

**Dalla definizione di competenza matematica ai profili cognitivi e affettivi
il difficile equilibrio tra ricerca di una definizione teorica dei costrutti e sviluppo di strumenti di
osservazione e intervento**

XXXVII Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica 'Giovanni Prodi' RIMINI
(gennaio 2020)

Anna Baccaglini-Frank, Pietro Di Martino, Mirko Maracci

Introduzione

Il seminario che presentiamo si focalizza su due aspetti sicuramente rilevanti sia nella ricerca educativa (prova ne è la quantità di articoli di ricerca che ruotano intorno a essi), che nella pratica scolastica: quello di competenza (e, in particolare, di competenza matematica) e quello di difficoltà, o meglio, di caratterizzazione della difficoltà.

Quest'ultima specifica è particolarmente significativa: è mossa infatti dalla convinzione che sia fondamentale che la teoria fornisca gli strumenti per caratterizzare e differenziare le difficoltà, in modo da sviluppare strumenti mirati e dunque potenzialmente più efficaci di contrasto alle stesse. Una parola chiave del seminario sarà dunque quella di *profili di difficoltà*. La caratterizzazione di questi profili richiede di trovare un giusto equilibrio tra la considerazione della complessità (Boero, 2000) e la definizione di categorie non troppo parcellizzate per poter essere significative (seppur ogni caso sarà diverso, non è possibile – o meglio utile – differenziare ogni caso).

Intorno a questa trama, il seminario avrà tre voci che presenteranno tre ricerche distinte – anche per il loro stato di avanzamento (dalla ricerca conclusa sui profili di atteggiamento a quelle in corso su profili cognitivi e competenze) – ma profondamente intrecciate.

L'intenzione è anche quella di proporre una riflessione, a livello meta, sulla caratterizzazione dei costrutti in mathematics education e, in particolare, sulla difficoltà di sviluppare definizioni condivise e, una volta trovate tali definizioni, di sviluppare strumenti di osservazione del costrutto coerenti. L'importanza di cercare di superare queste difficoltà appare evidente sia dal punto di vista teorico che della pratica scolastica: è infatti la base per avere un quadro comune e confrontabile, e per monitorare e valutare in maniera significativa e coerente.

Sempre a questo livello meta, la difficoltà in math education nella ricerca di una definizione condivisa dei costrutti è legata da una parte al discorso sulla complessità (*"Mathematics education is a complex process and research results are interesting (both in themselves and in their consequences for the school system) when complexity is taken into account"*, Boero, 2000). Dall'altra, anche al fatto che diversi costrutti in gioco – è il caso dei tre che saranno trattati nel seminario, ovvero 'competenza', 'discalculia' e 'atteggiamento' – provengono originariamente da altri campi di ricerca (pedagogia, psicologia, antropologia, sociologia, linguistica, ...) e sono stati sviluppati intorno a interessi di ricerca e paradigmi diversi (Bishop, 1992; Zan, 1999). Anche

laddove ci fosse accordo sulla definizione del costrutto nel campo di ricerca dove il costrutto è stato originariamente sviluppato, è evidente che il suo uso nel campo della math education (in particolare la possibilità di rispondere alle domande tipiche della ricerca in math education) passa da una specializzazione del termine nell'ambito della nostra disciplina.

La competenza (matematica) - Mirko Maracci

L'idea di competenza ha acquisito negli ultimi anni grande importanza nell'ambito del dibattito sull'istruzione e la formazione promosso in Europa, e conseguentemente in Italia, a seguito della dalla cosiddetta strategia di Lisbona. L'interesse per l'idea di competenza non è comunque ristretto a questo contesto; basti pensare all'adozione dell'idea di competenza, o idee "affini", nei quadri di riferimento delle rilevazioni internazionali, ci riferiamo in particolare ai test OCSE-PISA – in questo contesto si è preferito parlare di *literacy* e non di *competence*. E non è un interesse che nasce ora. In effetti l'idea di competenza comincia a essere esplorata in pedagogia già intorno agli anni Sessanta e Settanta – alcuni autori riconducono l'origine dell'idea molto più indietro nel tempo, fino alla filosofia greca (Mulder, Weigel & Collins, 2006). Nel corso dei decenni poi questa idea ha subito una continua rielaborazione che ha risentito via via dell'influenza di diverse teorie di apprendimento (Weinert, 2001). Basandosi sull'analisi di Mulder, Weigel e Collins (2006), Marzano e Iannotta (2015) suggeriscono l'esistenza di tre direzioni principali lungo cui è avvenuto lo sviluppo della nozione di competenza.

- Dal semplice al complesso. La nozione di competenza è stata ampliata per comprendere la dimensione cognitiva, motivazionale e emotiva.
- Dall'esterno verso l'interno. Si richiama l'attenzione su dimensioni soggettive che non sono direttamente osservabili dall'esterno, ma che costituiscono la base del comportamento individuale.
- Da teorico a pragmatico. La competenza è correlata alla capacità dell'individuo di utilizzare strategie operative per la soluzione di problemi relativi a specifiche dimensioni della cultura e del contesto.

Questo breve cenno può far comprendere la complessità della nozione di competenza che resta una delle più elusive in ambito educativo (Kilpatrick, 2014). Al di là di alcune interessanti proposte (es. Pellerey 2004) il termine viene spesso usato senza essere definito; spesso si assume implicitamente che il significato del termine sia chiaro, intuitivo o facilmente intuibile nel contesto in cui è usato, o comunque condiviso dai lettori; oppure lo si definisce facendo ricorso a termini che ne sono quasi sinonimi: capacità, abilità, padronanza...

Parallelamente si possono rintracciare anche nell'ambito dell'educazione matematica tentativi di proporre quadri di riferimento che esplicitino e organizzino le abilità cognitive coinvolte nell'attività matematica (si veda Kilpatrick, 2014 per una rapida panoramica): la tassonomia di Bloom e sue successive rielaborazioni, il costrutto di mathematical proficiency elaborato dal NRC statunitense (Kilpatrick, 2009), l'idea di competenza matematica elaborata nell'ambito del progetto KOM (Niss, 2003, Niss & Højgaard, 2011), per citarne alcune. Questi costrutti variano molto gli uni dagli altri; quello che li accomuna, nelle parole di Kilpatrick (2009, p.87) è che:

“are designed to demonstrate to the user that learning mathematics is more than acquiring an array of facts and that doing mathematics is more than carrying out well-rehearsed procedures. School mathematics is sometimes portrayed as a simple contest between knowledge and skill. Competency frameworks attempt to shift that portrayal to a more nuanced portrait of a field in which a variety of competences need to be developed”.

Se si confrontano le elaborazioni sviluppate nell'ambito dell'educazione matematica con quelle sviluppate in ambito pedagogico, si possono constatare profonde differenze: le prime enfatizzano le abilità cognitive specificamente coinvolte nell'attività matematica mostrando poca attenzione verso gli aspetti propri della sfera meta-cognitiva e affettiva (quali ad esempio gli aspetti intenzionali); le ultime enfatizzano gli aspetti relativi alle dimensioni trasversali che intervengono nello svolgimento di un'attività tendendo a trascurare quelli relativi agli specifici ambiti di conoscenza potenzialmente coinvolti o agli specifici contesti in cui l'attività avviene. Si può in effetti riconoscere una vera e propria tensione tra l'idea di competenza come “capacità” trasversale alle discipline e agli ambiti esperienziali e l'idea di competenza disciplinare e più specificamente matematica, che trova espressione esplicita (non a caso) anche nelle Indicazioni Nazionali per i Licei, dove si legge:

*L'articolazione delle Indicazioni per materie di studio mira ad evidenziare come ciascuna disciplina - con i propri contenuti, le proprie procedure euristiche, il proprio linguaggio – concorra ad integrare un percorso di acquisizione di conoscenze e di competenze molteplici, la cui consistenza e coerenza è garantita proprio dalla salvaguardia degli statuti epistemici dei singoli domini disciplinari, **di contro alla tesi che l'individuazione, peraltro sempre nomenclatoria, di astratte competenze trasversali possa rendere irrilevanti i contenuti di apprendimento** (enfasi nostra)*

Tuttavia i problemi legati alla definizione del costrutto di competenza non si limitano a quelli relativi a una possibile armonizzazione tra proposte che emergono in diversi ambiti di ricerca o di pratica. Ci sono molti altri aspetti problematici che l'adozione della nozione di competenza come nozione centrale per l'organizzazione dell'insegnamento pone. Uno di questi è ad esempio quello della valutazione delle competenze: sia in riferimento alla complessità del processo di valutazione e

definizione di modalità di valutazione sia in riferimento alla definizione di livelli di competenza. A proposito di quest'ultimo aspetto, ad esempio, occorre rilevare la tensione tra i possibili risultati della valutazione di un costrutto intrinsecamente multi-dimensionale (quale è la competenza) e la tendenza in molti contesti a darne una rappresentazione mono-dimensionale.

Quello della valutazione è un tema che molto spesso polarizza il dibattito educativo quando si parla di competenze. Tuttavia esso non ci sembra scindibile dal tema dello sviluppo in classe delle competenze e in particolare dello sviluppo “contestuale” di conoscenze sui contenuti disciplinari e sulle abilità di comunicazione, comprensione dei testi, riflessione, confronto, argomentazione, ecc. che compongono la competenza matematica (Maracci & Martignone, 2017)

Nel corso del seminario ripercorreremo per ciò che ci interessa il processo di sviluppo della nozione di competenza in ambito pedagogico e nell'ambito dell'educazione matematica, evidenziandone la complessità ed esaminando le tensioni sopra emerse. L'interesse verso la definizione del costrutto di competenza non è fine a se stesso. È nostra profonda convinzione che le definizioni in ambito educativo servano come strumento concettuale per chiarire e tentare di affrontare i problemi che via via emergono; come tali debbano avere un carattere “operativo”. Parte della nostra analisi sarà rivolta anche a questo: studiare la possibilità di rendere la definizione il più possibile operativa rispetto ad alcune delle problematiche tratteggiate sopra.

L'atteggiamento (nei confronti della matematica) – Pietro Di Martino

Il costrutto di atteggiamento nei confronti della matematica nasce nel contesto della psicologia sociale nello studio delle scelte individuali e dei comportamenti.

Nel campo dell'educazione matematica i primi riferimenti al costrutto di atteggiamento si trovano addirittura in lavori di metà del secolo scorso (Dutton, 1951): da allora la ricerca sull'atteggiamento nel nostro campo si è specializzata, è diventata parte di un settore specifico (denominato “Affect”) e ha attraversato un periodo importante di cambi definizione e cambiamento di paradigmi di ricerca.

Da questo punto di vista, l'interesse teorico per l'atteggiamento, inizialmente focalizzato sul rapporto tra atteggiamento positivo e successo in matematica, si è spostato (similmente a quanto accade per il costrutto di competenza matematica) sulla definizione di atteggiamento positivo e sullo sviluppo di strumenti di osservazione/misurazione di atteggiamento coerenti con la definizione data.

Nel seminario ripercorreremo il lungo percorso in math education di riflessione critica relativamente agli strumenti di osservazione dell'atteggiamento (Leder, 1985), alla mancanza di

chiarezza sul suo significato e sulle relazioni con gli altri costrutti cosiddetti affettivi (Di Martino & Zan, 2001), alla necessità di ancorare la definizione ai problemi che si vuole affrontare (Kulm, 1980). Proprio a partire dalla riflessione di Kulm, dai primi risultati che mettono in dubbio la significatività della relazione tra atteggiamento e performance in matematica (Ma & Kishor, 1997), e dalla convinzione sulle potenzialità del costrutto di atteggiamento per interpretare fenomeni più complessi di quelli di semplice scelta emerge la necessità di una caratterizzazione (e un'osservazione) multidimensionale del costrutto e (soprattutto) delle sue declinazioni positive e negative (Di Martino & Zan, 2002; 2003).

Ripercorsa l'analisi che ha portato a evidenziare le criticità principali del costrutto di atteggiamento, sarà presentata la ricerca (compiuta) di caratterizzazione multidimensionale del costrutto stesso portata avanti da Di Martino e Zan (Di Martino & Zan, 2010; 2011).

In particolare sarà descritta la metodologia (narrativa) di indagine e l'approccio grounded adottato, l'individuazione delle dimensioni caratterizzanti l'atteggiamento fino ad arrivare alla definizione proposta.

Saranno infine discusse, in parallelo con il discorso sulle competenze e sugli aspetti cognitivi, le conseguenze di tale definizione in termini di identificazione dei diversi profili di atteggiamento (negativo).

La discalculia (i profili cognitivi) – Anna Baccaglini-Frank

Nella letteratura internazionale la maggior parte degli studi cognitivi sulle cause di prestazioni persistentemente basse in matematica provengono dal campo della psicologia cognitiva, e riguardano lo sviluppo del processamento del numero (naturale) e l'eventuale sviluppo atipico di questo. Alcuni termini utilizzati per descrivere le situazioni atipiche sono “developmental dyscalculia” (discalculia evolutiva), “mathematical learning disability/disorder/difficulty” (MLD) (per es., Mazzocco & Räsänen, 2013). Le definizioni di questi costrutti sono ancora molto discusse e non sono coerenti i modi in cui vengono utilizzate. Riteniamo che questo sia dovuto, almeno in parte, ad un problema secondo cui il costrutto “disabilità dell'apprendimento” non consente di distinguere tra difficoltà che portano ad una disabilità persistente in matematica e difficoltà che sono il risultato di esperienze didattiche inadeguate. In didattica della matematica è invece fondamentale saper distinguere tra disabilità e difficoltà, in quanto gli interventi didattici saranno differenti nei due casi. Inoltre, se si parla di difficoltà, sarà possibile anche studiare e mettere a punto pratiche didattiche mirate a prevenire la stabilizzazione di difficoltà di apprendimento anche gravi.

Durante il seminario presenteremo ricerca situata a cavallo tra le scienze cognitive e la didattica della matematica, che ha come obiettivo, da una parte, lo sviluppo di strumenti diagnostici che consentano di individuare eventuali cause cognitive di difficoltà di apprendimento in matematica, e, dall'altra, la progettazione di sequenze didattiche adeguate per prevenire o per favorire il recupero di difficoltà e basso rendimento persistente in matematica.

Il modello dei quattro domini e lo sviluppo di strumenti di osservazione sulla base del modello teorico

Recentemente, una linea di ricerca è stata aperta con l'obiettivo di descrivere “profili di discalculia”, individuando gruppi di studenti con sintomi simili in diversi ambiti dell'apprendimento della matematica (per es.: Price e Ansari, 2013; Karagianakis, Baccaglini-Frank e Papadatos, 2014; Träff et al., 2017). In questa linea di ricerca si collocano in particolare alcuni studi che tratteremo in modo più approfondito di Karagiannakis e colleghi (Karagiannakis et al., 2014; Karaginnakis, Baccaglini-Frank e Roussos, 2017) che propongono una riorganizzazione delle principali ipotesi avanzate nelle scienze cognitive in un modello che mette in relazione le ipotesi sulle cause del disturbo con conseguenze sullo sviluppo di particolari abilità matematiche (non solo aritmetiche). Il modello ripartisce tali difficoltà in quattro domini: numerico di base, della memoria, del ragionamento logico-matematico, visuo-spaziale.

Per testare il modello, è stata messa a punto una batteria di prove matematiche somministrate al computer, elaborate tenendo conto delle prove usate per rilevare deficit associati alle principali ipotesi sulla discalculia, e dei quattro domini individuati nel modello.

Il carattere innovativo di questa batteria non sta tanto nei singoli item usati, ma nella loro combinazione in gruppi che si è ipotizzato – e questo è stato confermato in modo soddisfacente dalle analisi – indicare il fatto che per rispondere correttamente ad item del gruppo, lo studente sia “forte” nelle abilità di quel dominio (o combinazione di domini) del modello. L'analisi dei dati raccolti ha supportato la validità del modello, suggerendo che possa essere utilizzato con successo per descrivere forze e debolezze, da un punto di vista cognitivo, e rispetto ai quattro domini, di uno studente nell'apprendimento della matematica. In particolare, emerge che il profilo di apprendimento matematico di uno studente può essere caratterizzato attraverso le abilità dei quattro domini, e che forze e debolezze in domini diversi sono indipendenti. Durante le analisi sono persino stati identificati dei casi di studenti con profili “complementari” ma che rispetto ai parametri di studi precedenti sarebbero semplicemente stati definiti semplicemente come “positivi” e probabilmente trattati nello stesso modo da un punto di vista educativo. Questi risultati sono in accordo con quelli di studi che hanno portato a parlare di un “continuum” lungo cui possono essere

collocate le prestazioni matematiche degli studenti, anziché di una distinzione netta tra prestazioni “basse” o “deficitarie” e “alte” o “eccezionali”. Inoltre, questi risultati confermano la grande eterogeneità nei profili di MLD.

Notiamo che questo approccio “olistico” è assolutamente in linea con ciò che viene proposto nel DSM-5¹, del 2013, usato in neuropsichiatria per diagnosticare malattie mentali, in cui la categoria dei disturbi dell’apprendimento è stata unificata sotto la dicitura “specific learning disorder (SLD)” (disturbo specifico dell’apprendimento). Il SLD ora viene identificato attraverso una singola diagnosi che prende in considerazione tutti i deficit che hanno impatto negativo sulle prestazioni accademiche.

Un elemento di novità e unicità di questa direzione di ricerca è che il modello confermato dai risultati sperimentali consente di correlare le difficoltà matematiche di ogni studente con insiemi di abilità cognitive più deboli. In questo modo si potranno sviluppare interventi di potenziamento più mirati e adatti a ogni singolo studente. Conoscendo i punti di forza e di debolezza nelle abilità matematiche sviluppate da un particolare studente, ipotizziamo che sia possibile, da un lato, utilizzare le abilità forti per migliorare le prestazioni matematiche dello studente favorendo l’apprendimento di strategie che le sfruttino maggiormente, e, dall’altro, potenziare le abilità più deboli progettando attività matematiche mirate. È stata conclusa nel maggio 2019 la sperimentazione di una nuova batteria, nata dalla revisione della precedente, somministrata ad un campione di oltre 1700 studenti italiani tra i 6 e i 12 anni, oltre che su campioni di varie centinaia di studenti in diversi paesi europei. I risultati dovrebbero essere pubblicati a breve.

Work in progress

L’identificazione di diversi profili di apprendimento matematico, basati sul modello dei quattro domini, è un primo passo compiuto per gettare luce sulla questione delle diagnosi di discalculia in ambito educativo. Tuttavia, riteniamo che sia necessario aggiungere alle dimensioni cognitive individuate una dimensione socio-culturale perché l’approccio possa davvero vantare di essere olistico e completo. Sosteniamo che accettare la complessità e l’interconnessione di fattori cognitivi, sociali e affettivi, e osservare i fenomeni attraverso una lente socio-culturale consenta di vedere meccanismi che altrimenti sarebbero invisibili (Baccaglini-Frank e Di Martino, 2019; in corso di stampa). Tale prospettiva, inoltre, ci pare fondamentale per poter progettare materiali didattici davvero inclusivi. Alcuni studi recenti paiono illuminanti da questo punto di vista (per es., Heyd-Metzuyanim & Sfard, 2012; Heyd-Metzuyanim, 2013; Lewis, 2017).

¹ Si tratta del “manuale diagnostico e statistico dei disturbi mentali” della American Psychiatric Association (2013). Si veda la bibliografia.

Questi studi adottano prospettive Vygotskiane che consentono di ri-concettualizzare il costrutto stesso di disabilità e quello di “ri-mediazione” (intervento di recupero). Da una parte, la teoria della Commognizione (Sfard, 2008) ha ri-concettualizzato la nozione di ‘disabilità’ in termini di partecipazione (mancata) al discorso matematico e di fallimento nella gestione dei passaggi a livello-meta, tipici dell’apprendimento della matematica (Sfard, 2017; Heyd-Metzuyanim 2013). Dall’altra parte, un filone di ricerca si è concentrato sul lavoro di Vygotsky stesso con studenti disabili in cui è stata avanzata la prospettiva che supera l’associazione di disabilità a deficit, proponendo invece di studiare come l’accesso a diverse risorse che “mediano” (mediating resources) abbia impatto sullo sviluppo dell’individuo (Lewis, 2017). Tali studi mettono in luce l’importanza delle interazioni sociali, e in particolare con l’insegnante o l’educatore di riferimento, che, da un lato, condivide importanti responsabilità nell’emergere e stabilizzarsi di profili di fallimento in matematica, e dall’altro avrebbe il potere di intervenire efficacemente proponendo un’adeguata mediazione del discorso matematico.

Con alcuni nuovi progetti di ricerca appena intrapresi, fondati su quadri teorici socio-culturali, ci proponiamo, da un lato, di portare avanti il lavoro di progettazione e sperimentazione di pratiche didattiche che consentano di prevenire o affrontare difficoltà di apprendimento, avviato già con ottimi risultati tra il 2011 e 2014 nel progetto PerContare (si veda percontare.asphi.it). Dall’altro lato, ci piacerebbe cercare di rivedere in chiave socio-culturale il lavoro fatto in ambito cognitivo sui profili di apprendimento matematico. Vorremmo, in particolare, descrivere caratteristiche del discorso matematico di studenti di cui conosciamo i profili di apprendimento matematico (cognitivi), e aggiungere al profilo emergente una componente affettiva (sia rispetto alla matematica che rispetto alle persone coinvolte nell’esperienza matematica dello studente).

Riteniamo che lo studio di profili di apprendimento matematico di questo tipo sia un passo necessario per cominciare a sciogliere la complessità del fenomeno studiato, e per raggiungere maggiore inclusività nell’apprendimento matematico in classe. Un’implicazione pratica di tale approccio sarà anche l’individuazione di principi per la progettazione e implementazione di attività matematiche inclusive. Ipotizziamo che tali principi porteranno a progettare attività multimodali, che utilizzano una varietà di canali per l’accesso e la produzione di informazioni. Tale ipotesi è rafforzata dai risultati del progetto PerContare menzionato precedentemente, che verrà discusso in quest’ottica durante il seminario.

Prima bibliografia

American Psychiatric Association. (2013). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders (5th ed.)*. DSM-5. Author. Edizione italiana: Massimo Biondi (a cura di) (2014), DSM-5. Manuale diagnostico e statistico dei disturbi mentali, Milano, Raffaello Cortina Editore.

Baccaglini-Frank, A., & Di Martino, P. (in corso di stampa). Cultural differences and sensitivities in the mathematics classroom. In D. Lucangeli (Ed.), *Understanding atypical development/ Understanding Dyscalculia*. Routledge

Baccaglini-Frank, A., & Di Martino, P. (2019). Mathematical learning difficulties and dyscalculia. In S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_100018-1

Bishop, A. (1992). International Perspectives on Research in Mathematics Education, in D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing Company, New York, 710–723.

Boero, P. (2000). Can research in mathematics education be useful for the teaching and learning of mathematics in school? And how? *Proc. of XXIV PME*, vol.1, p.76-79.

Di Martino, P., & Zan, R. (2001). Attitude toward mathematics: some theoretical issues. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 351-358). Utrecht: The Netherlands.

Di Martino, P., & Zan, R. (2002). An attempt to describe a ‘negative’ attitude toward mathematics. In P. Di Martino (Ed.), *Proceedings of the MAVI (Mathematical View) XI European Workshop* (pp. 22-29). Pisa: Università di Pisa Press.

Di Martino, P., & Zan, R. (2003). What does ‘positive’ attitude really mean?. In N. Pateman, B. Doherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 451-458). Honolulu: Hawaii.

Di Martino, P., & Zan, R. (2010). ‘Me and maths’: towards a definition of attitude grounded on students’ narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13 (1), 27-48.

Di Martino, P., & Zan, R. (2011). Attitude towards mathematics: a bridge between beliefs and emotions, *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 43 (4), 471-482.

Dutton, W. (1951). Attitudes of prospective teachers toward arithmetic, *The Elementary School Journal*, 42, 84-90.

Heyd-Metzuyanım, E. (2013). The co-construction of learning difficulties in mathematics–teacher–student interactions and their role in the development of a disabled mathematical identity. *Educ Stud Math* 83(3), 341–368.

Heyd-Metzuyanım, E., & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: on learning mathematics as an interplay of mathematizing and identifying. *Int J Educ Res* 51–52, 128–145.

Karagiannakis, G., Baccaglini-Frank, A., & Papadatos, Y. (2014). Mathematical learning difficulties subtypes classification. *Frontiers in Human Neuroscience*, 8, 57. DOI: 10.3389/fnhum.2014.00057

- Karagiannakis G., Baccaglini-Frank A., e Roussos P. (2017). Detecting strengths and weaknesses in learning mathematics through a model classifying mathematical skills. *Australian Journal of Learning Difficulties*, 21(2), 115-141.
- Kilpatrick J (2009) The mathematics teacher and curriculum change. *PNA*, 3, pp.107–121
- Kilpatrick, J. (2014). Competency Frameworks in Mathematics Education. In S. Lerman (ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.85-87). Springer Dordrecht, Heidelberg, New York, London.
- Kulm, G. (1980). Research on mathematics attitude. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Leder, G. (1985). Measurement of attitude to mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 5 (3), 18-22.
- Lewis, K.E. (2017). Designing a bridging discourse: re-mediation of a mathematical learning disability. *J Learn Sci* 26(2), 320–365.
- Ma, X., & Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: a meta-analysis, *Journal for Research in Mathematics Education*, 30, 65-88.
- Maracci M. & Martignone F. (2017). Promuovere lo sviluppo di conoscenze e competenze in matematica. *L’Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol. 40 A-B, pp. 113-133.
- Marzano A. & Iannotta I.S. (2015) Authentic evaluation of competence. *The Online Journal of Quality in Higher Education*, 2(2), 9-16.
- Mazzocco, M. M. M., & Räsänen, P. (2013). Contributions of longitudinal studies to evolving definitions and knowledge of developmental dyscalculia. *Trends in Neuroscience and Education*, 2, 65–73.
- Mulder, M., Weigel, T. & Collins, K. (2006). The concept of competence in the development of vocational education and training in selected EU member states. A critical analysis. *Journal of Vocational Education and Training*, 59(1), 65-85.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of Niss Competencies and mathematical learning mathematics: the danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (eds.) *3° Mediterranean Conference on Mathematical Education*, 3-5 January 2003, pp. 115-124, Atene: Hellenic Mathematical Society.
- Niss, M. & Højgaard, T. (2011). Competencies and mathematical learning (English edition). *IMFUFA tekst*, Roskilde University
- Pellerey, M. (2004). *Le competenze individuali e il Portfolio*. Firenze: La Nuova Italia.
- Price, G. R., and Ansari, D. (2013). Dyscalculia: characteristics, causes, and treatments. *Numeracy* 6:2. doi: 10.5038/1936-4660.6.1.2.

Träff, U., Olsson, L., Östergren, R., & Skagerlund, K. (2017). Heterogeneity of Developmental Dyscalculia: Cases with Different Deficit Profiles. *Frontiers in Psychology*, 7, 115–16.

Weinert, F.E. (2001) Concept of competence: a conceptual clarification. In: D.S. Rychen & L.H. Salganik (eds.) *Defining and selecting key competencies*. Göttingen: Hogrefe.

Zan, R. (1999). La qualità della ricerca, articolo presentato alla *I Escola de Verao de Educação Matemática*, Santarem, Portugal. (http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/atas_EIEM_1999.pdf)