra il suo grande lavoro come "grande intellettuale" organico e demiurgo per la nostra

¹⁰¹ *Il mondo esteriore è come collegato da un misterioso filo conduttore alle fibre della memoria e talvolta le risveglia, nostro malgrado.*

comunità.

Il senso del nostro seminario, con la chiarificazione della componente esterna delle nostre PRARIDID, è che siamo riusciti a continuare lungo il cammino intrapreso da Giovanni Prodi.

Per questo motivo vogliamo dedicargli il nostro lavoro in questa occasione, proprio nel Seminario Nazionale che porta il Suo Nome.

Riferimenti bibliografici

- Adler, J. and Huillet, D. (2008). The social production of mathematics for teaching. In Sullivan, P., & Wood, T. (eds.) 2008. *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. (pp195-222).
- Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 33–52.
- Antonini, S. & Martignone, F. (2011). Argumentation in exploring mathematical machines: a study on pantographs, *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 41-48), Ankara, Turkey.
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24–35.
- Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 25(2), 42-47.
- Armano T., Console S., Robutti O., Sargenti A., Testa C. (2008). Precorsi di matematica: un progetto in continuità. In: *Didattica della matematica e azioni d'aula*. Castel San Pietro Terme, 7-9 novembre 2008, Bologna: Pitagora Editrice, p. 193-196.
- Artigue, M. & Houdement, N. (2007). 'Problem solving in France: didactic and curricular perspectives', *ZDM Mathematics Education*, 39:365–382
- Arzarello, F., (2000). Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia. Un quadro teorico di riferimento. In Ponte J.P., Serrazina, L. (a cura di) *Edução Matemática em Portugal, Espanha e Itália*. Actas da Escola de Verão, 197-224, Santarem, Portugal.
- Arzarello, F. (2006). Semiosis as a Multimodal Process. *Relime Vol Especial*, pp. 267-299.
- Arzarello F. & Bartolini Bussi, M.G. (1998). Italian trends in research in mathematics education: A national case study in the International perspective. In J. Kilpatrick & A. Sierpiska (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: a Search for Identity*. (Vol 2, pp. 243-262). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

- Arzarello, F. & Bartolini Bussi, M.G. (1998). Italian Trends in Research in Mathematics Education: a National Case Study in the International Perspective. In J. Kilpatrick, & A. Sierpiska, (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: a Search for Identity*, Kluwer Academic Publishers, 197-212.
- Arzarello, F., Bazzini, L., e Chiappini, G. (1994). L'algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche. Progetto strategico TID, Quaderno 6.
- Arzarello, F., Bazzini, L., e Chiappini, G. (2001). A model for analyzing algebraic thinking. In R. Sutherland et Al. (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 61-81). Netherlands: Kluwer Publishers.
- Arzarello, F., Bazzini, L., Ferrara, F., Sabena, C., Andrà, C., Merlo, D. Savioli, K., Villa, B. (2011). *Matematica: non è solo questione di testa. Strumenti per osservare i processi di apprendimento in classe*. Trento: Edizioni Erickson.
- Arzarello, F., Paola, D. Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 70(2), 97-109.
- Arzarello, F., Paola, D.: 2007, *Semiotic Games: The role of the teacher*. Proc. 31st Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. 8-15 July 2007. Seoul.
- Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: the case of mathematical proof. In A. Bishop et Al. (Eds.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 175-192). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Banchelli, S. (in press). *Costruzioni con riga e compasso. L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*.
- Banchelli, S. & Martignone, F. (in press). *Esplorare, congetturare e argomentare: Attività di laboratorio con le macchine matematiche*. Atti del II convegno nazionale di Education 2.0, Firenze.
- Bartolini Bussi, M. G. (2010). Quadro di riferimento. In *Scienze e tecnologie in Emilia Romagna: Un nuovo approccio per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica nella Regione Emilia-Romagna*, pp. 40-55, Tecnodid.
- Bartolini Bussi, M.G. (1998). Joint activity in a mathematic classroom. A Vygotskian analysis. In F. Seeger, J. Voigt e U. Waschescio (Eds.), *The culture of the mathematics classroom*. (pp. 13-49). Cambridge University Press.
- Bartolini Bussi M. G. & Mariotti M. A. (2008), *Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective*. In: L. English, M. Bartolini, G. Jones, R. Lesh, B. Sriraman, D. Tirosh. *Handbook of International research in Mathematics education* (2nd edition). pp. 746-783, New York: Routledge Taylor & Francis Group
- Bartolini Bussi M. G. & Maschietto M. (2006), *Macchine Matematiche: dalla storia alla scuola*, Milano: Springer.
- Bartolini Bussi, M.G. & Martignone, F. (submitted). Local programs on mathematics teacher education in international context: A multivocal analysis. *For the learning of mathematics*.
- Bartolini Bussi, M.G., Taimina, D. & Isoda, M. (2010). Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world. *ZDM Mathematics Education*, 42, 19-31, Springer

- Bass, H. (2005). Mathematics, mathematicians, and mathematics education. *Bullettin (New Series) of the American Mathematical Society*, Vol. 42, Number 4, 417-430.
- Battista, P. (2001). *Il partito degli intellettuali. Cultura e ideologie nell'Italia contemporanea*. Laterza: Bari.
- Bauersfeld H. (1994). Theoretical perspectives on interaction in the mathematics classroom. In: Biehler R., Strässer R., Winkelmann B. (eds.) (1994). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. (133-146). Dordrecht NL: Kluwer Ac. Pb. Boero & Guala, 2008
- Bauman, Z & Bongiovanni, B. *Intellettuali*, Enciclopedia Treccani delle Scienze Sociali. Scaricato il 10-11-2011 da: www.treccani.it/enciclopedia/intellettuali_%28Enciclopedia-delle-Scienze-Sociali%29/.
- Bazzini, L., Sabena, C. & Strignano, C. (2010). Imagining a mysterious solid: the synergy of semiotic resources. In B. Maj, E. Swoboda, K. Tatsis (Eds.), *Motivation via Natural Differentiation in Mathematics* (pp. 159-168). Rzeszów: Wydawnictwo Uniwersytetu Rzeszowskiego.
- Bell, A. (1996). Algebraic thought and the role of a manipulable symbolic language. In N. Bednarz et Al. (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp.151-154). Netherlands: Kluwer Publishers.
- Blanton, M. L., Stylianou, D. A. e David, M. M. (2003). The nature of scaffolding in undergraduate students' transition to mathematical proof. In N. Pateman, B. J. Dougherty, e J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the International Group for Psychology in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 113-120). Honolulu: University of Hawaii.
- Bobbio, N. *Intellettuali*, Enciclopedia del Novecento. Scaricato il 10-11-2011 da: www.treccani.it/enciclopedia/intellettuali_%28Enciclopedia_Novecento%29/.
- Boero, P. (2001). Transformation and Anticipation as Key Processes in Algebraic Problem Solving. In R. Sutherland et Al. (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 99-119). Netherlands: Kluwer Publishers.
- Boero P., Guala E. (2008). Development of mathematical knowledge and beliefs of teachers. In Sullivan, P. & Wood, T. (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. (Vol. 1, pp. 223-244), Purdue University, USA: SensePublishers.
- Bonicatti E., Gentile E., Gervasio L., Ghersi A., Guandalini L., Robutti O. (2010). Dai numeri alle relazioni: comunità di pratica con piattaforma Moodle. In: *IV Convegno Nazionale di Didattica della Fisica e Della Matematica Di.Fi.Ma. 2009 Il laboratorio in matematica e in fisica*. Torino, 7-9 settembre 2009, Torino: Kim Williams Books, p. 101-115.
- Borba, M. & Villareal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking*. Springer.
- Bosch, M. et Chevallard, Y. (1999). 'Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19/1.
- Braudel, F. (2002). *Civiltà e imperi del Mediterraneo nell'età di Filippo II* (2 volumi). Einaudi: Torino.
- Chevallard Y. (1985). *Transposition Didactique du Savoir Savant au Savoir Enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.
- Chevallard Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*. LSD2, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.
- Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une

- approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 12, 1, 73-112.
- Chevallard Y. (1996). La fonction professorale: esquisse d'un modèle didactique. In: Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (eds.) (1996). *Actes de l'École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Saint-Sauves d'Auvergne, 1995. 83-122.
- Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19, 2, 221-266.
- Chevallard Y. (1990). On Mathematics Education and Culture: Critical Afterthoughts. *Educational Studies in Mathematics* 21(1): 3-28.
- Chomsky, N. A., (1969³). *American power and the new mandarins*, New York (tr. it.: *I nuovi mandarini. Gli intellettuali e il potere in America*, Torino 1969).
- Collins, A., Brown, J.S. e Newman, S.E. (1989). Cognitive Apprenticeship: Teaching the Crafts of Reading, Writing and Mathematics! In L.B. Resnick (Ed.), *Knowing, Learning, and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser* (pp. 453-494). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Concu, M. (2011). Pantografi per alcune trasformazioni geometriche del piano: simmetria assiale, omotetia e stiramento. Parte 1: Simmetria assiale. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, settembre 2011
- Cusi, A. (2009a). Interrelation between anticipating thought and interpretative aspects in the use of algebraic language for the construction of proofs. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne and F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of 6th CERME Conference* (pp. 469-478). Service des publications, INRP. Lyon, France.
- Cusi, A. (2009b). Il linguaggio algebrico come strumento per dimostrare: l'interazione insegnante-allievo per uno sviluppo di nuove consapevolezze. *Atti del XXXVIII Seminario Nazionale del Centro Morin, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 32 A-B (6), 819-840. Paderno del Grappa.
- Cusi, A. (2009c). *Problematiche relative all'insegnamento/apprendimento dell'algebra e ruolo del linguaggio algebrico nell'approccio alla dimostrazione in ambito aritmetico: competenze/consapevolezze dell'allievo ed azione dell'insegnante*. Tesi di Dottorato: Università degli studi di Modena e Reggio Emilia.
- Cusi, A. e Malara, N.A. (2009). The Role of the Teacher in developing Proof Activities by means of Algebraic Language. In M. Tzekaki *et Al.*, *Proceedings of PME 33*, vol. 2 (pp. 361-368). Thessaloniki (Greece).
- Cusi, A. e Malara, N.A. (2011). Analysis of the teacher's role in an approach to algebra as a tool for thinking: problems pointed out during laboratorial activities with perspective teachers. *Proceedings of 7th CERME Conference* (to be printed in electronic version). Rzeszow (Poland).
- Cusi, A., Malara, N.A. e Navarra, G. (2010). Early Algebra: Theoretical Issues and Educational Strategies for Bringing the Teachers to Promote a Linguistic and Metacognitive approach to it. In J. Cai and E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization: Cognitive, Curricular, and Instructional Perspectives* (pp. 483-510).
- D'Amore B., Godino D.J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 9-38.
- Da Ponte, J. P. (2004). Investigar a nossa própria prática: uma estratégia de formação e de construção de conhecimento profissional. In E. Castro e E. De la Torre (Eds.), *Investigación en educación matemática* (pp. 61-84). University of Coruña (Spain).
- Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Bern: Peter Lang.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics.

Educational Studies in Mathematics, 61, 103–131.

- Ferrari, I. (2011). Esplorazione, costruzione e trasformazione di poligoni. In *Geometria con la LIM nella scuola primaria*. A cura di Bolondi, Orlandoni & Storai, pp. 89-124, Ed. Erickson,
- Gallese, V. and Lakoff, G. (2005): The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology* 22, 455-479.
- Gallino, L. (1989). *Sociologia dell'economia e del lavoro*. Utet: Torino, p. 204, voce "Intellettuale".
- García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higuera, L. & Bosch, M. (2006), 'Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics', *ZDM* 2006 Vol. 38 (3), 226-246
- Garuti, R. (2003). L'unità cognitiva fra congetturare e dimostrare. In *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 26 A-B n.5, 523-540.
- Garuti, R. (2011a). Il Laboratorio di matematica: aspetti storici, didattici e cognitive. Il progetto regionale MMLab-ER. *Tesi di dottorato* Università di Modena e Reggio Emilia.
- Garuti, R. (2011b).** A task on Scheiner pantograph: a case study. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol.1, p.301), Ankara, Turkey.
- Garuti, R. & Martignone, F. (2010) La formazione insegnanti nel progetto MMLab-ER, in *Scienze e tecnologie in Emilia Romagna: Un nuovo approccio per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica nella Regione Emilia-Romagna*, Azione 1 a cura di Martignone, pp.73-97, Tecnodid.
- Garuti, R., Boero, P., Lemut, E., Mariotti, M. A., (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. In Puig, M. Gutierrez, A., (a cura di). *Proceedings of the XXth PME International Conference*, (vol.2, pp. 113-120), Valencia, Spain.
- Ghislandi, P. (2002). *Didattica online*. eLearning. Didattica e innovazione in università. Trento 2002, pp. 65-97.
- Godino, J., Batanero, C. & Font, (2007), The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135
- Goldin-Meadow, S. (2003). *Hearing Gesture. How Our Hands Help Us Think*. Cambridge (MA) London (UK): The Belknap Press of Harvard University Press.
- Gramsci, A. (1949). *Gli intellettuali e l'organizzazione della cultura*, Einaudi: Torino.
- Hegedus, S.J., & Moreno-Armella, L. (2009). Intersecting representation and communication infrastructures. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*. 41 (4), 399-412.
- Hoyles, C., Noss, R. Kent, P & Bakker, A. (2010). *Improving Mathematics at Work*, Routledge: London.
- Jaworski, B. (1998). Mathematics teacher research: process, practice and the development of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 3-31.
- Jaworski, B. (2003). Research practice into/influencing mathematics teaching and learning development: towards a theoretical framework based on co-learning partnerships. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 249-282.
- Jaworski, B. (2004). Grappling with Complexity: Co-learning in Inquiry Communities in Mathematics Teaching Development. In M.J. Hoines and A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 17-36). Bergen (Norway).

- Jaworski, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 187–211.
- Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. In: Jaworski, B., & Wood, T. (Eds.) (2008). *International handbook of mathematics teacher education. The mathematics teacher educator as a developing professional*. Vol. 4, 335-361. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Jaworski, B. e Wood, T. (Eds.) (2008). *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*. Sense Publishers.
- Kemmis, S. (1985). Action research and the politics of reflection. In D. Boud, R. Keogh & D. Walker (Eds.), *Reflection: Turning experience into learning*. London: Kogan Page.
- Krainer, K. (2011). Teachers as stakeholders in mathematics education research. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 1, pp. 47 - 62). Ankara, Turkey.
- Laiolo P. G., Robutti O., Sargenti A., Testa C. (2009). E-Learning approach in mathematics «pre-courses» with Moodle: A project for the continuity School-University. In: *Quaderni di Ricerca in Didattica (Scienze Matematiche)*. CIEAEM 61. *Proceedings*. Montréal, 26-31 luglio 2009, Palermo: G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of, vol. Supplemento 2, p. 101-106.
- Lakoff, G. & Núñez, R. (2000): *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. New York: Basic Books. Trad. It. *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*. Torino: Bollati Boringheri.
- Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge University Press.
- Leikin, R. e Dinur, S. (2007). Teacher flexibility in mathematical discussion. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 328–347.
- Leont'ev, A. N. (1977). *Attività, coscienza e personalità*. Ed. Giunti Barbera.
- Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. In T. J. Cooney e F. L. Lin (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp.33-52). Dordrecht: Kluwer.
- Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psyc. of Math. Educ. Past, present and future*, pp. 429-459. Rotterdam, Holland: SensePublishers.
- Lotman J.M. (1980). *Testo e contesto: semiotica dell'arte e della cultura*. A cura di Simonetta Salvestroni, Roma-Bari: Laterza
- Malara, N.A. (1999). Un progetto di avvio al pensiero algebrico: esperienze, risultati, problemi. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma* (6), 3*, 153-181.
- Malara N.A., 2000, Francesco Speranza as a Mathematics Educator: Values and Cultural Choices, in Malara N.A. et al., *Recent Italian Research in Mathematiccs Education*, AGUM, Modena, 66-82, in versione italiana su *La Matematica e la sua didattica*, n. 3, 304-324.
- Malara, N.A.: 2002, Il modello italiano di ricerca per l'innovazione in didattica della matematica e la ricaduta nel mondo della scuola, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 25A, n. 5, 427-458
- Malara, N.A. (2003). Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project. In N.A. Pateman , B. J. Dougherty e J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of PME 27*, vol.1 (pp.33-48). Honolulu, USA.

- Malara, N.A. (2008). Methods and Tools to Promote in Teachers a Socio-constructive Approach To Mathematics Teaching. In B. Czarnocha (Ed.), *Handbook of Mathematics Teaching Research* (pp. 273-286). Rzeszów University Press.
- Malara , N.A. e Tortora, R. (2009). A European Project for professional development of teachers through a research based methodology: the questions arisen at international level, the Italian contribution, the knot of the teacher-researcher identity. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne and F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of 6th CERME Conference* (pp. 147-156). Service des publications, INRP. Lyon, France. In versione italiana in *L'Educazione Matematica*, anno XXX, serie 1, vol.1, 5-15.
- Malara N.A., Ferrari P.L., Bazzini L., Chiappini G.P., 2000, *Recent Italian Research in Mathematiccs Education*, ICME 9, Tokyo (agosto 2000), AGUM, Modena
- Malara, N.A. e Iaderosa, R. (1999). Theory and Practice: a case of fruitful relationship for the Renewal of the Teaching and Learning of Algebra. In F. Jaquet (Ed.), *Proceedings of CIEAEM 50-Relationship between Classroom Practice and Research in Mathematics Education*, 38-54.
- Malara, N.A. e Navarra G. (2011). Multicommented transcripts methodology as an educational tool for teachers involved in early algebra. *Proceedings of 7th CERME Conference* (to be printed in electronic version). Rzeszow (Polland).
- Malara, N.A. e Navarra, G. (2003). *ArAl Project: Arithmetic Pathways Towards Pre-Algebraic Thinking*. Bologna: Pitagora.
- Malara, N.A. e Zan, R. (2002). The Problematic Relationship between Theory and Practice. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 553-580). LEA, Mahwah, NJ.
- Malara, N.A. e Zan, R. (2008). The Complex Interplay between Theory and Practice: Reflections and Examples. In L. English (ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education – II* (pp. 539-564). LEA, NJ.
- Malara, N.A., Incerti, V., Fiorini, R., Magnani, E. e Nasi, R. (2004). *Percorsi di insegnamento in chiave pre-algebraica: rappresentazione di problemi e di processi, segni simboli e negoziazione dei loro significati*. Pitagora, Bologna
- Mannheim, K. (1929). *Ideologie und Utopie*. Tradotto in italiano nel 1957 presso il Mulino: Bologna.
- Marconato, G. (A cura di) (2009). *Le tecnologie nella didattica. Lo stato dell'arte all'inizio del nuovo millennio*. Trento: Edizioni Erickson.
- Martignone, F. (2009). Processi di esplorazione e argomentazione in attività con particolari Macchine Matematiche: i pantografi per le trasformazioni geometriche del piano. *Atti del XXXVIII Seminario Nazionale del Centro Morin pubblicati su L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 32 A-B N.6, 681-700
- Martignone F. (2011a). Laboratory activities in teacher training. Accepted for *Proceeding CERME7*, Rzeszow, Poland. [Adobe Digital Editions version] Retrieved from <http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/index.php?id=wg17b>
- Martignone F. (Ed.) (2010). MMLab-ER: Laboratori delle macchine matematiche per l'Emilia Romagna, Az. 1. In USR E-R & Regione Emilia-Romagna, *Scienze e Tecnologie in Emilia-Romagna*, pp. 16-210, Napoli: Tecnodid, [Adobe Digital Editions version]. Retrieved from: <http://www.mmlab.unimore.it/on-line/Home/ProgettoRegionaleEmiliaRomagna/RisultatidelProgetto/LibroProgettoregionale/documento10016366.html>
- Martignone, F. (2011b). Tasks for teachers in mathematics laboratory activities: a case study, *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 3, 193-200) Ankara, Turkey

- Martignone, F. (in press). Dalla formazione insegnanti alle attività in classe con le macchine matematiche: l'esperienza del progetto MMLab-ER. *Atti dei seminari Mathesis*, Torino
- Martignone, F. & Bartolini Bussi M.G. (2010). Il Laboratorio delle Macchine Matematiche: dalla tradizione a un progetto regionale di formazione degli insegnanti della scuola secondaria, *New Trends in Science and Technology Education: selected papers*, eds. L. Menabue e G. Santoro, (vol. II, 129-147), Modena, CLUEB, Bologna
- Martignone, F., & Antonini, S. (2009). Exploring the mathematical machines for geometrical transformations: a cognitive analysis. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M., & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings 33th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education*. (Vol. 4, 105-112). Thessaloniki, Greece: PME.
- Martin, T.S., Soucy McCrone, S.M. Wallace Bower, M. L. e Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 95–124.
- Maschietto, M. 2010. Piattaforma e risorse per gli insegnanti. In *Scienze e tecnologie in Emilia Romagna: Un nuovo approccio per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica nella Regione Emilia-Romagna*, pp. 98-105. Tecnodid
- Mason, J. (1990). Reflection on Dialogue between Theory and Practice, Reconciled by Awareness. In F. Seeger e H. Steinbring (Eds.), *The Dialogue Between Theory and Practice in Mathematics Education: Overcoming the Broadcast Metaphor* (pp. 177-192). Bielefeld: Matherialen und Studien, Band 38, IDM.
- Mason, J. (1994a). Researching from Inside in Mathematics Education - Locating an I-You Relationship. *Proceedings of PME 18*, vol.1 (pp. 176-194). Lisboa, Portugal.
- Mason, J. (1994b). Enquiry in Mathematics and in Mathematics Education. In P. Ernest (Ed.), *Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education* (pp. 190-200). London: The Falmer Press.
- Mason, J. (1998). Enabling Teachers to Be Real Teachers: Necessary Levels of Awareness and Structure of Attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 243-267.
- Mason, J. (2002). *Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*. London: The Falmer Press.
- Mason, J. (2008). Being Mathematical with and in front of learners. In B. Jaworski e T. Wood (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional*, 31-55. Sense Publishers.
- Mason, J. and Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: the importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 135–161.
- McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. Chicago: University of Chicago Press.
- McNeill, D. (2005). *Gesture and Thought*. Chicago, IL: University of Chicago Press.
- Nardi, E. (2008). *Amongst mathematicians: teaching & learning mathematics at university level* (Mathematics teacher education, Vol. 3), Springer
- Peirce, C.S. (1931-1958). *Collected Papers* (Vol. I-VIII), in C. Hartshorne, P. Weiss, A. Burks (Eds.), Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Pellerey, M. (2005). Verso una nuova metodologia di ricerca educativa: la Ricerca basata su progetti (Design-based Research). In *Orientamenti Pedagogici* vol. 52, n. 5, 721-737.
- Pergola & Zanolì (1995) Trasformazioni geometriche e macchine matematiche. *IMSI* Vol 18 A-B N. 6 689-713

- Pergola, M., Zanolì, C., Martinez, A. & Turrini, M. (2002). Modelli fisici per la matematica: parallelogrammi, antiparallelogrammi e deltoidi articolati. *Progetto Alice*, Vol. III, n°8, pp. 323-346
- Rabardel, P. (1995), *Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*. A. Colin, Paris.
- Radford, L. (2005). Why do gestures matter? Gestures as semiotic means of objectification. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of PME 29, Vol. 1* (pp. 143-145). University of Melbourne, Australia.
- Rapporto PON M@t.abel 2009-10
- Rasmussen, C., Zandieh, M., & Wawro, M. (2009). How do you know which way the arrows go? The emergence and brokering of a classroom mathematics practice. In W.-M. Roth (Ed.), *Mathematical representations at the interface of the body and culture* (pp. 171--218). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Rinaudo G, Robutti O., Allasia D, Armano T, Drivet A, Marocchi D, Sargenti A, Testa C (2010). An e-learning web environment for mathematics and physics communities of practice. In: *Europhysics Conference Abstract Booklet*. Udine, settembre 2009, Udine: Litho Stampa, p. 69-69.
- Robutti, O. (2006). II Convegno Nazionale di Torino. La matematica e la fisica nella scuola e nella formazione degli insegnanti. *Innovazione Educativa*, vol. Anno 3, n.2; p. 18-22.
- Robutti O. (2009). L'insegnamento e l'apprendimento della matematica nel 21° secolo: sfide mondiali e risposte nazionali. In: *Atti del 23° Convegno nazionale Incontri con la matematica. Pratiche matematiche e didattiche in aula*. Castel San Pietro Terme, 6-8 novembre 2009, Bologna: Pitagora Editrice, p. 33-40.
- Robutti O. (2010). Insegnanti e studenti come comunità di pratiche matematiche. In: Ferrara F., Giacardi L., Mosca M.. *Mathesis Subalpina Conferenze e Seminari 2009-2010*. p. 187-206, Torino: Kim Williams Books.
- Robutti O., Armano T., Drivet A., Sargenti A., Trincherò G. (2010). Moodle e Sis Piemonte. In: *Atti del Convegno Moodle Moot Italia 2007*. Reggio Emilia, 22-23 marzo 2007, Reggio Emilia: Edizioni Artestampa, p. 245-252.
- Robutti, O. & Armano, T. (2011). Gli insegnanti di matematica e fisica come comunità di apprendimento professionale: il Progetto "DI.FI.MA. in rete" e il progetto "Quarini" con Moodle. In: M. Baldoni, C. Baroglio, S. Coriasco, M. Marchisio & S. Rabellino *E-learning con Moodle in Italia: una sfida tra passato, presente e futuro*, Torino: Seneca Edizioni, 283-297.
- Rocard, M., Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., & Hemmo, V. (2007). *Science education now: A renewed pedagogy for the future of Europe*, European Commission. http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf
- Schoenfeld, A. (1996). In fostering communities of inquiry, must it matter that the teacher knows the answer? *For the Learning of Mathematics* 16(3), 11–16.
- Shoenfeld, A. (1998). Toward a theory of teaching in context. *Issues in Education*, 4(1), 1-94.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.
- Schön, D.(1983). The reflective practitioner — How professionals think in action. *Basic Books*.

- Schwarz, B., Dreyfus, T., Hadas, N. e Hershkowitz, R. (2004). Teacher guidance of knowledge construction. In M.J. Høines e A.B. Fuglestad, *Proceedings of the 28th Annual Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol.4, pp. 169-176). Bergen (Norway).
- Sherin, M.G. (2002). A balancing act: developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 205–233.
- Shulman, L. S., (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. In *Educational Researcher*, vol.15, 4-14.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.
- Sierpinska A., Lerman S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In: Bishop A.J. et al. (eds.) (1996). *International Handbook of Mathematics Education*. (827-876). Dordrecht, HL: Kluwer.
- Sullivan, P. (2008). Knowledge For Teaching Mathematics: An introduction. In Sullivan, P. & Wood, T., (2008). (a cura di) . *The international handbook of mathematics teacher education*, vol.1, *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development*, 1-12, Sense Publisher, Rotterdam.
- Sullivan, P. & Wood, T., (2008). (a cura di) . *The international handbook of mathematics teacher education*, vol.1, *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development*, Sense Publisher, Rotterdam.
- Trentin, G. (2008). *La sostenibilità didattico-formativa dell'e-learning. Social networking e apprendimento attivo*. Milano: FrancoAngeli.
- Vergnaud, G. (1981). Quelques Orientations Théoriques et Méthodologiques des Recherches Françaises en Didactique des Mathématiques [Some of the theoretical orientations and research methods in French didactics of mathematics]. *Actes du Vième Colloque de PME* (Vol. 2, pp. 7–17). Grenoble: Edition IMAG.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher mental processes*. Cambridge, MA. Harvard University Press.
- Watson, A. & Sullivan, P. (2008). Teachers Learning about Tasks and Lessons. In Sullivan P. & Wood, T. (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. (Vol. 2, pp. 109-134). Purdue University, West Lafayette, USA: SensePublishers.
- Wells, G. (1999). *Dialogic Inquiry: Toward a Sociocultural Practice and Theory of Education*. Cambridge University Press.
- Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 171-191.
- Wood, T. (Ed.) (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. (Vols. 1-4). Purdue University, West Lafayette, USA: SensePublishers.
- Yackel, E. e Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.
- Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*. Springer.
- Zanoli, C. & Martignone, F. (2010). Le macchine del progetto MMLab-ER. In *Scienze e tecnologie in Emilia Romagna: Un nuovo approccio per lo sviluppo della cultura scientifica e tecnologica nella Regione Emilia-Romagna* a cura di Martignone, pp. 56-72. Tecnodid.